La Geometría como Matemática aplicada en su evolución histórica: de Euclides a Mandelbrot

María Begoña del Hoyo

En la presente contribución intentamos evidenciar cómo la Geometría a lo largo de toda su historia ha desempeñado un papel fundamental interactivo con la ciencia natural, en particular con la Física, y más en concreto aún con la Mecánica. En la primera parte esbozamos nuestra visión de esta íntima interrelación desde el alba de la Geometría en China, Mesopotamia y Egipto hasta nuestros días. En la segunda damos una breve descripción de la nueva Geometría Fractal, haciendo énfasis en su emergencia como consecuencia de la necesidad de representar los objetos reales con una mejor aproximación que la que suministran las formas suaves de la geometría euclidiana o diferencial.

Introducción

De entre todas las ramas de las Matemáticas, quizá la Geometría sea la que más dramáticamente puede ilustrar la íntima y misteriosa relación entre matemática y naturaleza. Esto se debe en gran parte a las connotaciones plásticas y sensoriales que la Geometría suele tener. El propósito de este artículo es poner de manifiesto cómo la ciencia geométrica, desde su nacimiento en los albores de nuestra civilización, ha ido evolucionando determinando el modelo de las ciencias físicas -comenzando por la Mecánica- sirviendo, a la vez, como una poderosa herramienta para el estudio de éstas, y enriqueciendo su acervo por las demandas que una percepción más profunda de los fenómenos y formas físicas ha venido ejerciendo sobre ella. Veremos que el origen de la Geometría necesariamente tuvo que ser precursor del nacimiento de la Mecánica, cómo se desarrollaron paralelamente, fecundándose mutuamente, estas dos ciencias, hasta llegar a las modernas y abstractas concepciones de la teoría geométrica de la gravitación -la teoría de la relatividad general- y las teorías geométricas de las restantes fuerzas de la naturaleza que constituyen lo que hoy se conoce con el nombre de modelo estándar -teoría electrodébil y cromodinámica cuántica. Por supuesto que no pretendemos entrar en el detalle de estas sofisticadas elaboraciones, lo que, por otra parte, estaría fuera de lugar aquí. Sólo intentamos, sucinta y parcialmente, esbozar una interrelación entre Geometría y ciencia natural (en particular ciencia física), profundamente significativa y de un valor cultural y educativo indudable. Finalizamos refiriéndonos a la nueva geometría de la naturaleza descubierta en esta época de los ordenadores por Benoît Mandelbrot: la geometría fractal.

Geometría y mecánica a lo largo de la historia

No es de extrañar que la Mecánica sea la «Ciencia Madre» de la Física pues el objeto de su estudio lo constituye el fenómeno más elemental y común que el hombre observa en el mundo: el movimiento. En el mundo existen cosas, y relaciones entre estas cosas que son percibidas, a veces inalteradas y a veces cambiantes, por el ser humano. Es cuando la conciencia humana alcanza su madurez reflexiva y observa inquisitivamente el movimiento cuando se dan las condiciones para el nacimiento de la Mecánica como ciencia.

Como ocurre con los orígenes de todo es difícil precisar y conocer los orígenes de la Mecánica. La toma de conciencia crítica del movimiento debió incubarse durante un largo período, y también durante generaciones, probablemente en diversos lugares de la Tierra, se comenzaron a plantear los primeros interrogantes y a producirse las primeras respuestas. Todo esto, muy diluído y muy difuso, se habría de perder para la historia. Desde un punto de vista restrictivo con respecto a la naturaleza de la Mecánica podemos decir que los primeros datos históricos de que disponemos al respecto se remontan a la China de la «época de los reinos guerreros» (del siglo VIII al III antes de J.C.). Las guerras y perturbaciones sociales de ese tiempo harían aparecer Escuelas políticas de sabios y científicos que buscarían una solución de buen gobierno y paz universal. Una de las mas importantes desde el punto de vista que nos concierne sería la de Mo Ti, que creía posible la paz universal a través de una activa propaganda en favor del amor interpersonal y una organización militar al servicio de la seguridad colectiva. En los mismos fragmentos de los sermones de Mo Ti (siglo V antes de J.C.) donde se hallan las primeras huellas de una geometría en la antigua China encontramos, como era de esperar, los primeros elementos de mecánica. Ya hay una definición de «duración», *kien;* del «instante sin duración», *che*; de la «fuerza», *li*, que es lo que hace mover; de los «sólidos», *hing*, etc . (1).

Pero Mo Ti no ejercería ningún efecto sobre la ciencia que terminaría siendo predominantemente un producto de la cultura occidental. Por eso, generalmente las diversas historias de la Mecánica suelen comenzar en la antigua civilización griega, de cuya lengua tomaría su nombre, con Aristóteles y más fundamentalmente con Arquímedes. Pero el objeto de esta contribución no es la historia de la Mecánica o de algún aspecto concreto de ella; más bien pretende elucidar la naturaleza de la conexión entre Mecánica y Geometría a través de la cambiante situación histórica de estas dos disciplinas. Aquí queremos resaltar que si la Mecánica es la ciencia del movimiento también lo es del reposo que es un caso límite del movimiento, a la vez que su negación. Y la descripción de las cosas en reposo, por lo que a sus formas e interrelaciones espaciales se refiere, es la geometría del mundo físico. Por ello una actitud menos restrictiva sobre la naturaleza de la Mecánica nos fuerza a hacer retroceder el nacimiento de la Mecánica hasta el de la Geometría.

La Geometría, en un principio, fue pues mecánica. Los testimonios históricos más lejanos indican que, a lo más temprano, en el año 4.241 a. de C. y, en todo caso, no más tarde que el 2.781 a. de C. en Egipto los conceptos de número y forma se hallaban mucho más desarrollados que lo que permitiría el estadio primitivo de la cultura. Lo mismo ocurría para Mesopotamia hacia el 5.700 a. de C. Tanto la necesidad de un calendario, con las observaciones astronómicas que ello implica, para las civilizaciones agrícolas de estos pueblos, como el hecho de que babilonios y egipcios eran constructores infatigables y primitivos ingenieros de sistemas de irrigación, estímulo el cálculo empírico. En esta edad -edad del empiricismo- la Geometría fue una ciencia experimental.

Los babilonios de alrededor del año 2.000 a. de C. conocían, como hechos de la experiencia, teoremas de pura geometría tan fundamentales como que el ángulo inscrito en un semicírculo es recto, el teorema de Pitágoras, al menos para ciertos casos particulares de triángulos rectángulos, y el que los lados de ángulos correspondientes en triángulos semejantes son proporcionales (2). Los antiguos egipcios parecen haber sabido que el área de un triángulo se obtiene multiplicando un medio de la base por la altura; pero el resultado mas importante en la geometría pregriega del que ellos dispusieron parece haber sido descubierto -o imaginado- por el anónimo egipcio que dio un ejemplo numérico de la fórmula correcta, $(1/3)h(a^2+ab+b^2)$ para el volumen de una pirámide cuadrada truncada de altura h, y lados a y b para sus dos bases. Esto ocurría alrededor del 1.850 a. de C. Ni babilonios ni egipcios probaron sus resultados. Estos eran para ellos producto de sus observaciones del mundo físico, constituían la «geometría física», el germen de la Mecánica.

Las características de unidad y generalidad como valores deseables y logrados que caracterizan al pensamiento científico en contraposición a la mentalidad que se satisface con una colección de hechos, el razonamiento deductivo, a partir de un conjunto de hechos o postulados, y la prueba tendrían que esperar hasta la Grecia del siglo VI a. de C. con Tales y la escuela Pitagórica.

Además del espacio, a la idea del movimiento físico se encuentran indisolublemente asociadas las nociones de tiempo y materia -o más modernamente- energía. El espacio y el tiempo son las formas de existencia del mundo real, y la materia-energía su sustancia. Descartes definió como objetivo de las ciencias exactas la descripción de todo devenir físico en términos de estos tres conceptos fundamentales, y por tanto, al menos en gran parte, con referencia al movimiento, mecanicísticamente (3). Los griegos elevaron a la categoría de ciencia la descripción mecánica del mundo físico en reposo. Eso fue la geometría euclidiana. El nacimiento de la Geometría como ciencia física determinó que tuviera que ser precisamente euclidiana puesto que el mundo físico tridimensional, el objeto de su estudio en sus comienzos, es a primera vista empíricamente euclidiano. El concepto de tiempo está tan estrechamente ligado al de movimiento que cualquier definición operacional que se dé de él implica algún tipo de movimiento.

La conexión íntima entre la Geometría y la Mecánica no se limita a sus orígenes. La historia entera de la Mecánica ilumina constantemente una relacion con la Geometría, algunos de cuyos más profundos aspectos sólo empezaron a ponerse de manifiesto cuando Einstein publicó en 1916 los fundamentos de la teoría de la relatividad general.

Con Arquímedes, generalmente considerado el fundador de la Mecánica como ciencia, la «Premecánica» que fue sólo geometría euclidiana dejó paso a la Estática. Dejando aparte las explicaciones apriorísticas del movimiento de Aristóteles, por primera vez registra la historia un interés en las condiciones que posibilitan el reposo. Y esto, con contraste experimental a pesar de la tradición antiexperimentalista de los griegos. Arquímedes formuló su Estática siguiendo el modelo de la Geometría de Euclides; comenzando por sentar unos postulados de los cuales deducir proposiciones. Además de esta influencia estilística, Arquímedes usó la Geometría como ciencia auxiliar en su razonar mecánico. De paso es curioso notar que Arquímedes utilizara también en una ocasión la Mecánica como ayuda para resolver el problema geométrico de la obtención del área de un segmento parabólico (2).

La Geometría siempre jugó con creciente sofisticación desde entonces esos dos papeles en la ciencia que ya la había trascendido. Fue el prestigio de la Geometría como ideal de ciencia exacta lo que determino la estructuración al modo geométrico -definiciones, postulados o leyes, y demostración de proposiciones- de la obra magna, de Newton «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» (1687), obra en la que además se ilustran las demostraciones de tal modo con la geometría griega que puede considerarse como un monumento a la geometría sintética.

A finales del siglo XVIII Lagrange con su «Méchanique Analytique» (1788), creyó haber logrado la emancipación de la Mecánica de su servidumbre hacia la Geometría. Lagrange escribía en el prefacio: «... En esta obra no se encontrarán diagramas. Los métodos que expongo no requieren ni construcciones ni razonamientos mecánicos o geométricos, sino solamente operaciones algebraicas (analíticas) sujetas a un procedimiento uniforme y regular». Pero la misma Geometría habría de evolucionar para hacer ver que la tutela de la que Lagrange había liberado a la Mecánica era aquella de la geometría sintética de los griegos para hacerla depender en vez de la geometría diferencial. La lagrangiana de un sistema mecánico en efecto es una función sobre el fibrado tangente de la variedad diferenciable que es el espacio de configuración del sistema.

La formulación hamiltoniana de la Mecánica supone un paso adelante en la formalización y geometrización de la Mecánica en un cierto sentido. El punto de vista moderno considera la mecánica hamiltoniana como una geometría en el espacio de las fases. Este espacio posee una estructura de variedad simpléctica. En este contexto un sistema mecánico hamiltoniano se define por una variedad de dimensión par (el espacio de las fases), una estructura simpléctica sobre esta variedad (la integral invariante universal de Poincaré), y una función sobre la variedad (la función de Hamilton). La formulación de Lagrange es menos general que la de Hamilton ya que el grupo de transformaciones de la última es el de las transformaciones canónicas que contiene como subgrupo el de las transformaciones puntuales. (El espacio de las fases es el fibrado cotangente del espacio de configuración, y la función de Hamilton, la transformada de Legendre del lagrangiano). Aunque Hamilton introdujo sus ecuaciones en 1834, la interpretación geométrica de la formulación hamiltoniana no se haría hasta el presente siglo a raíz de los trabajos de Cartan (4). La primera exposición moderna de la teoría de los sistemas hamiltonianos sobre variedades simplécticas probablemente es la debida a Reeb en 1952 (5).

De hecho muchas de las ideas abstractas de la Geometría pura han tenido su origen en el estudio de la mecánica; así por ejemplo el concepto de fibrado cotangente de una variedad diferenciable apareció por primera vez como el espacio de las fases de la mecánica hamiltoniana. En otro orden de cosas hemos visto cómo la Geometría nació como ciencia empírica; más tarde Euclides había mostrado en sus «Elementos» cómo aquella geometría podía deducirse a partir de un número de postulados. Durante dos milenios la geometría euclidiana se tomó sin ninguna duda como la geometría del mundo físico. Durante estos dos milenios se esforzaron inútilmente los geómetras en simplificar el sistema de postulados de Euclides deduciendo el quinto postulado de los restantes. En 1733 el jesuita Geralamo Saccheri intentó un nuevo procedimiento de prueba tratando de construir una geometría sin el quinto postulado con la esperanza de llegar a contradicción (6).

Parece que fue Carl Friedrich Gauss quien primero tuvo el coraje de aceptar que fuera lógicamente posible una geometría no euclidiana. Aunque esto ya suponía la emancipación de la Geometría de su relación con el mundo físico, se dice que Gauss incluso pensó en la posibilidad de que el espacio físico no fuera euclidiano y comprobó con resultado afirmativo, dentro de su precisión experimental, si la suma de los ángulos del triángulo formado en Alemania por los tres puntos de Brocken, Hoher Hagen e Inselberg era o no 180°. El desarrollo de la primera geometría no euclidiana se debe a los tres contemporáneos Gauss, Bólyai y Lobachevski. En 1870 Felix Klein demostró la consistencia interna de esta nueva geometría, probando en consecuencia la independencia del quinto postulado de Euclides.

El espacio de la geometría de Gauss, Bólyai y Lobachevski era un espacio bidimensional de curvatura constante. La generalización y extensión a espacios de más dimensiones, no una cuestión trivial, la resolvió en 1854 Georg Friedrich Bernhard Riemann, que presentó lo que hoy llamamos geometría Riemanniana en su lección inaugural de Gotinga «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen». El subsiguiente trabajo de Christoffel, Ricci, Levi-Civita, Beltrami y otros desarrolló las ideas de Riemann para dar lugar a la bella estructura matemática que Einstein utilizaría para proponer un sustituto más sofisticado a la teoría de la gravitación de Newton.

Es curioso que el mismo Riemann, al final de su vida, intentara sin éxito relacionar la gravitación con el concepto de curvatura en la nueva geometría. Sin embargo Riemann sólo consideró para su propósito el espacio y la curvatura del espacio, y no el espacio-tiempo y la curvatura del espacio-tiempo (7).

Con la teoría de la relatividad general, una parte de la Mecánica, la teoría de la gravitación, volvió a ser más una geometría que nunca lo había sido cualquier parte de ella desde el momento en que con Arquímedes esta ciencia dejó de ser una pura geometría estática del espacio físico tridimensional. Pero ahora en un sentido más profundo y completo que en la época preArquimediana, pues por una parte en este caso se trata de la geometría del espacio- tiempo, del que el espacio físico tridimensional es una sección, y por otra, siendo la teoría de la gravitación de Einstein un marco en el que el comportamiento de la materia es afectado por la geometría del espacio-tiempo y, a la vez ésta depende de la localización de la materia, lo que tenemos es una geometrodinámica.

El éxito que alcanzó la geometrización de la gravitación indujo a los teóricos a intentar construir un marco geométrico que unificara las dos teorías de campo principales del momento: la de Einstein del campo gravitatorio y la de Maxwell del campo electromagnético. Weyl construyó en 1918 la primera geometría no Riemanniana en un esfuerzo para producir la buscada teoría unificada (8). Varios intentos posteriores en la misma línea por Einstein, Kaluza (1919), Klein y Mandel (1926) tampoco se tradujeron en resultados satisfactorios. La idea básica consistía en enriquecer la geometría del espacio substrato de los fenómenos físicos dotándolo no sólo de curvatura (que representa la gravitación), sino también de torsión (que representaría el electromagnetismo), o bien introduciendo una quinta dimensión para los fenómenos electromagnéticos.

La artificialidad de estas teorías dio lugar a que se abandonase este tipo de aproximación al problema de la unificación geometrizada de las fuerzas de la naturaleza. Fueron otros derroteros iniciados con la teoría de campos «gauge» de Yang-Mills (1954) (9) los que habrían de conducir a esquemas geométricos unificadores de las fuerzas electromagnéticas y aquellas otras de la microfísica que se descubrieron en el siglo XX. Aunque los pioneros Yang y Mills no fueron conscientes de ello, después se vería que su construcción teórica podía interpretarse geométricamente a la luz de la generalización de las geometrías de Riemann sobre fibrados que supuso hacia 1950 el establecimiento de la teoría de conexiones afines sobre estas estructuras. En este marco los campos gauge determinan la conexión sobre el fibrado: las fibras corresponden a los atributos internos (cargas) de las partículas elementales. Los campos gauge, como el campo electromagnético, están directamente relacionados con las propiedades geométricas de las fibras o espacios internos, no con el espacio-tiempo, como pensaban Weyl, Einstein y otros alrededor de los años veinte en sus vanos intentos para unificar el campo electromagnético y el gravitatorio.

El esquema construido por Yang y Mills en 1954 fue el modelo antecedente para la teoría de la interacción electrodébil de Weinberg (1967) y Salam (1968). Dicha teoría unificó efectivamente la fuerza electromagnética y la débil (responsable de la desintegración beta de los neutrones en los núcleos atómicos) con tal éxito que, al verificarse experimentalmente la existencia de las partículas asociadas a los campos gauge que ella predecía, se les otorgó a sus autores el premio Nobel de física. Hacia el mismo tiempo, siguiendo también el modelo gauge de Yang y Mills se construyó la teoría gauge de las fuerzas nucleares o de las interacciones fuertes, hoy en día conocida como «cromodinámica cuántica». Finalmente, las fuerzas electrodébiles y las nucleares se unificaron en un único esquema geométrico gauge: la llamada Teoría de la Gran Unificación. Hay que mencionar, sin embargo, que las predicciones experimentales de esta teoría, así como las de una de sus componentes -la cromodinámica cuántica- aún no han podido ser confirmados por la observación, lo cual pudiera ser debido a la enorme dificultad y altísimas energías que se necesitan para realizar los experimentos necesarios. No obstante, son muchos los que están convencidos de que en lo esencial la Teoría de la Gran Unificación es una geometrización unificadora correcta de tres de las fuerzas básicas de la naturaleza. La situación presente es paradójica, pues la cuarta fuerza básica, la gravitación, que fue la primera que se geometrizó en 1916 con la bella construcción de la Teoría de la Relatividad General, queda aparte habiéndose resistido hasta ahora a incorporarse a un esquema unitario con las otras tres fuerzas fundamentales que forman y mueven el universo.

Geometría fractal

Para finalizar vamos a mencionar brevemente cómo, observando más cuidadosamente las formas que se presentan en la naturaleza, ha emergido una geometría, distinta de la euclidiana en un sentido muy diferente de aquél en que lo son las geometrías riemannianas, pero más apta para describir con mejor aproximación las formas reales de los objetos naturales. Nos referimos a la que ha convenido en llamarse «geometría fractal» a propuesta de Benoît Mandelbrot que, en su libro de 1975 «Les objects fractales. Forme, hasard et dimension», además de acuñar el término, hizo notar la utilidad de los objetos fractales para describir hechos naturales muy diversos. En palabras del propio Mandelbrot «...las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son arcos de circunferencia, la corteza de los árboles no es suave, ni el rayo describe una línea recta». Estas formas naturales y muchas otras, como las que corresponden a los cráteres de la luna, la distribución de galaxias en el universo, o a los fenómenos de turbulencia, mejor que por las figuras familiares de la geometría euclidiana se representan más exactamente mediante fractales.

La historia de las fractales comenzó en el periodo que va de 1875 a 1925 cuando se fueron encontrando ejemplos de objetos geométricos que no entraban en el marco de la geometría diferencial y que presentaban propiedades sorprendentes: curvas que rellenaban el plano, regiones de este último con área finita pero perímetro infinitamente largo, curvas que no tenían tangente en ningún punto, etc. Aunque matemáticos ilustres (Cantor, Peano, Weiertrass y Hausdorff, entre otros) estudiaron estos objetos, fueron considerados en general como curiosidades sólo útiles a la hora de exhibir contraejemplos que pusieran de manifiesto los riesgos de la intuición y la necesidad del rigor en geometría. Hubo incluso quien las tachó de «curvas monstruosas o curvas patológicas».

Veamos un ejemplo de curva fractal debido a Helge Von Koch (1904). Se parte de un segmento que se divide en tres partes iguales. La parte central es sustituida por otros dos segmentos iguales formando ángulos de 60° con el tercio de segmento que se sustituye, y del mismo lado de éste. Se aplica la misma transformación a cada uno de los cuatro segmentos iguales que forman la curva quebrada que se obtiene tras el primer paso. La curva fractal de Von Koch es la curva límite que se obtendría repitiendo este proceso «ad infinitum».

Es fácil comprobar varias propiedades de esta curva que son comunes a muchas fractales. En primer lugar, en cada transformación aplicada a un segmento la longitud de éste se multiplica por $4/3$. Por tanto, la curva límite tendrá una longitud infinita. Por otro lado, el número de vértices en la curva, en los que no hay una única tangente, crece indefinidamente. En consecuencia la curva de Von Koch no va a tener tangente en ningún punto y no va a poder ser analizada por medio de la geometría diferencial. En tercer lugar, cada segmento obtenido en cualquier etapa del proceso infinito arriba descrito experimenta eventualmente el mismo destino y será en el límite completamente idéntico a la curva total excepto por la escala y orientación. Se dice que la curva es «autosimilar», porque cada trozo de la misma es equivalente a cualquier otro salvo transformaciones elementales. Esta «invariancia de escala» es en este caso exacta, mientras que en otros fractales (particularmente en los que se encuentran en la naturaleza) es sólo aproximada.

Otra interesante propiedad de este objeto está relacionada con su dimensión. En un cierto sentido sigue teniendo dimensión 1, como cualquier curva «normal». En efecto, basta retirar un punto de la curva para dividirla en dos partes disconexas. Se dice que la dimensión «topológica» de la curva es 1. Existen, sin embargo, distintas definiciones matemáticas de dimensión. Cada una tiene interés por distintas razones, pero algunas son más apropiadas que otras para dar una estimación numérica de la complejidad del objeto estudiado. Aquí no podemos entrar en detalles, pero bástenos mencionar que la definición de dimensión apropiada para los fractales es la que se conoce con el nombre de dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Para las formas no fractales propias de la geometría euclidiana esta dimensión siempre coincide con la dimensión topológica, mientras que para los objetos fractales es mayor que esta última. Esta propiedad se toma como característica esencial que define un fractal. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch es un número no entero para los fractales, de ahí el nombre de fractal. En el caso de la curva de Von Koch la dimensión es $\log 4/\log 3 \cong 2.618$. Para una mayor información sobre esta cuestión y la geometría fractal se pueden consultar las referencias 9 y 10 de la Bibliografía. El copo de nieve o isla de Von Koch está formado por tres curvas de Von Koch construidas sobre los tres lados de un triángulo equilátero. La apariencia de la figura resultante es la de un copo de nieve, y siendo infinito el perímetro de la curva límite resultante, el área que encierra es finita.

Con la ayuda de ordenadores se pueden construir muchas otros fractales, no sólo de dimensión fractal comprendida entre 1 y 2 sino también de dimensiones entre 2 y 3. Entre estos últimos están aquellos que simulan con gran realismo panoramas terrestres o de un planeta imaginario. Tales paisajes resultan más y más accidentados a medida que es mayor la dimensión fractal. Por supuesto en estos casos la «autosimilitud» no es exacta, como lo es en el caso de la curva de Von Koch, sino estadística, en sentidos perfectamente definidos.

Consideración final

Hemos visto más arriba como la Geometría, desde sus orígenes hasta el presente, ha mostrado una íntima y rica conexión con la descripción y el estudio de las formas y fenómenos naturales. Al mismo tiempo, hemos tratado de poner de manifiesto como también la concepción científica de los fenómenos y formas físicas determinó el nacimiento de la Geometría como preMecánica, originó la aparición de la Geometría Fractal, y ha tenido en muchas ocasiones un profundo efecto sobre el modo de evolucionar de la Geometría.

Este proceso histórico dialéctico aún no ha terminado. Las estructuras geométricas de las teorías físicas más abstractas y actuales y el reciente descubrimiento de la Geometría Fractal así lo indican. La historia de la honda y dinámica relación entre Geometría y Naturaleza, con toda seguridad, se prolongará en el futuro, volviendo a deparar a los seres humanos sorpresas, asombro reverencial y belleza. Es esta insondable relación y este convencimiento lo que hemos tratado de transmitir modestamente en esta contribución.

Bibliografía

1. R. TATON, **Historia General de las Ciencias**, Vol. I, Ediciones Destino, Barcelona, 1971.

2. E. T. BELL, **The Development of Mathematics**, McGraw-Hill, New York, 1945.

3. H. WEYL, **Space-Time-Matter**, Dover Publications, 1950.

4. E. CARTAN, **Lecons sur les invariants intégraux**, Hermann, Paris, 1922.

5. G. REEB, **Variétés symplectiques, variétés presque-complexes et systémes dynamiques**, C. R. Acad. Sci., Paris, 235, 776-778, 152.

6. G. SARTON, **Ancient Science and Modern Civilization**, University of Nebraska Press, 1954; reimpresión por Harper and Brothers, New York, 1959, p. 26.

7. C. W. MISNER, K. S. THORNE Y J. A. WHEELER, **Gravitation**, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

8. H. WEYL, **Gravitation and Electricity**, en **The Principle of Relativity**, Dover Publications, 199-216, 1923.

9. C. M. YANG Y R. L. MILLS, **Phys. Rev.** 96, 191, 1954.

10. J. M. AGUIRREGABIRIA, **Los Fractales**, en **Anexo a la Enciclopedia Durvan**, Durvan S. A., Bilbao, en prensa.

11. B. B. MANDELBROT, **The Fractal Geometry of Nature**, W. H. Freeman and Company, New York, 1983.

María Begoña del Hoyo
Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Minera
Universidad del País Vasco
Baracaldo, Vizcaya