La Música y sus materiales: una ayuda para las clases de Matemáticas

Vicente Liern Carrión

Quienquiera que tenga por profesión la enseñanza habrá comprobado que cada día resultan más vigentes las dos afirmaciones que pronunciara D. Miguel de Guzmán en las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática:

(1) *"... la didáctica no concibe ya la clase como una sala de conferencias; ya la palabra maestro se va pareciendo cada vez más a la de maestro de taller y cada vez menos a la de conferenciante ..."*

P. Puig Adam, "La Matemática y su enseñanza actual" (1960)

(2) *"El aula es un ambiente insuficiente de aprendizaje artificial e ineficiente que la sociedad se ha visto obligada a inventar debido a que sus ambientes informales fallan en ciertos dominios esenciales del aprendizaje, como la escritura, la gramática o las matemáticas..."*

S. Papert. "Desafío a la mente" (1985)

En cuanto al viraje hacia las clases participativas, que preconiza Puig Adam, no hay otro inconveniente que la propia actitud de los profesores. Sin embargo, la labor de naturalizar la enseñanza no resulta tan sencilla; es más, la única alternativa viable con que contamos es la introducción de nuevos materiales que permitan simular el mundo que rodea al aula.

La renovación constante de contenidos y enfoque de las asignaturas ya no es suficiente para ofrecer una visión actual de una disciplina. Es necesario que el material con el que se trabaja sea acorde con la época. De igual modo que a la mayoría de profesores de matemáticas les resulta impensable seguir utilizando tablas de logaritmos o de senos en lugar de la calculadora, debe resultarnos preocupante la insuficiencia de la tiza y el encerado para desarrollar nuestra asignatura. Es necesario no quedar anclado en materiales pasados que sirven para resolver situaciones de antaño, pero que resultan pobres cuando los adaptamos a la situación actual. Además con la utilización de nuevos instrumentos se pueden introducir con menor dificultad algunos conceptos que, en sí mismos, pueden resultar demasiado abstractos para nuestros alumnos.

Presentación

La presente experiencia, que ha sido desarrollada con alumnos de primero y segundo de BUP del Instituto de Bachillerato Benlliure de Valencia, ha sido expuesta en el I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (Sevilla 1990) y en las V Jornadas de Aprendizaje y Educación Matemática (Castellón - marzo 1991). Además ha formado parte de la Mesa Redonda "Música y Matemáticas" desarrollada en el VII Comité Interamericano de Educación Matemática (Miami - agosto 1991).

La idea de la experiencia es utilizar la atracción que la música despierta en nuestros alumnos para hacer una revisión de conceptos matemáticos.

Nuestros chicos saben que la mayoría de la música que escuchan ha salido de un ordenador y que incluso los micrófonos que utilizan los cantantes en directo pasan por una mesa de mezclas que modifica la entonación. Pues se trata de utilizar estas ideas y los instrumentos con los que pasan gran parte de su ocio (cassettes, discos, etc.), para obtener conceptos matemáticos que en principio podían parecer tan extraños a la música.

Esta experiencia muestra una vertiente de las matemáticas que en muchas ocasiones olvidamos: También hay en ellas un lenguaje capaz de *traducir* de forma más operativa los conceptos de la vida cotidiana, (en este caso la música), retomando así su carácter de abstracción a partir de problemas empíricos.

Ha sido estructurada en los cuatro apartados siguientes:

a) Una explicación de las escalas mediante tipos de números.

b) Música y vectores.

c) Distancia entre sonidos. Utilización de logaritmos.

d) Música y funciones.

Cada uno de los apartados ha sido desarrollado en tres o cuatro sesiones de una hora con grupos de veinte alumnos. En cada apartado daremos un listado del material que hemos empleado, pero en general con calculadoras, ordenador y cassette es suficiente para realizar toda la experiencia.

Desarrollo de la experiencia

Tipos de números. Una explicación utilizando las escalas

Mediante una grabación en la que suenan simultáneamente un piano y un clarinete bien afinados (o cualquier otro instrumento de viento) que ejecutan una octava, puede comprobarse que parece haber notas en las que ambos instrumentos desafinan. Esto es debido a que no en todos los instrumentos se entiende la octava de igual manera. Esta circunstancia nos permitirá prácticas muy interesantes en la clase de matemáticas, para ello necesitaremos el siguiente *material*:

- Un cassette capaz de grabar y reproducir.
- Un ordenador.
- Calculadora.

Fundamento teórico

El único concepto que se impone a cualquier instrumento y cualquier época, es que ***un sonido de frecuencia f y el de frecuencia 2f son el principio y fin de una octava***. Tenemos así un intervalo $[f, 2f]$. Cualquier partición de este intervalo determina una octava (tenga o no sentido en la música actual), por ejemplo:

$f \quad (9/8)f \quad (4/3)f \quad (3/2)f \quad 2f$

Las divisiones en subintervalos pueden hacerse con cualquier criterio, pero según trabajemos con múltiplos racionales o irracionales de f obtendremos tipos de escalas que sean conocidos o no.

Desarrollo de las sesiones

Primer paso

Fijamos una frecuencia arbitraria p.e. f= 264 Hz. y calculamos $2f$ = 528 Hz. Entre estas dos frecuencias determinamos valores intermedios formando así escalas. Vemos dos ejemplos:

1.- *Con números irracionales*

$\ldots f, 2^{1/12}f, 2^{2/12}f, 2^{3/12}f, 2^{4/12}f, 2^{5/12}f, 2^{6/12}f, 2^{7/12}f, 2^{8/12}f, 2^{9/12}f, 2^{10/12}f, 2^{11/12}f, 2^{12/12}f, 2f, \ldots$

Obtenemos así el sistema temperado que es en el que afinan los pianos y las arpas.

2.- *Con números racionales*

Multiplicando por fracciones $(3^i/2^j)$ i,j = 1,2...10, se obtiene

$\ldots f, (258/243)f, (9/8)f, (32/27)f, (81/64)f, (4/3)f, (729/512)f, (3/2)f, (128/81)f, (27/16)f, (16/9)f, (243/128)f, 2f, \ldots$

que es el sistema pitagórico en el que siguen afinando la mayoría de instrumentos de cuerda.

Segundo paso

Una vez calculadas las divisiones de la escala podemos escucharlas con ayuda del ordenador. En nuestro caso hemos usado lenguaje gw-basic y logo en un ordenador PC, así

En Basic

SOUND frecuencia, duración hace que en el ordenador suenen las distintas notas, por ejemplo

```
10 SOUND 130.810, 10
20 SOUND 146.830, 10
30 SOUND 164.830, 10
40 SOUND 174.610, 10,
etc.
```

En LOGO

TONE frecuencia, duración sirve para lo mismo, así

```
TONE    130.810, 10
TONE    146.830, 10,
etc.
```

Ambos hacen que suenen durante diez segundos las notas cuya frecuencia hemos prefijado.

Sonido y vectores

En estas sesiones hemos de convencer a los alumnos de la necesidad de manejar los sonidos como vectores y no como escalares, puesto que en ellos hay al menos tres magnitudes que debemos tener en cuenta independientemente:

1.- La ***intensidad*** que es la medida de lo fuertes o débiles que son los sonidos. Por extraño que parezca es difícilmente apreciable por el oído si no están en el mismo tono.

2.- El ***tono*** determina la altura de un sonido, es decir lo grave o agudo que éste es.

3.- El ***timbre*** es la cualidad que nos permite distinguir sonidos idénticos emitidos por instrumentos distintos.

Material

- Cassette con ecualizador digital.
- Audímetro. (Es fácil de conseguir puesto que lo suelen utilizar en los laboratorios de física y no es muy caro).

Fundamento teórico

Teniendo en cuenta que el sonido es un vector, vamos a definir las tres cualidades que lo determinan en lenguaje vectorial, y con ello ya estaremos en el *campo matemático*, pudiendo así trabajar con ellos en clase de matemáticas.

Si un sonido es un vector $\vec{s} = (s_1,...s_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos definidas las siguientes magnitudes:

La ***intensidad*** de $\vec{s}$ es $\|\vec{s}\|$

El ***tono*** de $\vec{s}$ es su primera componente s_1

El ***timbre*** de $\vec{s}$ es el vector formado por el resto de componentes, es decir $(s_2, s_3,...,s_n)$

Desarrollo de las sesiones

Se trata de escribir los vectores que corresponden a un sonido dado, para ello hemos de hacer tres actividades:

Intensidad

Para calcularla no hace falta más que conectar el audímetro y anotar la intensidad de éstos en decibelios.

Tono

Debemos prefijar de antemano el sistema en que están afinados los instrumentos, y con ello podemos saber cuál es la frecuencia que corresponde a cada tono, por ello es importante realizar primero las prácticas del apartado 3.

Timbre

Es la práctica más atractiva porque en ella se maneja el concepto de *vector* y de *base*.

Hacemos sonar en un cassette con ecualizador digital sonidos "patrones" que han sido grabados previamente. Cuando estos suenan, utilizamos las barras del ecualizador como si se tratase de la base de un espacio vectorial, así midiendo cada una de las aprtes iluminadas de las distintas barras del ecualizador, obtenemos un vector de tantas coordenadas como barras haya. Como lo habitual es que haya cinco, suelen obtenerse vectores del tipo (2,0, 5,2,1,)...

Las tres actividades propuestas son conceptuales, porque en la práctica, resulta muy difícil trabajar en BUP con vectores de más de tres coordenadas, por ello, lo más práctico es escribir los sonidos como vectores de dos componentes $\vec{s} = (s_1,s_2)$ en donde s_1 es la intensidad y s_2 el tono. El timbre podemos considerarlo como cualidad asociada a cada instrumento.

Distancia entre sonidos. Utilización de logaritmos

Cuando escuchamos cualquier tipo de música, y sobre todo si tenemos en cuenta el carácter vectorial de los sonidos, comprobamos que hay piezas en las que parece que no hay casi altibajos, mientras que hay otras en las que los saltos son la práctica predominante. Esto significa que de algún modo todos intuimos una distancia entre los sonidos. En este sentido se han desarrollado varios trabajos entre los que destacaremos dos:

1) ***Joan Girbau*** en la "Revista Catalana de Matemàtiques" identificando los sonidos con su tono (es decir con su frecuencia) establece la siguiente distancia entre sonidos:

Dados dos sonidos f_1, f_2

$$d\,(f_1, f_2) = |\log\,(f_1/f_2)|$$

2) La ***Ley de Weber-Fechner*** asegura que "la sensación sonora que provoca un sonido de intensidad I, es función lineal del logaritmo de la excitación", y esto permite definir la sensación acústica como

$$\mathscr{S} = 10 \log\,(I/I_0)$$

siendo I_0 la sensación umbral para oir.

Teniendo en cuenta estos dos estudios, vamos a definir una función distancia en el espacio vectorial de los sonidos.

Material

- Calculadora.
- Grabaciones de música de distintos tipos.

Fundamento teórico

Desde el punto de vista matemático se trata de construir una función distancia entre los vectores de $\mathbb{R}^n$, con lo cual tenemos la seguridad de que cualquiera que esta sea será equivalente a la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, esto no puede manejarse con nuestros alumnos, ni sería un reflejo fiel de la idea intuitiva de distancia entre sonidos. Por ello vamos a definir una distancia como la siguiente:

Dados dos sonidos $\vec{s}_1 = (a_1, b_1, \vec{c}_1)$, $\vec{s}_2 = (a_2, b_2, \vec{c}_2)$, donde las a_i representan el tono, las b_i la intensidad y $\vec{c}_i$ los timbres

$$d(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \alpha \left|\log(a_1/a_2)\right| + \beta \left|\log(b_1, b_2)\right| + \gamma \|\vec{c}_1 - \vec{c}_2\|$$

α, β, γ son constantes cuyo valor fijaremos en las prácticas.

En esta distancia el primer sumando mide la diferencia entre tonos, el segundo entre intensidades, y el tercero de algún modo mide la diferencia de timbres.

Desarrollo de las sesiones

Como hemos expuesto en el punto anterior expresamos algunos sonidos en forma vectorial, y con ello podemos utilizar la función distancia que hemos definido anteriormente.

Con esta práctica no sólo afianzaremos el concepto de crecimiento logarítmico al contraponerlo al de crecimiento lineal, sino que además podremos persuadir a los alumnos de la libertad que nos deja el poder determinar el valor de las constantes α, β, γ. Para fijar los valores de estas constantes, oiremos varios tipos de música y veremos qué sumando debemos hacer más grande y cuál más pequeño.

Por ejemplo si se trata de una música muy rítmica en la que lo fundamental es el contraste entre los planos sonoros, haremos mayor el segundo sumando, es decir daremos un valor grande a β. Si la música es intimista y nos interesa destacar el timbre, aumentaremos el valor de γ...

Música y funciones

Igual que en matemáticas las funciones suponen la utilización de la mayoría de conceptos previos (escalares, vectores, operaciones, etc.), la música significará la utilización de todos los elementos anteriormente expuestos.

La definición de música que se utiliza desde antiguo es

"***Música es el arte de combinar el tiempo y los sonidos***"

Está claro que desde nuestro punto de vista esta definición puede interpretarse como *una función que tiene por variable independiente el tiempo y cuyo conjunto imagen es el conjunto de los sonidos (un subconjunto de $\mathbb{R}^n$).*

Material

- Calculadora.
- Papel milimetrado.
- Audímetro.
- (Si se quiere ordenador para la representación de funciones).

Fundamento teórico

Llamaremos música a una función ***M*** definida de un intervalo de $\mathbb{R}$ en un conjunto de vectores (sonidos). En esta función el dominio y el rango verifican algunas propiedades obviamente:

1) El dominio puede ser considerado un intervalo [0,H] porque no tiene sentido una música que suene infinitamente.

2) El conjunto imagen está acotado, porque el hombre no puede oir fuera del intervalo [16, 20.000] Hertz en cuanto a frecuencias, y tampoco es capaz de oir por encima de los 160 decibelios de intensidad sin dañar sus oídos.

Desarrollo de las sesiones:

Para trabajar con sonidos vamos a utilizar vectores de dos componentes $\vec{s} = (s_1, s_2)$ en los que s_1 es el tono y s_2 la intensidad.

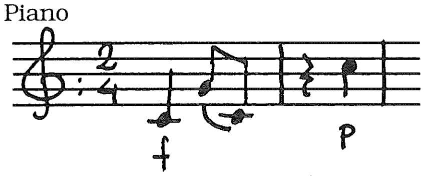
La música será una función escalonada de este tipo

$$M = \begin{cases} (261,60) & \text{si } t \in (0,4) \\ (291,40) & \text{si } t \in (4,6] \\ (261,40) & \text{si } t \in [6,8) \\ (0,0) & \text{si } t \in (8,12) \\ (252,30) & \text{si } t \in (12,16) \end{cases}$$

Las frecuencias han sido medidas en Hercios y la intensidad en decibelios.

En un pentagrama usual resultaría

Piano



Conceptualmente la idea no es demasiado complicada y permite seguir extrayendo consecuencias:

- Que dos sonidos suenen ligados (es decir uno se solapa con otro) que los intervalos en los que varía t en ambas notas son cerrados, mientras que si las notas no son ligadas los intervalos son abiertos.

- La continuidad en la función música se traduce al escucharla en que el instrumento pasa por todos los sonidos intermedios entre dos dados, es decir lo que hace un trombón de varas al interpretar un glissando.

- La derivabilidad en la función música significaría suavidad al oir esta música.

Otra práctica

El proceso puede también hacerse en ambos sentidos, es decir dada una música saber que tipo de función es la que la origina y al revés, dada una función cuya gráfica conocemos (logarítmica, parábolas, polinomios ...) qué música sonaría con esa función.

En cualquier caso, estas sesiones permiten entender cómo un ordenador puede crear música, y porque simplemente dibujando con el ratón de un ordenador se puede componer. (En este sentido es de destacar que existen programas muy completos para composición por ordenador, p. e. FINALE para ordenadores Machintosh, NOTATOR para ordenadores Atari ...).

Conclusiones

Es sorprendente comprobar la capacidad de trabajo que poseen nuestros alumnos cuando la actividad les motiva. La mayoría de ellos han pasado muchas horas convirtiendo sonidos en vectores, viéndose sorprendidos de que en este caso un vector no lleve inevitablemente asociada una dirección y un sentido, sin que por ello dejen de ser vectores.

Después de trabajar con funciones que responden a un modelo de la vida cotidiana, conceptos como el de continuidad o derivabilidad llegan a verse como una necesidad de catalogar algunas situaciones que realmente existen.

La mayoría de alumnos llegan a comprender que las matemáticas no son una ciencia estancada en la que no cabe la opinión que ellos puedan tener, o en la que ya no queda nada nuevo por decir.

Bibliografía

* J. CATALÁ DE ALEMANY. **Física General**. Editorial Guerri S. A. Valencia, 1969.

* J. DIEDONNE. **Elements d'Analyse**. Gauthier-Villars. París, 1981.

* J. JACQUES MATRAS. **El sonido**. Presses Universitaires de France. 1977.

* **Revista de la Societat Catalana de Matemàtiques**. Article de Joan Girbau. 1988.

* **ACTAS de las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática**. Sep. 1989.

Vicente Liern Carrión
Universitát de Valéncia