

La importancia del lenguaje en la resolución de problemas aritméticos de adición y sustracción

José Tomás Bethencourt Benítez

La resolución de problemas aritméticos constituye una parte importante del currículo de las matemáticas elementales y es de las que mayor dificultad comporta, tanto para el profesorado como para los escolares. El trabajo en la escuela con los problemas aritméticos conecta directamente con procesos de comprensión y de razonamiento (KRULIK y RUDNICK, 1993,94).

La investigación psicológica y educativa, durante años, ha venido estudiando las características sintácticas y semánticas de los problemas aritméticos con enunciados verbales, en tanto tareas matemáticas que han sido tradicionalmente trabajadas en la escuela primaria.

El estudio de las características semánticas se ha revelado más trascendental, dado que determina en gran medida las estrategias o proceso de resolución seguido por el niño.

Los distintos tipos de enunciados verbales de los problemas aritméticos representan a las diversas situaciones de la vida real, en las que los niños se pueden enfrentar con acciones matemáticas, como las aditivas y sustractivas, que en el presente caso nos ocupan.

Atendiendo a las relaciones semánticas subyacentes a los problemas, parece existir entre los investigadores un cierto consenso en diferenciar cuatro grandes tipos de problemas: *Cambio*, *Combinación*, *Comparación* e *Igualación*.

Reproduzco a continuación, por su posible utilidad para el profesorado de los últimos cursos de Educación Infantil, de primer ciclo de Primaria y de Educación Especial, la taxonomía de problemas aritméticos de adición y sustracción de RILEY, publicada en Riley, Greeno y Heller (1983). Los nombres de Rayco e Iruya que aparecen en la clasificación son nombres propios

canarios; el resto de la traducción guarda una estricta fidelidad a la versión original de Riley de 1981.

Cambio

Resultado desconocido

1. Rayco tenía 3 boliches. Después, Iruya le da 5 boliches más. ¿Cuántos boliches tiene ahora Rayco?

2. Rayco tenía 8 boliches. Después, él da 5 boliches a Iruya. ¿Cuántos boliches tiene ahora Rayco?

Cambio desconocido

3. Rayco tenía 3 boliches. Después, Iruya le da algunos boliches más. Ahora Rayco tiene 8 boliches. ¿Cuántos boliches dio Iruya a él?

4. Rayco tenía 8 boliches. Después, él da algunos boliches a Iruya. Ahora Rayco tiene 3 boliches. ¿Cuántos boliches dio él a Iruya?

Inicio desconocido

5. Rayco tenía algunos boliches. Después, Iruya le da 5 boliches más. Ahora Rayco tiene 8 boliches. ¿Cuántos boliches tenía Rayco al principio?

6. Rayco tenía algunos boliches. Después, él da 5 boliches a Iruya. Ahora Rayco tiene 3 boliches. ¿Cuántos boliches tenía Rayco al principio?

Igualación

1. Rayco tiene 3 boliches. Iruya tiene 8 boliches. ¿Cuántos boliches necesita Rayco para tener los mismos que Iruya?

2. Rayco tiene 8 boliches. Iruya tiene 3 boliches. ¿Cuántos boliches tiene que dar Rayco para tener los mismos que Iruya?

Combinación

Valor de combinación desconocido

1. Rayco tiene 3 boliches. Iruya tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches tienen ellos juntos?

Subconjunto desconocido

2. Rayco e Iruya tienen juntos 8 boliches. Rayco tiene 3 boliches. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

Comparación

Diferencia desconocida

1. Rayco tiene 8 boliches. Iruya tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches tiene Rayco más que Iruya?

2. Rayco tiene 8 boliches. Iruya tiene 5 boliches. ¿Cuántos boliches tiene Iruya menos que Rayco?

Elemento comparado desconocido

3. Rayco tiene 3 boliches. Iruya tiene 5 boliches más que Rayco. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

4. Rayco tiene 8 boliches. Iruya tiene 5 boliches menos que Rayco. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

Referente desconocido

5. Rayco tiene 8 boliches. El tiene 5 boliches más que Iruya. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

6. Rayco tiene 3 boliches. El tiene 5 boliches menos que Iruya. ¿Cuántos boliches tiene Iruya?

Veamos ahora detenidamente la naturaleza de cada uno de esos cuatro tipos de problemas:

Los *problemas de cambio* están referidos a situaciones dinámicas y se caracterizan por la presencia de una acción de transformación aplicada sobre una cantidad inicial, la cual experimenta un cambio (incremento o decremento) y resulta una cantidad final. Esquemáticamente, podríamos representar a estos problemas mediante (ICF), donde el estado inicial (I) es sometido a

cambio (C), resultando un estado final (F). El número, **6**, de subtipos de problemas de cambio que tenemos en la clasificación, corresponde al producto del número, **3**, de lugares en los que se puede encontrar la incógnita del problema (resultado desconocido (F), cambio desconocido (C) e inicio desconocido (I)) por el número, **2**, de posibles acciones de transformación (aumentar o disminuir).

Los *problemas de combinación* están referidos a situaciones estáticas en las que se proponen dos cantidades disjuntas que pueden considerarse aisladamente o como partes de un todo, sin que haya ningún tipo de acción transformadora sobre ellas. Es decir, unión de dos conjuntos disjuntos de elementos o partición de un conjunto en dos partes. El esquema de este tipo de problema sería $(E_1 E_2 E)$ significando que dos estados son combinados para resultar un tercer estado. Los dos subtipos de problemas que hallamos aquí, provienen del lugar en el cual se encuentre la incógnita, esto es, en el valor de la combinación (E) o en alguno de los subconjuntos $(E_1 E_2)$.

Los *problemas de comparación* también están referidos a situaciones estáticas en las que se establece una relación comparativa entre dos cantidades disjuntas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas, o bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas. El esquema de estos problemas sería $(E_1 R E_2)$, donde se plantea la relación comparativa entre dos estados. Los **6** subtipos de problemas de comparación obedecen, igualmente, al producto del número de lugares, **3**, en que puede encontrarse la incógnita (diferencia desconocida (R), comparado desconocido (E_1) o referente desconocido (E_2)) por el de tipos, **3**, de relación comparativa que se establezca («tantos más que» o «tantos menos que»).

He dejado para el final los *problemas de igualación* porque son una mezcla de los de cambio y comparación. En ellos, se plantean situaciones en las que hay una acción implícita de transformación que tiene que aplicarse a una de las dos cantidades disjuntas, similar a lo que ocurre en los problemas de cambio, de modo que al establecerse la relación comparativa entre esas dos cantidades, queden igualadas. Las dos variantes de problemas aquí existentes, responden al tipo de acción (aumentar o disminuir) que se tenga que efectuar sobre una de las cantidades para que quede igualada a la otra.

Además de esta clasificación de problemas aditivos y sustractivos de Riley, existen otras muchas, pero compartiendo un acuerdo esencial respecto a las características estructurales de los mismos. En una publica-

ción reciente de FUSON (1992) puede consultarse una interesantísima revisión actualizada sobre el particular. En castellano, también cuenta el lector con buenos trabajos de revisión, como los de BERMEJO (1990) y MAZA (1989), en los cuales se puede encontrar información más detallada.

La taxonomía de Riley que aquí he presentado permite al profesorado contar con 16 tipos diferentes de problemas aritméticos. La necesidad de introducir en el trabajo escolar una amplia variedad de tipos de problemas, ha sido propuesta por DE CORTE y VERSCHAFFEL (1989), pues de ese modo se podrá facilitar a los alumnos la construcción de nociones y conceptos ricos y amplios respecto a las operaciones de sumar y restar. Pongamos, como ejemplo ilustrador de lo que señalamos, las concepciones unitarias o binarias de la adición que están asociadas a los problemas de cambio o combinación.

Las distintas características semánticas de los problemas aritméticos de adición y sustracción, producen desiguales niveles de dificultad en los escolares a la hora de tratar de comprender y resolver tales problemas. En tal sentido, me permito también reproducir aquí los resultados de un valioso trabajo de RILEY (1981), en el cual se muestra la proporción de niños de diversos grados de escolaridad (K = preescolar, 5 años; 1º, 6 años; 2º, 7 años y 3º, 8 años) que son capaces de resolver correctamente los diferentes tipos de problemas. Los datos de Riley se obtuvieron aplicando individualmente los problemas a los alumnos, permitiéndoles el empleo de objetos físicos, como bloques, e incluyendo cantidades del orden de las unidades, es decir, no había en los problemas cantidades iguales o superiores a las decenas.

Proporción de escolares que resuelven correctamente usando objetos.

	K	1º	2º	3º
Cambio 1	0.87	1.00	1.00	1.00
Cambio 2	1.00	1.00	1.00	1.00
Cambio 3	0.61	0.56	1.00	1.00
Cambio 4	0.91	0.78	1.00	1.00
Cambio 5	0.09	0.28	0.80	0.95
Cambio 6	0.22	0.39	0.70	0.80
Combinación 1	1.00	1.00	1.00	1.00
Combinación 2	0.22	0.39	0.70	1.00
Comparación 1	0.17	0.28	0.85	1.00
Comparación 2	0.04	0.22	0.75	1.00
Comparación 3	0.13	0.17	0.80	1.00
Comparación 4	0.17	0.28	0.90	0.95
Comparación 5	0.17	0.11	0.65	0.75
Comparación 6	0.00	0.06	0.35	0.75

Muchos serían los comentarios que cada lector podría hacer a la luz de tales datos. Sirva como muestra alguno de los siguientes:

Los problemas de Cambio 1, Cambio 2 y Combinación 1 se manifiestan como el escalón más básico por el cual habría que iniciar el aprendizaje matemático. Los problemas de Cambio 5 y 6 son los más difíciles de todos los de cambio; tal es así, que aun en el tercer grado hay una cierta cantidad de alumnos incapaces de comprender y resolver los mismos. Los problemas de Comparación, en general son los más difíciles, por lo que habría que esperar hasta el segundo curso de Primaria para introducirlos, siendo el 5 y el 6 extremadamente complejos de resolver. A diferencia, los problemas de Igualación 1 y 2, tal como veremos a continuación, son más fáciles; pueden ser introducidos antes y actúan como antesala preparatoria para los de comparación.

El principal valor de los datos que Riley nos proporciona, está en permitir al profesorado hacer una programación secuenciada de trabajo en la escuela con tales problemas, que sea a su vez respetuosa con los índices de dificultad que ellos presentan para el alumnado, y de manera que haciendo un uso adecuado e inteligente de los mismos, se evite la introducción prematura de algunos. Mi experiencia de trabajo con profesores de Primaria, de Educación Especial, de Escuelas Unitarias y con los estudiantes de 5º del Practicum de Psicología Escolar de la Universidad de La Laguna, me indican que un primer paso para animar a trabajar en la escuela la resolución de problemas aritméticos de adición y sustracción, es el dar a conocer con detalle los tipos de problemas y la dificultad de los mismos.

Respecto a los problemas de Igualación, cabe citar los datos de CARPENTER, HIEBERT y MOSER (1981), quienes obtienen que tanto el 1 como el 2 son solucionados correctamente, mediante el uso de objetos, por el 91% de los escolares de primer grado.

Otras evidencias relacionadas con el papel desempeñado por el lenguaje en el proceso de resolución de problemas aritméticos son las siguientes:

Por un lado, el trabajo de DAVIS-DORSEY, ROSS y MORRISON (1991) en el que se demuestra el efecto beneficioso de la reformulación verbal de los enunciados de los problemas, pues hace más clara y explícita la relación que se establece entre las cantidades dadas, así como la ventaja de personalizar el contexto de

resolución, es decir, sustituir los nombres de los personajes que aparezcan en el enunciado del problema por el de los propios niños que se enfrentan a su resolución.

De otro lado, tenemos el estudio de MOYER, SOWDER, THREADGILL-SOWDER y MOYER (1984) en el que se demuestra la superioridad de un formato pictórico, frente al verbal y al telegráfico, a la hora de presentar los problemas aritméticos a escolares del grado 3º al 7º de bajo nivel lector.

Finalmente, cabe nombrar los trabajos de HEGARTY, MAYER y GREEN (1992) y de LEWIS y MAYER (1987), en los que se deja patente la dificultad mostrada por los escolares en la comprensión de las frases de relación, del estilo «más que» y «menos que», típicas de los problemas de comparación, tal como hemos visto.

La pequeña muestra de datos hasta aquí expuestos, confirman la creencia tan extendida entre el profesorado de Primaria, del peso específico que posee el lenguaje y los procesos de comprensión verbal en el aprendizaje de las matemáticas.

El análisis de las características semánticas de los problemas aritméticos de adición y sustracción, y de la dificultad asociada a las mismas, debe hacerse conjuntamente con los tipos de estrategias de resolución utilizada por los escolares. El presente artículo, dadas las limitaciones lógicas de espacio y la motivación por la que ha nacido, no puede detenerse en dicho aspecto, pero valgan como pinceladas las siguientes ideas:

La investigación viene demostrando que para ciertos tipos de problemas aritméticos, los niños emplean determinadas estrategias de resolución y no otras, es decir, parece existir una cierta correspondencia entre estructura semántica del problema y estrategia de resolución empleada por el sujeto. Ello hace que las estrategias no tengan un valor universal para todos los problemas, sino muy al contrario, una utilidad particular, aunque bien es verdad que esto no impide que en algunos casos de sujetos se observe una especie de sobregeneralización en el empleo de ciertas estrategias.

Por otro lado, el conocimiento hasta ahora acumulado con los sucesivos estudios sobre proceso de resolución seguido por los niños, apunta hacia la existencia de tres grandes grupos de estrategias, las cuales van apareciendo a lo largo del desarrollo. Prime-

ramente, nos encontramos con las *estrategias materiales o de modelado*, así llamadas por consistir en el uso de objetos físicos para representar a las cantidades dadas en el problema: mediante la manipulación de los objetos el niño llega a la solución del problema. En segundo lugar, están las *estrategias verbales o de conteo*, basadas en la verbalización manifiesta o encubierta de la secuencia numérica en orden creciente o decreciente, ayudándose para ello el niño del uso de sus dedos, que actúan a modo de una memoria externa de trabajo. Por último, aparecen las *estrategias mentales o de memorización*, que se caracterizan por el recuerdo directo de ciertas combinaciones entre números o por el recuerdo derivado, es decir, la utilización de reglas de derivación que se aplican sobre combinaciones numéricas ya conocidas, para llegar de ese modo a la solución correcta.

Quiero terminar este artículo, expresando el deseo de que su lectura, pueda despertar la curiosidad entre el profesorado indeciso o temeroso de trabajar con profundidad esta parcela tan compleja e importante de las matemáticas escolares.

Bibliografía

- * BERMEJO, V. (1990): **El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas.** Barcelona. Paidós.
- * CARPENTER, T. P., HIEBERT, J. Y MOSER, J. M. (1981): **Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems.** Journal for Research in Mathematics Education, 12, 27-39.
- * DAVIS-DORSEY, J., ROSS, S. M. Y MORRISON, G. R. (1991): **The role of rewording and context personalitation in the solving mathematical word problems.** Journal of Educational Psychology, 83 (1), 61- 68.
- * DE CORTE, E. Y VERSCHAFFEL, L. (1989): **Teaching word problems in the primary school: What research has to say to the teacher.** En B. Greery G. Mulhern (Eds.): New directions in mathematics education. London: Routledge; pp. 85-106.
- * FUSON, K. C. (1992): **Research on whole number addition and subtraction.** En D. A. Grouws (Ed.): Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan; pp. 243-275.
- * HEGARTY, M., MAYER, R. E. Y GREEN, C. E. (1992): **Comprehension of arithmetic word problems: Evidence**

from students' eye fixations. *Journal of Educational Psychology*, 84 (1), 76-84.

* KRULIK, S. Y RUDNICK, J. A. (1993): **Reasoning and problem solving: An handbook for elementary school teachers**. Needman Heights, Mass.: Allyn & Bacon.

* KRULIK, S. Y RUDNICK, J. A. (1994): **Reflect for better problem solving and reasoning**. *Arithmetic Teacher*, 41 (6), 334-338.

* LEWIS, A. B. Y MAYER, R. E. (1987): **Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems**. *Journal of Educational Psychology*, 79 (4), 363-371.

* MAZA GÓMEZ, C. (1989): **Sumar y restar. El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta**. Madrid. Aprendizaje Visor.

* MOYER, J. C., SOWDER, L., THREADGILL-SOWDER, J. Y MOYER, M. B. (1984): **Story problem formats: Drawn versus verbal versus telegraphic**. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (5), 342-351.

* RILEY, M. S. (1981): **Conceptual and procedural knowledge in development**. Unpublished Master's thesis University of Pittsburg.

* RILEY, M. S., GREENO, J. G. Y HELLER, J. I. (1983): **Development of children's problem-solving ability in arithmetic**. En H.P. Ginsburg: *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

José Tomás Bethencourt Benítez
Facultad de Psicología
Univ. de La Laguna.

