El salto de la rana

Francisco Merchán Cid

Los conceptos y propiedades que desarrollamos en un tema deben incluirse, siempre que podamos, en situaciones que anime a los alumnos a explorar, formular y comprobar conjeturas, ... etc., y les permita aprender matemáticas de forma creativa e independiente.

¿Por qué no empezamos con un juego?

El **salto de la rana** es un **JUEGO INDIVIDUAL** que consiste en intercambiar la posición de dos grupos de fichas colocadas sobre un tablero.

Para practicar el juego se necesita un tablero lineal con un número impar de casillas y un número par de fichas: la mitad de un color y la otra mitad de otro color; por ejemplo, si se utiliza un tablero de cinco casillas, serán necesarias dos fichas blancas y dos fichas negras. En la figura I se muestra cómo se colocan las fichas en el tablero: todas las fichas del mismo color a un lado u otro de la casilla central que permanece vacía. (Por ejemplo: blancas a la izquierda y negras a la derecha de la casilla central).

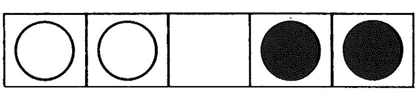


Figura I

El objetivo del juego consiste en intercambiar las fichas: las fichas blancas donde están las negras y viceversa, teniendo en cuenta las siguientes reglas:

PRIMERA: Las fichas colocadas a la izquierda de la casilla central se mueven hacia la derecha y las colocadas a la izquierda se mueven hacia la derecha. **LAS FICHAS NO PUEDEN RETROCEDER.**

SEGUNDA: En cada jugada (movimiento) sólo se puede mover una ficha (de cualquier color).

TERCERA: Una ficha puede mover a la casilla de al lado si está vacía. (Sin retroceder).

CUARTA: Una ficha puede saltar sobre **otra de distinto color** si la casilla que hay a continuación está vacía.

Las primeras actividades que ha de realizar el alumnado deben estar orientadas a familiarizarse con el juego y sus normas, practicar, jugar e intentar el intercambio de la fichas según las reglas dadas. Se les sugerirá que simplifiquen el juego, que lo intenten con un número reducido de fichas en cada parte, primero con una, luego con dos, con tres, etc., y que observen los movimientos que impiden avanzar y los que bloquean las fichas.

Una vez conseguido el objetivo del juego, intercambiar las fichas, se hará ver al alumnado la necesidad de expresar mediante un **código** cada uno de los movimientos realizados. Para ello es necesario numerar las casillas del tablero que, **dependiendo del nivel del alumnado**, podemos hacerla de una de las dos formas siguientes:

a) Con una **sucesión de números naturales** (del 1 al 5, del 1 al 7, etc.) de forma correlativa y comenzando por la primera casilla de la izquierda a la que se le asigna el número 1.

b) Con una **sucesión de números enteros** asignando el número cero a la **casilla central**, las casillas situadas a su derecha se numeran con **números positivos** (+1,+2,+3,..) y las casillas situadas a su izquierda con **números negativos** (-1,-2,-3,..).

Cada movimiento puede quedar expresado por un **par ordenado** de números: el primero indica la casilla de partida de la ficha en movimiento y el segundo la casilla de llegada. El par **(-2,0)** significa que una ficha colocada en la **casilla -2** pasa a colocarse en la **casilla 0.** De esta forma tenemos codificados los movimientos.

En lo que sigue, consideraremos el tablero numerado con los números enteros y los conceptos matemáticos se deberán introducir dependiendo del nivel del alumnado que esté desarrollando el juego.

A partir de este momento podemos iniciar una serie de actividades relacionadas con: **GEOMETRÍA**, **CÁLCULO DE ÁREAS** y **MODELOS MATEMÁTICOS.**

Es conveniente establecer unas **condiciones iniciales:**

a) Las fichas blancas están colocadas a la izquierda de la casilla central y las negras a la derecha.

b) Las casillas las numeramos con números enteros.

c) El estudio se realiza, primero con una ficha de cada color, luego con dos, con tres, ...

d) El primer movimiento se realiza con fichas blancas.

Establecidas las condiciones iniciales, pueden realizarse una serie de actividades que introducen al alumnado en el lenguaje simbólico, en las representaciones gráficas, -una de las grandes dificultades del alumnado- en el cálculo de áreas y en la búsqueda de modelos matemáticos.

Actividades relacionadas con la Geometría

I) Expresar mediante pares ordenados los movimientos que deben realizarse; con una, dos, tres,... fichas de cada color, hasta completar el juego.

II) Representar gráficamente los pares ordenados que representan los movimientos necesarios para completar el juego. (Conviene utilizar representaciones distintas siempre que se varíe el número de fichas de cada color).

III) Unir, mediante una línea poligonal, los distintos movimientos desde el primero hasta el que completa el juego, en cada una de las representaciones gráficas obtenidas anteriormente.

IV) Observar las figuras obtenidas al aumentar el número de fichas de cada color que intervienen en el juego y compararlas entre sí.

V) Observar la representación gráfica de los movimientos que se realizan con fichas de un mismo color.

Estudio y análisis de las actividades

La realización de las actividades señaladas y el análisis de los resultados obtenidos, puede llevar consigo la introducción, según sean necesarios, de conceptos como: **par ordenado, ejes de coordenadas, abscisa, ordenada, cuadrantes, simetría, bisectriz, giro, ecuación de una recta, región del plano, inecuación,...**

En el desarrollo del juego y analizando las gráficas obtenidas al representar los movimientos, podemos observar que, al aumentar el número de fichas que intervienen en el juego, algunos movimientos se repiten. Esto hace que la figura obtenida con **n** fichas contenga las figuras obtenidas con un número de fichas menor a **n**. Por ejemplo la figura obtenida con 4 fichas de cada color (fig.7) contiene las figuras obtenidas con 1, 2, y 3 fichas de cada color; figuras 1, 3, 5 respectivamente.

Entre los movimientos que se repiten destaca el representado por **(-1,1)**. Este punto es el único que pertenece a todas las figuras obtenidas.

Una vez que se ha detectado esa circunstancia podemos pedir al alumnado que dibuje la línea que pasa por este punto y el origen de coordenadas en todas las figuras obtenidas y que mental o manualmente **doblen** la figura por la línea dibujada.

CONCLUSION: Obtenemos figuras simétricas respecto de la bisectriz de los cuadrantes pares. (figuras: 1,3,5,7).

Esta situación nos puede permitir introducir conceptos como: **simetría, figura simétrica, eje de simetría, bisectriz, bisectriz de los cuadrantes 2º y 4º**.

De la observación de los puntos que representan las movimientos de las fichas de un mismo color, (actividad V) puede deducirse que están **separados.** Es el momento de pedir al alumnado que represente los "hipotéticos movimientos" que dejan cada ficha en su sitio (intentan mover una ficha pero la vuelven a dejar en su sitio) y que dibujen la línea que pasa por ellos; de esta forma obtienen los puntos del plano con coordenadas iguales **(x = y)** y la línea recta que pasa por ellos **(bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º)**.

Esta situación nos puede permitir introducir conceptos como: **bisectriz, bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º, función identidad, semiplano.**

Durante el desarrollo del juego o el análisis de los resultados, posiblemente algún alumno/a nos habrá planteado la cuestión siguiente: **¿qué ocurre si el primer movimiento se realiza con las fichas negras?**. Si no fuese así, debemos proponer al alumnado que realice un estudio completo teniendo en cuenta esta nueva variante y que comparen los resultados obtenidos según sea el primer movimiento del juego con blancas o con negras.

Aunque obtenemos figuras distintas y el movimiento que destaca es el representado por **(-1,1)**, ya que es el único que pertenece a todas la figuras obtenidas, **las conclusiones son las mismas:**

Todas las figuras contienen a las anteriores.

Se mantiene la simetría respecto de la bisectriz de los cuadrantes pares (fig. 2,4,6,8).

Se mantiene la posición relativa de los puntos que representan los movimientos de las fichas de distinto color.

Las propiedades estudiadas hasta ahora, son independientes de las condiciones iniciales: **primer movimiento y número de fichas.**

Realicemos un nuevo estudio modificando las condiciones iniciales:

Manteniendo el número de fichas de cada color, analizar y comparar las dos figuras que obtenemos según iniciemos el juego moviendo la ficha blanca o la ficha negra.

Previsiblemente algunas/os alumnas/os nos dirán: **"Es la misma figura que se le ha dado la vuelta"**. **"Sale la misma figura pero girada"**.

Tomando como referencia una de las dos figuras, por ejemplo, la obtenida moviendo en primer lugar una ficha blanca, podemos plantear dos nuevas actividades al alumnado:

VI) Dibuja en una cuadrícula los puntos y segmentos que obtienes al doblar la figura por la bisectriz de los cuadrantes impares.

VII) Con el compás o semicírculo graduado y en la misma cuadrícula que

CONCLUSIONES:

Los puntos que representan los movimientos de las fichas blancas "están encima" de la bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º, (recta de ecuación x - y = 0) por lo que pertenecen al semiplano de ecuación x - y < 0.

Los puntos que representan los movimiento de las fichas negras "están debajo" de la bisectriz de los cuadrantes 1º y 3º, (recta de ecuación x - y = 0) por lo que pertenecen al semiplano de ecuación x - y > 0.

En la figura II están representadas estas conclusiones en el caso de tres fichas de cada color. Los movimientos de las fichas blancas están señalados con **B** y los de las fichas negras con **N**.

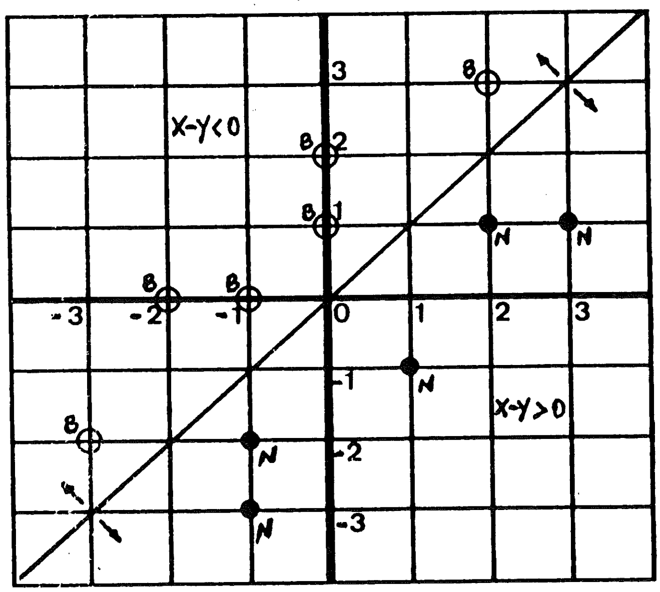


Figura II

CONCLUSIÓN:

Las figuras que representan el desarrollo del juego, según realicemos el primer movimiento con la ficha blanca o negra, (fig. 1 y 2; 3 y 4; 5 y 6; 7 y 8) **pueden realizarse, una a partir de la otra, realizando una simetría respecto de la bisectriz de los cuadrantes impares o un giro de 180º con centro en el origen de coordenadas.**

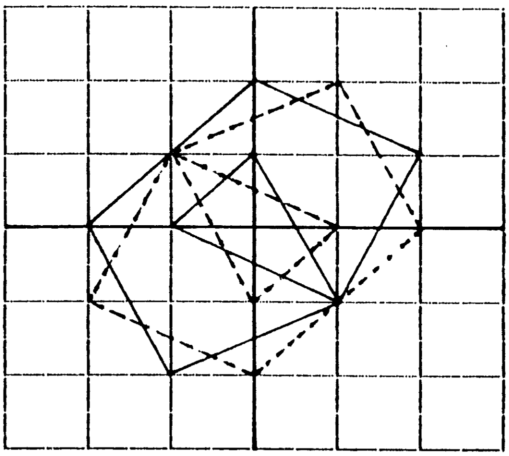


Figura III

En la Figura III se representa con trazo continuo la figura a girar y con trazo discontinuo la figura obtenida al aplicar el giro o la simetría.

tienes dibujada la figura, efectúa un giro de 180º a cada punto. Es conveniente que realices los giros por segmentos y que dibujes, con un color distinto al de la figura que estás girando, el segmento que determinan.

La figura obtenida, en cualquier caso, coincide con la obtenida moviendo en primer lugar una ficha negra.

Estas actividades nos pueden permitir introducir los conceptos de: **eje de simetría, puntos simétricos, figuras simétricas, y giros.**

Actividades relacionadas con el cálculo de áreas

Una vez representados los movimientos y obtenidas las distintas figuras, podemos entrar en una etapa en la que intervienen conceptos relacionados con el cálculo, para ello podemos proponer una nueva actividad:

VIII) Estudiar el área de las distintas figuras obtenidas independientemente del primer movimiento realizado.

Estudio y análisis de la actividad

El desarrollo de esta actividad introduce al alumnado en el procedimiento del cálculo del área de una figura por descomposición en otras (triángulos, paralelogramos, ...) de área conocida o de cálculo más sencillo, de forma que sumadas obtenga el área de la figura que está estudiando.

Puede aprovecharse la actividad para que el alumnado señale distintos tipos de triángulos, figuras, elementos y propiedades geométricas, e incluso la utilización del Teorema de Pitágoras.

En la figura siguiente (Figura IV) está señalada una posible descomposición de la figura que obtenemos al jugar con tres fichas de cada color, en ella aparecen: **un paralelogramo (a); un trapecio (b) y diversos triángulos (c).**

El área total de la figura:

$a+b+2c_1+2c_2+c_3=4+5+2\cdot(3/2)+2\cdot 2+1=17$

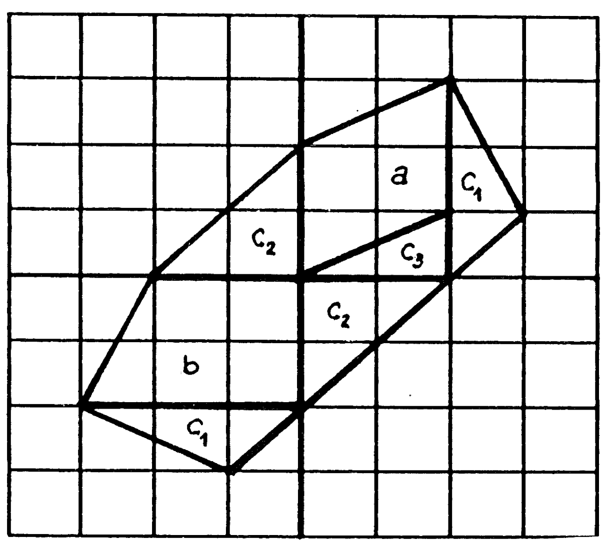


Figura IV

Las áreas correspondientes a triángulos:

Paralelogramo:
(a) $2 \cdot 2 = 4$

Trapecio:
(b) $((3 + 2) / 2) \cdot 2 = 5$

Triángulos:
(c_1) $(3 \cdot 1) / 2 = (3/2)$

(c_2) $(2 \cdot 2) / 2 = 2$

(c_3) $(2 \cdot 1) / 2 = 1$

La tabla siguiente indica el área de algunas figuras:

Nº de fichas de cada color	1	2	3	4	5		n
Área de la figura obtenida	?	9	17	25	33		?

Analizando la tabla obtenida observamos que, cuando tenemos dos o más fichas de cada color, el área de la figura aumenta en ocho unidades al aumentar en una las fichas de cada color que intervienen en el juego. Podemos iniciar un proceso de generalizaciones para encontrar una fórmula que permita conocer el área de la figura obtenida con un número cualquiera de fichas de cada color. Al mismo tiempo podemos introducir el concepto de **progresión aritmética.**

Sería interesante conseguir que el área de la figura obtenida cuando tenemos una ficha de cada color (n=1) esté en progresión con las calculadas para n>1; situación que merece un análisis particular.

La figura obtenida para n=1, al no repetirse los movimientos, no es una **línea poligonal cerrada.**

Podemos "cerrarla" de dos formas:

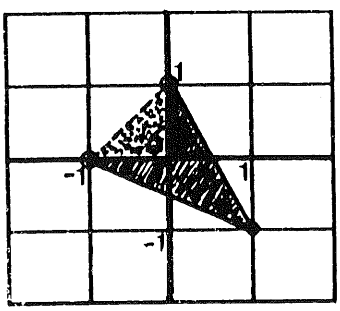


Figura V

a) Uniendo los movimientos 1 y 3 obtenemos una figura (Figura V) de área 3/2 que no está en progresión con los demás valores.

b) Podemos considerar como figura (Figura VI) la limitada por: **la recta que une los movimientos 1 y 2; la recta que une los movimientos 2 y 3; y los ejes coordenados.**

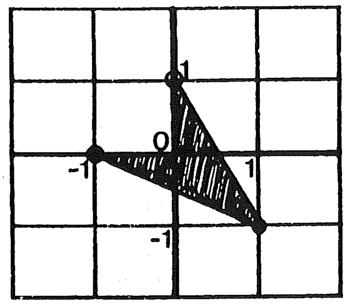


Figura VI

El área de la figura VI, obtenida según la forma "b", es 1 que sí está en **progresión aritmética** con las demás.

Teniendo en cuenta la forma "b" (Figura VI) y que las áreas están en **progresión aritmética** de **diferencia** 6 y **primer término** 1 podemos aplicar la expresión del término general de una progresión aritmética: $a_n = a_1 + (n-1) \bullet d$ que aplicado a nuestro caso es:

$$a_n = 1 + (n-1) \bullet 8 = 1 + 8n-8 = 8n-7$$

La tabla queda completa de la forma siguiente:

Nº de fichas de cada color	1	2	3	4	5		n
Área de la figura obtenida	1	9	17	25	33		8n-7

Búsqueda de modelos matemáticos

Siguiendo con el análisis de los datos que obtenemos al realizar el juego, podemos estudiar situaciones que permitan encontrar una ley general o modelo matemático.

Esta ley general debe conseguirse a través de la experimentación, la intuición, la formulación de hipótesis y de una expresión que satisfaga el modelo matemático.

Las cuestiones tendrán en cuenta que el juego puede realizarse con 1, 2, 3, ..., 10, ..., 234,..... fichas de cada color.

Etapa experimental

En esta etapa se planteará al alumnado una serie de cuestiones con el objeto de evidenciar que llega un momento en el que la dificultad de responder de forma experimental o manipulativa es mayúscula y se necesita **algo** que ayude.

Etapa intuitiva

En esta etapa debe ponerse en evidencia que al utilizar un determinado número de fichas de cada color se hace prácticamente imposible responder o resolver las cuestiones planteadas. Los datos obtenidos en la etapa experimental deben darnos **alguna pista** que permita responder a situaciones con mayor número de fichas, deben hacernos intuir una posible solución.

Formulación de hipótesis

El análisis de las gráficas, las series numéricas u otros datos obtenidos de forma experimental junto a las pistas o intuiciones harán que el alumnado formule hipótesis, posibilidades, soluciones, etc., que deben ser comprobadas. Todo este estudio debe conducir al alumnado a descubrir una ley general y una fórmula o expresión que se cumpla de forma general y satisfaga la cuestión planteada.

Cuestiones en busca de un modelo matemático

Al aumentar en una las fichas de cada color que intervienen en el juego, se obtiene una nueva figura que contiene a las anteriores; basándose en ello:

1ª) ¿Cuántos movimientos son necesarios para lograr el objetivo del juego?

2ª) ¿Al realizar qué movimiento se inicia una figura nueva? (Primer movimiento no realizado en las figuras obtenidas con menos fichas)

3ª) ¿Cuántos movimientos han de realizarse antes de iniciar una figura nueva? (Movimientos ya realizados en figuras obtenidas con menos fichas)

4ª) ¿Cuántos movimientos son necesarios para completar una figura nueva? (Movimientos no realizados en las figuras obtenidas con menos fichas)

5ª) ¿Cuántos movimientos han de realizarse para terminar el juego después de completar la figura?.

6ª) Área de las figuras geométricas obtenidas.

Responder de forma experimental, aún utilizando **diferencias finitas**, a las cuestiones planteadas y con un número elevado de fichas de cada color que intervienen en el juego, resulta lento, pesado y poco práctico.

El problema se soluciona encontrando una ley o fórmula general que nos permita resolver de forma directa la cuestiones cuando tengamos **n fichas de cada color colocadas en un tablero de 2n+1 casillas.** Esta situación puede aprovecharse para introducir los conceptos de **sucesión, término general, cálculo de términos a_i,a_j, etc.**

Es recomendable realizar una serie de acciones que faciliten el descubrimiento de la ley general, entre ellas:

* **Análisis detallado, minucioso y profundo de la serie numérica.**

* **Formular hipótesis y comprobarlas.**

* **Búsqueda de una pauta o regularidad en la serie.**

* **Comparar los términos de la serie con los de otra ya estudiada.**

Puede ocurrir que algunos/as alumnos/as encuentren expresiones distintas de una ley general, en este caso sería conveniente aprovechar la ocasión para trabajar con **expresiones literales** y deducir, estudiar, analizar, etc., todas las propiedades que podamos.

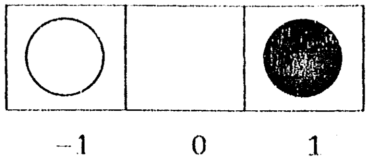
La siguiente tabla muestra el estudio de las seis cuestiones planteadas:

Nº de fichas de cada color	1	2	3	4	5		n
Nº de movimientos	3	8	15	24	35		$(n+1)^2-1$
Iniciamos una figura nueva al realizar el movimiento	1	3	6	10	15		$n(n+1)/2$
Nº de movimientos previos al inicio de una figura	0	2	5	9	14		$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Nº de movimientos que completan la figura	3	5	7	9	11		$2n+1$
Nº de movimientos después de completar la figura	0	1	3	6	10		$(n-1)n/2$
Área de la fig. geométrica	1	9	17	25	33		$8n-7$

Francisco Merchán Cid
I.B. Domenico Scarlatti
Aranjuez.

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS MOVIMIENTOS

UNA FICHA EN CADA LADO



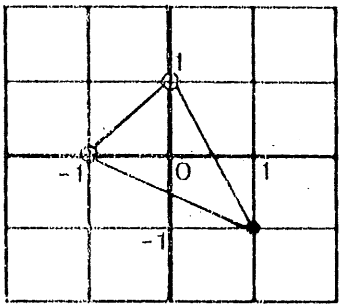


FIGURA 1

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA BLANCA (FIGURA 1)

(-1,0); (1,-1); (0,1)

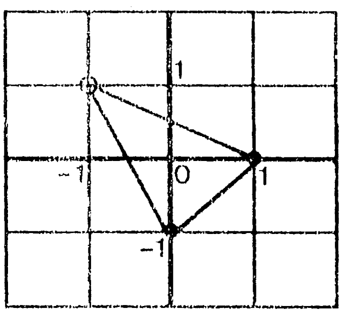
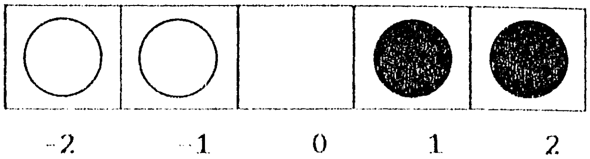


FIGURA 2

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA NEGRA (FIGURA 2)

(1,0); (-1,1); (0,-1)

DOS FICHAS EN CADA LADO



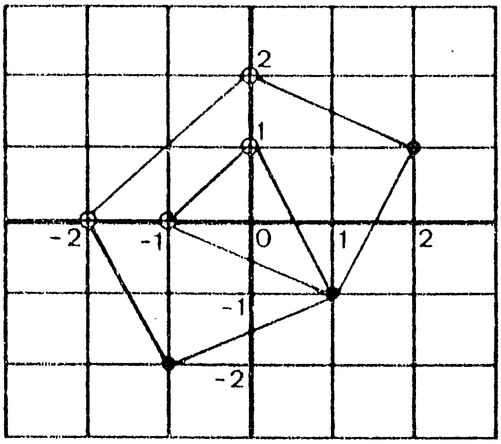


FIGURA 3

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA BLANCA (FIGURA 3)

(-1,0) ; (1,-1);
(2,1) ; (0,2);
(-2,0) ; (-1,-2);
(1,-1) ; (0,1)

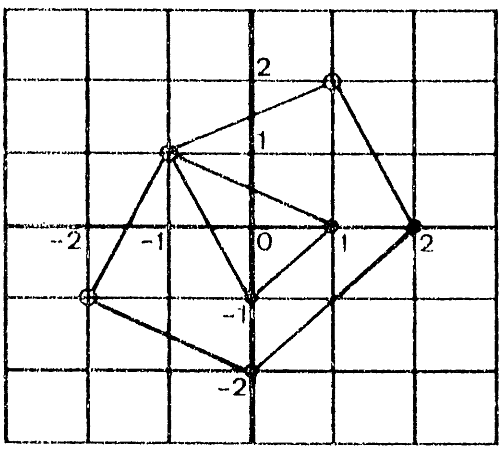
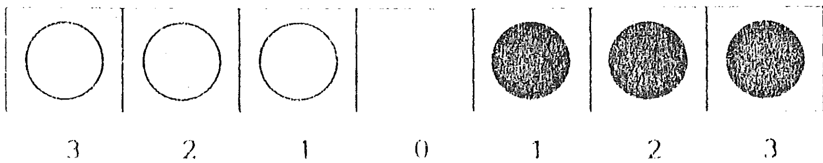


FIGURA 4

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA NEGRA (FIGURA 4)

(1,0) ; (-1,1);
(-2,-1); (0,-2);
(2,0) ; (1,2);
(-1,1) ; (0,-1)

TRES FICHAS EN CADA LADO



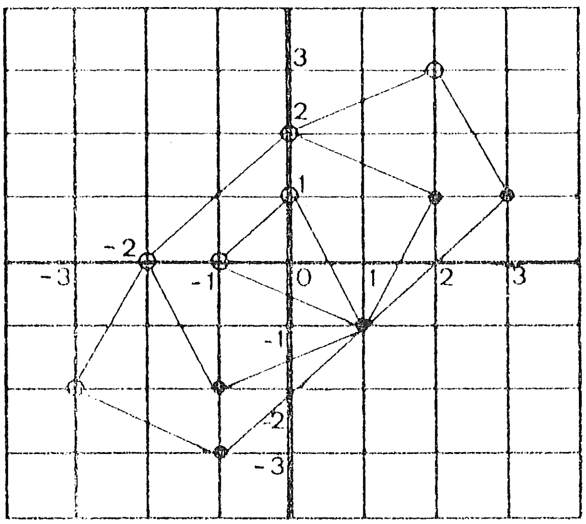


FIGURA 5

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA BLANCA (FIGURA 5)

(-1,0) ; (1,-1);
(2,1) ; (0,2);
(-2,0) ; (-3,-2);
(-1,-3); (1,-1);
(3,1) ; (2,3);
(0,2) ; (-2,0);
(-1,-2); (1,-1);
(0,1)

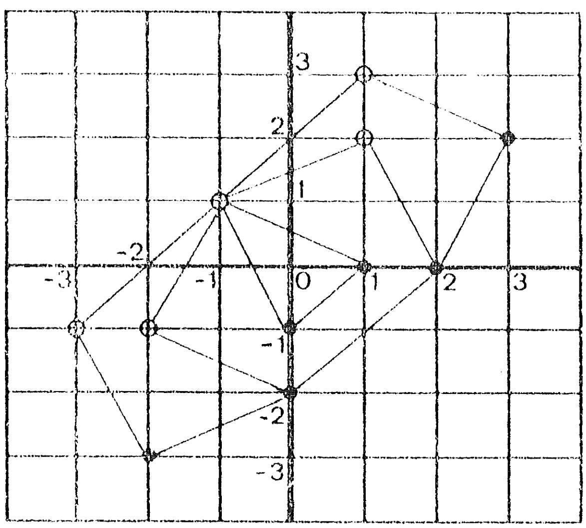
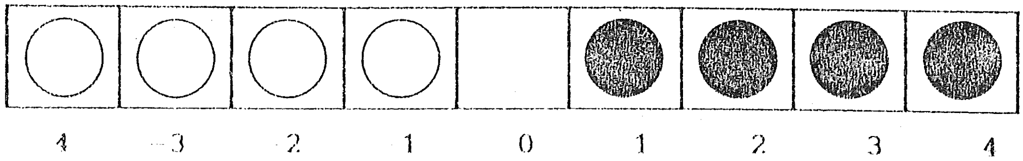


FIGURA 6

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA NEGRA (FIGURA 6)

(1,0) ; (-1,1);
(-2,-1); (0,-2);
(2,0) ; (3,2);
(1,3) ; (-1,1);
(-3,-1); (-2,-3);
(0,-2) ; (2,0);
(1,2) ; (-1,1);
(0,-1)

CUATRO FICHAS DE CADA COLOR



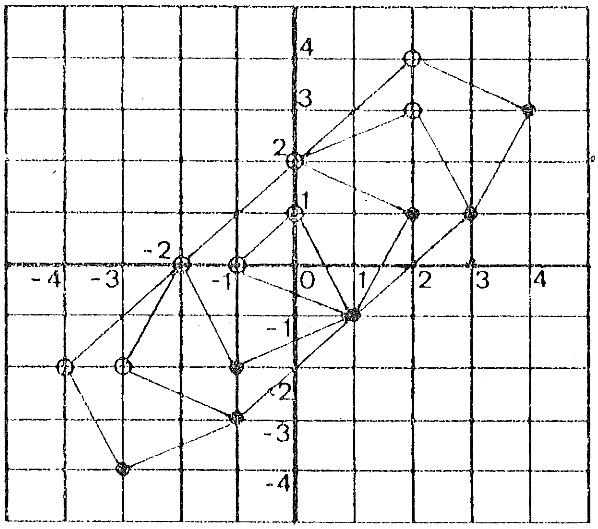


FIGURA 7

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA BLANCA (FIGURA 7)

(-1,0) ; (1,-1);
(2,1) ; (0,2);
(-2,0) ; (-3,-2);
(-1,-3); (1,-1);
(3,1) ; (4,3);
(2,4) ; (0,2);
(-2,0) ; (-4,-2);
(-3,-4); (-1,-3);
(1,-1) ; (3,1);
(2,3) ; (0,2);
(-2,0) ; (-1,-2);
(1,-1) ; (0,1)

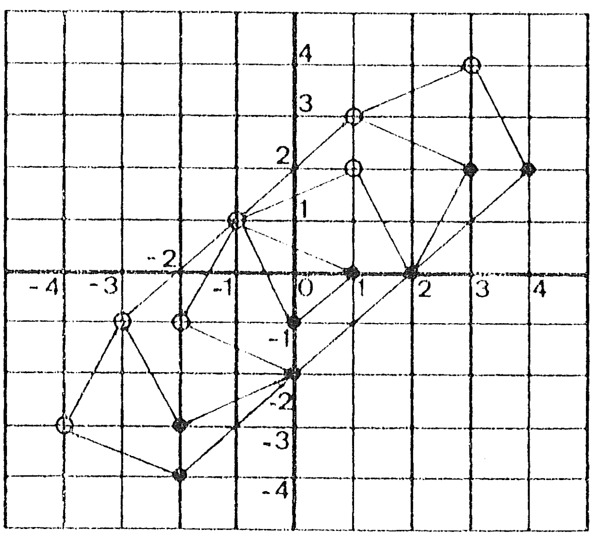


FIGURA 8

PRIMER MOVIMIENTO CON FICHA NEGRA (FIGURA 8)

(1,0) ; (-1,1);
(-2,-1); (0,-2);
(2,0) ; (3,2);
(1,3) ; (-1,1);
(-3,-1); (-4,-3);
(-2,-4); (0,-2);
(2,0) ; (4,2);
(3,4) ; (1,3);
(-1,1) ; (-3,-1)
(-2,-3); (0,-2);
(2,0) ; (1,2);
(-1,1) ; (0,-1)