

Investigación dirigida: Medición del radio de la Tierra

Víctor Arenzana Hernández
Vicente Trigo Aranda

Introducción

La génesis de este artículo fue la experiencia realizada con (y por) nuestros alumnos para que conocieran el procedimiento seguido por Eratóstenes para medir el radio de la Tierra y lo repitiesen. Es decir, un primer y claro objetivo de la experiencia era que los alumnos aprendieran un método clásico e ilustrativo de la rigurosidad e ingenio científicos; sin embargo, también nos planteamos un segundo objetivo que, a nuestro entender, es mucho más interesante y formativo: ver cómo los alumnos eran capaces de investigar por su cuenta con unas pocas indicaciones, con el fin de conocerlos mejor y tratar de fomentar las capacidades específicas de cada uno.

La experiencia consistió en ofertar a nuestros alumnos de 2º de BUP la posibilidad de repetir el experimento de Eratóstenes, de tal manera que la realización de ese trabajo (fuera del horario lectivo) sólo serviría para subir su nota. Por tanto, en este artículo se analizará la forma de trabajar de un determinado alumnao, ni el mejor ni el peor, con una característica común: su interés, al menos en lo relativo a su nota, y que, con todo, muestra una serie de iniciativas propias de una juventud creativa de la que se pueden esperar buenos frutos. Prueba de ello es que haya suscitado en nosotros tanto interés y entusiasmo como para ponernos a escribir este trabajo con

el fin de difundir las ideas y recursos que mostraron nuestros alumnos en la reproducción del método de medición del radio de la Tierra por Eratóstenes.

La importancia de la investigación dirigida en la enseñanza

El aprendizaje es fundamentalmente un ir descubriendo día a día los principios fundamentales del conocimiento, detectar dificultades, resolver pequeños problemas que se ponen en medio del problema principal que inicialmente nos habíamos planteado. Es, en último término, una actividad personal que el individuo desarrolla a través de muchos medios, pero de lo que no cabe duda es de que cuando los alumnos han realizado un «descubrimiento», por pequeño que sea, éste tiene muchos aspectos enriquecedores para su personalidad y desarrollo científico. En primer lugar adquieren confianza en sí mismos y en sus propios razonamientos; son capaces, porque *les ha subido la moral*, de leer con espíritu crítico trabajos especializados incluso de autores reputados; emplean en otros enfrentamientos con problemas el método de analogía y, lo que es importante, son capaces de abordar un problema con la esperanza de resolverlo. Todo esto no es más que una somera enumeración de la transformación que se produce en el espíritu del alumno cuando ha

realizado un pequeño descubrimiento o se siente capaz de hacerlo.

Está claro que el alumno por sí solo es difícil que lleve a cabo ninguna investigación académica que le pueda servir para su vida futura. Es por lo que adquiere en la enseñanza una importancia vital la investigación dirigida. Esto es, una investigación en la que al alumno se le plantean una serie de cuestiones a partir de un problema claramente planteado.

Hemos de hacer notar que este tipo de investigación, que, a primera vista, puede parecer escolar y un tanto artificial no dista mucho de la Investigación real. Así, por ejemplo, en la Universidad se trabaja en amplios programas de investigación claramente planteados y bien conocidos por todos los investigadores que trabajan en ese campo y las preguntas son formuladas por los propios investigadores o por un equipo. El paralelismo entre la investigación dirigida y la investigación con mayúsculas es claro. La eficacia de la investigación dirigida reside fundamentalmente en la elección de los temas a trabajar y en las sugerencias más o menos fructíferas que seamos capaces de hacer los profesores.

El sustrato filosófico general de la propuesta de la investigación dirigida está claramente emparentado con el de la resolución de problemas, pero no se limita

únicamente a abordar problemas puramente matemáticos que atraen y divierten a los alumnos con una especial disposición hacia las matemáticas. La investigación dirigida plantea cuestiones más amplias, que van desde desarrollar la capacidad de relación y el fomento de recursos humanos hasta el desarrollo del conocimiento científico.

Nosotros en esta ocasión mostraremos un ejemplo de una investi-

gación dirigida a la que los alumnos han aportado una serie de respuestas interesantes que analizaremos en los apartados siguientes.

Presentación y didáctica de la Investigación dirigida a los alumnos

La investigación se les presentó a los alumnos que deseaban subir nota por medio de una guía de

investigación elaborada a tal efecto y sin darles ninguna explicación. De esta forma, debían desarrollar la comprensión verbal, además de aprovechar los conocimientos que habían adquirido durante el mismo curso en sus estudios en las asignaturas de Geografía y Matemáticas, en las que se les habían presentado los principales conceptos que figuraban en la guía de investigación. La guía que se les presentó fue la siguiente:

Medición del radio de la Tierra

Desarrollo expositivo

Eratóstenes (275-195 a. C.) era la personificación de la típica imagen de un sabio griego que ha llegado hasta nosotros. Entre otras cosas fue preceptor de hijo del rey Ptolomeo III, conservador de la Biblioteca de Alejandría (el máximo centro del saber en aquellos tiempos) y obtuvo también una gran reputación como historiador, matemático, geógrafo y astrónomo.

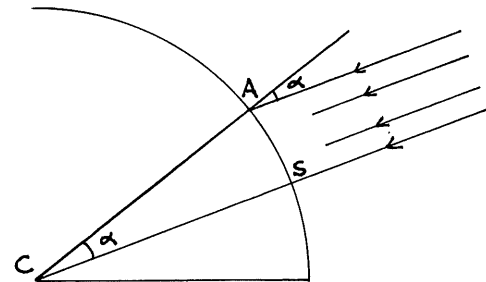
Entre los científicos de esa época, era del dominio común que la Tierra era una esfera y Eratóstenes ideó un método para calcular su radio. El procedimiento que siguió es todavía hoy un ejemplo modélico de ingenio y rigurosidad científica.

Eratóstenes tenía conocimiento de que en una pequeña ciudad junto al Nilo, Siena (la actual Asuan), había un pozo muy profundo en el que se reflejaba perfectamente el Sol el día del solsticio de verano al mediodía. Es decir, el Sol se encuentra justo sobre la vertical del lugar, por encontrarse Siena en el trópico de Cáncer.

Ese mismo día, y a la misma hora, se había observado que los rayos solares sufrían una cierta inclinación en Alejandría. De este hecho dedujo Eratóstenes que esta inclinación era debida a la esfericidad de la Tierra, por lo que midiendo el ángulo de inclinación de los rayos solares podía averiguar el radio terrestre.

Para realizar la medición tuvo en cuenta que Siena se encontraba a 5000 estadios (un estadio egipcio equivale a unos 157,5 metros) al sur de Alejandría, sobre el mismo meridiano. De esta manera se tenía el siguiente esquema:

Para medir el ángulo α que forma la vertical del lugar con los rayos del Sol al mediodía del solsticio de verano, Eratóstenes



colocó en el suelo un trozo de esfera. En el centro de ésta situó un gnomon (un palo) de altura igual al radio de la esfera. Eratóstenes observó que la sombra del gnomon sobre la esfera era aproximadamente 1/50 de su circunferencia (1/50 de vuelta equivale a 7° 7').

Por consiguiente la longitud total de la circunferencia terrestre sería: $5000 \cdot 50 = 250.000$ estadios; aunque todos los autores de la antigüedad citan la cifra de 252.000 estadios, quizá para que así cada sesentavo del ecuador (Eratóstenes dividía el ecuador en 60 partes) mida un número exacto de estadios (4.200).

De esta forma el radio de la Tierra sería:

$$\frac{252.000 \cdot 157'5}{2 \cdot \pi} \text{ metros}$$

y, tomando $\pi = 3'14$, resulta como valor del radio 6.320 Kms.

Para hacernos idea del grado de aproximación alcanzado por Eratóstenes, tengamos en cuenta que actualmente se considera que el radio ecuatorial es de 6.378'4 Kms.

Preguntas a responder

1ª) ¿En qué influye el hecho de que ambas ciudades se encuentren en el mismo meridiano?

2ª) ¿Qué sucede en los trópicos al mediodía del solsticio de verano?

3ª) ¿Realmente Alejandría y Siena se encuentran en el mismo meridiano? ¿y Siena sobre el trópico? Buscar sus coordenadas geográficas.

4ª) ¿Realmente la distancia entre ambas ciudades es de 5000 estadios de 157'5 metros? Medirla en un atlas.

Nota: Los errores de Eratóstenes en las mediciones se compensan, de tal manera que el resultado final de sus cálculos es una aproximación bastante buena del radio de la Tierra.

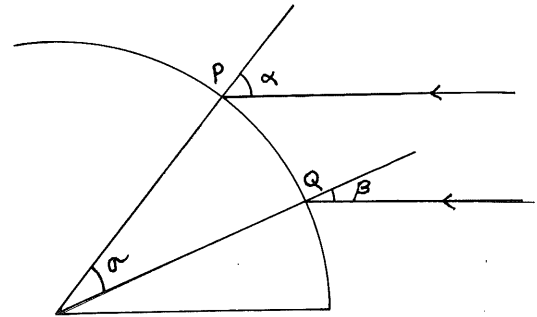
5ª) ¿Cómo crees que pudo medir Eratóstenes la distancia entre ambas ciudades?

6ª) ¿Cómo sabía Eratóstenes que la medición del ángulo se realizaba justo a la misma hora en ambas ciudades?

Medición del radio terrestre

Actualmente el reloj permite conocer la hora exacta en cualquier lugar de la Tierra, por lo que no es preciso ceñirse al mediodía de un solsticio.

Basta con conocer la distancia d entre dos puntos (P y Q) de la Tierra, que estén en el mismo meridiano, y medir los ángulos α y β de incidencia de los rayos solares en ambos lugares simultáneamente al mediodía, hora solar.



Como los rayos solares pueden considerarse prácticamente paralelos, se tiene $\sigma = \alpha - \beta$ y puede establecerse la siguiente regla de tres:

$$\frac{360^\circ}{\sigma^\circ} = \frac{2\pi R}{d}$$

de donde se deduce fácilmente el valor de R.

Trabajos a realizar

- a) Buscar en el atlas una ciudad del mismo meridiano que Zaragoza.
- b) Ponerse de acuerdo con alumnos de algún centro de enseñanza de allí y explicarles lo que deben hacer y a qué hora.
- c) Medir en un mapa la distancia entre ambas ciudades y calcular el radio de la Tierra.
- d) Presentar por escrito todos los pasos seguidos para desarrollar la experiencia (cálculos, medidas, inconvenientes surgidos, etc.), así como vuestra evaluación de ella.

Hoja 2ª

Aspectos destacables en la evaluación global de la investigación

La evaluación de la experiencia fue positiva en todos los casos de alumnos que se presentaron, pero nos alegró ver superadas nuestras expectativas en diferentes aspectos. A continuación destacamos la actuación de nuestros alumnos en una serie de frases literales, extraídas

de los trabajos que nos presentaron y que hemos agrupado según los siguientes aspectos:

a) Desenvoltura en las relaciones personales para conseguir datos que necesitaban.

Nuestros alumnos buscaron ayuda para saber la manera de determinar el mediodía y para que les midieran la sombra de un gnomon en otra ciudad situada en

el mismo meridiano. Debemos valorar en lo que vale esta capacidad de relación y búsqueda de recursos humanos para solucionar un problema planteado.

«Cabe destacar la colaboración del C.P. de Torre-Pacheco y en especial a sus profesores de Matemáticas por su inestimable colaboración, que no pusieron ningún impedimento a la hora de facilitarnos datos»

«Los inconvenientes surgidos han sido bastantes por la poca participación de las personas de otras ciudades a prestar ayuda»

«Nos pusimos en contacto con diferentes centros donde pudieran facilitarnos el dato:

- Departamento de Astronomía de la Universidad de Zaragoza donde conocían el dato pero, tras informarse del uso que iba a hacerse de él, nos sugirieron que realizáramos la medición a intervalos de un objeto, proceso que como se ha detallado en la obtención de los datos, ya se había efectuado.

- Departamentos de Astrofísica y Ciencia de la Tierra de la Universidad de Zaragoza: ambos desconocían el dato».

b) Imaginación de nuestros alumnos en la reconstrucción efectiva de cómo Eratóstenes pudo realizar la medida del radio de la Tierra.

Primer aspecto: ¿Cómo pudo realizar la medida Siena-Alejandría?

Utilizando probablemente el tiempo de viaje de una caravana o, tal vez, medidores expresamente contratados para ello»

Otra manera de medir la distancia entre las ciudades sería recorrer la vía de comunicación entre Alejandría y Siena y en cada localidad preguntar la distancia a los vecinos de allí que distaba la siguiente población también situada en el camino. La suma total sería la distancia deseada con un margen de error bastante alto»

Segundo aspecto: ¿Cómo supo Eratóstenes que las medidas eran simultáneas?

«Años antes habría observado ya este fenómeno y mediante un reloj de arena

habría tomado la medida del tiempo desde que sale el sol hasta que los rayos caen perpendiculares y tomando esa medida la llevó a Alejandría y cuando acabó de caer la arena en el reloj, tomó la medida. En Alejandría y Siena el sol sale a la misma hora»

«Para medir el ángulo que los rayos del sol hacían con un objeto en Alejandría, cuando en Siena caían perpendicularmente, Eratóstenes pudo haber entrenado a una paloma mensajera para que hiciera el trayecto Alejandría-Siena-Alejandría calculando cuánto tiempo empleaba en realizarlo. Así pudo saber cuánto invertiría en realizar únicamente el viaje de ida. Cuando faltó ese tiempo para que en Siena se produjera el mediodía solar se soltó a la paloma desde allí para que llegara a Alejandría. En el momento de llegar (aproximadamente) sería el mediodía solar en Siena y entonces Eratóstenes pudo medir el ángulo»

Algunas de las reconstrucciones aportadas por los alumnos son realmente ingeniosas y requerirían extensos comentarios, pero baste la muestra de las citas literales presentadas para mostrar la eficacia en el desarrollo de la imaginación de la **investigación dirigida**.

c) Se abrieron a la problemática que representaba en tiempos de Eratóstenes resolver el problema de la determinación del mediodía Solar.

«Para conocer el mediodía solar, con un palo hemos tomado medidas entre las 12:45 y las 13:15, y después de tomar medidas cada minuto, hemos considerado como hora del mediodía solar las 12:56, puesto que el palo proyectaba a dicha hora, la sombra menor. A través de la longitud del palo y de la sombra que proyectaba a la hora del mediodía solar, que hemos hallado, hemos averiguado la

tangente de la inclinación que forman los rayos solares con la Tierra».

d) Aportaron algunas ideas originales fruto del conocimiento de los fundamentos científicos del problema y de haber profundizado en el mismo.

Primera aportación: Medida del radio en el equinoccio de primavera.

«El día 21 de marzo los rayos caen perpendiculares sobre el ecuador. Por tanto ese día encargué a una persona que midiera la sombra que tenía un palo. Justo a las 13 horas había una nube que tapaba el sol por lo que se tuvo que retrasar unos minutos la medición.

Mediante una proporción se despeja el radio: $r = 6667,904$ Kms.

Tiene el inconveniente de poder hacerlo sólo los días 21 y 22 de Marzo y Septiembre, respectivamente»

Segunda aportación: Exigir que la distancia entre las ciudades sea grande.

«La ciudad elegida por nosotros fue Cartagena, por estar situada en el mismo meridiano con bastante exactitud y a una distancia que permita obtener un ángulo apreciable, ya que con una distancia inferior a 110 km el ángulo no puede apreciarse por ser menor a 1 grado».

e) Búsqueda bibliográfica.

Otro aspecto destacable en la **investigación dirigida** fue la consulta de libros, a iniciativa de los propios alumnos. Buscaron información por su cuenta y completaron, añadiendo datos e información encontrada por ellos, el desarrollo expositivo que se les había presentado en la Hoja 1ª. Como prueban los datos eruditos siguientes:

«En el solsticio de verano la sombra de las columnas de los templos se

hacia cada vez menor a medida que se acercaba el mediodía, y en ese instante el sol se proyectaba perpendicularmente sobre las cabezas de todos los habitantes de Siena»

«Eratóstenes, que era director de la Biblioteca de Alejandría, leyó en un viejo papiro que en Siena, al mediodía del 21 de junio, un objeto colocado verticalmente no proyectaba sombra alguna».

Para finalizar, en el siguiente cuadro se presentan algunos de los resultados cuantificables presentados en los trabajos. En el mismo se puede apreciar el grado de precisión con el que lo hicieron, las ciudades elegidas, la hora en que realizaron la medida y la distancia en Km. de Siena a Alejandría. La diferencia de las distancias obtenidas entre Siena y Alejandría es debido a que no han

Número alumnos	Segunda ciudad	Hora medida	Kms radio Tierra	Kms Siena-Alejandría
3	Cartagena	12:56	6378	900
1	Murcia	13:30	6371	--
4	Torre Pacheco	12:35	6369	280
1	Cartagena	13:28	6496	787
1	--	14:28	6350	570
1	Ansó	17:30	6026	870
4	Cartagena	12:57	6354	967
2	Ansó	17:30	6295	850
1	Teruel	12:30	6069	900

manejado Cartografía con la escala adecuada, ya que en ella los puntos que marcan en el mapa la situación de ambas ciudades tenían casi tanto diámetro como la distancia entre las mismas en el mapa. Un aspecto menos justificable es el hecho de que

se tomaran medidas a las cinco y media de la tarde.

Víctor Arenzana Hernández
Vicente Trigo Aranda
I. B. Félix de Azar. Zaragoza