Elementos de Euclides: una aplicación de la historia al aula, enfocada desde la resolución de problemas

Joaquín Fernández Gago
José Gutiérrez Bueno
Francisco Hinojosa Onieva
Damián Jiménez Vázquez
Emilio J. Muñoz Velasco

El artículo se enmarca en el trabajo del Seminario Permanente de Historia de las Matemáticas de Málaga. Se presenta aquí lo que fue una clase en que se les planteó a los alumnos una actividad construida sobre la mediatriz, extraída del Libro I de los «Elementos» de Euclides. Metodológicamente, se enfoca desde la resolución de problemas por ser éste el ambiente natural en las clases del grupo elegido.

Introducción

La acción del Seminario Permanente de Historia de las Matemáticas de Málaga tiene como eje el diseño de actividades y su puesta en práctica en las clases a través del estudio - entre otros temas - de la influencia del conocimiento y de la utilización de la Historia de las Matemáticas en el aprendizaje de su lenguaje. El hecho de centrarnos en **Historia de la Matemática** está motivado, tal como se señala en el Diseño Curricular de la E.S.O, por **la reorganización de conceptos que hace el alumno al desenfocarlos de su contexto científico actual**.

Por ejemplo, en el caso concreto del lenguaje matemático se pueden comprender su arbitrariedad y su eficacia al comparar los métodos de los griegos con los de Fermat.

También es de destacar la importancia de la historia para contribuir a que los estudiantes aprecien el papel que las Matemáticas han jugado y siguen jugando en el desarrollo científico y en el progreso de la humanidad.

Lo que aquí se presenta es producto de una clase dirigida a los alumnos de 2º de BUP del Instituto de Bachillerato «Licinio de la Fuente», en Coín (Málaga). En ella se promueve una dinámica participativa orientada desde continuas preguntas, incitando a que el alumno busque las respuestas para incidir sobre la formación y reestructuración de sus conocimientos. A la vez, se pretende que los alumnos desarrollen su capacidad de expresión oral para obtener mayor precisión en el dominio del lenguaje matemático. Esta actividad contiene muy poco del estilo deductivista de los «Elementos» de Euclides, ya que la estructura natural de la clase en que trabajamos es la típica de resolución de problemas (en el sentido que inició Polya).

Objetivos

1 Extraer el concepto de mediatriz de su actual contexto científico, enfocándolo primero desde un punto de vista empírico (previo al método deductivo de los griegos), y después desde la perspectiva de la geometría clásica (construcción de Euclides).

2 Potenciar el uso del lenguaje algebraico y observar sus ventajas e inconvenientes.

3 Relacionar los conceptos de distancia, ángulo, bisectriz, mediatriz, recta, triángulo, lugar geométrico.

4 Incitar al alumno a entender un problema por medio de preguntas tipo: ¿Cuáles son los datos?, ¿cuál es la incógnita?, ¿cuál es la condición?.

5 Incitar al alumno a usar y reconocer estrategias para resolver

problemas: hacer más fácil el problema y buscar semejanzas con conceptos o problemas conocidos, o escoger una notación adecuada.

6 Favorecer el gusto por la certeza, incitando a los alumnos a que fundamenten sus propios resultados.

7 Ver la matemática más como un proceso evolutivo que como un conjunto de resultados estáticos.

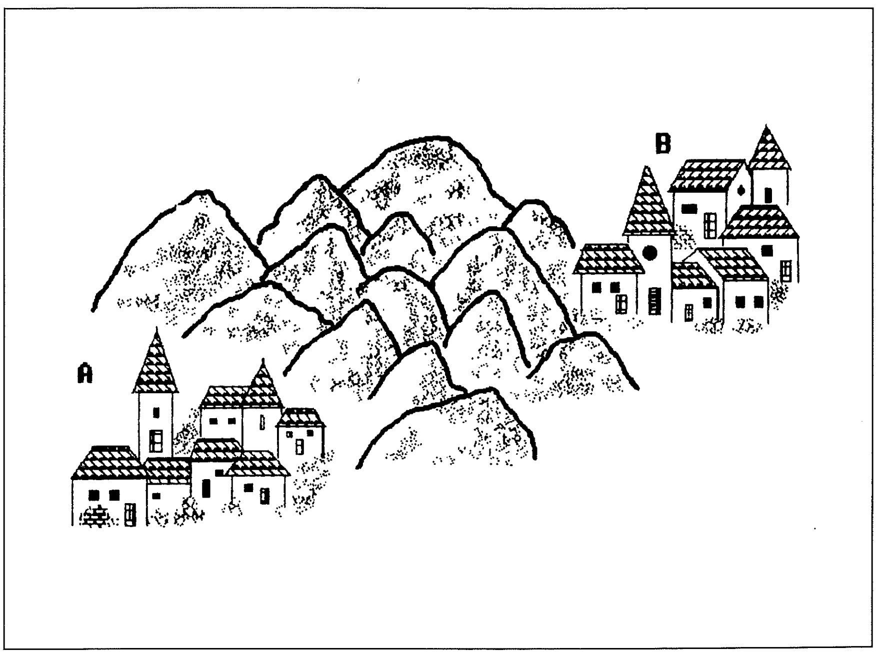
8 Incitar a los alumnos a utilizar el método ensayo-error.

Motivación

Se comienza planteando a los alumnos el siguiente problema para que lo intenten resolver como quieran.

¿Dónde situarías una fábrica que equidiste de dos pueblos separados por una cadena montañosa?

- ¿Qué se te ocurre?
- ¿Cuántas posibilidades tienes de colocar la fábrica?
- ¿Te suena algo a la asignatura de Dibujo?

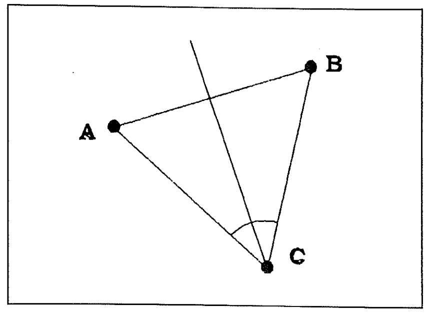


Respuestas de los alumnos

En primer lugar observamos, al pasar por sus bancas, que todos van respondiendo que sólo hay una. Mas tarde afirman que dos. Ello es porque anteriormente, con otra actividad, han construido con regla y compás un triángulo equilátero. En este punto pregunto: ¿Sólo hay dos? Rápidamente responden que hay infinitas, aunque algunos todavía no lo tengan claro. Es el momento de reorganizar la información y ver en qué se han equivocado. Pronto surgen explicaciones, afirmando que la distancia de la fábrica a los pueblos no tiene por qué ser la misma que la distancia entre los pueblos.

Construcción euclidiana

Ellos leen la que viene a continuación extraída de la Proposición 10 del Libro I de los «Elementos» de Euclides.



1º) Llamamos **AB** al segmento que queremos dividir en dos; a partir de éste construimos el triángulo equilátero **ABC**.

2º) Calculamos ahora la bisectriz del ángulo **ACB**. Esta recta es la buscada.

(Para dibujar la bisectriz de un ángulo, te será muy útil la Proposición 9, o cualquier libro de Dibujo).

Para los alumnos no presenta mucho interés, pues prácticamente ellos la habían hecho ya a partir de la Motivación.

Ejercicios

Les proponemos los siguientes:

1) En el triángulo equilátero **ACB**, la altura dividía a la base en dos partes iguales. ¿Es esto cierto en cualquier triángulo?. Intenta justificarlo.

2) Se llama mediatriz **(*)** de un segmento al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de dicho segmento. Escribe en coordenadas cartesianas la ecuación de la mediatriz de un segmento: comienza por ejemplo con los puntos **A(3,0)** y **B(0,3)**. ¿Pasa la mediatriz por el punto **(0,0)**? ¿y por **(1'5,1'5)**?. Responde de dos formas distintas a esta pregunta: por el dibujo y por la ecuación de la recta. Hazlo ahora de una forma más general eligiendo dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2).

3) Busca cinco puntos que estén a la misma distancia de **A** que de **B**.

4) ¿Qué diferencia encuentras entre lo que hizo Euclides y lo que has hecho tú en el ejercicio anterior? ¿Por qué Euclides no usó coordenadas?.

Alumnos. Sobre el primero se observan por las bancas las siguientes estrategias:

- Usar el teorema de Pitágoras. Su razonamiento consiste en que las partes en que queda dividido el segmento son los catetos de dos triángulos rectángulos iguales.

- usar la trigonometría que ya conocen: las partes en que queda dividido el segmento como el coseno de un mismo ángulo.

- doblando el papel por la altura ellos ven que son iguales.

Respecto al segundo problema se establece un diálogo muy interesante.

Profesor: **Vamos a plantear el problema**: ¿Cuáles son los **datos**?, ¿cuál es la **incógnita**?, ¿cuál es la **condición**?

Alumnos: Los datos son que distan de los pueblos igual.

Profesor: ¡Mejor, eso lo ponemos en la condición!

Alumnos: Los datos son los dos puntos o pueblos.

Profesor: **¿Cómo los llamamos**?

Alumnos: Por ejemplo A y B. (Surge la siguiente pregunta) ¿Pero quiénes son A y B?

Profesor: Como no los conocemos **hagámoslo más fácil** y supongamos que son dos puntos concretos del plano, como por ejemplo A(3,0) y B(0,3).

Centrémonos ahora en la condición.

Alumno: Yo tengo otra condición, y es que la recta es la perpendicular que divide a la distancia AB en dos.

Profesor: Está muy bien pero queda mejor expresado diciendo que es la perpendicular al segmento AB que pasa por el punto medio de AB.

Bueno ¡ya podéis atacar el problema! Usemos la estrategia **¿A qué os suena**?.

(Sigue a continuación un silencio que no entiendo muy bien). Sí, algo de lo que tenemos escrito en la condición lo hemos dado en clase.

Alumnos: ¿la distancia entre puntos? (lo dicen dudando).

Profesor: Vamos a traducirlo al lenguaje algebraico de Fermat.

Alumnos: (x,y) está en la mediatriz cuando d((x,y)(3,0)) = d((x,y)(0,3))

Profesor: Bueno ahora decidme cómo se calcula la distancia entre puntos.

Alumnos: Se busca un triángulo rectángulo en los puntos A y B.

Profesor: No hace falta que lo deduzcáis, decidme la fórmula.

Alumnos (a coro): raíz cuadrada de x_1 - x_2 al cuadrado más y_1 - y_2 al cuadrado.

Profesor: ¿Quién es aquí x_1? ¿Quién es aquí x_2? ¿Quién es y_1? ¿Quién es y_2?.

Después de pensar las variables escriben la fórmula

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

Profesor: Bueno, sólo queda ahora hacer cálculos.

Alumnos: ¿Para quitar las raíces elevamos al cuadrado?

Profesor: Sí.

Alumno: ¿Es $(x-3)^2 = x^2-9$?

Profesor: No, ¿recuerdas del año pasado la fórmula $x^2 + 3^2 - 6x$?

Alumno: ¡Ah! ¡Ya recuerdo!

Profesor: ¿Qué queda después de los cálculos?

Alumnos: $-6x + 6y = 0$

Profesor: Si os da igual $y = x$, que es la ecuación explícita de una recta.

¿Es lógico el resultado que ha salido?

Alumnos: No entiendo.

Profesor: Sí, nos ha salido una recta que pasa por el (0,0). Pero eso yo ya lo sabía sin hacer cálculos, ¿por qué?.

Alumnos: Porque (0,0) está separado de A tres unidades, y (0,0) está separado de B también tres unidades.

Profesor: ¡En efecto! ¿y por qué los puntos tienen la x igual a la y?

(Silencio que sí entiendo)

Por ejemplo, el punto (1'5,1'5) está en la mediatriz porque es el punto medio del segmento AB. Bueno, usar ahora la otra estrategia,... (pero toca el timbre y pasan de mí).

(*) Es importante aclarar que Euclides en ningún momento de la **Proposición 10** llama mediatriz a la recta que buscamos. Es más, ni siquiera demuestra que la recta buscada sea el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos.

Bibliografía

* BOYER, CARL B. **Historia de la matemática**. Ed. Alianza. Madrid (1986)

* GUZMÁN, MIGUEL DE. **Aventuras matemáticas**. Ed. Labor. Barcelona (1986)

* HEATH, THOMAS L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements**. Dover (1956)

* MASON, J.- BURTON L.- STACEY K. **Pensar matemáticamente**. Ed. Labor-MEC. Barcelona (1989)

* POLYA, G. **Cómo plantear y resolver problemas**. Ed. Trillas. México (1965)

Joaquín Fernández Gago
José Gutiérrez Bueno
Francisco Hinojosa Onieva
Damián Jiménez Vázquez
Emilio J. Muñoz Velasco
I.B. Licinio de la Fuente