

# Teselaciones Periódicas, Aperiódicas y Especiales

Francisco Jesús Salguero Andújar

Realizar una *teselación* del plano consiste en «pavimentarlo» completamente con ayuda de formas planas de dimensiones finitas. El término proviene del Latín *tesellam*, o pieza cuadrada de mármol, piedra, etc., que entraba en la composición de pavimentos de mosaico romanos. El problema -de recubrir completamente el plano mediante figuras poligonales o no-, aunque ha experimentado un espectacular desarrollo a partir de la última mitad de nuestro siglo, ha sido, no obstante tradicionalmente encuadrado dentro de lo que ha venido en denominarse «matemáticas recreativas».

Naturalmente estas cuestiones revisten alguna importancia más allá del mero pasatiempo. Cuando menos, representan un potente aliado del docente a la hora de introducir conceptos matemático-geométricos, tales como traslaciones, giros, simetrías y sumas y diferencias de ángulos entre otros muchos, que de otra forma aparecerán como entelequias ante el alumno.

## Paradojas de Gödel, Ecuaciones Diofánticas y Teselaciones Aperiódicas

¿Es el pensamiento humano una simple realización de operaciones repetitivas de enorme complejidad, o implica alguna característica no susceptible de reproducir, por ejemplo, en un ordenador tal como lo conocemos hoy?

Sabemos, a partir de una serie de trabajos publicados durante los años treinta por Kurt Gödel, Alan M. Turing y Alonzo Church, que existen problemas que no pueden ser resueltos por un ordenador por muy potente que éste sea. Gödel demostró en su trabajo de 1931 que un sistema deductivo, -incluida la aritmética ordinaria-, contiene proposiciones

que son *indecidibles*, es decir, proposiciones que son ciertas, pero cuya veracidad no puede ser demostrada dentro del sistema. La conjetura de Goldbach, por ejemplo, afirma que todo número mayor que 2 es suma de dos números primos. Nadie lo ha podido demostrar ni hallar un contraejemplo. Es posible que la conjetura sea un indecidible de Gödel.

En 1936, Alan Turing y Alonzo Church demostraron la existencia de problemas para los que no hay algoritmos finitos. Entre estos problemas, que constituyen indecidibles de Gödel, se encuentran, junto con otros, algunas cuestiones que plantean las teselaciones aperiódicas, y, más recientemente, se ha sumado a estos indecidibles, el problema de si las ecuaciones diofánticas, -sistemas de ecuaciones polinómicas de coefi-

cientes enteros con soluciones enteras-, poseen o no tales soluciones.

Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{aligned} z^3 - y - 1 &= 0 \\ yz^2 - 2x - 2 &= 0 \\ y^2 - 2xz + z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

tiene las soluciones enteras  $x=13$ ;  $y=7$ ;  $z=2$ , pero si sustituimos el 1 de la primera ecuación por un 2, el sistema no posee soluciones enteras. Ningún programa de ordenador podría decidir de una forma fiable la respuesta general a un problema de este tipo. Sin embargo, el ambiente geométrico en que se desarrollan las pavimentaciones del plano y del espacio están gobernados por este tipo de ecuaciones, y gran número de ellas se encuentran determinadas de forma precisa.

### Teselaciones planas periódicas

Se dice que un teselado es periódico cuando podemos delimitar en él una región que pavimenta el plano por traslación, esto es, desplazando la ubicación de la región sin someterla a giros ni simetrías. La teselación periódica se dice regular, si está realizada con un solo tipo de polígonos regulares. Todo polígono, -regular o no-, puede ensamblarse con otros de su misma especie o de distinta, siempre que los ángulos de cada uno, reunidos alrededor de un punto, sumen cuatro rectos.

Partiendo de la fórmula:

$$2(x_1 - 2) / x_1$$

que proporciona el ángulo interior formado por los lados contiguos de un polígono regular de  $x_1$  lados, encontrar los polígonos regulares que teselan el plano, se reduce a resolver la siguiente ecuación diofántica:

$$2x_1 - x_1x_2 + 2x_2 = 0$$

donde  $x_2$  representa el número de polígonos regulares de  $x_1$  lados que concurren en un vértice.

Esta ecuación posee tres soluciones, una de las cuales utilizan las abejas, (Fig. 1).

$$\begin{aligned} x_1=6; x_2=3 \\ x_1=4; x_2=4 \\ x_1=3; x_2=6 \end{aligned}$$

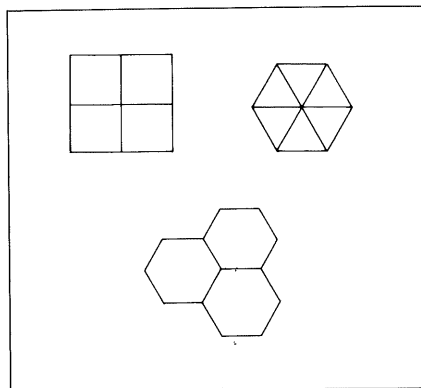


Figura 1

Una teselación semirregular consiste en una pavimentación del plano con un mosaico de polígonos regulares de vértices comunes y arbitrario número de lados. Ello equivale a resolver:

$$\sum_{i=1}^n m_i = 2 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n m_i / x_i \right]$$

donde  $m_i$  es el número de polígonos de  $x_i$  lados que concurren en un vértice.

Para el caso de sólo dos tipos de polígonos, la ecuación anterior toma la forma:

$$m_1 + m_2 = 2 \left[ 1 + m_1/x_1 + m_2/x_2 \right]$$

que tiene las siguientes soluciones, (Fig. 2):

- $m_1=3; m_2=2; x_1=3; x_2=3$ : 3 triángulos y 2 cuadrados
- $m_1=2; m_2=2; x_1=3; x_2=6$ : 2 triángulos y 2 hexágonos
- $m_1=4; m_2=1; x_1=3; x_2=6$ : 4 triángulos y 1 hexágono
- $m_1=1; m_2=2; x_1=3; x_2=12$ : 1 triángulo y 2 dodecágonos
- $m_1=1; m_2=2; x_1=4; x_2=8$ : 1 cuadrado y 2 octógonos
- $m_1=2; m_2=1; x_1=5; x_2=10$ : 2 pentágonos y 1 decágono

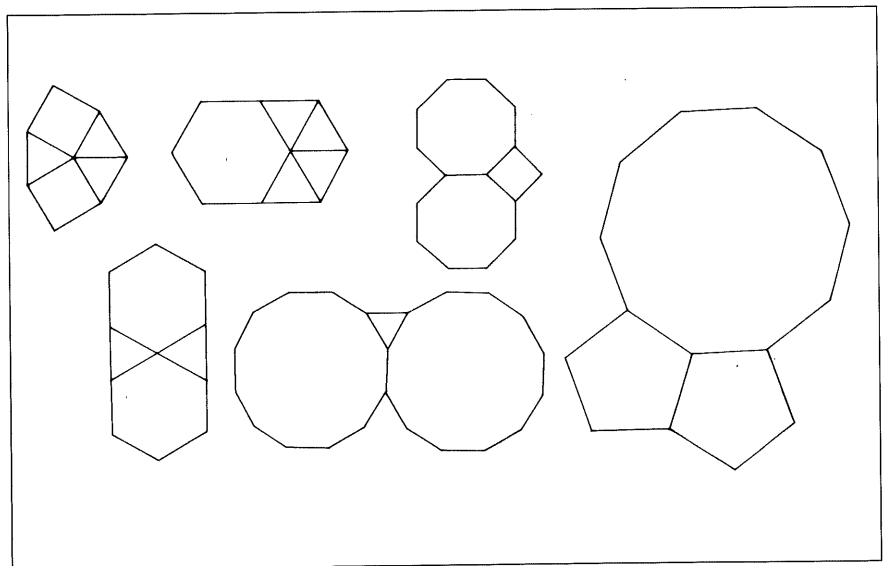


Figura 2

Las teselaciones semirregulares resultan ser, al igual que las regulares, periódicas.

El pintor holandés M. C. Escher se hizo famoso por sus numerosos grabados y litografías de mosaicos periódicos cuyas teselas adoptan formas orgánicas. Representa una ventaja notable el introducir este tipo de teselaciones en el aula a partir de figuras creadas por el propio alumno, evitando así tener que utilizar siempre polígonos regulares. Esto puede conseguirse a partir de una serie de reglas que permiten infringir modificaciones en las teselas poligonales para convertirlas en formas caprichosas, animales, vegetales, etc., y que utilizó el propio Escher para la realización de sus dibujos. Estas pueden resumirse en tres tipos de transformaciones:

**Traslación paralela:** toda parte recortada de un lado de un paralelogramo o hexágono de lados opuestos paralelos, se traslada paralelamente añadiéndose al lado opuesto, (Fig. 3):

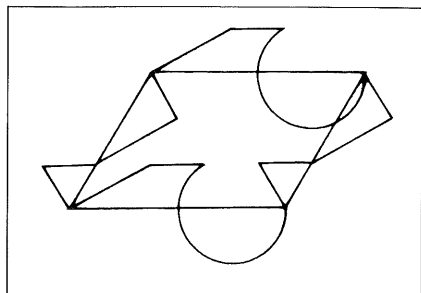


Figura 3

**Giro a partir de un lado:** al recortar una forma de un lado de un triángulo o cuadrilátero, habrá que añadirla en el mismo lado mediante un giro de  $180^\circ$  con centro en el punto medio de dicho lado, (Fig. 4):

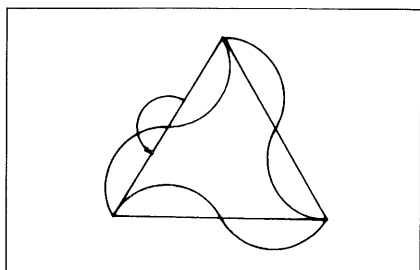


Figura 4

**Giro a partir de un vértice:** Al recortar una forma de un lado, habrá que añadirla a otro lado mediante giro de  $60^\circ$  ó  $120^\circ$  con centro en el vértice común de los dos lados. Los vértices que son centro de giro no

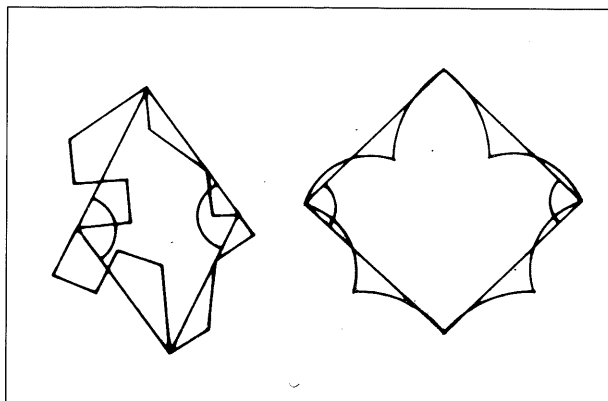


Figura 5

pueden ser consecutivos. Los giros son de  $90^\circ$  cuando los centros pertenecen a un triángulo, cuadrilátero o pentágono, (Fig. 5).

### Teselaciones Aperiódicas

Así como el hexágono regular, por ejemplo, engendra únicamente pavimentaciones periódicas, son infinitas las teselas que generan mosaicos, lo mismo periódicos que aperiódicos. De la misma forma, es relativamente sencillo convertir una teselación periódica en aperiódica, seccionando, por ejemplo las teselas en dos y alterando las orientaciones con el fin de evitar la periodicidad, (Fig. 6):

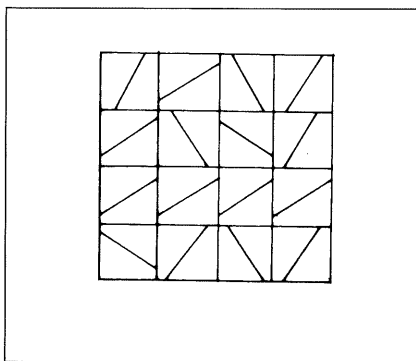


Figura 6

Cabría entonces preguntarse: ¿existirán juegos de teselas que tan sólo engendren pavimentos no periódicos?, es decir, que ninguna de sus piezas por separado, ni ninguno de sus subconjuntos, ni el juego completo engendren pavimentaciones periódicas, mientras que utilizándolas todas si sea posible un mosaico aperiódico.

Existen dos juegos de teselas, basadas en el pentágono regular, y descubiertas por Roger Penrose en 1974, que generan pavimentaciones exclusivamente aperiódicas del plano. Uno de estos pares es conocido como *rombos de Penrose* y se compone de un par de rombos cuyos ángulos interiores mayor y menor miden respectivamente  $108^\circ$  y  $72^\circ$  para el rombo de mayor área y  $36^\circ$  y  $144^\circ$  para el de menor área, (Fig. 7). Los lados de dichos rombos son iguales.

Pero cualquier rombo puede teselar el plano de forma periódica. Ahora bien, se pueden hacer en las teselas, mediante las reglas vistas anteriormente, dientes y entalladuras en los lados, que dispuestas de forma conveniente impidan la pavimentación periódica.

El otro par de teselas descubiertas por Penrose son denominadas por John Horton Conway, «dardos» y «cometas» respectivamente, y pueden deducirse del rombo de Penrose de mayor área sin más que dividirlo en dos de la forma que se indica en la figura 8, es decir, imponiendo que los ángulos interiores que forman los lados de las teselas sigan siendo múltiplos de  $(360/10)=36^\circ$ .

Para impedir que estas teselas generen pavimentaciones periódicas bastará añadirles dientes y entalladuras que impidan formar con ellas el rombo de Penrose de mayor área.

Los teselados que forman dardos y cometas, así como los que generan los rombos de Penrose, están fuertemente relacionados entre sí y con el número  $\Phi$ , sección áurea de un segmento. Cualquier teorema o propiedad relativo a dardos y cometas tiene su homólogo en los rombos y a la inversa. El número de dardos y cometas, así como de rombos de área grande y pequeña se encuentran en proporción áurea. Es decir, en un

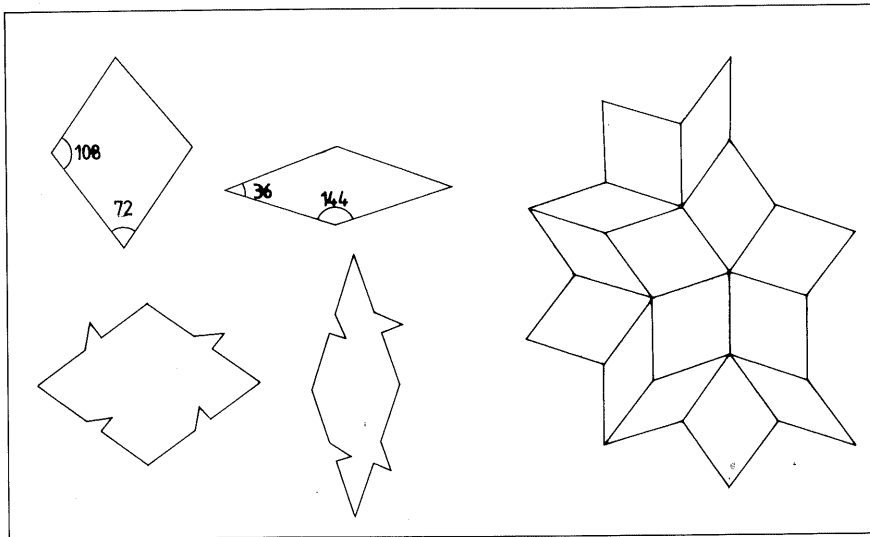


Figura 7

mosaico aperiódico infinito la proporción entre rombos de área grande y pequeña, o entre dardos y cometas es exactamente  $\Phi$ , (1,618033...).

Otra curiosa e importante propiedad que muestran las teselaciones de Penrose es el denominado *Teorema del Isomorfismo Local*, -cuyo cumplimiento imputan también al Universo algunas teorías cosmológicas-, por el cual, todos los teselados de Penrose, -ya sea de dardos y cometas o de rombos-, son indistinguibles. Se puede demostrar que cualquier región finita de cualquier teselación infinita de Penrose, forma parte de cualquier otro de tales pavimentos, de tal manera que sólo resulta posible distinguir dos teselados cualesquiera en el límite, inalcanzable. De otra forma: cualquier punto de una teselación de Penrose pasa por ser su centro, ya que desde todos sus puntos presentará un aspecto similar.

**Zonoedros**

Estos dos pares de teselas, así como otros, que también pavimentan el plano de forma aperiódica, pueden ser obtenidos a partir de una operación en el plano bien sen-

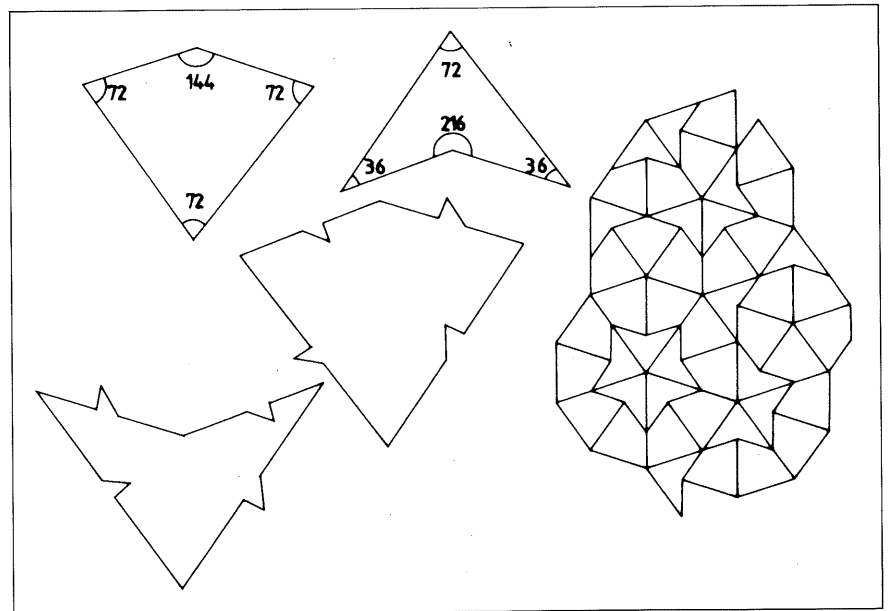


Figura 8

cilla: el giro de un pentágono o un decágono regulares alrededor de uno de sus vértices, (Fig. 9).

Las configuraciones engendradas al aplicar una rotación completa a un polígono regular son cier-

tamente notables, no sólo por la generación de las teselas de Penrose, sino porque son la base a partir de la cual puede construirse una familia infinita y numerable de poliedros sorprendentes y a la que Antonio Sáseta, arquitecto, profesor de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla, con quien estoy en deuda por haberme iniciado hace años, -sin él saberlo-, en el estudio de estos cuerpos, denomina Polipiedros.

Los Polipiedros son poliedros que se engloban dentro de la familia de los Zonoedros. Existe un Polipiedro para cada una de las rotaciones que podemos infringir a los polígonos regulares. Dichas rotaciones pueden considerarse proyección orto-

gonal de cada uno de ellos sobre un plano perpendicular al eje de máxima simetría del poliedro. Constituyen por tanto una familia infinita y numerable, de la cual se han representado en la figuras 10a y 10b los ocho primeros.

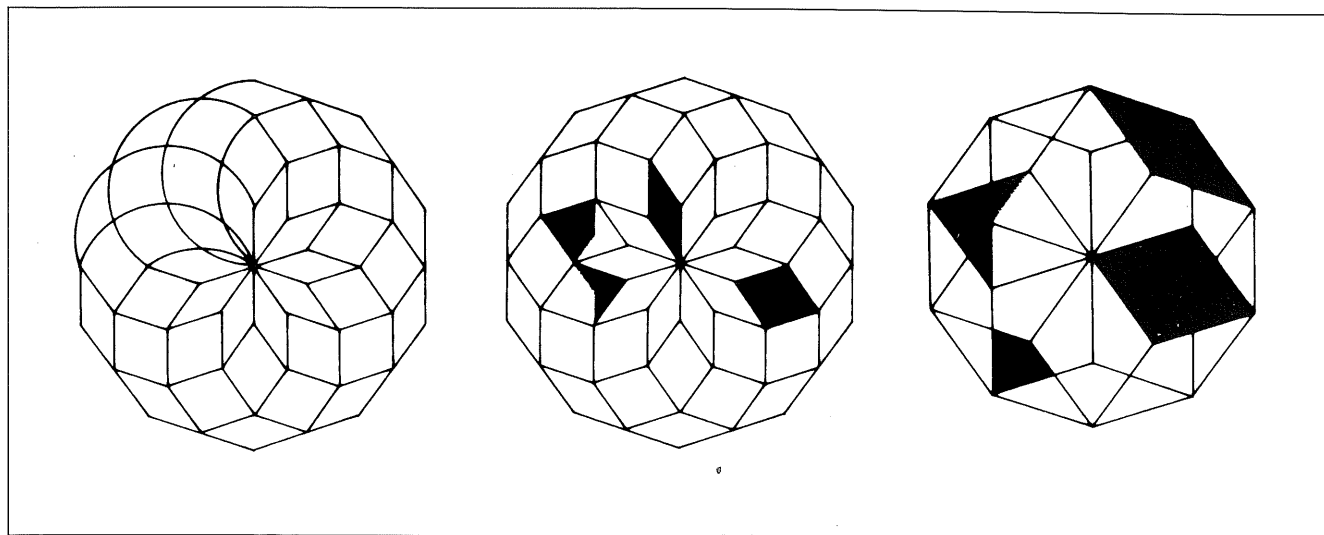


Figura 9

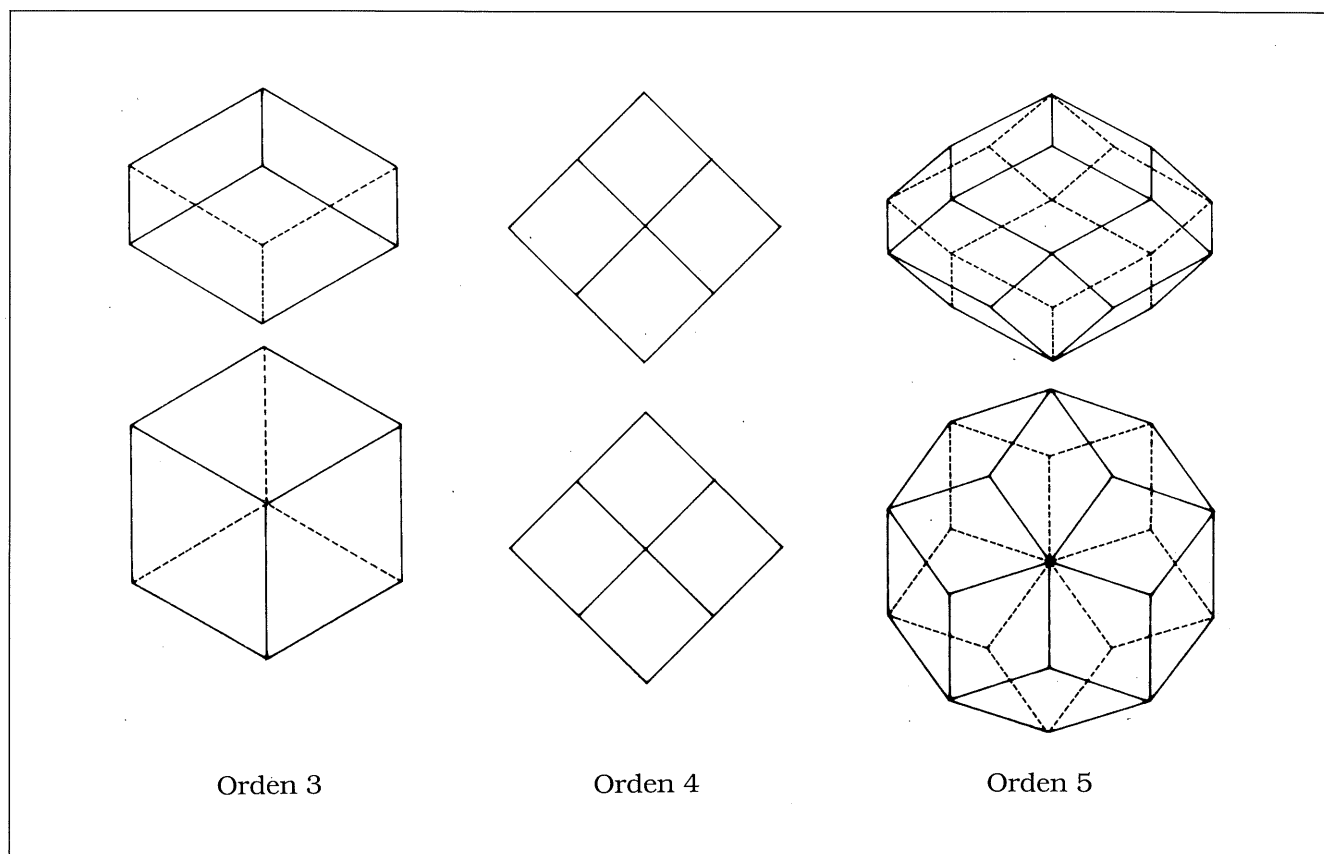


Figura 10a

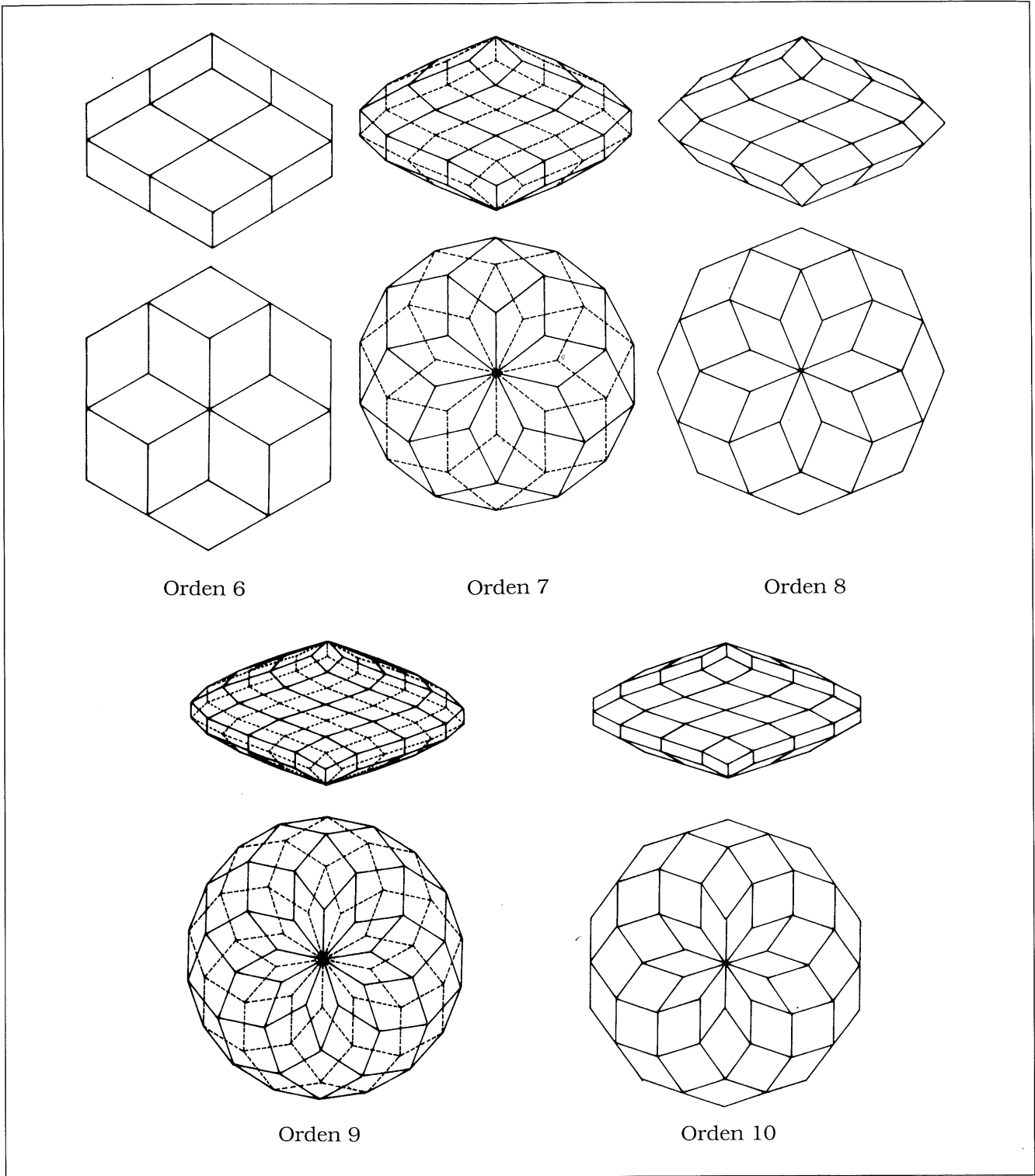


Figura 10b

Todas las caras de los polipiedros son rombos de lados iguales, de donde se deduce que son poliedros equiláteros, es decir, con sus aristas de igual longitud. El número de caras está relacionado con el número de lados del polígono generador,  $L$ , siendo aquéllas en número igual a  $C=L(L-1)$ . Podríamos entonces distinguir dos subfamilias: aquella en la que el número  $L$  es par, -polipiedros de orden par-, y la otra en la que el número de lados del polígono generador es impar. Los polipiedros de orden par son simétricos respecto de su sección polígono regular máximo, y antisimétricos los de orden impar.

Conforme aumenta el número de lados del polígono generador, obtendremos lógicamente polipiedros con mayor número de caras que son *automorfos*, aunque en el límite no se forma un objeto fractal.

El siguiente listado BASIC, proporciona las coordenadas espaciales  $X, Y, Z$  de cualquier polipiedro ya sea de orden par o impar, a partir del número de lados del polígono generador,  $L$ , y del radio de la circunferencia,  $R$ , que circunscribe a su sección polígono regular máximo:

```

10 INPUT «RADIO»;R
20 INPUT «LADOS»;L
30 PI=3.1415926535#
40 A=PI/L
50 DIM R(L/2)
60 IF ((L/2)-(INT(L/2)))<>0 THEN 270
70 FOR I=L/2 TO 0 STEP -1
80 R(I)=R*COS((2*PI)-(I*A))
90 NEXT I
100 FOR I=L/2 TO 0 STEP -1
110 B=0
120 IF ((I/2)-(INT(I/2)))<> 0 THEN B=A
130 FOR J=0 TO (L-1)
140 X=R(I)*COS(PI/2-2*J*A-B)
150 Y=R(I)*SIN(PI/2-2*J*A-B)
160 IF L=0 OR L=2 THEN 210
170 Z1=(L/2-I)*(R*(SIN(A)))
180 Z2=(L-(L/2-I))*(R*(SIN(A)))
200 PRINT X,Y,Z1
210 IF I=0 THEN 240
220 PRINT X,Y,Z2
230 IF I=L/2 THEN 250
240 NEXT J
250 NEXT I

```

```

260 END
270 DI=L/2
280 DIM R((L-1)/2)
290 FOR I=(L-1)/2 TO 0 STEP -1
300 R(I)=(R*COS((2*PI)-((I+.5)*A)))/
(COS(A/2))
310 IF I=0 THEN R(I)=0
320 NEXT I
330 FOR I=(L-1)/2 TO 0 STEP -1
340 B=0
350 IF ((I/2)-(INT(I/2)))=0 THEN B=A
360 FOR J=0 TO (L-1)
370 X1=R(I)*COS(PI/2-2*J*A-B)
380 X2=R(I)*COS(PI/2-2*J*A-B-A)
390 Y1=R(I)*SIN(PI/2-2*J*A-B)
400 Y2=R(I)*SIN(PI/2-2*J*A-B-A)
410 IF L=1 OR L=3 THEN 450
420 Z1=(L/2-DI)*(R((L-1)/
2-2))*(SIN(A))/(COS(A/2))
430 Z2=DI*(R((L-1)/2-2))*(SIN(A))/
(COS(A/2))
440 GOTO 470
450 Z1=(L/2-DI)*(R*(SIN(A)))/(COS(A/2))
460 Z2=DI*(R*(SIN(A)))/(COS(A/2))
470 PRINT X1,Y1,Z1
480 PRINT X2,Y2,Z2
490 IF I=(L-1)/2 THEN 510
500 NEXT J
510 DI=DI-.5
520 NEXT I

```

De entre todos los zonoedros así obtenidos existen algunos de especial interés. El polipiedro de orden 3 es más conocido con el nombre de *romboedro*, y además presenta la característica de ser un poliedro equifacial, es decir, con todas sus caras iguales. Otros poliedros equifaciales son el de orden 4, -*dodecaedro rómbico*-, que además es semirregular, -es decir, existe una esfera tangente a todas sus caras-, y el de orden 5, al que Antonio Sáseta denomina «*Polide Oro*», y que constituye un icosaedro rómbico equifacial de interesantes posibilidades.

### Teselaciones romboédricas aperiódicas

Existen dos romboedros equifaciales cuyas caras tienen sus diagonales en proporción áurea, -por lo que son conocidos como romboedros

áureos-, y que teselan aperiódicamente el espacio mediante reglas adecuadas sobre acoplamiento de caras. El desarrollo de estos cuerpos, -preparados para ser recortados en papel y montados uniendo solapas al interior de las caras con algún adhesivo-, se muestra en la **figura 11**, constituyendo un buen ejercicio para la clase su construcción y unión, permitiendo así al alumno investigar las reglas por las que se impide la teselación periódica. Llamaremos a estos romboedros, por su forma, «*agudo*» y «*obtuso*».

La relación entre romboedros áureos, rombos de Penrose y polipiedros es inmediata: con 5 romboedros agudos y 5 obtusos convenientemente unidos se forma el icosaedro rómbico equifacial de orden 5. La proyección ortogonal de este polipiedro sobre un plano perpendicular a su eje de máxima simetría, muestra los rombos de Penrose.

Pero volvamos por un momento a las teselaciones mediante dardos y cometas: la más interesante de ellas es la denominada «*rueda de carro*», (**Fig. 12**).

Fijemos nuestra atención en los motivos semi-infinitos marcados en gris y que Conway denomina «*gusanos*». Existen dos gusanos completos que se extienden a través de la rueda central. A parte de estos dos «*diámetros*», y el interior de la rueda, la configuración presenta simetría decagonal. Supongamos que «*vaciamos*» de teselas la rueda central y volteamos uno de los gusanos. Este gusano seguirá encajando con todas las teselas vecinas, sin embargo, ahora será imposible teselar la rueda central, quedando un **hueco**, en el sentido de región vacía dentro de una pavimentación infinita y que es imposible de teselar legalmente. Esto es posible hacerlo con cada uno de los gusanos, que son 10, con lo que eliminando combinaciones iguales

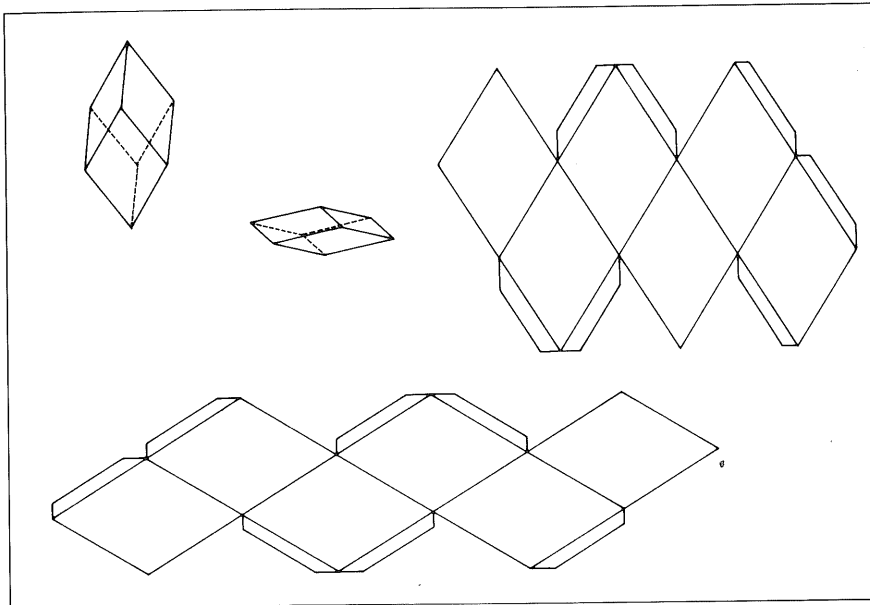


Figura 11

por giro o simetría, obtenemos 60 huecos que poseen una propiedad notable: *imponen el motivo que lo rodea*. Esto huecos son denominados por Conway, «decápodos» porque pueden ser pavimentados por 10 triángulos isósceles mitades de un dardo.

Si asimilamos el decápodo a una pieza maciza, cada una de ellas puede ser considerada como la imperfección que solidifica un cristal, pues impone una única pavimentación del plano para cada una. En cuanto a la teselación romboédrica espacial aperiódica, ya sabemos que 5 romboedros agudos y 5 obtusos componen un icosaedro rómbico equifacial. Añadiendo 5 más de cada tipo, obtenemos un **triacontaedro rómbico**, poliedro semirregular de 30 caras rombo iguales. Si seguimos añadiendo romboedros adecuadamente, orlando el triacontaedro con más romboedros de ambos tipos, podemos originar otro triacontaedro, y así continuar obteniendo triacontaedros cada vez mayores hasta teselar completamente el espacio de una forma no periódica.

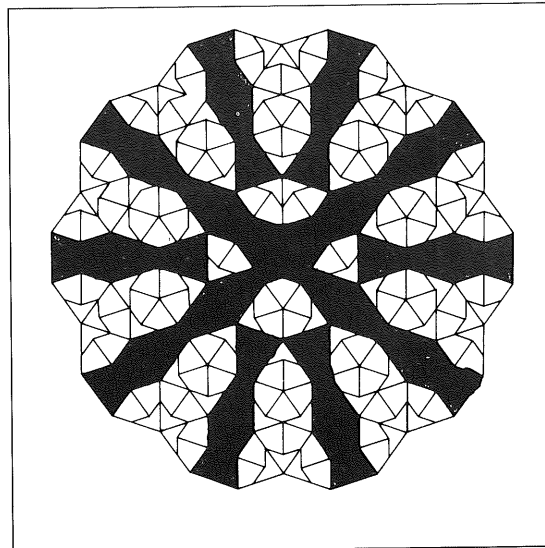


Figura 12

Sin embargo, el icosaedro rómbico del que partimos no puede volver a ser obtenido mediante ninguna teselación fractal infinita, quedando en el interior de la teselación anterior como una impureza que invita a plantear conjeturas como las que propone Antonio Sáseta:

¿Impondrá, al igual que los decápodos de Conway, el icosaedro rómbico equifacial una determinada teselación cristalina del espacio?

¿Existirá un conjunto finito de decápodos en el sentido de huecos en el espacio que impongan un determinado empaquetamiento del mismo?

### Bibliografía

[1] GARDNER, M. (1990) **Mosaicos de Penrose y Escotillas Cifradas**. Labor. Barcelona.

[2] DÍAZ MARTÍNEZ, E. (1989) **Poliedros semirregulares. Parte I. Poliedros Equiángulos**. Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica. Universidad de Sevilla.

[3] DÍAZ MARTÍNEZ, E. y ORTEGA NIETO, L. A. (1993) **Poliedros Semirregulares. Parte II. Poliedros Equifaciales**. Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica. Universidad de Sevilla.

[4] SÁSETA VELÁZQUEZ, A. y otros (1992) **3<sup>as</sup> Jornadas de Informática Aplicada a la Arquitectura**, pp. 49 a 54. Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Universidad de Sevilla.

[5] PÉREZ SORDO, M. T. y NESTARES PLEGUEZUELO, P. (1990) **Tramas geométricas en la Decoración Cerámica de la Alhambra**. Universidad de Granada.

[6] PENROSE, R. (1991) **La Nueva Mente del Emperador**. Mondadori.

**Francisco J. Salguero Andújar**  
Departamento de Ingeniería de  
Diseño y Proyectos  
Universidad de Huelva