Algoritmos y azar con la Hoja de Cálculo

Salvador Sánchez Majadas

« ¿Presenta el microordenador modos fundamentalmente nuevos de experiencia matemática? »

Esta es la cuestión que S. PAPERT plantea como respuesta a la carta que DAVID WHEELER escribe a varios colegas del campo de la educación matemática de varios paises, invitándole a participar en un pequeño ejercicio («For the Learning of Mathematics», 1984). Consistía el ejercicio en formular cierto nº de *problemas* cuya solución conduciría probablemente a un avance substancial en nuestro conocimiento matemático. Recuerda en la carta que puede ser constructivo seguir el ejemplo de HILBERT cuando, en su conferencia de 1900, anunció los famosos 23 problemas.

Aunque en algunos aspectos S. PAPERT haya dado su propia respuesta a través del LOGO, la utilización de programas de Hoja de cálculo tan sencillos como WORKS 2.0, abre el camino para ser utilizados cada vez más dentro del currículo.

Introducción

El PROYECTO ATENEA español a través del **Informe de evaluación** de la OCDE, en el apartado **4. El Proyecto aún tiene que centrar la atención en cuestiones de aprendizaje**, aporta una información que me parece esclarecedora para la fase de generalización en la que estamos inmersos:

«Resta por explorar definitamente hasta qué punto pueden ofrecer los ordenadores nuevas técnicas de activación y nuevas vías para formalizar el aprendizaje. Las pruebas aportadas por otros países muestran que, en proyectos análogos a Atenea, la insistencia en los procesos de aprendizaje se produce en una segunda fase o más tardíamente». (p. 45)

Con la ESO adelantada por algunos centros ya no es nada nuevo asegurar que un alumno no sólo aprende cuando domina los contenidos académicos, sino que también aprende cuando mejora en sus procesos y desarrollo de las tareas habituales, cuando modifica las estrategias que utiliza para resolver situaciones escolares o extrescolares, cuando cambia sus actitudes hacia determinadas materias como la matemática (DE LA TORRE, S.).

Historia

Rememorando algo de historia sobre la introducción de las calculadoras en las aulas, éstas se utilizan en el Reino Unido desde 1975; el informe COCKROFT, encargado por el gobierno y realizado en 1982, dio respaldo al uso de calculadoras en las escuelas, y expresaba ciertas reservas acerca de la cantidad de cálculos con lápiz y papel que sería necesario ahora; especialmente para alumnos de nivel bajo (S. FIELKER, D.).

Antes de esto MICHAEL GIRLING (1977) escribió lo siguiente sobre el uso de las calculadoras y algoritmos escritos:

No voy a sugerir que los algoritmos de lápiz y papel no deberían enseñarse, pero solamente debería hacerse como parte del arsenal que tenemos para ayudar al entendimiento de los números y no porque sean útiles.

Un posterior informe de inspectores del gobierno en 1982 apoyaba estas ideas, y llegó a decir que solamente necesitan hacerse sobre el papel los cálculos básicos y simples. Incluso que algunos métodos estandar de cálculo, tales como las divisiones largas, en las que muchos alumnos encuentran dificultad y muy pocos entienden realmente, no deberían seguir haciéndose.

En esta línea se manifiesta HILLARY SHUARD en 1986, Director del proyecto de «Iniciativas en Educación Matemática», diciendo:

Es dudoso hasta qué punto esas técnicas (aritmética de lápiz y papel) deben retenerse, ya que no son muy utilizadas fuera de la escuela. En la vida real, los adultos normalmente hacen los cálculos mentales si los números son pequeños, o utilizan calculadoras para cálculos más complicados.

En el libro de Matemáticas de la SECUNDARIA OBLIGATORIA cuando, en la Introducción, se analizan los contenidos y procedimientos en las matemáticas, termina el párrafo con una consideración hacia los medios tecnológicos:

La misma introducción y aplicación de nuevos medios tecnológicos en matemáticas obliga a un planteamiento diferente, tanto en los contenidos como en la forma de enseñanza. (p. 13)

Características de una Hoja de Cálculo

El informe COCKCROFT, anteriormente aludido, incluyó entre sus recomendaciones como focos del aprendizaje de la matemática la «resolución de problemas» y el «trabajo de investigación».

El libro Matemáticas de SECUNDARIA OBLIGATORIA en el apartado dedicado a las Calculadoras, dentro de **Orientaciones sobre contenidos específicos**, hace una referencia explícita a la herramienta motivo de este artículo:

El ***Ordenador*** *permite, principalmente a través de las hojas de cálculo, manejar cualquier cantidad de números, organizarlos de muchas maneras en tablas, diagramas o gráficos sobre los que se pueden observar e investigar propiedades y relaciones.* (p. 123)

Las Hojas de cálculo, además de favorecer los aspectos antes indicados, cuentan con características generales como las siguientes:

- Permiten la interacción entre el medio y el alumno
- Cálculo automático o no al variar los datos
- Posibilidad de gráficos asociados a los datos

Por último, como características técnicas a resaltar de la Hoja de cálculo de WORKS 2.0 se pueden señalar:

- Es un programa abierto y fácil de programar (57 funciones)
- Tiene 4096 filas y 256 columnas (1.048.576 celdas)
- Permite proteger los datos contra borrado (Menú Formato)
- Posibilidad de utilizar colores, en modo Texto
- Posee macros o macroinstrucciones (ALT y K)

Algoritmos

JESÚS M. GOÑI (nº 3 **Aula**) después de indicar que no solamente existen los algoritmos «aritméticos» en la Matemática, se inclina porque una virtualidad interesante de la reflexión que la reforma está provocando sería que se ampliara el abanico de los algoritmos. A continuación nos ofrece una idea en la línea de la carta de la introducción de DAVID WHEELER:

«Sería realmente un avance interesante para la educación matemática de los alumnos».

Algoritmo para el M.C.D.

La presencia de algoritmos está en la Historia de la Matemática y el más claro exponente es el algoritmo de Euclides:

Si B divide a A, B es común divisor de B y A, y es el **mayor**, ya que ningún entero mayor que B puede dividir a B. Pero, si B no divide a A, entonces, el menor de los números A y B continuamente sustraído del mayor, tendrá como resultado el número que divida a su anterior. Este número que resta es el MCD de A y B, y cualquier común divisor de A y B divide al MCD de A y B.

Ilustro el proceso anterior con un ejemplo:

36 - 26 = 10,	26 no divide a 36	
26 - 10 = 16,	16 « « « 26	
16 - 10 = 6,	10 « « « 16	
10 - 6 = 4,	6 « « « 10	
6 - 4 = 2,	4 « « « 6	
4 - 2 = 2,	2 divide a 4	$\Rightarrow$ MCD(36,26)=2

Este algoritmo aparece propuesto en el X CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS para el NIVEL II (1º de FP2 y 2º de BUP) de la forma siguiente (CDL/Enero 1993):

Escribe dos números naturales

↓

Escribe su diferencia (mayor menos menor)

↓

Borra el mayor de los tres números

|

Los que quedan ¿Son iguales?

Si son iguales FIN, y si NO lo son, vuelve al nivel 2º. Razona qué número se obtiene con este algoritmo (el que queda igual al otro) e identifica este método con otro que conozcas.

Esta última forma de proponer el algoritmo es muy aconsejable para hacerlo en el aula y especialmente con calculadoras u ordenador y una Hoja de cálculo, como la siguiente:

ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DEL M.C.D.

Nº MAYOR(A)= 36
Nº MAYOR(B)= 26

A	B	A - B
36	26	10
26	10	16
16	10	6
10	6	4
6	4	2
4	2	2
N/D	N/D	N/D
N/D	N/D	N/D
N/D	N/D	N/D

Se utiliza la función **ND( )** de WORKS que devuelve el valor N/D, para indicar que no hay información disponible.

Algoritmo para la multiplicación

Existen métodos antiguos para la multiplicación de números enteros, como el utilizado por algunos campesinos rusos, que se remontan a los tiempos de los egipcios. Si se quiere calcular el producto de dos enteros y positivos A y B hacer lo siguiente:

Con B diferente de 1 hacer: multiplicar Ax2 y, si B es par dividirlo entre dos, si B es impar entonces restar 1 de B y dividir el resultado entre dos. Cuando B es impar sumar su correspondiente A, la suma de las A respectivas de todas las B impares es igual al producto AxB.

Una Hoja de cálculo como la siguiente favorece la comprobación inmediata y la interacción con el alumno, pues puede introducir tantos factores A y B como sea preciso:

ALGORITMO PARA MULTIPLICAR DOS ENTEROS POSITIVOS

A = 13
B = 25

A	B	C	A x B = 325
13	25	13	
26	12	0	
52	6	0	
104	3	104	
208	1	208	
0	0	0	
0	0	0	
0	0	0	
0	0	0	

Es interesante hacer notar que se obtiene el mismo resultado para AxB tomando como columna A los cocientes aproximados por defecto, resultado de dividir reiteradamente A por 2, y en la columna B, los sucesivos productos de B por 2. A continuación se eliminan las filas en las que el número de la columna A es par y se suman los restantes de la columna B.

Una comprobación de la última forma de obtener AxB lleva a que se tenga que escribir en binario la descomposición polinómica del número A.

Algoritmo para buscar números primos

Comprobar si un número es o no primo siempre es una tarea importante; pero se puede convertir en apasionante tratar de encontrar con los alumnos un algoritmo eficiente. Ya lo dice la inscripción griega del retrato de GAUSS y W. WEBER (1804-91): «Dios hace aritmética» (STEWAT, I.).

El punto de partida para la búsqueda de este algoritmo dependerá de los preconceptos de los alumnos. Después de comprobar que no se producen resultados satisfactorios como divisores D de N:

1º. De 2 a N-1

2º. De 2 a N/2

Razonar como suficientes los valores de D: 2, 3, 5,..., $N^{1/2}$

Una Hoja de cálculo como la que propongo puede ayudar en este proceso de investigación, es decir, después de comprobar el 2, sólo se necesita dividir por los números impares hasta el mayor número entero menor o igual que raíz cuardrada de N:

BUSCANDO NÚMEROS PRIMOS

NÚMERO(N)= 361 ¿N ES PRIMO?= FALSO

Números: 2 e impares <= RAÍZ(N)	D	N/D	ENTERO(N/D)	D divisor de N	CONTADOR
2	2	180.5	180	FALSO	0
3	3	120.33333	120	FALSO	0
5	5	72.2	72	FALSO	0
7	7	51.571429	51	FALSO	0
9	9	40.111111	40	FALSO	0
11	11	32.818182	32	FALSO	0
13	13	27.769231	27	FALSO	0
15	15	24.066667	24	FALSO	0
17	17	21.235294	21	FALSO	0
19	19	19	19	VERDADERO	1

Algoritmo para buscar números perfectos

Una vez asumido el concepto de que son números iguales a la suma de sus divisores propios (6, 28,..), se puede motivar a los alumnos con algo de Historia, que resumida podría ser:

Desde EUCLIDES (300 a. d. C.) que ya demostró una condición para que un número perfecto sea primo, hasta que BRENT y COHEN en 1989 anuncian una demostración de inexistencia de números perfectos impares ≤ 10^{300}. (STEWART, I.)

Con una Hoja de cálculo similar a la propuesta en el apartado anterior se facilita la búsqueda de estos números:

BUSCANDO NÚMEROS PERFECTOS

NÚMERO(N)= 28 ¿N ES PERFECTO?=VERDADERO

Números: desde 1 hasta N	D	N/D	ENTERO(N/D)	D divisor de N	SUMADOR
1	1	28	28	VERDADERO	1
2	2	14	14	VERDADERO	2
3	3	9.33333	9	FALSO	0
4	4	7	7	VERDADERO	4
5	5	5.6	5	FALSO	0
6	6	4.66667	4	FALSO	0
7	7	4	4	VERDADERO	7
8	8	3.5	3	FALSO	0
9	9	3.11111	3	FALSO	0

El resto de la Hoja de cálculo es análoga hasta la fila veintiocho, en la que se comprueba que el número 28 es perfecto.

Las únicas limitaciones se encuentran en las 4.096 filas de la Hoja de cálculo de Works o en la cantidad de memoria disponible; esto último se resuelve con un gestor de memoria EMS o trabajando bajo WINDOWS.

Tabla de multiplicar restos módulo un número

Pocas veces se tiene tiempo para observar la cantidad de simetrías curiosas que contienen las tablas de multiplicar. Por ejemplo, los polígonos (regulares) estrellados que se obtienen con las tablas de sumar de los números que son primos con doce. (THIO DE POL, S.)

Hay en Matemáticas otras leyes sugestivas que pueden requerir una Hoja de cálculo como la siguiente tabla de multiplicar:

TABLA DE MULTIPLICAR DE LOS RESTOS MÓDULO DOCE

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0											
8	0											
9	0											
10	0											
11	0											

Se han dejado vacías las filas a partir de la siete para comentar la facilidad de **copia** en la Hoja de cálculo. De hecho sólo es preciso llenar la primera celda con una condición y la función:

=RESIDUO(A6*C4;12)

donde A6 contiene al 0 vertical y C4 al 0 horizontal.

Tasa de variación media de una función

Una forma atractiva e interdisciplinar de introducir el concepto de derivada de una función en un punto suele ser: estudiando la variación de unas cantidades respecto de otras y calculando velocidades medias.

En este apartado el uso de la calculadora o una Hoja de cálculo como la siguiente, sobre todo si la función es trascendente, puede ser de gran utilidad en la Secundaria Obligatoria:

TASA DE VARIACIÓN MEDIA (T.V.M.): y = LN (x)

ABSCISA DEL PUNTO: a = 1

ORDENADA DEL PTO: f(a)= 0

&x	a + &x	f(a + &x)	f(a+&x)-f(a)	T.V.M
1	2	0.6931472	0.693147181	0.6931472
0.75	1.75	0.5596158	0.559615788	0.7461544
0.5625	1.5625	0.4462871	0.446287103	0.7933993
0.421875	1.421875	0.3519764	0.351976423	0.8343145
0.31640625	1.3164063	0.2749055	0.274905486	0.8688371
0.23730469	1.2373047	0.2129354	0.212935375	0.8973079
0.17797852	1.1779785	0.1637998	0.163799847	0.9203349
0.13348389	1.1334839	0.125296	0.125295975	0.9386599
0.10011292	1.1001129	0.0954128	0.095412825	0.9530521
0.07508469	1.0750847	0.0723994	0.072399436	0.9642371
— — —	— — —	— — —	— — —	— — —
1.3424E-06	1.0000013	1.342E-06	1.34239E-06	0.9999993
1.0068E-06	1.000001	1.007E-06	1.00679E-06	0.9999995
7.551E-07	1.0000008	7.551E-07	7.55095E-07	0.9999996
5.6632E-07	1.0000006	5.663E-07	5.66321E-07	0.9999997
4.2474E-07	1.0000004	4.247E-07	4.24741E-07	0.9999998
3.1856E-07	1.0000003	3.186E-07	3.18556E-07	0.9999998
2.3892E-07	1.0000002	2.389E-07	2.38917E-07	0.9999999
1.7919E-07	1.0000002	1.792E-07	1.79188E-07	0.9999999
1.3439E-07	1.0000001	1.344E-07	1.34391E-07	0.9999999
1.0079E-07	1.0000001	1.008E-07	1.00793E-07	1

La notación científica o exponencial de los números se puede cambiar a otro formato de la Hoja de cálculo (fijo, etc.).

Azar y Probabilidad

Este apartado es todo un Bloque de Contenido de la E.S.O. Toma aún más relevancia al ser incluido como núcleo temático en los dos 1os. cursos de Matemáticas en el **Bachillerato** de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y en el de Humanidades y Ciencias Sociales (Reforma); éste último también lo incluye en Matemáticas de 2º Curso.

Uno de los consejos prácticos más claros a la hora de seleccionar contenidos para una Unidad Didáctica es: hacerlo de más de un bloque y, si fuera posible, de todos. (GOÑI, J. nº 10 **Aula**)

Los fenómenos aleatorios pueden ser un buen ejemplo de este consejo pues, ya en 1991, TANUR trata de clasificar los campos de aplicación de la Estadística: El hombre y su mundo biológico, el mundo físico, el social y el político. (D. GODINO, J.)

La probabilidad frecuencial o empírica, defendida por R. von Mises (1919), tiene como exclusivo objetivo la demostración práctica a través de la experimentación. Ésta se calcula a partir de las frecuencias relativas observadas de cada uno de los diversos resultados en pruebas repetidas.

Simulación de experimentos aleatorios

La introducción del ordenador en las aulas permite simular la probabilidad desde el anterior punto de vista y su versatilidad le concede cierta ventaja sobre otros medios tecnológicos. Ya lo dice S. PAPERT en «Desafío a la mente»:

(...)La computadora es el proteo de las máquinas. Su esencia es su universalidad, su poder de simular,...

Por ejemplo, componiendo las funciónes ALEATORIO( ), que genera un número aleatorio en [0,1), y la función ENTERO (x), parte entera de x, se pueden generar números enteros entre 0 y 9:

ENTERO(ALEATORIO( )*10)
↓
ENTERO([0,10))
↓
0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Copiando esta fórmula, en el rango deseado, se puede generar una tabla de números aleatorios como la siguiente:

TABLA DE NÚMEROS ALEATORIOS

0	6	9	3	6	3	9	2	6	2	4	8	9	5	7	2	9	3	5	8	2
6	4	4	7	8	5	5	6	7	8	7	5	3	5	9	4	5	8	8	2	4
8	4	8	8	5	6	7	4	5	1	7	6	3	4	4	4	7	6	5	5	8
4	2	4	6	0	2	3	2	4	6	5	8	7	9	6	5	3	8	6	9	0
0	9	7	9	2	8	2	7	1	2	8	3	2	8	2	5	2	8	2	3	5
4	7	0	0	8	8	7	3	6	3	3	0	8	7	7	2	6	3	1	3	3
4	7	1	3	4	0	1	0	6	6	1	1	5	6	3	8	6	2	3	4	7
5	6	3	1	9	5	8	8	8	7	6	0	5	9	7	7	0	6	3	5	4
2	9	1	6	5	6	0	1	4	2	2	2	0	6	4	0	1	0	8	9	7
6	6	2	0	4	3	7	4	3	4	8	7	0	5	9	9	0	9	7	7	3
1	7	2	3	1	1	8	5	1	6	4	9	9	8	4	1	6	2	3	3	0
2	3	8	7	2	0	6	7	9	3	3	4	7	6	0	4	9	8	7	0	2
6	1	7	5	5	8	0	3	3	7	4	8	5	0	7	4	6	7	6	2	5
5	0	1	3	3	5	5	6	7	0	3	4	2	0	1	8	6	9	2	5	4
4	3	0	7	6	6	3	0	7	7	1	5	3	0	1	2	5	9	9	6	5
9	5	6	3	3	0	5	6	5	8	7	4	5	1	6	9	3	4	8	5	1
6	6	6	2	2	1	1	9	1	3	0	1	7	1	9	0	6	3	7	8	3

Las actividades que se realicen con alumnos con una tabla similar a esta dependerá de muchos factores (tiempos, espacios, interés, ...). En todo caso, es recomendable conocer ideas como las del apartado **Números aleatorios** que J. DÍAZ GODINO y clres. dedican en su libro.

A) No cuesta demasiado esfuerzo simular en la Hoja de cálculo: 100, 200,...., 4.000 lanzamientos de dos dados y contar el número de veces que la suma de sus caras superiores es 2, 3, 4,...., 12.

AZAR Y PROBABILIDAD

«Simulación del lanzamiento de dos lados, para 100 tiradas»

2		3	4	5	6	7	Suma	F. relat	P. teórica
8	0	4					2	0.02	1/36
8	0	9							
8	0	9					3	0.05	2/36
9	0	8							
6	0	3					4		
9	0	6							
9	0	6					5		
5	0	10							
5	0	9					6		
7	0	5							
2	1	7					7		
7	0	6							

La columna del 2 se ha obtenido combinando dos funciones de la Hoja de cálculo de WORKS:

ENTERO(1+ALEATORIO()*6) + ENTERO(1+ALEATORIO()*6)
ENTERO([1,7]) ENTERO([1,7])
1,2,3,4,5,6 1,2,3,4,5,6

La columna de al lado (en el caso del 3 está oculta) es un contador de casos en los que aparece el 2: pone un 1 ó un 0, según la suma anterior sea ó no un 2. Los números 4, 5, 6 y 7 están sin rellenar.

B) Simular otros experimentos aleatorios, como el del lanzamiento de monedas o dados, supone pequeñas variaciones en la función ALEATORIO( ) para que genere los números aleatorios buscados.

Por ejemplo, supongamos que se quiere evaluar el suceso «salir par», en el experimento aleatorio de lanzar un dado. Una vez introduccido en el rango deseado:

=ENTERO(1+ALEATORIO( )*6)

Se tiene que introducir una condición para poder contar el número de 2, 4 ó 6 que salgan; una puede ser:

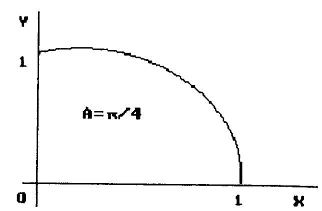
=SI(ENTERO(B8/2)=B8/2;1;0)

es decir, si la celda B8 contiene un 2, 4 ó 6 escribe un 1 y sino un 0.

Cálculo del número PI

El método de Montecarlo y la función ALEATORIO() proporcionan una simulación probabilística curiosa para el cálculo aproximado del número ¶.

Suponiendo que se lanzan disparos «aleatorios» en el interior de un cuadrado de lado unidad:



Así, la probabilidad de que los disparos «caigan» dentro de la cuarta parte del círculo de radio unidad, centrado en el origen, es:

$$P = \frac{\P/4}{1} = \frac{\P}{4}$$

Si se efectúan N disparos y k caen dentro, una estimación de P es: k/N. Por tanto, una estimación de ¶ es: **4xk/N**.

La Hoja de cálculo siguiente produce resultados satisfactorios en función del número de pruebas efectuadas:

NÚMERO PI

Nº PRUEBAS = 100 TOTAL DIANAS = 78
Valor de π = 3.12

Nº Pruebas N	Disparos aleatorios Xi	Yi	X + Y = 1	¿Cae dentro el disparo?	Diana
1	0.2680727	0.5313162	0.96339867	VERDADERO	1
2	0.7831092	0.9537289	0.62188423	FALSO	0
3	0.3148646	0.1266779	0.94913659	VERDADERO	1
4	0.5901703	0.4968312	0.8072788	VERDADERO	1
5	0.5088475	0.273424	0.86085665	VERDADERO	1
6	0.5932943	0.6030325	0.80498566	VERDADERO	1
7	0.1487438	0.9543771	0.98887577	VERDADERO	1
8	0.5530764	0.0241668	0.83313054	VERDADERO	1
9	0.2825115	0.9746534	0.95926392	FALSO	0
10	0.8196778	0.7564004	0.57282489	FALSO	0

Cálculo de integrales definidas

Mediante el método anterior se puede simular el cálculo aproximado de integrales definidas. Por ejemplo, efectuando disparos aleatorios en el interior de un cuadrado unidad para calcular la integral de Log(1+x) entre 0 y 1:

$$P = \frac{A}{1} = A$$

Por tanto, en este caso el área bajo la curva, entre x=0 y x=1, se aproxima al número: **k/N**.

INTEGRAL DEFINIDA

Nº PRUEBAS = 100 TOTAL DIANAS = 25

Área aprox = 0.25

Nº Pruebas	Disparos aleatorios		Log(1+X)	¿Cae dentro el disparo?	Dianas
N	Xi	Yi			
1	0.1047229	0.9096725	0.0432533	FALSO	0
2	0.354621	0.6947504	0.1318178	FALSO	0
3	0.9013216	0.9438642	0.2790556	FALSO	0
4	0.681801	0.0904664	0.2257746	VERDADERO	1
5	0.6197822	0.1789439	0.2094566	VERDADERO	1
6	0.9793441	0.0924313	0.2965213	VERDADERO	1
7	0.3251563	0.349365	0.1222671	FALSO	0
8	0.264759	0.5713322	0.1020078	FALSO	0
9	0.8928336	0.4091927	0.2771124	FALSO	0
10	0.2130868	0.7304757	0.0838919	FALSO	0

Para conseguir buenas aproximaciones del área A (0.3863) hay que simular un número de pruebas mayor que el reflejado en la Hoja anterior (100). Esto último se consigue copiando hacia abajo hasta el número deseado de filas, que como se ha dicho antes en WORKS son 4096 en total.

Cálculo del Área de una elipse

El método de Monte Carlo se puede aplicar al cálculo aproximado del área encerrada por una elipse.

La probabilidad de que los disparos «aleatorios» caigan en la cuarta parte de la elipse, centrada en el origen, es:

$$P = \frac{A}{axb} \approx \frac{k}{N}$$

Por tanto, el área de la elipse se aproxima al número: **4xaxbxk/N**.

ÁREA DE LA ELIPSE

Nº PRUEBAS = 100 TOTAL DIANAS = 79
SEM. MAYOR = 5
SEM. MENOR = 2

Área aprox = 31.6

Nº Pruebas	Disparos aleatorios		X /a + Y /b = 1	¿Cae dentro el disparo?	Dianas
N	Xi	Yi			
1	1.759798	0.383289	1.8720303884	VERDADERO	1
2	4.5199274	1.6130114	0.855126272	FALSO	0
3	0.6254934	0.5056336	1.9842886097	VERDADERO	1
4	0.6324635	1.6108167	1.9839350783	VERDADERO	1
5	0.1343905	0.9921221	1.9992774374	VERDADERO	1
6	4.9447867	0.3622396	0.2964008948	FALSO	0
7	4.5114867	1.5227962	0.8622285732	FALSO	0
8	3.6481635	1.3468116	1.3676784879	VERDADERO	1

Resulución de problemas

1º. *Un tirador da en el blanco una de cada tres veces, y otro tirador, una de cada cuatro. Si disparan los dos a la vez, ¿qué probabilidad hay de que el blanco sea alcanzado una vez al menos?*

Con una Hoja de cálculo se puede simular el problema anterior. Para ello, se considera que el tirador 1º **acierta** si sale **0** cuando se elige un número (entero) al azar entre 0 y 2; a su vez el tirador 2º si se elige un número entre 0 y 3.

Tirador 1º	**Tirador 2º**
ENTERO(ALEATORIO()*3)	ENTERO(ALEATORIO()*4)
ENTRO([O,3))	ENTERO([0,4))
0,1,2	0,1,2,3

El blanco será alcanzado cuando el producto de los dos números sea 0.

PROBLEMA DE LOS TIRADORES

«Un tirador da en el blanco una de cada tres veces, y otro tirador una de cada cuatro. Si disparan los dos a la vez....»

Prueba	1ª		2ª	3ª	4ª	5ª
	0	1	0	1	0	1
	0	1	0	1	1	1
	0	1	0	0	0	0
	0	1	0	1	0	0
	6	0	0	0	1	1
	2	0	0	1	1	1
	1	0	1	1	1	0
	0	1	1	1	0	0
	3	0	1	1	1	0
	0	1	0	1	1	0
	2	0	1	0	1	0
	0	1	1	0	1	0

Prueba	Acierta	Frecuencias
1ª	49	0.49
2ª	50	0.5
3ª	59	0.59
4ª	54	0.54
5ª	39	0.39
Media frecuencias:		0.502

Se ha mejorado la solución frecuencial de la probabilidad efectuando 5 pruebas de 100 intentos cada una y hallando la media, para aproximarse a la solución teórica (1/2).

2º. Una excelente exposición de la *Paradoja de Bertrand* se puede encontrar en los Juegos matemáticos de Investigación y Ciencia (I. Stewart):

- *Andrómeda está encerrada en una de las tres cavernas. La probabilidad de que se encuentre en una dada es, pues, de 1/3, cualquiera que sea la caverna elegida.*

- *Perseo elige una caverna.*

- *La urraca designa una de las otras dos y declara (sin mentir) que en ella mora una gorgona.*

- *Entonces Perseo puede elegir la otra caverna.*

La urraca afirma que si Perseo cambia a la otra caverna la probabilidad de localizar a Andrómeda es de **2/3** y de **1/3** si no modifica su elección inicial.

El diseño de una Hoja de cálculo que cuenta el número de veces en las que Perseo acierta y falla, terminará dando la razón a la urraca:

PARADOJA DE LA CAJA DE BERTRAND

Andrómeda A	Perseo B	Urraca C	Perseo NO modifica	Perseo SI modifica	RESULTADOS Elección Perseo
1	3	2	FALSO	VERDADERO	NO modifica: 31
3	1	2	FALSO	VERDADERO	
3	1	2	FALSO	VERDADERO	SI modifica: 69
2	3	1	FALSO	VERDADERO	
1	2	3	FALSO	VERDADERO	
3	2	1	FALSO	VERDADERO	
3	3	N/D	VERDADERO	FALSO	
1	2	3	FALSO	VERDADERO	
2	1	3	FALSO	VERDADERO	
2	3	1	FALSO	VERDADERO	
3	2	1	FALSO	VERDADERO	
3	2	1	FALSO	VERDADERO	

Conclusión

El apartado que ADELA SALVADOR dedica a la Hoja de cálculo, en su libro dedicado a la Informática en la acción educativa, nos marca un camino que a mí me parece especialmente adecuado:

(...) ¿En qué sentido debemos utilizar la Hoja de cálculo para mejorar la enseñanza?. Siempre que permitamos al alumno investigar, conjeturar, plantearse problemas, estaremos en el buen camino. (p. 49)

NOTA: Las Hojas de cálculo han sido capturadas con SideKick e introducidas en Wordperfect.

Bibliografía

1. WHEELER, D.(1984). **For the Learning of Mathematics**.

2. M.E.C. (1991). Proyecto Atenea: **Informe de evaluación OCDE**.

3. DE LA TORRE, S.(1991). **El potencial cognitivo del lenguaje LOGO**. nº 16 InfoDidac.

4. FIELKER, D. **Los Centros de Profesores en el Reino Unido y la Educación Matemática**.

5. M.E.C. (1992). Secundaria Obligatoria: **Matemáticas**.

6. GOÑI, J.(1992-3). **Los Procedimientos en el Área de Matemáticas y La secuenciación de los contenidos**. nºs. 3 y 10 Aula.

7. STEWART, I. (1989-1993). **Juegos matemáticos**: Investigación y Ciencia.

8. THIO DE POL, S. (1976). **Primos o algunos dislates sobre números**. Alhambra.

9. D. GODINO, J. (1991). **Azar y probabilidad**. Síntesis.

10. SALVADOR, A. (1991). **La informática en la acción educativa**. M.E.C.-Castalia.

Salvador Sánchez Majadas
Asesor de Medios Informáticos
CEP. Getafe (Madrid)