SUMA

Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Número 13 - 1993

DIRECTOR:
Sixto Romero Sánchez

SUBDIRECTOR :
José Antonio Prado Tendero

ADMINISTRADOR:
Manuel J. Hermosín Mojeda

CONSEJO DE REDACCIÓN:
Juan José Domínguez Alarcón
José Antonio Acevedo Díaz
Pedro Bravo Sánchez
Teresa Fernández Rodríguez
José Romero Sánchez

PORTADA:
Manuel J. Hermosín

CONSEJO EDITORIAL:
Juan Antonio García Cruz, S.C.P.M. "I. Newton"
Claudi Alsina Catalá, Representante en el "ICMI"
Mercedes Casals Colldecarrera, SCPM "Puig Adam"
Carmen da Veiga Fernández, Grupo "Azarquiel"
Francisco Javier Muriel Duran, Soc. Extremeña de Prof. Mat.
Vicens Font Moll, Grup "Zero"
Salvador Guerrero Hidalgo, SAEM "Thales"
Angel Marín Martínez, SNPM "Tornamira" MINE
Magda Morata Cubells, Grupo "Cero"
Florencio Villarroya Bullido, SAPM "P.S. Ciruelo"
Antonio Pérez Sanz, Soc. Madrileña Prof. Matemáticas
José A. Mora, Soc. Prof. de Matemáticas de Alicante.

EDITA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas
"P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas
"Isaac Newton"
Presidente: Manuel Fernádez Reyes
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellonenca de Matemáticas
Presidente: Timoteo Briet Blanes
C/ Mayor, 89. 12001-Castellón

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira"
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n.
31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante
Presidente: Germán Torregrosa
Apartado 1009. 03080-Alicante

Sociedad Extremeña de Educación Matemática
"Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-Mérida

Depósito legal: Gr. 752 - 1988
I.S.S.N.: 1130 - 488X
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Armilla (Granada)

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1304. 21080 (Huelva)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envío)

ARTÍCULOS

RIO

IDEAS PARA LA CLASE

RECURSOS PARA EL AULA

INFORMACIÓN

RESEÑAS

MISCELÁNEA

Suplemento "Para Coleccionar"

1ª Parte del listado de trabajos aparecidos en Scientific American

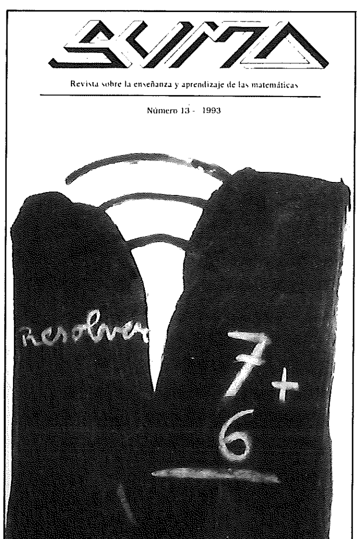
EDITORIAL

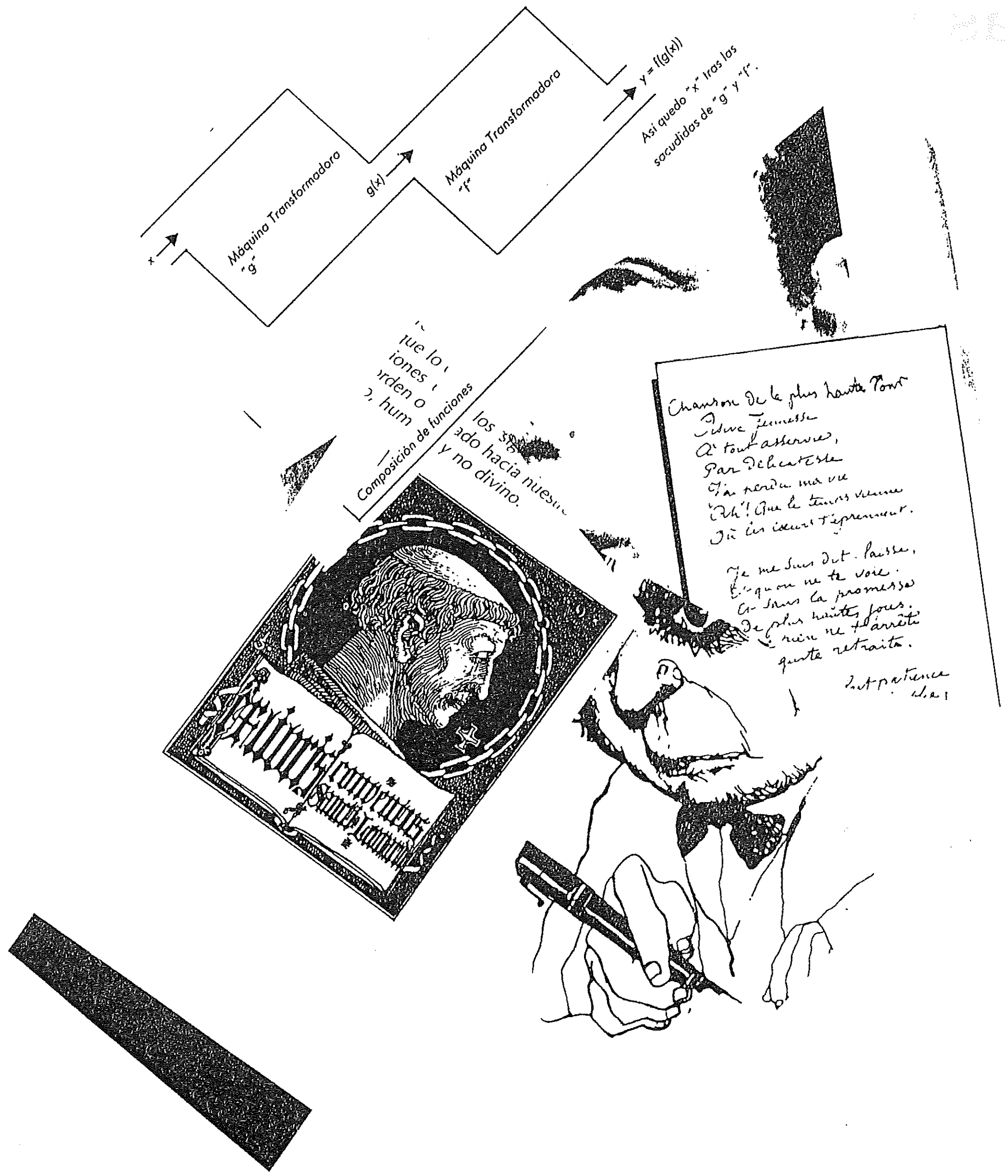
¡Número emotivo y enigmático a la vez, el trece!

Vamos, conscientemente, con el permiso de todos los lectores, a eludir en esta ocasión la constante mantenida en las editoriales de números anteriores.

Sin más, el presente número queremos dedicarlo a la memoria de los profesores Castro Brzezicki y Rúbies i Garrofét.

¡Gracias por la importante colaboración al desarrollo y mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en nuestro país!





Máquina Transformadora "g"
g(x)
Máquina Transformadora "f"
y = f(g(x))
Así quedo "x" tras las sacudidas de "g" y "f".
Composición de funciones
y no divino.

ARTÍCULOS

Nuevas tendencias en la matemática y su enseñanza

Elfriede Wenzelburger Guttenberger

El destino supremo de la matemática consiste precisamente en encontrar el orden oculto en el caos que nos rodea.

Norbert Wiener, 1981.

En el artículo se destaca la importancia de la matemática en todos los ámbitos de la cultura humana y en particular en las ciencias - por un lado en las ciencias físicas y por otro lado en las ciencias sociales.

La edad de oro, que vive actualmente la matemática, está estrechamente relacionada con la revolución de informática que vivimos.

Se plantea que la computadora ha cambiado la manera de hacer matemáticas. La matemática ha adoptado ciertas metodologías de trabajo de las ciencias experimentales. Exploración y descubrimiento a través de actividades como observar, hacer predicciones, probar hipótesis, conducir ensayos, controlar variables, etc., son ahora propios de la investigación de la nueva matemática experimental.

La enseñanza de la matemática también se ve afectada por la presencia de las microcomputadoras ya que hay que revisar contenidos y métodos de enseñanza. Esto requiere que los profesores de matemática, especialmente del nivel medio-superior tendrán que actualizarse con tópicos contemporáneos como son las matemáticas discretas, métodos interactivos, conjuntos borrosos, fractales, caos y catástrofes entre otras.

Se ilustran estos cambios en contenidos y métodos de enseñanza con los cursos de Cálculo y Álgebra y se insiste en la importancia de incluir computadoras y calculadoras en los diseños didácticos para visualizar conceptos y experimentar.

Introducción

Cuando Lebesgue desarrolló su análisis de la relación entre la lógica y la aritmética (Lebesgue, 1931), escribió que la matemática fue creada por el hombre por necesidad para resolver sus problemas y dedujo que el profesor de matemáticas debe ser un profesor de "acción". La matemática es la ciencia que tiene más conexiones culturales (Howson, 1986) y responde a las exigencias de distintas sociedades lo cual ha conducido al desarrollo de nuevas ideas matemáticas.

En las últimas décadas las matemáticas han sido reconocidas como herramienta importante y esencial en muchas disciplinas y desarrollos tecnológicos.

Estamos cada vez más cerca de que se cumpla el sueño de Descartes de una matematización del mundo (Davis, Hersh, 1986).

Es muy conocido que las matemáticas han sido esenciales en las teorías físicas ya que hay un paralelismo entre las diversas ramas de la matemática y las grandes síntesis de la filosofía natural métodos matemáticos permitieron avanzar a los teóricos de la física que a su vez plantean problemas que llevan a nuevas adquisiciones matemáticas. El ejemplo clásico de lo último es el descubrimiento del análisis infinitesimal por Newton y Leibnitz, mientras que aplicando las ideas abstractas que 50 años antes habían desarrollado Gauss y Riemann, Einstein elaboró su teoría de la relatividad (Bergamini, 1964).

Pero no sólo la física, también la economía o linguística, entre otras, requieren un nuevo nivel de matematización (Trillas, 1980). La matemática surgió desde siempre del estudio de las reglas para escudriñar la naturaleza y llegar a conocer todo lo que existe.

La biología y medicina como ciencias de la vida adquieren cada vez un carácter más matemático. Lo mismo sucede en la sociología y psicología. Las matemáticas también han llegado a la composición musical, la coreografía, la poesía y a otras artes, muchas veces a través de una informatización. Como ejemplo, para grabaciones de música se filtran las ondas mediante transformaciones de Fourier.

Aún más, nuestra vida cotidiana está impregnada por el pensamiento matemático, de pronto de manera trivial, de pronto de manera compleja (Alvarado, 1990). Es posible en la actualidad vivir sin música y sin literatura, pero sin matemáticas es imposible.

La teoría de la complejidad y la teoría de juegos han invadido la filosofía y la religión. Hay pocos campos en los que las matemáticas no hayan penetrado o no puedan penetrar.

Avances de la matemática y cambios en sus métodos de investigación

El impacto de la revolución de información que actualmente vivimos a causa del avance tecnológico en equipos de computación se siente en los avances en ramas tradicionales de la matemática, en la aparición de nuevas ramas y en la metodología de trabajo de los matemáticos investigadores. Además es indiscutible el papel crucial que la matemática juega en los aspectos teóricos de la computación.

Las informatizaciones, en general, tienen un sustrato matemático y una computadora es un instrumento matemático por excelencia.

Las computadoras ofrecen nuevas maneras de escritura y de cálculo y permiten ver las ideas más tradicionales de una nueva perspectiva.

Las áreas nuevas o descubiertas nuevamente para la investigación en matemáticas incluyen ecuaciones no lineales de ondas, trabajos relacionados con funciones de Weierstrass, Takagi y la función singular de Lebesgue. Las computadoras tienen también un impacto en la teoría de grupos, combinatoria, teoría de números, geometría y análisis matemático, para mencionar los más importantes (ICMI, 1986).

Es conveniente aquí mencionar la metáfora de la matemática como un árbol grande y frondoso con raíces, tronco y ramas que crece en el tiempo (Davis, Hersh, 1982). En las últimas décadas ese árbol creció rápido y sigue creciendo. Se estima que la matemática conocida se puede representar en unos 100.000 volúmenes de una biblioteca. La estructura fina que se puede dar a estos escritos matemáticos consta de 3.000 categorías. Según estimaciones de la productividad anual de la comunidad matemática se habla de unos 200.000 teoremas nuevos lo cual pone al matemático investigador ante un dilema: es imposible mantenerse al tanto ni siquiera en los resultados más destacados. Este desarrollo dinámico y acelerado de la matemática parece no tener fin. Sin embargo, la cantidad de matemáticas "vivas" que en algún momento existe tiene límites por lo cual especialidades más viejas serán desechadas conforme surjan las nuevas y con ellas metodologías de investigación novedosas.

La idea de la demostración matemática como una cadena de deducciones a partir de los axiomas, ha sido afectada por las computadoras que sugieren resultados que luego se prueban o que han realizado demostraciones como en el caso del teorema de los cuatro colores. En ocasiones se generan contraejemplos con la computadora y se refutan conjeturas.

Demostraciones por computadora a veces se critican porque se basan en "la fuerza bruta" por ejemplo, un análisis exhaustivo de todos los casos. Pero este método puede generar sistemas expertos que hacen matemáticas para cumplir el sueño de Leibnitz de una "máquina calculadora racional".

Algunas ramas de la matemática como, por ejemplo, la teoría de números siempre han sido abiertas a la experimentación la cual es más factible con computadoras. Experimentos llevan a conjeturas y a veces a teoremas. En estadística, por ejemplo, experimentación puede hacerse a través de simulaciones o análisis exploratorio de datos.

La matemática experimental está ganando cada vez más adeptos y ya existen revistas como el "Journal of Experimental Mathematics", algo inconcebible hace algunos años.

El interés en métodos iterativos ha sido revivido por las computadoras y se obtuvieron resultados fascinantes, como por ejemplo, la teoría de los fractales. La necesidad de encontrar algoritmos económicos para la programación de computadoras ha llevado a la teoría de las complejidades. La existencia de paquetes simbólicos alivia el trabajo "pesado" para los matemáticos y los anima a atacar problemas considerados inaccesibles. (ICMI, 1986).

Ilustramos el impacto de las computadoras en la enseñanza matemática con el ejemplo de un curso clásico en el currículo matemático, el cálculo.

Durante muchos años, el cálculo diferencial e integral ha sido el núcleo de los primeros semestres de matemáticas en la universidad. La introducción de computadoras a la enseñanza en las universidades puede tener varios efectos para estos cursos de cálculo, por un lado va a cambiar la metodología de enseñanza y por otro lado el mismo contenido de los cursos. (Seidman, Rice, 1986).

Para los matemáticos el cálculo representa métodos y técnicas para estudiar funciones que pueden ser definidas en los números reales, en espacios euclidianos de 2, 3 ó n dimensiones o en el plano complejo. El cálculo efrece al alumno herramientas formales y abstractas para el estudio de las matemáticas superiores. Por otro lado, el cálculo representa las bases para aplicaciones de las matemática a las ciencias físicas y las ingenierías. Todas las aplicaciones basadas en el cálculo están relacionadas con modelos matemáticos que pueden considerarse contínuos, e.d. definidos en los números reales. El cálculo predominaba justamente por las numerosas aplicaciones de las matemáticas contínuas.

Pero en los últimos años se ha incrementado considerablemente el interés en aplicaciones de las matemáticas discretas: combinatoria, métodos de conteo, inducción, recurrencia, teoría de grafos, árboles, máquinas finitas, codificación y álgebra booleana; este interés está relacionado con el uso cada vez más amplio de computadoras y representa un reto para el currículo tradicional de cálculo. Existen por un lado tendencias de incluir más métodos numéricos en cálculo, por el otro lado hay que tomar en cuenta la existencia de paquetes de software que manejan símbolos haciendo el estudio de las técnicas de diferenciación e integración aparentemente obsoletos.

Los conceptos básicos del cálculo siguen siendo importantes: cambio, razón de cambio instantáneo, relación funcional, resultados acumulados, pero se pueden explorar desde el punto de vista contínuo y discreto; por ejemplo, a los conceptos contínuos como función, ecuación diferencial, derivación, integral le corresponden los conceptos discretos: sucesión y serie de tiempo, ecuación de diferencias, diferencia y sumatoria. Se puede observar que los conceptos discretos son técnicamente e intelectualmente más simples que sus contrapartes contínuas.

Obviamente, la matemática discreta no sólo tiene un impacto en los cursos de cálculo sino es una rama de la matemática que cada vez es más importante. El mundo físico se puede modelar con el cálculo diferencial e integral, como el lenguaje de los cambios contínuos, pero el mundo de la información necesita la matemática discreta (Finkbeiner, Lindstrom, 1987).

La matemática contemporánea

En las últimas décadas entonces, la matemática ha adoptado ciertas metodologías de trabajo de las ciencias experimentales, sobre todo debido a los medios electrónicos de cómputo.

Las actividades como observar, explorar, formar discernimientos, intuiciones, hacer predicciones, probar hipótesis, conducir ensayos, controlar variables, simular situaciones reales son cada vez más importantes. Actividades tradicionales como demostrar, generalizar y abstraer no se dejan de lado, pero esta apertura es una oportunidad para el profesor de presentar la matemática como una ciencia viva y en pleno desarrollo y no como una serie de "recetas" y conocimientos acabados. Sin embargo, la matemática nunca será una ciencia puramente experimental. Para el matemático investigador siempre hace falta la demostración, para el alumno se puede quedar a veces en lo experimental e intuitivo. Tópicos de probabilidad, estadística y métodos iterativos se prestan para este enfoque, tal como aspectos modernos de la geometría de fractales. (Goldenberg, 1989).

Es importante destacar que los cursos de actualización para profesores de matemáticas deben incluir tópicos de las matemáticas contemporáneas, tales como matemáticas discretas, subconjuntos borrosos, la geometría fractal, teoría de caos y catástrofes, para mencionar algunos.

Subconjuntos borrosos:

La teoría de subconjuntos borrosos empezó en 1965 con un trabajo de Zadeh y se trata básicamente de un análisis lógico-funcional de la vaguedad como contraste al análisis de la claridad de la lógica booleana y la teoría clásica de conjuntos. (Trillas, 1980). La teoría de subconjuntos borrosos permite plasmar en fórmulas, descripciones vagas en relación con clases mal definidas. Esta teoría como generalización funcional de la de conjuntos, en base a una lógica multivalente, ha surgido por la necesidad de iniciar la escritura matemática de complicadas situaciones relacionales entre objetos vagos. Subconjuntos borrosos son clases con límites indeterminados en las que la transición de membresía a no-membresía es más bien gradual que brusca. Se puede afirmar que la lógica humana no es de dos valores sino es una lógica de verdades borrosas. En la matemática clásica no se admite lo borroso, pero el tratamiento sistemático de lo borroso permite nuevos avances en la matematización de la psicología, sociología, ciencias políticas, filosofía, fisiología, economía, linguística, etc. (Kaufman, 1982).

Fractales:
Otra rama de la matemática contemporánea es la teoría de los fractales que es un auténtico nexo entre arte y ciencia y abre la posibilidad de hallar el orden que se esconde tras una multitud de fenómenos caóticos que no encajaban en ninguna geometría. (Ruiz, 1990). La geometría de los fractales es la geometría que permite modelar la naturaleza: paisajes, árboles, plantas, costas, cristales, copos de nieve, ríos, valles. Matemáticamente son curvas infinitas contenidas en una superficie finita con una dimensión fraccionaria que se caracteriza por la recursividad y la autosimilaridad: el hecho que el todo siempre está contenido en las partes. (Peitgen, Richter, 1986).

Caos:
Cualquier proceso que transcurra en el tiempo es un ejemplo de un sistema dinámico. Estos sistemas ocurren en muchas ciencias, en la vida diaria y en la naturaleza. Ejemplos de tales sistemas encontramos en la meteorología, economía, astronomía, química, etc.

El estudio de sistemas dinámicos tiene como objetivo predecir el resultado del proceso. Algunos sistemas dinámicos son predecibles y otros no, se vuelven caóticos. La noción matemática del caos es importante, simplemente porque permite afirmar que sistemas dinámicos simples y determinísticos pueden comportarse en forma impredecible o caótica. La clave del estudio de sistemas dinámicos es la iteración: la repetición sucesiva de un proceso. Si el proceso dinámico se puede describir mediante una función matemática se generan para cada valor de la función a través de iteraciones sucesivas las llamadas órbitas. Algunos sistemas dinámicos tienen órbitas inestables que muchas veces forman un fractal. En la naturaleza se nos presentan fenómenos impredecibles, que sin embargo se rigen por leyes.

Hace más de una década los científicos se dieron cuenta que ciertos sectores del caos en la naturaleza pueden ser descritos por leyes. Un sistema de este tipo, que sigue por un lado las leyes físicas de causa y efecto, pero que tiene consecuencias imprevisibles es llamado en el lenguaje de la ciencia moderna "sistema caótico".

Para la investigación del caos, la geometría fractal es un medio auxiliar importante.

Catástrofes:
Una descripción matemática del mundo requiere muchas veces una interacción entre continuidad y fenómenos discretos (Arnold, 1987). Para describir la aparición de estructuras discretas a partir de estructuras suaves, regulares y contínuas se usan términos como singularidad, bifurcaciones y catástrofes. El desarrollo de la teoría de singularidades en combinación con la teoría de la bifurcación (Poincaré, 1989; Andronov, 1933) es una poderosa herramienta con un amplio campo de aplicaciones en ciencia e ingeniería. Los matemáticos René Thom y E.C. Zeeman (Thom, 1975) sugieren que la teoría de singularidades y sus aplicaciones debería llamarse teoría de catástrofes.

La teoría de catástrofes tiene por ende sus orígenes en la teoría de singularidades de aplicaciones suaves y en la teoría de bifurcaciones de sistemas dinámicos. En el caso de la teoría de singularidades se trata de una generalización muy amplia del estudio de funciones en puntos máximos y mínimos, sólo se sustituyen las funciones por aplicaciones que son colecciones de varias funciones de varias variables. Bifurcación quiere decir ramificación y se usa en un sentido amplio para designar todo tipo de reorganizaciones cualitativas mientras que catástrofes son cambios bruscos que surgen como respuesta repentina de un sistema a un cambio suave en las condiciones externas. Había muchos intentos de aplicar la teoría de catástrofes a materias tan diversas como el estudio del latido del corazón, la linguística, la economía, la geología, la estabilidad de los barcos, los motines en las prisiones y la influencia del alcohol en conductores.

Conclusiones

Los contenidos matemáticos han cambiado en calidad y cantidad en las últimas décadas y también la manera de hacer matemáticas.

Si el investigador matemático adoptó nuevos métodos de trabajo de exploración y descubrimiento, con mayor razón el profesor de matemáticas debe incluir estas técnicas en sus clases. Equipo de cómputo y calculadoras son excelentes herramientas para lograr ésto. El aprendizaje activo es más efectivo y la exploración dirigida hace la matemática interesante y atractiva. Los alumnos aprenden contenidos matemáticos y hábitos de construir el conocimiento, de "matematizar" y así encontrar la utilidad de conceptos matemáticos. La resolución de problemas debe ser central en el quehacer matemático de profesores y alumnos.

Los cursos de actualización para profesores de matemáticas deben incluir tópicos contemporáneos, muchos de los cuales se pueden llevar también al nivel de los alumnos.

Como ejemplo mencionamos un trabajo de Goldenberg (1989) en el cual se propone llevar la geometría de fractales a la escuela secundaria y preparatoria. Como medio gráfico se usa el LOGO (Abelson, Disessa, 1981) de una microcomputadora. De esta manera se incorpora una rama importante de la matemática del siglo XX al nivel medio-superior y se ilustra la cultura y vitalidad de la investigación en la matemática actual. También el concepto de funciones iterativas y recursivas se puede introducir en el nivel medio superior al igual que el estudio de la función logística (NCTM, 1991).

La idea de recursión e iteración es básica para comprender los conceptos fundamentales del estudio de sistemas dinámicos y caos y se puede discutir a nivel medio-superior. Una excelente publicación reciente llamada "Fractals for the Classroom" (Peitgen, 1992) ofrece material para el estudio de recursión, caos y fractales en las escuelas.

Es urgente que los profesores de matemáticas del nivel medio-superior y los educadores en matemáticas que se ocupan del mejoramiento de tales maestros intenten seriamente terminar el virtual divorcio entre la matemática contemporánea y la investigación en este campo y los contenidos de los cursos que se ofrecen a los alumnos. Debemos buscar alternativas a la vieja costumbre de enseñar una matemática anticuada, estática y mecanizada de manera anticuada, estática y mecanizada.

Como ejemplo podemos considerar los cursos tradicionales de álgebra. Estos cursos normalmente ponen inicialmente mucho énfasis en la manipulación de expresiones algebraicas fuera de contexto los cuales hay que transformar y simplificar según ciertas reglas. Después se trabaja con ecuaciones de diversos tipos y problemas de texto irrelevantes para la mejoría de los alumnos. Estos cursos llevan a muchos alumnos al fracaso y al repudio de las matemáticas que les afecta para el resto de su vida. Afortunadamente hay alternativas viables para remediar esta lamentable situación de la enseñanza del Álgebra en el nivel medio-superior y en los cursos "remediales" a nivel profesional. Un grupo de investigadores de dos universidades de Estados Unidos ha realizado un esfuerzo durante varios años para cambiar radicalmente el enfoque didáctico y de contenido a lo que puede ser un primer curso de álgebra en la preparatoria. El proyecto llamado "Computer Intensive Algebra" utiliza herramientas numéricas, gráficas y simbólicas y el apoyo de calculadoras científicas, calculadoras gráficas y computadoras para desarrollar en el alumno las ideas algebraicas básicas y los métodos de razonar con expresiones simbólicas para resolver problemas cuantitativos. Procedimientos algebraicos complejos se manejan con paquetes simbólicos de álgebra. Por otro lado, alumnos que tienen problemas en organizar y manipular relaciones complejas entre los datos de una situación realista pueden usar computadoras para construir los modelos matemáticos adecuados. El enfoque de CIA se distingue por tres características:

1. Uso extensivo de modelos y representaciones para ideas algebraicas.
2. La organización del álgebra alrededor de los conceptos de variable y función.
3. Una nueva relación entre conocimiento conceptual y procedimientos en álgebra. Se hace énfasis en un álgebra aplicada y modelos matemáticos.

Si logramos cambiar contenidos tradicionales e incluir tópicos matemáticos contemporáneos que se prestan para la adopción de un estilo de aprendizaje visual y experimental, podríamos iniciar cambios dramáticos y fundamentales en el desempeño de los alumnos (Goldenberg, 1989).

Tópicos de investigación de frontera en matemática que tienen una gran aplicabilidad en otras ciencias pueden jugar un papel importante en los contenidos de la matemática en la escuela para atraer los alumnos a la belleza intelectual de la matemática y su utilidad y actualidad. Herramientas gráficas de alta velocidad y definición en computadoras pueden ser un factor importante en esta apertura.

Si matemáticos investigadores cooperan con profesores de matemáticas del nivel medio-superior será posible darle una información actualizada, mejorando su cultura matemática y fomentando nuevos métodos de hacer matemáticas.

La vitalidad de la matemática contemporánea que experimentan los matemáticos, está en contraste a lo que viven la mayoría de los alumnos debido a que los matemáticos tratan de resolver problemas novedosos mientras que los alumnos se enfrentan con "problemas" que sus maestros pueden resolver. De ahí que la matemática aparece como un cuerpo de hechos y técnicas, muerto e inerte, que heredamos de nuestros antepasados, que no admite exploración, tal que cada pregunta tiene una y sólo una respuesta que alguien ya sabe (Goldenberg, 1989). Es tiempo que hagamos un esfuerzo de cambiar esta imagen de la matemática.

Bibliografía

* ABELSON, H., DI SESSA. (1981). **Turtle Geometry: The Computer as a medium for exploring mathematics**. Cambridge, MA: MIT Press.

* ALVARADO, Z.J., (1990). **La Enseñanza de las Matemáticas y los Índices de Reprobación en el Colegio de Bachilleres**. Memoria del Encuentro de Profesores de Matemáticas.

* ARNOLD, V.I., (1987). **Teoría de Catástrofes**. Alianza. Universidad de Madrid.

* BERGAMINI, D., (1964). **Matemáticas**. Colección Científica de LIFE en español. México. Pág. 165.

* DAVIS, P.J., HERSH, R. (1982). **Experiencia Matemática.** MEC, Madrid.

* DAVIS, P.J., HERSH, R. (1986). **El Sueño de Descartes**. MEC, Madrid.

* FEY, J. HEID, K.M., (1991). **Computer Intensive Algebra**. University of Maryland, College Park.

* FINKBEINER, D.T., LINDSTROM, W.D., (1987). **A Primer of Discrete Mathematics,** Freeman, New York.

* GOLDENBERG, E. PAUL, (1989). **Seeing Beauty in Mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry.** Journal of Mathematical Behavior, 8, 169-204.

* ICMI STUDY SERIES, (1986). **The Influence of Computers and Information on Mathematics and its Teaching**. Cambridge. University Press.

* KAUFMAN, A., (1982). **Introducción a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos**. CECSA, México.

* NCTM (1991). **Student Math Notes.** September 1991.

* PEITGEN, M.O.; RICHTER, P.H., (1986). **The Beauty of Fractals.** Springer-Verlag, Berlin.

* PEITGEN, H.O., JURGENS, H., SAUPE, D., (1992). **Fractals for the Classroom,** Springer, New York.

* RUIZ, M., (1990). **Fractales, el orden que surgió del Caos.** Revista Muy Interesante. Año 6, nº 8, pág. 32.

* SÁNCHEZ, C. (1990) **La Matemática en la Síntesis del Panorama Científico.** Educación Matemática, Vol. 2, nº3.

* SEIDMAN, S.A.: RICE M.D., (1986). **A Fundamental Course in Higher Mathematics. Incorporating Discrete and Continuous Themes.** ICMI Study Series #1, Cambridge University Press.

* STWERTKA, A. (1987) **Recent Revolutions in Mathematics.** Science Impact, Franklin Watts, New York.

* TRILLAS, E., (1980) **Conjuntos Borrosos.** Editorial Vicens-Vives.

* THOM, R., (1975) **Catastrophe Theory: Its Present State and Future Perspectives,** in: Dynamical Systems - Worwik 1974. Lect. Notes Math. 468, Springer Verlag. Berlin.

* WENZELBURGER, E., (1987) **La Influencia de las Computadoras en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad.** Didac, 11p.

* WHITNEY, H. (1955) **On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces.** I. Mappings of the Plane into the Plane. Math. 62, 374-410.

* WIENER, N., (1981) **Yo, matemático.** Ed. Conacyt, México.

* ZADEH, L.A., (1965) **Fuzzy Sets.** Information and Control, 8, 338-353.

Elfriede Wenzelburger Guttenberger
Universidad Nacional Autónoma de México

Geometrías: fundamentación y experiencia sensible

Luis Carlos Cachafeiro Chamosa

Los profesores de matemáticas asociamos la discusión acerca de la fundamentación y axiomatización de las matemáticas con complejos teoremas y representaciones (Gödel, Cohen, Axiomática de Gödel-Bernays, por ejemplo), bastante apartados de la matemática educativa. Pero su conocimiento, aún a nivel general, es interesante por sí mismo y clave para la observación de las matemáticas como una disciplina en constante transformación, más real que la visión habitual de un cuerpo estático e indiscutible de conocimientos.

Por ello, me pareció conveniente, mostrar a los alumnos, una parte de la historia de los fundamentos de la geometría y su peculiar relación con el ser humano que es quien la crea o, por lo menos, la descubre, debate y aplica.

La axiomatización en matemáticas, es una manera de establecer unas bases sólidas de forma que se puedan conocer las características de los objetos con los que trabaja el matemático. Tales objetos pueden ser de cualquier tipo, siempre que, eso sí, verifiquen los axiomas.

El primero y durante más de mil años único sistema axiomático, fue el de Euclides, que fundamentó la geometría en una serie de postulados. ¿Por qué escogió esos postulados?: Fundamentalmente porque de ellos se deducían consecuencias "normales", o sea, resultados ya conocidos (ejemplo el teorema de Pitágoras), y además los principios eran bastante naturales considerándolos como aproximaciones teóricas a algunos objetos sensibles ya que los puntos, rectas, planos y sus propiedades (dadas por los correspondientes axiomas) están próximos a los objetos de la realidad percibida).

El quinto postulado de Euclides, siempre provocó discusiones acerca de su necesidad, que ya a Euclides le pareció menos "natural" que los otros. Ese 5º postulado dice[1] que por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela a esa recta y sólo una. Tratándose de un postulado menos claro que los otros ¿se podrá deducir matemáticamente de los otros?

Los axiomas pueden verificar dos tipos de condiciones:

1. Que los axiomas no se contradigan, lo que se conoce por CONSISTENCIA de la teoría.

2. Que ninguno de los axiomas sea una simple consecuencia de los otros. Esta es la INDEPENDENCIA de los axiomas.

La Consistencia es una propiedad exigible a todo sistema de axiomas mientras que la Independencia es una cualidad más "estética", aunque no exenta de importancia.

Dado un conjunto de axiomas A, este conjunto y todas las consecuencias que se deducen de él, forman la teoría de A. Si hay un axioma de A que depende de los otros, podemos eliminar ese axioma y el nuevo conjunto de axiomas, da lugar a la misma teoría. Pero si en vez de eliminarlo, es sustituido por su contrario, la teoría se vuelve contradictoria. Si un axioma independiente se sustituye por su negación, aparece una nueva teoría diferente de la anterior.

Se puede utilizar este método en el caso del 5º axioma de Euclides (sustituyéndolo por su negación) ¿Qué le ocurre a la teoría? ¿Es contradictoria? (y el 5º postulado es consecuencia de los otros)? ó bien ¿da lugar a una nueva teoría? (y el axioma es independiente)? Esto hizo en el siglo XVIII el italiano Sachieri. Pero le aparecieron resultados "extravagantes" y fue incapaz de ver claramente lo que tenía delante: ¡una nueva Geometría!

Cincuenta años después el prestigioso matemático C.F. Gauss descubrió el fondo del problema, pero el temor a mostrar unas consecuencias que iban a ser mal asumidad por los coetáneos, dio la posibilidad que

[1] En su versión moderna de playfair.

fueran los matemáticos Lobatchevski, ruso y Janos Bolyai, húngaro, los primeros en mostrar públicamente dos geometrías coherente, que a su vez negaban el axioma de las paralelas (la de Lobatchevski afirma que por un punto se pueden trazar más de una paralela, y la de Bolyai que no es posible trazar ninguna).

¿Tiene sentido hablar de una geometría, que afirme que por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela?, ¿no es ello una contradicción con el mismo concepto de geometría, de algo que expresa nuestro entorno físico (aunque algo idealizado)?

Efectivamente, eso parece, pero sólo en la medida en que cuando hablamos de rectas, nos estamos refiriendo a nuestras teóricas rectas sensibles, aquellas de las que nuestros sentidos nos informan de su existencia, características y propiedades.

¿Pero es posible "sin perder el juicio" hablar de otras rectas? ¿Esas rectas serán "no rectas"?.

Hagamos un simple experimento (fig. 1). Envolved una hoja de papel de aluminio sobre un trozo de papel haciendo un cilindro, con el aluminio por fuera. Poned una regla delante del cilindro y observad que "la recta se tuerce". Evidentemente a la reflexión de una recta no le llamamos recta, pero se puede hacer una geometría cuyas "rectas" sean las reflexiones del cilindro de rectas "normales".[2]

Fijamos un observador. Se puede establecer una transformación que lleve puntos del plano en puntos del cilindro. La función F no tiene las propiedades habituales de conservación (no conserva paralelas, ni ángulos, ni distancias) y sin embargo es una transformación bastante natural conocida por el nombre de anamorfosis.

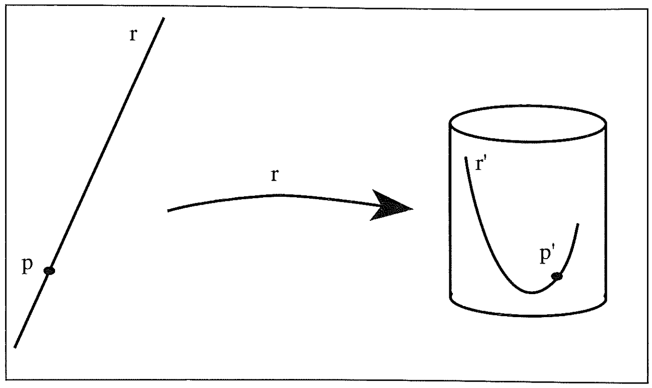


Figura 1

Otra transformación no lineal es la que se establece entre los objetos del espacio, y su imagen correspondiente en la parte posterior del ojo (conos y bastones excitados). Las rectas en el espacio, pasan a ser curvas en el ojo y en el cerebro, debe rectificar algunas curvas del ojo, para que sean sentidas como rectas (fig. 2). ¿Cómo lo hace?: Aún no se conoce claramente.

Pero en el caso de pinturas de bóvedas (muy frecuentes en el Renacimiento y en el Barroco), aparecen nuevamente curvas que son vistas como rectas. Aquí encontramos una nueva trasformación anamórfica.

Parece lógico pensar que de todas formas la existencia de rectas está asegurada, y que se diferencian objetivamente de las curvas. Pero puede ser una apreciación subjetiva. ¿Podemos asegurar que *independientemente del hombre existen rectas*?

Supongamos que nos encontramos en Manhatan, en el piso 55 de

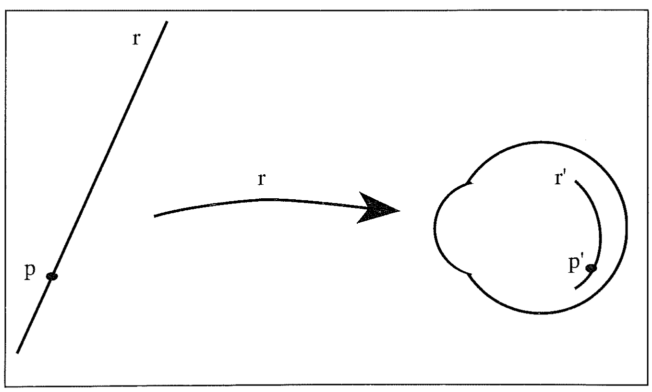


Figura 2

[2] Aunque no verifique las condiciones de Klein para una geometría, este concepto puede ser ampliado para incluir esta "geometría".

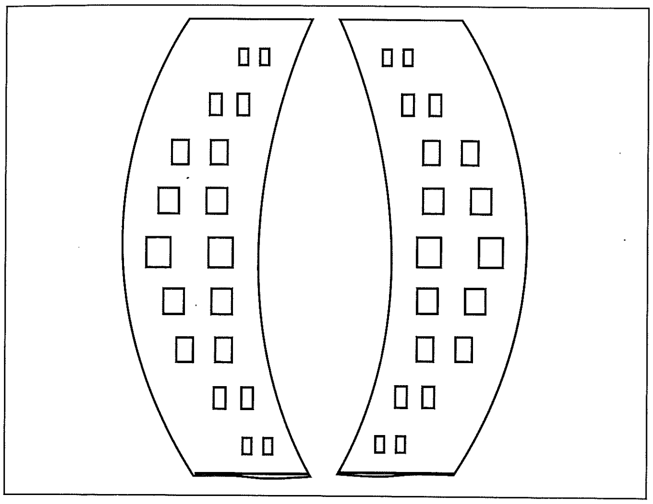


Figura 3. Representación de la vista de los edificios del World Trade Center (representación extremadamente exagerada).

un gran edificio y que enfrente tenemos los gigantescos edificios del World Trade Center de 110 pisos. ¿Cómo vemos los perfiles de estos dos edificios? Muy anchos y separados a la altura del piso 55, pero pequeñitos y juntos en la calle y en el piso 110. Por tanto "son curvas" (fig. 3).

Si tuvimos la experiencia de que toda recta suficientemente larga se curva, ¿aceptarían Euclides (y Enmanuel Kant) la existencia "a priori" de rectas, e incluso la noción de paralelismo?

Muchos de estos interrogantes quedan aún por resolver. A medida que se desarrollen los estudios sobre la sustentación de las matemáticas y de las peculiaridades del funcionamiento del cerebro y su sistema perceptivo, es de suponer que se irán aclarando.

Por lo de pronto, el susto que recibieron los matemáticos al saber que existen rectas que no lo son, fue impresionante. El matemático ya puede trabajar con rectas (de nombre) que no lo son (percepción). La propia teoría general de la Relatividad, considera un espacio esencialmente euclídeo en la inmensa mayoría vacía del Universo, pero que se curva en las proximidades de cuerpos astronómicos de grandes masas que "tuercen" las rectas.

Con el paso del tiempo, fueron cayendo grandes mitos. Así también cayó el de la existencia de rectas. Pese a todo la geometría básica de estudio es la euclídea. ¡y la más fácil!

Bibliografía

* R. ARHEIM (1985). **Arte y percepción visual**. Ed. Alianza. Madrid.

* R. RODRÍGUEZ VIDAL (1983): **Diversiones matemáticas**. Ed. Reverté. Barcelona.

* A. DOU (1974): **Fundamentos de la matemática**. Ed. Labor. Barcelona.

* J. REY PASTOR, J. BABINI (1984-85): **Historia de las matemáticas**. Vols. I, II. Ed. Gedisa. Barcelona.

* R. SAUMELLS. (1971). **La geometría como teoría del conocimiento**. Ed. Rialp, Madrid.

* A.S. SMOGORZHEVSKI. (1984). **Acerca de la geometría de Lobachevski.** Ed. Mir, Moscú.

Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
I. B. Nº 6 de Santiago de Compostela

El Cálculo simbólico automático y la Enseñanza del Álgebra: el diseño curricular base[1]

Tomás Recio

En este artículo se persiguen dos objetivos complementarios: por una parte, la presentación y divulgación de los métodos y paquetes informáticos característicos del Álgebra por ordenador o Cálculo Simbólico Automático, atendiendo a su futura utilidad en la enseñanza del Álgebra pre-universitaria. Por otra parte, el análisis de determinados planteamientos didácticos para la enseñanza del Álgebra-como los contenidos en el Diseño Curricular Base-desde las aportaciones conceptuales que suponen ciertas técnicas de Cálculo Simbólico.

Introducción

El desarrollo, relativamente reciente, de programas de ordenador capaces de operar con símbolos y otros elementos característicos del álgebra, abre una serie de posibilidades para la utilización de estos programas en la enseñanza elemental de las matemáticas (ciclo superior de la E.G.B. y B.U.P.). En primer lugar, obviamente, como herramienta para la realización de los cálculos algebraicos por parte del profesor y de los alumnos durante y después de la clase. La utilización en este sentido limitado pero importante de los programas de cálculo simbólico debe ir precedida de un análisis de las consecuencias y alteraciones didácticas que conllevaría su empleo generalizado, una **discusión, en cierto sentido, similar a la que suscitó hace años el uso de las calculadoras de bolsillo por parte de los escolares**. En segundo lugar debemos señalar que la propia tarea de elaboración e implementación de los programas de cálculo simbólico ha supuesto y supone en la actualidad un análisis conceptual importante sobre aspectos básicos del álgebra, tan básicos que aparecen usualmente en la enseñanza escolar de la misma. Este análisis conceptual arroja también cierta luz sobre las dificultades del aprendizaje del álgebra, con posibles consecuencias para su didáctica, que se estudian, en el tercer apartado de este trabajo, relacionándolas con las propuestas del Diseño Curricular Base. En tercer lugar, el desarrollo teórico de los algoritmos del cálculo simbólico está modificando la perspectiva, desde un punto de vista estrictamente matemático y no didáctico, tradicional sobre temas tales como la geometría euclídea o los sistemas de números, que son materia habitual en el curriculum escolar. El análisis de las futuras implicaciones didácticas de estas nuevas perspectivas científicas es el último punto a considerar en este trabajo.

Se observará que en lo que sigue no se establecen propuestas didácticas concretas como consecuencia de las reflexiones y hechos que se

[1] Parcialmente basado en la conferencia pronunciada en el curso "La Educación Matemática", Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca, 5 de julio de 1989, y en los cursos de actualización científica y didáctica impartidos en los CEP de Cáceres, Zaragoza y Santander, en 1988 y 1990.

exponen. Esta tarea, ciertamente mucho más difícil que la que tratamos de desarrollar aquí, no puede ser emprendida seriamente por el autor del artículo, no vinculado en la actualidad con la enseñanza de la matemática escolar. Si se considera que no es procedente que las orientaciones didácticas surjan exclusivamente de las mesas de los despachos universitarios, la hipotética utilidad de trabajos como éste, de actualización científica en un sentido amplio del término, radica en la difusión de avances científicos y tecnológicos entre el profesorado no universitario para que este, en último término, elabore y adapte las implicaciones didácticas que procedan.

Si son bien conocidas las dificultades de realización de artículos de divulgación científica por la propia complejidad de la tarea y la falla, casi siempre, de práctica en los autores, lo es menos la habitual carencia de motivaciones, en un mundo científico que valora sobre todo los resultados técnicos. En este trabajo y con independencia del valor del mismo, debo reconocer el aliento para su elaboración proveniente de los organizadores y asistentes a los cursos de actualización científica y didáctica celebrados en el otoño de 1988 y en el verano de 1990 en los C.E.P. de Cáceres, Zaragoza y San-tander, donde tuve la oportunidad de exponer y discutir alguna de las ideas que constituyen este artículo. Mi agradecimiento también para los profesores L. Rico y J.L. Soriano, director y secretario, respectivamente-del curso "La Educación Matemática" celebrado en la Universidad de Castilla-La Mancha (Cuenca, en 1989. Muchas de las ideas **que aquí se** plasman se han ido formando con la colaboración inestimable de los profesores Carmen Da Veiga, Miguel Soler y Juan Manuel Olazabal. Junto con mi reconocimiento hacia ellos, mis disculpas si no he sabido interpretar adecuadamente sus opiniones sobre este tema.

El Cálculo simbólico automático: conceptos, sistemas y aplicaciones

Cálculo simbólico, cálculo formal, álgebra por ordenador... son alguna de las expresiones usadas en los últimos veinte o treinta años para designar el estudio y la implementación de algoritmos que actúan sobre objetos algebraicos: polinomios en una y varias variables, fracciones racionales, matrices de elementos numéricos o simbólicos, funciones elementales del análisis... Es difícil definir con precisión el ámbito de esta disciplina por vías distintas a la de los ejemplos; una descripción por comparación pondría el énfasis en la exactitud (precisión ilimitada) de los cálculos realizados en los programas de álgebra por ordenador frente a la precisión limitada de los cálculos numéricos en los programas matemáticos "habituales". Otra forma de aproximación al concepto de cálculo simbólico automático podría venir dada por la referencia a algunos libros que tratan el tema de manera general y básica: el volumen dos de la conocida obra de Knuth "The Art of Computer Programming" Addison-Wesley, 1969, que incluye el tratamiento de los algoritmos *seminuméricos*, puede considerarse dentro del espíritu del álgebra por ordenador. Otras dos obras de referencia obligada son las denominadas "Calcul Formel" de Davenport- Syret-Tournier, en la editorial Masson, 1987; y la colección de artículos introductorios, "Computer Algebra" recopilados por Buchber-ger-Collins-Loos y editados por Springer-Verlag en 1982. Los aspectos más estrictamente matemáticos son objeto de tratamiento específico en el texto reciente de Mignotte "Mathematiques pour le calcul formel" Presses Universitaires de France, 1989.

Dos algoritmos típicos del cálculo simbólico podrían ser el denominado de Euclides, para el cálculo del máximo común divisor de dos polinomios en una variable con coeficientes enteros; o el de Hermite, para el calculo de la integral indefinida de una fracción racional con coeficientes en un cuerpo (este último ejemplo de algoritmo de integración formal ejemplifica la importancia de los aspectos no algebraicos, pero sí de cálculo simbólico, dentro del Álgebra por Ordenador). Ambos algoritmos se encuentran razonablemente dentro del ámbito de la matemática escolar pero su implementación por ordenador (o la realización de los cálculos a mano) presenta una serie de problemas característicos del Cálculo Simbólico. En el caso del algoritmo de Euclides aplicado a los polinomios

$x^8+x^6-3x^4-3x^3+8x^2+2x-5$ y
$3x^6+5x^4-4x^2-9x+2$

se observa que los coeficientes racionales de los polinomios que surgen de las sucesivas divisiones, expresados como cocientes de números enteros primos entre sí, son de un tamaño considerable (hasta diez dígitos en el numerador y en el denominador), siendo la fracción

$$\frac{1288744821}{543589225}$$

el máximo común divisor buscado. Por la sencillez de los polinomios dados, es evidente que la aplicación directa de este método no podría generalizarse a casos más complejos, de mayores coeficientes de partida o de grados más elevados. Así, la búsqueda de algoritmos para el cálculo del máximo común divisor, sin un crecimiento exponencial del tamaño de los coeficientes que intervienen en los pasos intermedios, constituye una tarea típica del Cálculo Simbólico. Es claro, además, que la alternativa (de tipo "cálculo numérico") consistente en representar las fracciones involucradas por números decimales aproximados conduciría a resultados incorrectos (y no sólo "aproximadamente incorrectos") para el cálculo del máximo común divisor. Considérense, por ejemplo, los polinomios

$$x^3-8 \quad \text{y} \quad (1/3)x^2-(4/3)$$

cuyo m.c.d. es

$$(1/3)x-(2/3)$$

mientras que el m.c.d. de x^3-8 y $0{,}333333x^2-1{,}33333$ es 0,000001. En el caso de los algoritmos de integración indefinida de funciones racionales (cocientes de polinomios con coeficientes, por ejemplo, enteros) recordemos -sin entrar en detalles- que es necesario factorizar "de alguna forma" el denominador, descomponer en fracciones simples, hallar algunas raíces de polinomios... De nuevo los errores de redondeo en el cálculo de raíces o en la determinación de su multiplicidad pueden dar lugar a resultados radicalmente diferentes. Surge así el problema, fundamental en Cálculo Simbólico, de la representación exacta y del cálculo con números que son raíces de polinomios con coeficientes enteros (tales como $\sqrt{2}$), sin acudir a su representación decimal.

Estos ejemplos, entresacados del libro Calcul Formel, citado arriba, pueden servir para atisbar el concepto de Cálculo Simbólico en su dimensión más próxima al Álgebra. Pero ya hemos señalado al principio que forma parte de ese mismo concepto la implementación de los algoritmos algebraicos formando paquetes de programas denominados Sistemas de Cálculo Simbólico Automático. Tras un período en el que los sistemas más capaces de realizar tareas interesantes debían necesariamente cargarse sobre ordenadores de un tamaño considerable, puesto que la contrapartida a la precisión ilimitada es la exigencia de mayores recursos de tiempo y memoria, muchos empiezan a ser accesibles para un usuario con un micro ordenador (tipo PC, con un mega de memoria). REDUCE, MAPLE son dos sistemas de propósito general, actualmente utilizados sobre un ordenador personal por numerosos grupos de usuarios. Otros sistemas de propósito más específico, para la manipulación de polinomios en una o varias variables, como el COCOA o el ALPI o el MACAULAY, son también manejables en ordenadores PC. muMATH es otro sistema de propósito general que opera sobre pequeñas máquinas, si bien sus características son un tanto limitadas. Sin ningún ánimo de ser exhaustivos debemos mencionar entre los sistemas de Cálculo Simbólico que exigen ordenadores de tamaño medio a MATHEMATICA, MACSYMA y a SAC-2 (este último especializado en algoritmos para la eliminación de cuantificadores en la teoría de cuerpos realmente cerrados). Posiblemente una configuración mínima razonable para un centro educativo no universitario consistiría en la adquisición del sistema MAPLE instalado en un disco duro al que accedieran varios PCs. Esta recomendación, sin duda, está influida por el esfuerzo realizado por los creadores de este sistema, en la universidad canadiense de Waterloo, para adecuar el mismo a las necesidades de alumnos y profesores, distintas muchas veces de las de los investigadores (véase el artículo "Computer Algebra in the Under-graduate Mathematics Classroomt", Char-Geddes-Gonnet-Marshman-Ponzo, Proceedings SYMSAC 86, ACM 1986). Otra opción, empleada por el profesor Olazabal en compañía del autor de este artículo, en los Cursos de Actualización Científica y Didáctica mencionados en el apartado anterior, es la instalación de REDUCE en ordenadores compatibles. En ambos casos el software necesario puede adquirirse en varias casas comerciales a un precio razonable para un seminario o centro educativo.

Las aplicaciones de estos sistemas se apoyan en tres características comunes a todos ellos: una fórmula matemática puede ser objeto de evaluación numérica, cuando las variables y parámetros de la misma han recibido valores numéricos (como ocurre en FORTRAN, PASCAL o BASIC) y **además puede ser objeto de manipulación formal** como simplificación, derivación, integración, factorización, desarrollo... de la fórmula dada.

La aritmética en ciertos dominios básicos (enteros, racionales,...) es **exacta.**

La mayor parte de las habilidades operatorias algebraicas básicas **están incorporadas al sistema.** Además de la aritmética con polinomios, funciones racionales, matrices... se incluyen comandos para la realización del máximo común divisor, descomposición en fracciones simples, diferenciación, desarrollo en serie de Taylor, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, determinación de la existencia de soluciones complejas para sistemas de ecuaciones no lineales, integración formal, solución formal de ecuaciones diferenciales ordinarias, cálculo de límites y series...

Además de la utilización de estos sistemas como meras "supercalculadoras" de mesa, uno puede escribir programas en un lenguaje próximo al PASCAL para la realización de algoritmos o aplicaciones no contempladas directamente por los creadores del sistema.

En ambos modos de utilización es claro que el Cálculo Simbólico Automático proporciona una herramienta extraordinaria para la exploración de una parte importante de las matemáticas, por ejemplo, en geometría algebraica es frecuente que el desarrollo de ejemplos no absolutamente triviales sea una tarea excesivamente pesada para realizar a mano (piénsese en la realización de un cambio lineal de coordenadas sobre un polinomio de grado cinco, en dos o tres variables), o para la obtención de resultados de naturaleza cualitativa, por ejemplo, para escribir un algoritmo que obtenga el tipo topológico (número de óvalos, por pequeños que sean, y su inclusión relativa) de una curva plana como método auxiliar en el estudio del problema 16 de Hilbert. Otras situaciones relativamente simples que ilustran las aplicaciones matemáticas de estos sistemas se basan en la capacidad recientemente incorporada para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas: así se pueden desarrollar algoritmos para la determinación de las ecuaciones paramétricas de la intersección de dos superficies, obteniendo por evaluación numérica con coma flotante puntos de la curva resultante; o hallar las ecuaciones implícitas de un objeto geométrico dado por ecuaciones paramétricas. Las aplicaciones de estas técnicas a la Geometría Computacional o a la Geometría Sólida Constructiva o C.S.G. están siendo investigadas en la actualidad. Más sofistificadas son las aplicaciones a algunas áreas como la planificación de movimientos de robots o a la demostración automática de teoremas. Las referencias **bibliográficas citadas** anteriormente contienen indicaciones precisas sobre la forma en la que los sistemas de Cálculo Simbólico intervienen en estas aplicaciones y sobre otras muchas, quizás más importantes y con ámbitos no matemáticos de utilización: física de altas energías, química y biología... debe pensarse que algunos sistemas de Cálculo Simbólico fueron primariamente concebidos para una aplicación extra matemática concreta). Las que hemos mencionado aquí con algún detalle han sido elegidas por ser el campo particular de intereses del autor y del grupo de Álgebra Computacional de la Universidad de Cantabria.

El álgebra escolar en el diseño curricular base: aspectos, tareas y dificultades

Desde una perspectiva meramente descriptiva, álgebra escolar es sinónimo de manipulación de letras: como dice el profesor Freudenthal en "Didactical Phenomenology of Mathematical Structures" (D. Reidel Pub. Co. 1983) "the long step from arithmetic *towards algebra ... is calculating with letters rather than numbers*". Ciertamente el **cálculo literal** es uno de los aspectos característicos del álgebra escolar, al que yo añadiría, tanto por razones históricas como por la coincidencia en el tiempo de aprendizaje, la manipulación **no decimal** de ciertos números (radicales, radicales imbricados, potencias): es decir, la realización de ciertas tareas (simplificar, verificar la igualdad, etc.), con tales números sin recurrir a realizar las operaciones indicadas mediante la obtención de la expresión decimal correspondiente. Aún puede añadirse al bagaje de características del Álgebra escolar la introducción al concepto de **función;** ciertamente las letras aparecen aquí también y, además, puede hablarse de una tendencia didáctica (explicitada en el libro de Freudenthal mencionado arriba, hacia la algebrización de las funciones, enfatizando el papel de las letras como variables y de las expresiones algebraicas como funciones, ofreciendo así una vía alternativa de aproximación al álgebra, distinta de las clásicas ecuaciones o identidades. También, si continuamos con esta aproximación descriptiva al álgebra, es característica de esta parte del curriculum escolar la **resolución de ecuaciones o de establecimiento de identidades por medios formales,** la formulación y resolución de problemas de modo que la dificultad se encuentra fundamentalmente en **la traducción simbólica** de la situación planteada y en la identificación de la incógnita a determinar. La frontera con la aritmética es aquí difusa, ya que tales problemas pueden ser muchas veces abordables, también, desde una perspectiva que podemos llamar aritmética, en la que es posible determinar el valor de la incógnita mediante la ejecución de un "plan" operacional que parte directamente de los datos (véase al respecto el análisis que se realiza en "Problemas Aritméticos Escolares" de Luis Puig-Fernando Cerdán, Ed. Síntesis, 1988).

Por cualquier vía que se opte para aproximarse al álgebra escolar, otra nota característica y uno de los puntos más conflictivos de su enseñanza es la **multiplicidad de esquemas conceptuales en los que se realiza el cálculo literal,** como los catalogados por Kuchemann para la utilización escolar de las letras. En todos los casos catalogados, las tendencias didácticas actuales, en particular las reflejadas en el documento del Ministerio de Educación y Ciencia español, denominado Diseño Curricular Base, preven una metodología para la enseñanza del álgebra que conlleva interpretar las letras como símbolos que representan algo (números, cantidades..); es decir, se estima que un aprendizaje significativo de la manipulación de símbolos ha de requerir una interpretación de los mismos en un cierto referente. La pluralidad de contextos conceptuales en los que surgen los símbolos se extiende también a la realización de tareas específicas: *resolver* debe predicarse de las *incógnitas*, mientras que *simplificar* es más propio de las situaciones con *indeterminadas*. En la práctica escolar, buena parte de los problemas que habrían de surgir, por la sutileza de las distintas semánticas en el uso de letras, son

resueltos mediante la creación en los alumnos de meros hábitos de acomodación condicionada a las tareas repetitivas que deben realizar. Así, si aparece un enunciado con la palabra I simplifica" o "factoriza" el alumno sabe que la expresión que debe calcular al otro lado del símbolo = ha de ser el resultado de la aplicación de ciertas reglas, sacar la mayor potencia posible común a una serie de monomios, operar unos paréntesis, etc.; mientras que si se trata de "resolver" el símbolo = es un mero obstáculo para comprobar su habilidad para "pasar" la expresión de la derecha a la izquierda de dicho símbolo, sin que en la mayoría de los casos se le ocurra simplificar en un contexto de resolución o viceversa (y, ¿que ocurriría si lo hace?:
piénsese en una ecuación de la forma $x^2-1=x^2+3x+2$ visualizada como $(x-1)(x+1)=(x+l)(x+2)$, y en la que el alumno se "confunde" de contexto y se pone a simplificar antes de proceder a resolver). Tal vez este fenómeno de mera acomodación social (en el sentido de la restringida sociedad del aula) y también la limitación didáctica de la enseñanza semántica de las letras, en la que se reitera el D.C.B., confundiendo tal vez **aprendizaje significativo del Álgebra por aprendizaje interpretativo, o, dicho negativamente, tomando como aprendizaje reiterativo el aprendizaje inteligente de reglas sintácticas,** pueden explicar alguna de las tareas algebraicas con mayor índice de fallos, singularmente semejante en distintos niveles y cursos, propuestas en los test de Álgebra de C.S.M.S. de análisis de las dificultades en el aprendizaje del Álgebra escolar y aplicados en algunos centros educativos de nuestro país por la profesora C. Da Veiga: son aquellas tareas que podríamos denominar de **obtención de consecuencias de ligaduras.** Ejemplos de estas tareas son: si $P=R+S-T$, ¿$S-T=$? ¿$P-R=$? O, si $A+B=C$ y $D-B=E$ entonces ¿$A+D=$? Y, ¿$A+3D=$? Otro ejemplo podría ser el siguiente: si

$$2a+1=5a+7$$
$$5a+7=3a+1$$

entonces ¿$2a+1=$?

Ante estas tareas no habituales, y por tanto más difíciles de acomodar a los modelos estandarizados de la escuela, los alumnos se enfrentan con la necesidad de decidir el significado de las igualdades y letras de las ligaduras algebraicas que tienen como dato; y además deben dirimir sobre las consecuencias de adoptar uno u otro esquema conceptual a la hora de buscar las soluciones, las expresiones más pertinentes a la derecha del símbolo = en la fórmula entre interrogaciones. En el primer ejemplo, $P=R+S-T$ podría indicar una relación de carácter funcional, en la que P resulta ser una función de las variables R, S y T. En este caso sólo cabe pensar que S, T es igual a $S-T$, puesto que ninguna relación debe ligar a las variables independientes de una función; mientras que $P-R$ sería igual a $(R+S-T)-R=S-T$. La interpretación funcional choca, sin embargo, con la siguiente tarea, en la que A y D no aparecen como funciones explícitas de las restantes variables. Cabe, entonces, interpretar ecuacional-mente las expresiones $A+B=C$ y $D-B=E$, entendiendo que A, B, C, D y E representan números verificando las ecuaciones dadas y por tanto $A=C-B$ y $D=E+B$ (tomando A y D como incógnitas y despejando). Así $A+D=(C-B)+(E+B)=C+E$. Puede pensarse que la distinción entre interpretación ecuacional y funcional es un tanto artificiosa, en definitiva toda expresión funcional $y=f(x)$ puede considerarse trivialmente como una ecuación $y-f(x)=0$; recíproco, pero no trivialmente, toda ecuación induce implícitamente cierta o ciertas funciones y esta misma consideración podría extenderse, con un análisis bastante delicado, al caso de un sistema de ecuaciones[2]. De la dificultad matemática del concepto de descripción implícita de una o unas funciones por un sistema de ecuaciones podemos deducir la radical diferencia de los esquemas conceptuales usados, según se elija una u otra aproximación a la tarea escolar propuesta. Cabe, sin duda, una reducción trivial del caso funcional al ecuacional, como señalamos arriba. Pero ciertamente el considerar toda expresión de igualdad algebraica como una ecuación entre ciertas incógnitas acarrea notables complicaciones. Por ejemplo, es cierto, desde una perspectiva ecuacional sobre los enteros, que si $x^4=y^4$ entonces $x^2=y^2$; (y posiblemente (si se verifica el gran teorema de Fermat), sobre los racionales, $x^n+y^n=1$ implica $x.y=0$). Pero, obviamente, el esquema conceptual ecuacional para deducir estas consecuencias de las ligaduras algebraicas es fundamentalmente distinto del que usamos para resolver las tareas escolares antes mencionadas, la diferencia no radica en la mayor complejidad de estos ejemplos, cuyas soluciones dependen de la aritmética de cierto cuerpo, sino en que, para las tareas escolares, **implícitamente,** estamos considerando que la solución debe venir dada por una especie de **manipulación abstracta de las ligaduras dadas,** sin la intervención de otro dominio aritmético que el generado por los propios coeficientes de las expresiones: es decir, estamos real-

---

[2] Curiosamente, el profesor Freudenthal, en la obra ya citada, aboga, coherentemente con su propuesta de aproximación al álgebra vía funciones, por la introducción de las funciones definidas implícitamente a través de ecuaciones: "give a fresh chance to the natural operations with implicitly given functions..." Desafortunadamente, esta propuesta no es desarrollada con detalle.

mente requiriendo una interpretación sintáctica de las letras, aunque choque con los postulados didácticos actuales. Por manipulación abstracta entendemos la existencia de unas reglas automáticas de tratamiento de las ligaduras que conduzcan a la resolución, en todos los casos, de todas las ligaduras que son consecuencia de otras dadas.

Para ejemplificar este punto de vista consideremos la última tarea propuesta arriba: si

$$2a+1=5a+7$$
$$5a+7=3a+1$$

entonces ¿$2a+1=$?

Una aproximación desde una perspectiva ecuacional no arrojaría ninguna respuesta coherente, ya que despejando "a" en la primera ecuación tendríamos $a=-2$, luego $2a+1$ sería -3; pero el resultado sería distinto si despejáramos "a" en la segunda ecuación. Sin embargo, desde la óptica de una manipulación abstracta (que en este ejemplo puede considerarse como sinónimo del método de eliminación de Gauss) las ligaduras dadas se transforman, primero, en las ligaduras

$$-3a-6=0$$
$$2a+6=0$$

y, luego, en un sistema triangular eliminando la letra "a" de la segunda ecuación

$$-3a-6=0$$
$$**$$
$$2.(-6) - (-3) = 0$$

es decir, finalmente, el sistema original se convierte en:

$$-3a-6=0$$
$$**$$
$$6=0$$

lo que implica automáticamente que cualquier expresión en "a" puede ser obtenida como una combinación de las dos ligaduras en las que hemos transformado las dadas por la secuencia de reglas: 1) agrupar todos los términos a un lado del signo igual, 2) eliminar en la segunda ligadura la letra "a". Así $2a+1$ es **igual** a cualquier expresión, por ejemplo $2a+1 = 3a^2-9$, en el sentido **sintáctico** de que $(2a+1)-(3a^2-9)$ puede ser considerado como una combinación de las ligaduras que aparecen en **. Así $(2a+1)-(3a^2-9)=0.(-3a-6)++(1/6).(2a+1-3a^2+9).(6)$. La argumentación seguida contiene, sin duda, numerosos puntos oscuros, en particular el concepto o esquema mental de manipulación algebraica, sobre el que volveremos más adelante al inter-relacionar Álgebra escolar y Cálculo Simbólico Automático, pero sí creemos que pone de manifiesto alguna de las dificultades básicas de la enseñanza del Álgebra: curiosamente, el ítem del cuestionario de Da Veiga con mayor número de contestaciones inconsistentes (ya que no puede hablarse de contestaciones erróneas, por la propia naturaleza de la cuestión planteada) es el que hemos ana-lizado en último lugar y con mayor detalle. Podría esgrimirse que concedemos una excesiva importancia a la clarificación de determinados esquemas conceptuales que muestran sus limitaciones o contradicciones en tareas más complejas que las que habitualmente ocupan a los escolares, siendo, por el contrario, totalmente adecuados para el nivel de los ejercicios que deben realizar estos; y también puede argumentarse que la consolidación de unos esquemas imperfectos y aún erróneos (por ejemplo, la sola interpretación funcional o ecuacional de las expresiones algebraicas) es una etapa necesaria para el aprendizaje posterior de esquemas más refinados. Ambos argumentos entran de lleno en un debate sobre propuestas concretas en el que, como ya hemos indicado, no parece oportuno que el autor se pronuncie, por su desconocimiento del tema. Pero no cabe duda de que tales problemas deben de estar presentes en el profesorado que ha de enseñar el Álgebra en la escuela y en el B.U.P. Es ciertamente muy difícil, en la enseñanza superior, reubicar unos conceptos que se refieren a aspectos básicos del aprendizaje del Álgebra y que han sido cimentados en los niveles inferiores de la enseñanza...

Aún otra situación en la que los esquemas conceptuales funcionales o ecuacionales plantean dificultades es la relativa a la manipulación de fracciones algebraicas, como cuando se pide que el alumno racionalice.

$$\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}$$

En este contexto, la obtención de otra fracción algebraica *igual* a la dada, por ejemplo

$$\frac{1-\sqrt{x-1}}{2-x}$$

no puede interpretarse desde la consideración de las letras como variables de una función, puesto que el reemplazamiento $x=2$ tiene sentido en la primera fracción pero no en la segunda (a no ser que se le asigne en ese caso el valor de la primera; pero este recurso habitual implícitamente hace uso de la igualdad entre ambas fracciones, con lo que estamos en el punto de partida, ¿por qué son iguales?, o entramos en consideraciones sobre continuidad, que ciertamente no deberían formar parte de los esquemas conceptuales precisos para la comprensión del Álgebra escolar). Algo similar ocurre en las tareas sencillas de simplificación de fracciones como $(x^3y-y^3x)/(x^2y-y^2x)$ equivalente a $x+y$; o en los casos de división de polinomios con coeficientes literales, $(x^2+bx)/(ax+c)$, cuya expresión formal del cociente y el resto incluye denominadores con potencias de "a" y no son, por tanto, válidas para todos los valores de esa variable o parámetro. En todos estos casos parece que un esquema conceptual de tipo manipulación sintáctica de los símbolos interpreta más adecuadamente las tareas a realizar.

Pero aún debemos señalar en este epígrafe una última dificultad del Álgebra escolar que el D.C.B. no analiza suficientemente. Ya hemos apuntado anteriormente que el relativo éxito de los alumnos en la realización de determinados ejercicios de la clase de Álgebra se produce, antes que por una comprensión racional de lo demandado en los mismos, por una extraordinaria acomodación social (lo que a *priori* no debe desdeñarse como recurso didáctico). Un ejemplo notable de este hecho es la **ruptura decimal** que conlleva la operatoria con radicales sin la extracción de los mismos cuando la raíz no es exacta.

Así, cuando leemos en algunos ejercicios escolares algo como "simplifica la expresión"

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

no resulta fácil imaginar qué esquemas conceptuales han sido elaborados en la mente del alumno que identifica, velozmente, como "simplificación" la racionalización de esta fracción, en vez de tomar su calculadora y contestar 0, xxxxxx (máxime cuando, como en este caso, la racionalización conlleva ocho sumandos en el numerador, cada uno de los cuales implica varios productos de raíces de dos, tres, cinco o siete).

Dejando a un lado la caricaturización de este tipo de prácticas escolares abusivas, no cabe duda que la utilización no decimal de ciertos números en Álgebra, por razones bien distintas y aún opuestas a las del afán simplificador, exige, en mi opinión, dos acciones en la enseñanza elemental. La primera es la explicación (por vía de ejemplos como los que hemos señalado en el apartado de este trabajo dedicado a la presentación del Cálculo Simbólico Automático) de los motivos por los que en Álgebra la representación y manipulación numérica es esencialmente finita, por ejemplo $\sqrt{5}$ es una estupenda forma algebraica para representar al número positivo cuyo cuadrado es 5; asimismo sabemos que $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ no es cero pues el cuadrado de la primera raíz no coincide con el cuadrado de la segunda, una forma bastante sencilla de hacer aritmética con estos números no decimales. La segunda es la construcción del esquema mental que corresponde a este concepto de número, y a su aritmética. Tal vez esta propuesta, implícita cuando enseñamos a los niños a decidir a través de manipulaciones no decimales que

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

choque con dos objeciones iniciales: las tendencias didácticas actuales, muy presentes en el D.C.B., convergentes mayoritariamente hacia la utilización, en el estilo del cálculo numérico, del concepto de aproximación; y la ignorancia sobre cómo desarrollar sistemáticamente el modo de representación numérica que hemos esbozado. Sobre ambas objeciones nos extenderemos en otros apartados de este trabajo.

Ahora bien, a esta descripción somera de algunos problemas didácticos de la enseñanza del álgebra escolar a los que el D.C.B. no aporta, en mi opinión, la atención debida o no opta por enfoque más adecuado, debe añadirse otra serie de objeciones que se refieren a las actitudes y los valores que predominan en la disciplina algebraica. Así el álgebra se distingue por su carácter de lenguaje, con reglas para la formación y deducción de sentencias, que aprehende con exactitud una parte de la realidad modelada matemáticamente; y es precisamente la validez automática de las operaciones realizadas siguiendo correctamente tales reglas lo que confiere ventajas al lenguaje, no es necesario verificar la validez de las interpretaciones en cada paso. Sin embargo, en el marco del D.C.B. la situación de la enseñanza del álgebra escolar resulta aparentemente contradictoria, al enmarcarse en un diseño curricular que implícitamente o explícitamente opta por rechazar la enseñanza desnuda de un lenguaje, pero que establece, en general, los contenidos y actividades de modo que dependen en gran medida de este lenguaje. Aclaremos esta afirmación. Es evidente que nuestro conocimiento de los distintos procesos de aprendizaje tiene, en la actualidad, un papel esencial en la organización del curriculum, llegando al extremo, en el D.C.B., de suscitar la oportunidad de informar a los alumnos sobre su propio proceso de aprendizaje y sobre el estadio en el que pudieran encontrarse y las dificultades características del mismo. Sin embargo es poco lo que se conoce sobre los procesos de aprendizaje en álgebra y aún menos sobre la forma de enseñar o favorecer tales procesos. La prioridad que se asigna en el mismo documento a la **trasmisión oral o al trabajo manual (no escrito), o al cálculo mental y a la estimación** como mecanismos importantes para la exploración matemática de la realidad, en la etapa primaria; la **valoración terminal** de los conocimientos, en la etapa secundaria y primaria; el enfoque **empírico inductivo**, la insistencia en la **comprensión conceptual frente a la manipulación automática**; la búsqueda de alternativas pedagógicas recomendadas para hacer frente a los problemas derivados de la existencia de bloques de conocimiento "atractivos" o motivadores que, sin embargo, dependen jerárquicamente de otros de carácter básico y por ende -como ocurre en general a los lenguajes- áridos; **los entronques globalizadores y motivadores en la** enseñanza de los distintos aspectos de las matemáticas; todos estos datos apuntan las dificultades de la inserción del álgebra en las nuevas tendencias curriculares (puesto que el Diseño Curricular Base no es sino una opción en la línea propugnada por la mayoría de los pedagogos y educadores actuales). Sustituir el carácter predominantemente **escrito** del álgebra, su búsqueda de soluciones mediante manipulaciones exactas de los coeficientes, modificar su papel como **lenguaje instrumental y no terminal para la** formulación y manipulación deductiva de propiedades, reemplazar los hábitos de ejercitar al alumno en la adquisición de **habilidades meramente técnicas** (destrezas) por otros que enfaticen el carácter conceptual de las manipulaciones, entroncar con problemas motivadores y procedentes de otras áreas de conocimiento la **rutina necesaria en** la adquisición de las bases de un lenguaje, parece un esfuerzo tan desmesurado que exige realmente una reflexión sobre la necesidad de realizarlo. Tal vez una conclusión más aceptable sería la limitación y reducción de los aspectos algebraicos en la enseñanza escolar... por coherencia didáctica.

En contradicción con este primer análisis, observamos, desde una óptica un tanto amplia, que en el curriculum de contenidos conceptuales o procedimentales que propone el Diseño Curricular Base (y que no es extremadamente diverso del actual) todo lo que no es pura aritmética es álgebra o se sustenta en ella, por lo que esta materia se encuentra extraordinariamente representada. En efecto, la desaparición del concepto de límite en diversas situaciones, impartido hoy en segundo curso de bachillerato, que se correspondería con el último curso de la enseñanza secundaria obligatoria, reduce los contenidos propuestos en toda la enseñanza obligatoria a una matemática discreta, cuyo lenguaje más natural es el algebraico. Así este aparece en la descripción de las medidas de cuerpos y figuras geométricos, en la interpretación y análisis de gráficas y fenómenos aleatorios, en el estudio de las probabilidades, en la formulación de algunos principios de la geometría (teoremas, movimientos de figuras), en los algoritmos numéricos de estimación de raíces.... Además, una corriente de opinión cada vez más extendida aboga por equilibrar, al menos, el carácter formativo de las matemáticas con una componente utilitaria, que dote a los alumnos con un cierto "know-how", frente a las necesidades de adaptación a un mundo con una creciente componente tecnológica. Esta componente útil implica, sin duda, no sólo el aprendizaje de los esquemas conceptuales adecuados sino también el dominio de los mecanismos pertinentes de manipulación procedimental de la representación técnica de esa realidad... es decir, la destreza necesaria para abordar y operar sobre los problemas con un lenguaje y unas reglas y estrategias efectivas. Volvemos, pues, al punto de partida: la necesidad curricular de incidir en aquellos aspectos que desde un punto de vista cognitivo o pedagógico nos parecen menos convenientes si se asumen los principios que se explicitan en el D.C.B.

Naturalmente este dilema, aunque tal vez planteado menos groseramente, no escapa a los ojos de numerosos especialistas en didáctica de las matemáticas. Las medidas adoptadas para resolverlo han pasado en épocas pretéritas por inclinar a ultranza la balanza en favor de la enseñanza desnuda del formalismo algebraico, vertiendo todos los esfuerzos en la búsqueda de fórmulas magistrales didácticas que permitieran tal enseñanza a la población escolar. Hoy, más atinadamente, se intentan paliar las dificultades inherentes al dilema mediante la adopción de mecanismos de eliminación de los llamados "excesos" del lenguaje algebraico: el lenguaje algebraico como punto de llegada, a través de la comprensión conceptual de sus principios, obtenida por la manipulación de objetos aritméticos, eliminación de los ejercicios repetitivos no significativos, necesidad de motivar las tareas de simplificación o resolución algebraica, búsqueda de métodos de estimación (algoritmos) frente a la deducción de fórmulas de extracción de raíces. Ciertamente no se indica nunca cómo ese menor trabajo de adquisición de destrezas no acabará resultando en una menor destreza en la utilización "significativa" requerida del lenguaje!

Una respuesta, en cierto sentido, lo constituye el que el curriculum que se debate en estos días está parcialmente basado en ese artefacto llamado calculadora: gracias a su existencia se proponen mecanismos de estimación y de análisis y de aproximación y de representación gráfica donde antes sólo era rentable, didácticamente hablando, el mero cálculo algebraico. Ciertamente el cálculo numérico ha existido siempre, pero era pedagógicamente irrelevante como consecuencia de la penosidad de sus métodos, realizados manualmente. El "descubrimiento curricular" de la calculadora ha precisado, tal vez, una quincena de años de trabajos semiclandestinos de naturaleza didáctica para que ahora adquiera ese papel predominante. La crítica a esta vía de resolución parcial del dilema que supone la enseñanza del álgebra en la escuela es, sin duda, la diferencia de velocidad (obligada) entre los ritmos de cambio tecnológico y de cambio curricular. Apoyarse sobre un artefacto que puede estar ya desplazado como herramienta didáctica puede llevarnos a una situación similar a la de un curriculum que hace años tenía serios prejuicios para adaptarlo. ¿Por qué enfatizar el interés didáctico de la aproximación de soluciones de ecuaciones, cuando muchas calculadoras avanzadas ya poseen una tecla que resuelve las mismas? ¿Qué alumno con una calculadora que posea esta opción va a encontrar motivadora la estimación de unas raíces o el aprendizaje de los métodos de resolución de las ecuaciones de primer grado? Desechado del curriculum el concepto de límite y por ende los números reales no algebraicos, ¿dónde quedará la justificación del predominio didáctico del sistema decimal frente a la representación fraccionaria de los números si las calculadoras comienzan ya a ser capaces de realizar cálculos con estas fracciones y aún con números radicales, sin redondeo? Naturalmente esto significará que las **fracciones** decimales y las de pequeño denominador (pero **no cualquier número decimal**, lo que implica un cambio en el énfasis didáctico) adquieren un papel relevante, pero no sólo por razones didácticas, sino de utilidad en la vida adulta. ¿Para qué esforzarse en arribar al lenguaje algebraico, con sus reglas tantas veces aparentemente contradictorias con el lenguaje aritmético, como punto de llegada de un largo proceso de comprensión de las bases de estas reglas cuando poseemos ya instrumentos de cálculo que adecúan nuestras expresiones no canónicas a la formulación correcta? Si la calculadora respondiera que (3+n)* 5 es 15+5*n, en vez de 35+n ó cualquier otra expresión errónea, ¿cómo y para qué motivar al alumno al descubrimiento significativo de una regla distributiva entre números y letras que él domina ya en el caso puramente numérico? Y por otra parte? ¿Qué razones podrían esgrimirse para obviar la inclusión de partes más avanzadas del álgebra, como la manipulación de polinomios o de expresiones con radicales, en el nivel obligatorio, si las mismas fueran realizadas, frente a la complejidad actual, mediante simples órdenes a las calculadoras? En resumen, las propuestas curriculares que basan hoy una reducción de los contenidos de lenguaje algebraico en el curriculum en la aridez de las manipulaciones y en la falta de motivación de las mismas, proponiendo vías de alternativa basadas en el uso de calculadoras como fuente de recursos para el aprendizaje de las matemáticas numéricas, deberán ir un paso más allá y concebir una situación inmediata en la que las mismas calculadoras avanzadas son una fuente de recursos de aprendizaje del lenguaje algebraico y en la que, en consecuencia, su enseñanza pueda recibir el impulso que demandan los otros contenidos de la enseñanza escolar.

Sin embargo, obviadas las dificultades mecánicas, quedará por hacer la tarea de desarrollar, como se ha hecho antaño en el caso de las calculadoras numéricas, las situaciones de verdadera relevancia didáctica, la búsqueda de estrategias y problemas motivadores, el análisis de los mecanismos de aprendizaje y enseñanza, la determinación de los auténticos esquemas cognitivos involucrados en el uso de estas herramientas.

El álgebra escolar desde la perspectiva del cálculo simbólico automático

Como hemos señalado en la introducción, tal vez la aplicación más inmediata del Cálculo Simbólico Automático en la clase de Álgebra sea la utilización de alguno de los sistemas que desarrollan estos programas como mero **ejecutor** de tareas técnicas. Incluso en este sencillo modo de empleo se presenta una doble vía didáctica: limitando al ordenador a actuar como una "pizarra o encerado electrónico", bajo el control rígido del profesor, o dejando a los alumnos interactuar con el ordenador, explorando las posibilidades de la máquina para la resolución de los ejercicios o la búsqueda de ejemplos y modelos. Como ocurrió en las fases introductorias de la calculadora de bolsillo en la escuela, parece, a primera vista, que la herramienta informática "escupe" simplemente las respuestas que precisan los alumnos a las preguntas que estos les plantean. Afortunada o desafortunadamente esto no es así de simple. Por ejemplo, el sentido de la simplificación de una expresión no tiene por qué coincidir para el alumno y para el programa de cálculo simbólico, lo que obliga a manipular este para obtener la solución requerida; una cierta expresión puede ser cero pero no ser reconocida como tal por el ordenador a menos que se le den algunas instrucciones complementarias; el orden en el que se introducen las instrucciones no tiene por qué ser necesariamente el correspondiente a la expresión verbal de las mismas, etc. En todo caso, y a la espera de que la generalización del conocimiento de los programas de Cálculo Simbólico entre el profesorado conduzca al desarrollo de metodologías activas de uso del mismo en la clase de álgebra, conviene recordar que su mera existencia obliga a plantearse "que es cada vez más difícil justificar el tratar de enseñar a los alumnos a ser buenos manipuladores de símbolos, salvo que pueda demostrarse, lo que no ha hecho nadie todavía, que tales habilidades se requieren para desarrollar la comprensión de las matemáticas subyacentes a tales manipulaciones, cualquiera que fuere el nivel de comprensión deseado" (traducción de parte del Apéndice "Symbolic Mathematical Systems" del documento "An aid for teaching and learning" en el Simposio "The influence of Computers and Informatics on Mathemathics and its teaching" Howson- Kahane ed. Estrasburgo 1985). Por el contrario, el uso de los programas de Cálculo Simbólico sí podría contribuir a esa comprensión de las matemáticas involucradas en los cálculos, al eliminar lo que tienen de automático y al potenciar, por consiguiente, la capacidad de manipulación inteligente. Tal vez el verdadero problema, como hemos apuntado antes, radica en la búsqueda de auténticas actividades inteligentes (y que ya hemos visto en las tareas de Da Veiga que pueden encontrarse sin recurrir a la interpretación semántica) en la clase de álgebra, que reemplacen los aspectos puramente operatorios (aunque los mismos se realicen sobre símbolos con interpretación).

En cierto sentido la propia elaboración de los programas de Cálculo Simbólico supone la búsqueda de esos verdaderos aspectos conceptuales del Álgebra, algo así como enseñarle el Álgebra básica al ordenador, infinitamente menos inteligente que cualquiera de nuestros alumnos. ¿Cuáles son los objetos matemáticos que deseamos manipular en Álgebra? ¿Tenemos una (o varias) formas "normales"[3] de representarlos? ¿Sabemos llevar cada objeto a su forma normal, o a una de ellas previamente establecida? Las formas normales ¿son únicas? ¿Podemos hablar del tamaño de una forma normal y acotar el tamaño del resultado de operar formas normales de un tamaño dado? Por ejemplo, es bien sabido por los escolares que el grado de un producto de dos polinomios es la suma de los grados de los polinomios. ¿Qué ocurre si tomamos como tamaño de un polinomio el número de monomios no nulos, en vez del grado? Extiéndase esta cuestión al máximo común divisor de dos polinomios, tratando de encontrar el número máximo de términos de este en función del número de términos de los polinomios dados y estaremos ante un problema nada trivial. Otros problemas no triviales se encuentran si deseamos buscar una forma normal para representar expresiones algebraicas con radicales (tan sencillos como $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{3}$). Ya hemos señalado en otro lugar lo escasamente sencilla que puede resultar la operación de quitar radicales de un denominador; es posible, en todo caso, contemplar la racionalización de estas expresiones como un procedimiento de búsqueda de formas canónicas i.e. de representar unívocamente cada número definido por medio de radicales. Esto es exactamente lo que solicitamos a los alumnos, también, cuando pedimos que "simplifiquen"

$$5\sqrt{2}- 3\sqrt{50}+7\sqrt{288} = 74\sqrt{2}$$

Estas tareas se realizan en las clases de Álgebra desde una laxitud conceptual, que no puede ser tolerada desde la perspectiva del Cálculo Simbólico, entre **equivalencia de expresiones algebraicas** (como las dos expresiones con radicales del ejemplo de arriba, unidas por un símbolo de igualdad que es realmente el signo de una equivalencia dada por la coincidencia del valor numérico de ambas expresiones), **criterios de simplificación, y simplificación canónica.** Dado un cierto criterio de simplicidad (por ejemplo, tener menos radicales o tener los radicandos mas pequeños) y suponiendo que tengamos un procedimiento para aumentar, en cada paso de aplicación del mismo, la simplicidad de una expresión, cabe aún que la reiteración de este procedimiento no conduzca a un resultado único, a una representación de simplicidad canónica. Por ejemplo $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$ podría considerarse como una expresión para la que las reglas escolares usuales de simplificación no producen ninguna otra expresión equivalente más sencilla. Sin embargo, descompuesta de la forma

$$\sqrt{1^2+ 2.\ 1.2\sqrt{2}+22.(\sqrt{2})2}$$

se observa que realmente $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}$. Así pues, podríamos decir que los procedimientos de simplificación que suelen enseñarse a los alumnos no conducen, en general, a formas canónicas (una consecuencia "práctica" sería que dos alumnos pueden llegar a obtener soluciones distintas del mismo problema de simplificación). Nótese que, sin embargo, la determinación de la equivalencia entre las dos expresiones radicales es muy sencilla y no descansa sobre el cálculo aproximado de las raíces sino que basta obtener los cuadrados de las mismas (en general, la existencia de un método exacto y computacional para decidir la equivalencia entre expresiones implica la existencia de otro, que no viene al caso, por su carácter algorítmico pero ineficiente, para construir un simplificador canónico, en este ejemplo, para las expresiones radicales). La dificultad, aún no resuelta satisfactoriamente en el Cálculo Simbólico, de obtener un algoritmo práctico de simplificación canónica para estas expresiones explica, tal vez, que no se puedan enseñar a nuestros alumnos un conjunto de reglas de simplificación mejores; pero creemos que incluso esas reglas parcialmente operativas deberían enseñarse en un contexto de mayor matización conceptual, que haga referencia a los tres aspectos involucrados en el problema, a los que hemos hecho referencia arriba en negrita.

[3] Aquí, y en las líneas siguientes, las palabras "forma normal" no se emplean en sentido técnico, como una debilitación del concepto de forma canónica, sino como un sinónimo de forma elegida usualmente por el profesor....

Además, buena parte de las dificultades mencionadas tienen su origen en la relación entre radicales y polinomios mínimos de números algebraicos, un tema de gran riqueza manipulativa que, sin adentrarse en la jungla terminológica, podría ser explorado en el Álgebra escolar como sustitutivo a los ejercicios rutinarios: hallar un polinomio que tenga como raíz $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; hallar un polinomio que tenga como raíz $1+2\sqrt{2}$ ó $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$, que no es lo mismo... Sentarse ante un ordenador personal con un programa de Cálculo Simbólico Automático e intentar "ayudar" a la máquina a simplificar radicales puede convertirse en un ejercicio apasionante.

La situación planteada arriba no es un hecho aislado. Se repite cuando se trabaja con fracciones racionales (cocientes de polinomios en una o más variables). Aquí los alumnos también se acostumbran a simplificar, lo que lleva aparejado en el contexto escolar, aunque no explícitamente, la búsqueda de formas canónicas. En este caso se produce, a veces, una identificación, en la ejecución de las tareas asignadas a los alumnos, entre simplificar una fracción y factorizar el numerador y el denominador, para luego eliminar aquellos factores comunes. De nuevo, desde el punto de vista del Cálculo Simbólico, tal identificación es peligrosa, si queremos enseñarle al ordenador a simplificar cualquier fracción, pues reduce un problema de moderada dificultad (la eliminación de factores comunes vía el máximo común divisor) a un problema mucho más difícil, como es el de la factorización. Enfatizar el papel del algoritmo del máximo común divisor es, quizás, una de las posibles aportaciones temáticas del Cálculo Simbólico al Álgebra escolar. Piénsese, para mencionar otro ejemplo, en la posibilidad de obtener, usando este mismo algoritmo con una pequeña variación, la parte "libre de cuadrados" de un polinomio dado p(x); es decir, de hallar una familia de polinomios $p_i(x)$ tales que $p(x)=\prod p_i(x)^i$, siendo cada P_i el producto de todos los factores de p(x) de multiplicidad i. Por ejemplo, si p(x) es $(x-1).(x-2).(x-3)^2.(x-4)^2.(x-5)^3$ entonces $p_1(x)=(x-1).(x-2)$, $p_2(x)=(x-3)$ y $p_3(X)=(x-5)$. No es preciso factorizar ni, naturalmente, calcular las raíces. Sólo hace falta la noción, formal, de derivada de un polinomio; junto con la propiedad que relaciona las raíces múltiples de un polinomio y las raíces de su derivada.

De nuevo, las dificultades conceptuales que rodean a la simplificación aparecen en un tercer grupo de tareas escolares a las que ya hemos hecho referencia antes. Se trata de la obtención de consecuencias de ligaduras algebraicas. Desde este punto de vista se trata de encontrar, a partir de las reglas dadas por las ligaduras algebraicas (como A+B=C y D-B=E), la representación más simple, canónica, de las consecuencias que se pidan (como A+D= ó A+3D=). Ejemplos no triviales aparecen cuando se calcula formalmente el valor del cos(a+b) a partir de la fórmula del sen(a+b) y de las relaciones conocidas $sen(a)^2+cos(a)^2=1$ y la análoga para el ángulo b. Si llamamos x_1=sen(a); y_1=cos(a); x_2=sen(b); y_2=cos(b); z=sen(a+b); y se tiene

$$x_1^2+y_1^2=1$$
$$x_2^2+y_2^2=1$$
$$x_1y_2+y_1x_2=z$$

entonces $1-z^2=$? La respuesta deseada es, naturalmente, $(y_1y_2-x_1x_2)^2$. Ninguna propiedad trascendente del seno o del coseno interviene en la obtención de esta consecuencia de las ligaduras algebraicas establecidas por las tres ecuaciones. La manipulación habitual, con las variante personales, procede elevando z al cuadrado en la forma dada por la última expresión, y obteniendo así lo siguiente $1-z^2$; luego en la fórmula resultante se reemplaza x_1^2 por el valor indicado en la primera ligadura y análogamente para y_1^2; eliminando los paréntesis se obtiene una nueva expresión en la que aparece $1-x_2^2-y_2^2$ que se reduce a cero mediante la segunda ligadura. Finalmente obtenemos el cuadrado buscado. Este mecanismo de manipulación algebraica puede generalizarse algorítmicamente con cualesquiera ligaduras algebraicas y consecuencias fijadas: se trata, groseramente hablando, de elegir el orden en el que las distintas variables, que aparecen en la consecuencia, van a ir siendo sustituidas por el resultado de "despejarlas" en las expresiones de ligadura dadas. Al llegar finalmente a una fórmula que no admite más sustituciones porque sus monomios no contienen ninguna variable que pueda despejarse, como ocurre en $(y_1y_2-x_1x_2)$ al no aparecer ningún cuadrado de las cuatro variables, se afirma que esta fórmula es insimplificable y que hemos llegado a la forma normal de la consecuencia pedida. Nótese que la operación de despejar que usamos en este contexto se reduce a la realización de restas y productos, eliminando cualquier extracción de raíces. Por ejemplo, si en una ligadura aparece $x^3y-y^2=0$ mientras que en la consecuencia tenemos x^4y, el significado de "despejar" sería el reemplazamiento de este último monomio por xy^2, si la variable x se considera antes que la y. No es pertinente el detallar aquí, formalmente, el sencillo mecanismo de manipulación algebraica que puede verse, además de en la bibliografía referida al comienzo de este trabajo, en el artículo de la revista "L'Enseignement Mathematique" (órgano oficial de la Comisión Internacional de la Enseñanza Matemática) "The theory of Grobner Basis" por Pauer y Pfeinhofer (tomo 34, 1988). Pero sí es oportuno señalar que este algoritmo conduce a una consideración conceptual de las igualdades entre expresiones algebraicas como reglas sintácticas de reescritura, al margen de las interpretaciones funcional o ecuacional, de modo que la obtención de consecuencias resulta fundamentalmente un proceso de reescribir las mismas usando las reglas dadas por las ligaduras. Este esquema conceptual parece resolver las dificultades que hemos mencionado en el epígrafe anterior y, aunque choca con las tendencias didácticas de carácter semántico (las letras deben significar algo, las igualdades deben considerarse en un campo de validez para las variables que las componen), entendemos que puede estar más cerca de la verdadera construcción mental que se elabora en la enseñanza del Álgebra escolar. Algunas investigaciones didácticas en esta línea podrían aclarar la validez de este punto. Naturalmente, no tratamos de señalar como nueva línea de contenidos del álgebra elemental la enseñanza rigurosa de las reglas de simplificación canónica relativa a una fase de un ideal de polinomios, que es la terminología técnica para lo que hemos llamado manipulación algebraica de ligaduras, sino apuntar que la existencia de este esquema conceptual demanda cierta atención por parte del profesorado para desarrollar versiones informales del mismo, adaptadas a las exigencias del nivel no universitario. En particular parece que debería señalarse que ciertas ligaduras algebraicas no conducen a la obtención de consecuencias expresables canónicamente, como el par

$$2a+1=5a+7$$
$$5a+7=3a+1$$

pero que siempre es posible obtener algorítmicamente nuevas ligaduras a partir de las dadas, de un modo similar a como obtuvimos en el epígrafe anterior el par

$$-3a-6=0$$
$$6=0$$

en las que las reglas de reescritura conducen a una forma canónica (cero en este caso para cualquier consecuencia; y por tanto cualquier expresión es una forma, no canónica- de consecuencia de 2a+1=). Debe señalarse que las versiones más recientes de la mayoría de los programas de Cálculo Simbólico que hemos mencionado incorporan instrucciones que ejecutan tanto el refinamiento de las ligaduras algebraicas como la obtención de formas canónicas de consecuencias. Es así como hemos analizado el comportamiento del ordenador en la realización del mismo test que Da Veiga empleó para medir las dificultades escolares en Álgebra; ciertamente los items con mayor dificultad para los alumnos fueron también aquellos en los que la "traducción" en términos del lenguaje, más formal, del ordenador conllevó mas esfuerzo por nuestra o su parte.

Pero hemos mencionado en la introducción un tercer aspecto a la hora de plantear la perspectiva del Álgebra escolar desde el Cálculo Simbólico. Herramienta, análisis conceptual de contenidos y tareas propios del Álgebra, y, en último lugar, consideración de otros avances de carácter teórico que son una consecuencia del Cálculo Simbólico y que suponen una reflexión en áreas de interés didáctico como la enseñanza de la Geometría y de los sistemas de números. Para nosotros la diferencia fundamental, entre los dos primeros aspectos comentados y este último que iniciamos, radica en los términos temporales de su aplicación didáctica, más próxima para aquellos y más lejana para este. Dejando a un lado los detalles técnicos, que pueden consultarse en la reciente obra de S.S.Chou "Mechanical Geometry Theorem Proving" (D. Reidel Pub. Co. 1988), podemos decir que en la actualidad existen varios programas que pueden probar la veracidad o falsedad de una gran cantidad de teoremas de la Geometría euclídea (incluyendo la mayoría de aquellos que suelen plantearse en todos los niveles de enseñanza) en unos pocos segundos de trabajo con un ordenador de tamaño medio; además tales programas suelen, en el caso de que el teorema planteado sea falso, exhibir las hipótesis necesarias para que sea cierto. Estos programas no son demostradores lógicos sino que operan mediante la traducción de las hipótesis y tesis a términos de ecuaciones algebraicas, introduciendo un sistema de referencia cartesiano, de modo que la verdad o falsedad del teorema equivale a verificar si las ecuaciones de las tesis son una consecuencia de las ecua-ciones que describen las hipótesis. Insistimos en el carácter absolutamente no matizado de todas estas afirmaciones, en aras de la claridad. Como ya puede comprenderse, los programas de Cálculo Simbólico que hemos mencionado antes, de manipulación algebraica, sirven para resolver esta versión algebrizada de la Geometría Euclídea. La obra de Chou contiene una impresionante cantidad de ejemplos desarrollados por medio del ordenador; alguno de los cuales corresponden a teoremas desconocidos y conjeturados antes de su resolución por Chou. Desde nuestro punto de vista esta situación debe conducir al planteamiento de la siguiente reflexión: además de desarrollar en los alumnos (de cualquier nivel) ciertas destrezas, visión, capacidad de razonamiento y comprensión, para que sean capaces de crear sus propios métodos de planteamiento y resolución de los problemas que se le presenten, en el área de la ciencia que corresponda, la enseñanza ¿no debería verse afectada, sesgada, influida, (úsese aquí cualquier vocablo absolutamente moderado) por la existencia de un método que conduce eficiente-mente a la resolución de los mismos? Tal vez no sea ninguno de los programas actuales ese método ideal, todavía; pero la validez de la pregunta no por ello queda en entredicho: sólo la urgencia de la respuesta aplazada.

El segundo apunte de futuro se refiere a la utilización de los números decimales para representar números irracionales algebraicos, un tema que ya hemos esbozado e introducido en el epígrafe anterior, al comentar el tratamiento momentáneamente distinto de estos números en las clases de Álgebra. El requerimiento de manipularlos sin pérdida de precisión (no admitiendo que se tome ($3\sqrt{5}$- $2\sqrt{11}$). 1/10.000 como cero, por ejemplo) podría extenderse a los números racionales, relegando su representación decimal al papel de indicar de forma rápida la medida del número, su tamaño: 345678/1254 nos da menos información en ese sentido que 275,66028708; pero es bien sabido que podemos realizar exactamente todas las operaciones aritméticas y comparaciones entre números racionales sin recurrir a la notación decimal (obteniendo esta expresión sólo cuando se desee tener una interpretación de la medida del número calculado). La exactitud se paga ciertamente con una mayor incomodidad, si es que se realizan los cálculos con lápiz y papel. Este argumento, sin embargo, hoy día no tiene el peso necesario para compensar la pérdida de precisión, salvo en situaciones muy técnicas, los ordenadores calculan eficientemente con números enteros arbitrariamente grandes; además, los programas de Cálculo Simbólico trabajan directamente con fracciones. Ciertamente, si se deja a un lado el problema de la medida, la conversión de los resultados de algunas operaciones con números enteros, dividir, extraer raíces, a números decimales se justifica principalmente en los números irracionales. ¿Qué podríamos hacer con tales operaciones sin la representación aproximada de los resultados de las mismas? Supongamos que alguien estima que la solución a un problema es la suma de las raíces positivas de las ecuaciones x^2-2=0 y x^2-3=0 y desea saber si este resultado es mayor o menor que la raíz positiva de x^2-5=0. Naturalmente es sencillo determinar esto sin recurrir al cálculo decimal de las raíces, pero imagínese el mismo problema con ecuaciones mucho más complejas, tal vez con coeficientes que son a su vez raíces de otras ecuaciones, y con raíces que sólo pueden determinarse indicando "la tercera raíz real" o "la décima raíz real positiva" de una cierta ecuación. En estos casos parece que el único recurso es la búsqueda de las raíces mediante una aproximación a su representación decimal. (Un tema que, al margen o complementariamente a este análisis, debería potenciarse en la clase de Álgebra) .

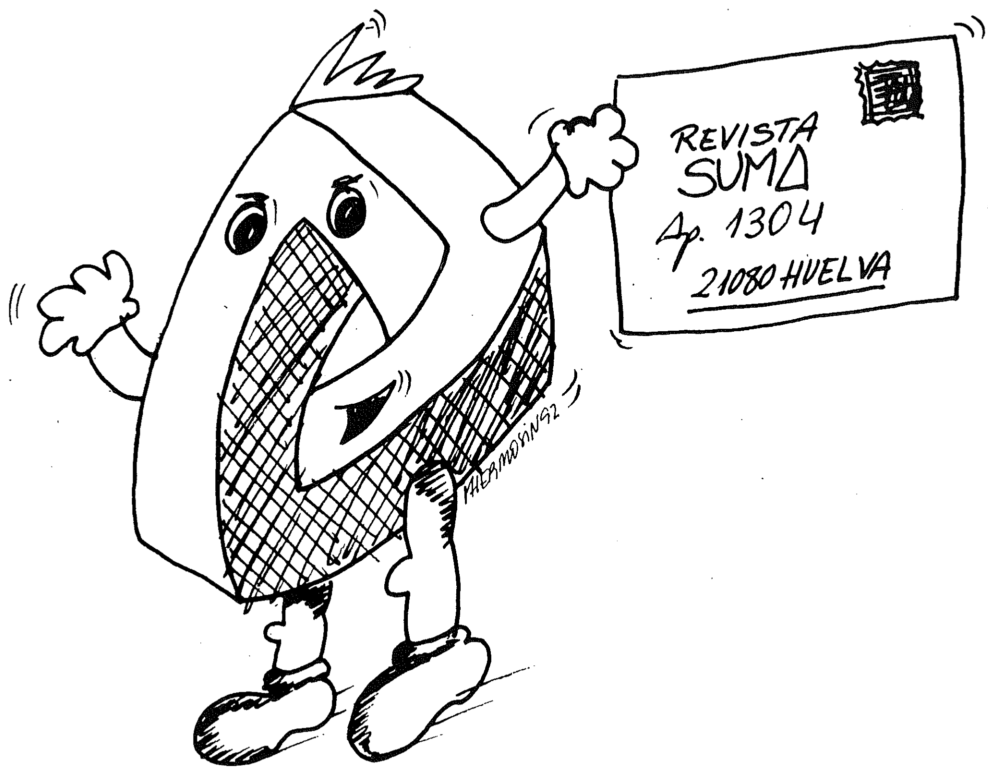
Existe, sin embargo, una metodología distinta y reciente, que ha elaborado una aritmética (incluyendo comparaciones entre números y extracciones de raíces de ecuaciones cuyos coeficientes son números irracionales algebraicos) partiendo de una representación **finitista** de los irracionales algebraicos: así $\sqrt{2}$ es representado como el par (x^2-2, +) y la aritmética procede operando de cierta forma con tales representaciones **exactas, esencialmente reduciendo los procesos operativos a la aritmética de números enteros.** El resultado fundamental por el que el Cálculo Simbólico Automático puede resolver algorítmicamente este planteamiento es un lema del conocido matemático francés René Thom, por lo que esta forma de representación de los números algebraicos recibe el nombre de "códigos a la Thom". (Véase "Thom's lemma, the coding of real algebraic numbers and the computation of the topology of semi-algebraic sets" de Coste y Roy, Journal of Symbolic Computation, vol. 5, No. 1 & 2. 1988). Desarrollados teóricamente por los matemáticos franceses Coste y Roy, la implementación de la aritmética correspondiente en un sistema de Cálculo Simbólico está siendo llevada a cabo por los profesores Olazabal y González-Vega de la Universidad de Cantabria. De esta forma es posible que en un futuro no muy lejano, al disponer de un marco teórico y práctico en el que las operaciones entre todos los números algebraicos pueden realizarse con descripciones finitas de los mismos y precisión infinita, el esquema conceptual vigente hoy para la manipulación de los números radicales en la clase de Álgebra pudiera extenderse a todos los aspectos de manipulación, en el nivel escolar, de cualesquiera números, salvo para estimaciones de medida. Se evitaría así la necesidad, presente ahora, de recurrir al infinito actual (definición de un número radical como límite de las aproximaciones decimales) para "entender" lo que son ciertos números; la formulación con "códigos" implica, en el fondo, contemplar esencialmente todos los números algebraicos como números enteros o como operaciones **potenciales** sobre los mismos... El marco conceptual que proponemos, para el futuro, es por tanto mucho más sencillo, un retorno al viejo dicho de Kronecker sobre la creación divina de los números naturales ...

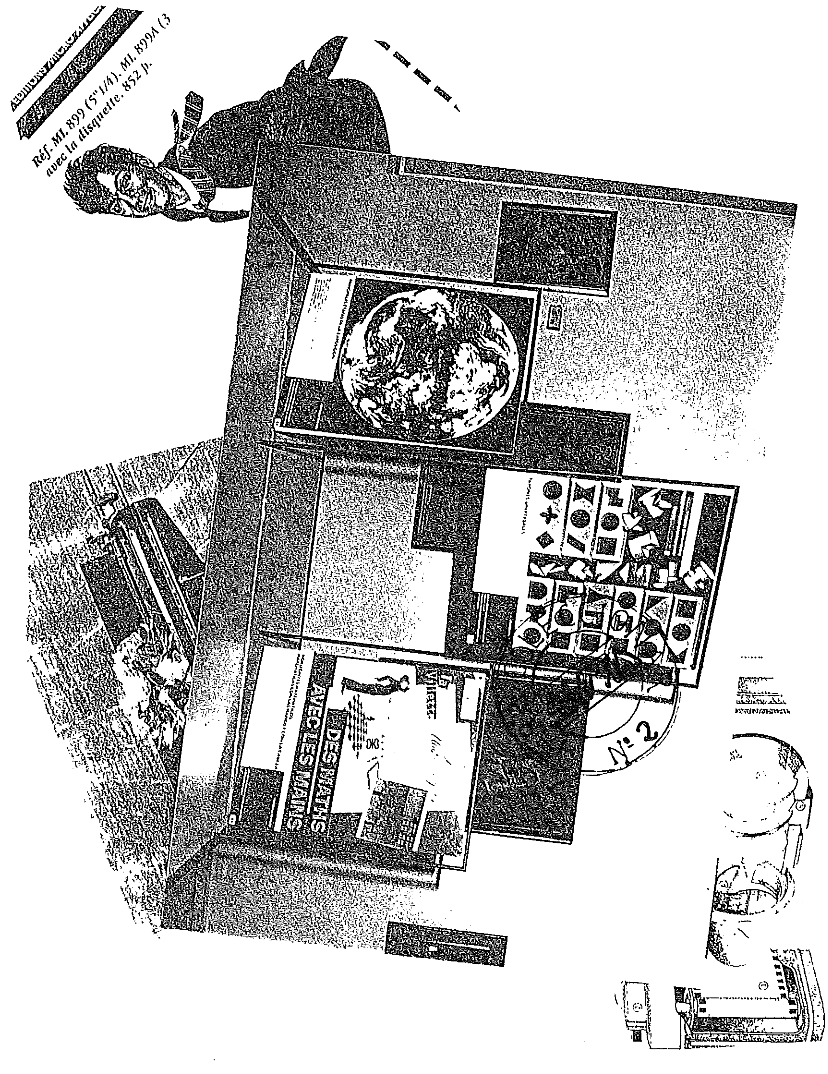
Se habrá observado que el análisis precedente excluye a los números trascendentes, que no pueden representarse **simultáneamente** con procedimientos finitistas. Precisar el auténtico papel que desempeñan, para la elaboración en la mente de los alumnos de un esquema conceptual global del sistema numérico, los escasos números trascendentes (e, π) que aparecen en el curriculum escolar, mas bien como símbolos desprovistos de concreción numérica, o el carácter numérico de la construcción de la recta real, es ciertamente difícil. En nuestra opinión, cualquiera que sea la importancia curricular de la completación de los números racionales, en definitiva, la introducción del infinito actual en el discurso del alumno, no debe ser un condicionante para el establecimiento de aproximaciones didácticas propias a la manipulación de los números no trascendentes.

Conclusiones

La utilización de ordenadores en la clase de matemáticas ha de ser contemplada desde la perspectiva de las **modificaciones conceptuales** que conlleva, a veces puntuales y a veces más amplias, afectando a buena parte del aprendizaje de un tema, y no sólo como **herramienta** para la realización de cálculos o como **recurso didáctico** en el aula (ya sea en una concepción asistida de la enseñanza o como instrumento para un aprendizaje por descubrimiento dirigido...). En el caso de la enseñanza del Álgebra escolar, tradicionalmente poco afectada por el uso de calculadoras y microordenadores y limitada al aprendizaje de unas técnicas de manipulación simbólica de carácter aislado, aislado del contexto científico escolar y de las aplicaciones, la generalización creciente de programas de Cálculo Simbólico Automático que pueden ser usados en ordenadores personales ha de tener consecuencias en las tres líneas que señalamos en negrita. Tras el análisis realizado en el artículo se deduce la necesidad de reducir las prácticas manipulativas como objetivo fundamental, tal vez no declarado, pero sí de facto, de la clase de Álgebra, sustituyéndolas por una mayor exploración de los sentidos de esta manipulación, tal y como son revisados desde la perspectiva del Cálculo Simbólico Automático. En particular, el significado de las igualdades y de los símbolos algebraicos desde un punto de vista exclusivamente semántico, esto es, con una interpretación meramente ecuacional o funcional, de reemplazamiento por valores numéricos, debería ser ampliado a una interpretación sintáctica de reglas de reescritura, como pone de manifiesto el estudio de la investigación, encuesta iniciada por otros profesores en el campo de las dificultades del Álgebra escolar. Asimismo el concepto, tan abundante en los ejercicios de Álgebra, de simplificación debería ser empleado en sentido más restrictivo y más vigilante del desarrollo correcto de esquemas conceptuales de simplificación en el alumno. La utilización de expresiones numéricas sin evaluación decimal, también característico de la clase de Álgebra, podría ser clarificada desde la consideración global de la construcción mental del significado del sistema numérico. La operatoria implementada actualmente en los Sistemas de Cálculo Simbólico permitiría de forma efectiva evitar esta dicotomía o ruptura decimal, reduciendo la elaboración del sistema numérico a la comprensión de los números decimales.

Tomás Recio
Universidad de Cantabria
Departamento de Matemáticas





IDEAS PARA LA CLASE

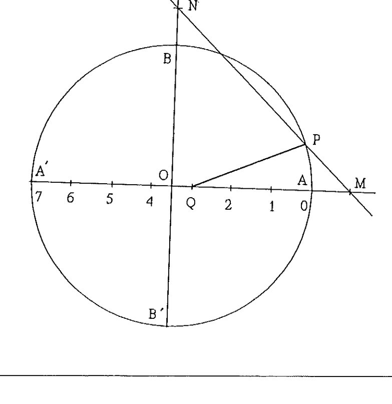
División de la circunferencia en partes iguales: un método aproximado

P. Familiar Ramos

En esta sección se describe el método Bardin, un método general no muy conocido y bastante preciso para las construcciones aproximadas de los polígonos regulares inscritos en una circunferencia de radio conocido.

Construcción

Se trazan, en la circunferencia, dos diámetros AA' en tantas partes iguales (n) como lados tenga el polígono que se desea inscribir. Llevando una de esas n partes a las prolongaciones de los diámetros AA' y BB' se obtienen los puntos M y N. Se traza la recta MN que cortará a la circunferencia en P, y al unir este punto con el tercer punto de división de las efectuadas en el diámetro, queda determinado el segmento PQ, lado aproximado del n-gono regular inscrito en la circunferencia (en la figura adjunta se ha tomado n=7). Según los valores de n, esta longitud aproximada difiere de la longitud exacta del lado.



Deducción

Mediante la Geometría Analítica, vamos a expresar la longitud del segmento PQ en función del número de lados del polígono regular inscrito.

En centro O de la circunferencia, que suponemos de radio unidad, será el origen de coordenadas, y a los diámetros perpendiculares AA' y BB' los identificamos con los ejes coordenados Ox y Oy.

Entonces el punto P está determinado por la intersección de la circunferencia

$$C \equiv x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

con la recta que pasa por los puntos M= ((n+2)/n,0) y N= (0, (n+2)/n), es decir

$$MN \equiv x + y = (n+2)/n \qquad (2)$$

Resolviendo este sistema no lineal, se obtiene

$$P = ((n+2+\sqrt{n^2-4n-4})/2n,\ (n+2-\sqrt{n^2-4n-4})/2n)$$

y como es Q = ((n-6)/n,0), basta aplicar la distancia euclídea entre dos puntos para obtener la longitud del segmento buscado. Resulta así:

$$PQ = (1/n)\sqrt{n^2-8n+48-(n-6)\sqrt{n^2-4n-4}} \qquad (3)$$

Ahora bien, el radical $\sqrt{n^2-4n-4}$ tiene raíces complejas para valores naturales inferiores a cinco, de modo que el método Bardin solamente es aplicable cuando $n \geq 5$ (de hecho, en la construcción del triángulo y del cuadrado, la recta MN es *exterior* a la circunferencia C, y por tanto en estos dos casos P es el conjunto vacío).

Comparación

Nos interesa ahora formar una tabla de valores entre la longitud L = 2 sen (∏/n) del lado del n-gono regular, y la longitud aproximada del segmento PQ obtenido en (3). Creemos que hasta n=50 es suficiente. Como se observa, este método es exacto en la construcción del hexágono regular.

n	L	PQ	L-PQ
5	1.175570504584	1.166190378969	+0.009380125615
6	1	1	0
7	0.867767478235	0.867519268437	+0.000248209797
8	0.765366864730	0.764617906577	+0.000748958153
9	0.684040286651	0.683045352937	+0.000994933714
10	0.618033988749	0.616982503040	+0.001051485709
11	0.563465113682	0.562461982358	+0.001003313132
12	0.517638090205	0.516734012547	+0.000904077657
13	0.478631328575	0.477846372472	+0.000784956102
14	0.445041867912	0.444379696550	+0.000662171361
15	0.415823381635	0.415279301653	+0.000544079981
16	0.390180644032	0.389746051094	+0.000434592937
17	0.367499035633	0.367163830713	+0.000335204919
18	0.347296355333	0.347050228618	+0.000246126715
19	0.329189180561	0.329022265220	+0.000166915341
20	0.312868930080	0.312772106793	+0.000096823287
21	0.298084532351	0.298049542287	+0.000034990064
22	0.284629676546	0.284649131665	-0.000019455118
23	0.272333298192	0.272400639023	-0.000067340831
24	0.261052384440	0.261161813508	-0.000109429068
25	0.250666467128	0.250812873674	-0.000146406545
26	0.241073360510	0.241252244946	-0.000178884435
27	0.232185828250	0.232393230697	-0.000207402446
28	0.223928952206	0.224161387100	-0.000232434893
29	0.216238036847	0.216492434293	-0.000254397445
30	0.209056926535	0.209330580383	-0.000273653847
31	0.202336643974	0.202627166214	-0.000290522239
32	0.196034280659	0.196339561571	-0.000305280912
33	0.190112086608	0.190430260057	-0.000318173448
34	0.184536718926	0.184866132178	-0.000329413251
35	0.179278617806	0.179617805306	-0.000339187499
36	0.174311485495	0.174659146082	-0.000347660587
37	0.169611848951	0.169966826059	-0.000354977108
38	0.165158690944	0.165519955372	-0.000361264427
39	0.160933137433	0.161299772341	-0.000366634908
40	0.156918191455	0.157289379286	-0.000371187831
41	0.153098505672	0.153473516726	-0.000375011053
42	0.149460187172	0.149838369618	-0.000378182445
43	0.145990629321	0.146371400446	-0.000380771124
44	0.142678366398	0.143061204932	-0.000382838533
45	0.139512947488	0.139897386860	-0.000384439371
46	0.136484826729	0.136870449129	-0.000385622400
47	0.133585267490	0.133971698637	-0.000386431147
48	0.130806258460	0.131193162981	-0.000386904521
49	0.128140439961	0.128527517303	-0.000387077341
50	0.125581039058	0.125968019869	-0.000386980811

Estos resultados han sido evaluados con el programa DERIVE A Mathematical Assistant, en un ordenador PS/2 MODELO 30_021 de IBM.

Bibliografía

ITALO GHERSI: **Matematica Dilettevole e Curiosa**. Ulrico Hoepli, Milano (1986).

GABRIEL VELASCO SOTOMAYOR: **Tratado de Geometría**. Limusa, México (1983).

P. Familiar Ramos

Euler y el número π

Jesús Antonio Temprano Marañón

Uno de los más prolíficos matemáticos, sino el que más, que han existido a lo largo de toda la historia, ha sido el suizo Leonhard Euler (1707-1783).

Además de, en nuestro caso, introducir el uso de la letra griega π (inicial de perímetro) para nuestro número, dio numerosas aproximaciones mediante desarrollos en serie de la relación existente entre la circunferencia y su diámetro.

El presente artículo trata de explicar el ingenioso procedimiento seguido por Euler en dos de dichas series:
- la serie de Jacques Bernouilli y,
- la serie de Leibniz.

Vamos a ver el ingenioso procedimiento seguido por Euler para calcular la suma de dos famosas series:

- la serie de Jacques Bernouilli y,
- la serie de Leibniz.

Supongamos una ecuación de segundo grado de la forma

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 = 0$$

Cuyas soluciones sean b_1 y b_2, por lo que si descomponemos en factores resulta:

$$a_0-a_1x+a_2x^2 = a_2\,(x-b_1)\,(x-b_2) =$$
$$= a_2\,(x^2-x\,(b_1+b_2) + b_1b_2)$$

Con lo cual, si igualamos coeficientes, queda:

$$a_1 = a_2\,(b_1+b_2)$$
$$a_0 = a_2b_1b_2 \Rightarrow a_2 = a_0/b_1b_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = (a_0/b_1b_2)\,(b_1+b_2) =$$
$$= a_0\,((1/b_1) + (1/b_2))$$

Y, si transformamos la descomposición factorial, resulta:

$$a_2\,(b_1-x)(b_2-x) = (a_0/b_1b_2)(b_1-x)(b_2-x) =$$
$$= a_0\,(1-(x/b_1)(1-(x/b_2)$$

Si procedemos de igual modo que una ecuación de tercer grado de la forma:

$$a_0-a_1x + a_2x^2-a_3x^3 = 0$$

Cuyas soluciones sean b_1, b_2 y b_3 resulta:

$$a_0-a_1x + a_2x^2-a_3x^3 =$$
$$= -a_3\,(x-b_1)\,(x-b_2)\,(x-b_3) =$$
$$=-a_3(x_3-x_2(b_1+b_2+b_3)+$$
$$+x\,(b_1b_2+b_1b_3)-b_1b_2b_3)$$

Con lo cual, si igualamos coeficientes

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_3(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3) \\ a_0 = a_3b_1b_2b_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a_3 = a_0/b_1b_2b_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = a_0/b_1b_2b_3(b_1b_2 + b_1b_3+b_2b_3 =$$

$$= a_0\,((1/b_1) + (1/b_2) + (1/b_3))$$

y

$$-a_3(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3) =$$
$$= -a_3(b_1-x)(b_2-x)(b_3-x) =$$
$$= a_0/b_1b_2b_3\,(b_1-x)(b_2-x)(b_3-x) =$$
$$= a_0(1-(x/b_1))(1-(x/b_2))(1-(x/b_3))$$

Y si procedemos de igual modo para una ecuación de cuarto grado completa cuyas soluciones sean b_1, b_2, b_3 y b_4 resulta

$$a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+a_4x^4 =$$
$$= a_4\,(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4) =$$
$$= a_4[x^4-x^3(b_1+b_2+b_3+b_4)+$$
$$+x^2(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+b_2b_3+b_3b_4)-$$
$$-x_3(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4)] \Rightarrow$$

Igualando coeficientes que

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_4(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+ \\ \quad + b_1b_3b_4+b_2b_3b_4) \\ a_0 = a_4b_1b_2b_3b_4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a_4 =a_0/b_1b_2b_3b_4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = a_0/b_1b_2b_3b_4(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+$$
$$+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4) =$$
$$= a_0(1-(x/b_1))(1-(x/b_2))(1-(x/b_3)$$
$$(1-(x/b_4))$$

Es decir:

- Para una ecuación de segundo grado nos sale:

$a_0 = a_2 b_1 b_2$

$a_1 = a_0 \, ((1/b_1)+(1/b_2))$

Y $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 = a_0(1-(1/b_1))(1-(1/b_2))$

- Para una ecuación de tercer grado nos sale:

$a_0 = a_3 b_1 b_2 b_3$

$a_1 = a_0 \, ((1/b_1)+(1/b_2)+(1/b_3))$

Y $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 = a_0(1-(x/b_1))$
$(1-(x/b_2)(1-(x/b_3))$

- Para una ecuación de cuarto grado sale:

$a_0 = a_4 b_1 b_2 b_3 b_4$

$a_1 = a_0 \, ((1/b_1)+(1/b_2)+(1/b_3)+(1/b_4))$

Y $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4 = a_0(1-(x/b_1))$
$(1-(x/b_2)(1-(x/b_3)(1-(x/b_4))$

...Con lo que, si generalizamos, para una ecuación de grado "n" nos saldría:

$a_0 = a_n b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$

$a_1 = a_0 ((1/b_1)+(1/b_2)+(1/b_3)+\ldots+(1/b_n))$

Y $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} +$
$+ (-1)^n a_n x^n =$
$= a_0(1-(x/b_1))(1-(x/b_2))+$
$+(1-(x/b_3))+\ldots+(1-(x/b_n))$

Si empleamos este mismo procedimiento para una ecuación bicuadrada de la forma $a_0 - a_1 x_2 + a_2 x^4 = 0$ con soluciones $\pm b_1$ y $\pm b_2$ ⇒

$a_0 = a_2 b_1^2 b_2^2$
$a_1 = a_0 \, ((1/b_1^2)+(1/b_2^2))$

Y $a_0 - a_1 x^2 + a_2 x^4 =$
$= a_0(1-(x^2/b_1^2))(1-(x^2/b_2^2))$

Y si la ecuación fuera de grado "2n"

$a_0 = a_n b_1^2 b_2^2 b_3^2 \ldots b_n^2$

$a_1 = a_0 \, ((1/b_1^2)+(1/b_2^2)+(1/b_3^2)+$
$+\ldots+(1/b_n^2))$

Y $a_0 - a_1 x^2 + a_2 x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{2n-2} +$
$+ (-1)^n a_n x^{2n} =$
$= a_0(1-(x^2/b_1^2)+(1-(x^2/b_2^2)+$
$+(1-(x^2/b_3^2)+\ldots+(1-(x^2/b_n^2))$

Recordando que la fórmula de Taylor para el desarrollo de una función en serie de potencias en un punto "x_0" es

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{I}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{II}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+\ldots+\frac{f^{<n-1}(x)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{<n}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

Si aplicamos este desarrollo a la función y=senx en el punto $x_0=0$, resulta

$f(0)$ = sen 0=0
$f^{I}(0)$ = cos 0=1
$f^{II}(0)$ = -sen 0=0
$f^{III}(0)$ = -cos 0=-1
$f^{IV}(0)$ = sen 0=0
$f^{V}(0)$ = cos 0=1
....

En donde vamos viendo que las derivadas de orden par son 0, mientras que las de orden impar son las de la forma $f^{<2n+1}(0) = (-1)^n$ ⇒

sen $x = x-(x^3/3!)+(x^5/5!)-(x^7/7!)+$
$+\ldots+(-1)^n(x^{2n-1}/(2n-1)!)$

Y aunque ya sabemos que la función desarrollada representa a la y=Sen x, si hacemos la representación gráfica se ve que cada vez más se confunden con la original

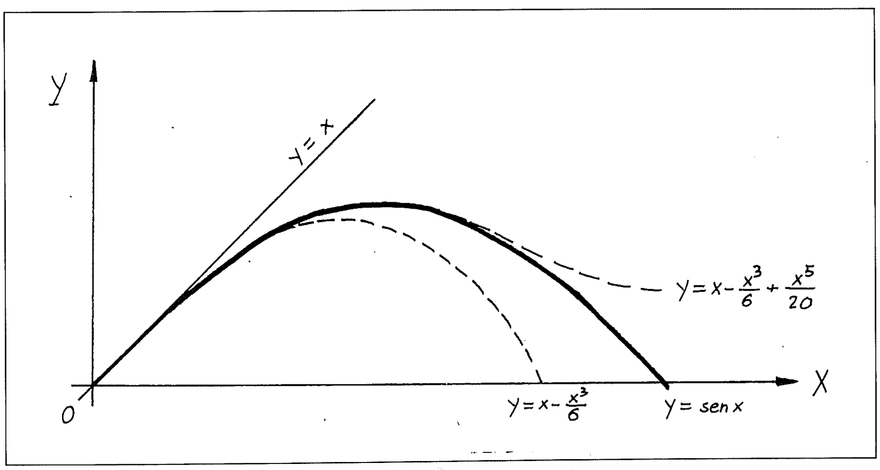


Figura 1

Al considerar Euler la ecuación sen x=0 ⇒

$x-(x^3/3!)+(x^5/5!)-(x^7/7!)+(x^9/9!)\ldots = 0$

Y como el lado izquierdo tiene infinitos términos ⇒ tiene que tener una infinidad de raíces que son

$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$

Sacando factor común resulta

$x(1-(x^2/3!)+(x^4/5!)-(x^6/7!)+$
$+(x^8/9!)\ldots)=0$

Y como para que un producto de dos factores sea igual a cero tiene que ser uno de ellos o los dos igual a cero, podemos suponer que el segundo es igual a cero ⇒

$$1-(x^2/3!)+(x^4/5!)-(x^6/7!)+$$
$$+(x^8/9!)-\ldots=0 \qquad (2)$$

que tiene por soluciones

$$\pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 4\pi,\ \pm\ldots$$

Con lo que aplicando lo visto para las ecuaciones de grado "2n" resulta que

$$(2)=((1-(x^2/\pi^2))(1-(x^2/4\pi^2))$$
$$(1-(x^2/9\pi^2))\ldots(1-(x^2/n^2\pi^2)) \Rightarrow$$

$$1/3!=1[(1/\pi^2)+(1/4\pi^2)+$$
$$+(1/9\pi^2)+\ldots+(1/16\pi^2)+\ldots+(1/n\pi^2)] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi^2/6=(1+(1/4)+(1/9)+(1/16)+}$$
$$\boldsymbol{+\ldots+(1/n^2))}$$

que es la conocida serie de Jacques Bernouilli.

El paso siguiente de Euler es el de considerar la ecuación 1-sen x=0 ó bien

$$1-(x/1!)+(x^3/3!)-(x^5/5!)+(x^7/7!)-\ldots=0$$

que tiene como raíces

$$\pi/2,\ -3\pi/2,\ 5\pi/2,\ -7\pi/2,$$
$$9\pi/2,\ -11\pi/2,\ \ldots$$

aunque cada una de estas raíces es doble ya que la curva y=sen x no corta a la curva y=1 en esas abcisas, sino que es tangente a ellas, pero la misma derivada primera del lado izquierdo se anula para los mismos valores de x, pero no su segunda derivada por lo tanto, recordando lo que habíamos visto para las ecuaciones de grado "n"

$$1-\text{sen } x = 1-(x/1!)+(x^3/3!)-(x^5/5!)+$$
$$+(x^7/7!)\ \ldots=$$

$$=\left(1-\frac{x}{\pi/2}\right)\left(1-\frac{x}{\pi/2}\right)\left(1-\frac{x}{-(3\pi/2)}\right)$$

$$\left(1-\frac{x}{-(3\pi/2)}\right)\left(1-\frac{x}{5\pi/2}\right)\left(1-\frac{x}{5\pi/2}\right)$$

$$= (1-(2x/\pi))^2(1+(2x/3\pi))^2$$
$$(1-(2x/5\pi))^2(1+(2x/7\pi))^2\ldots$$

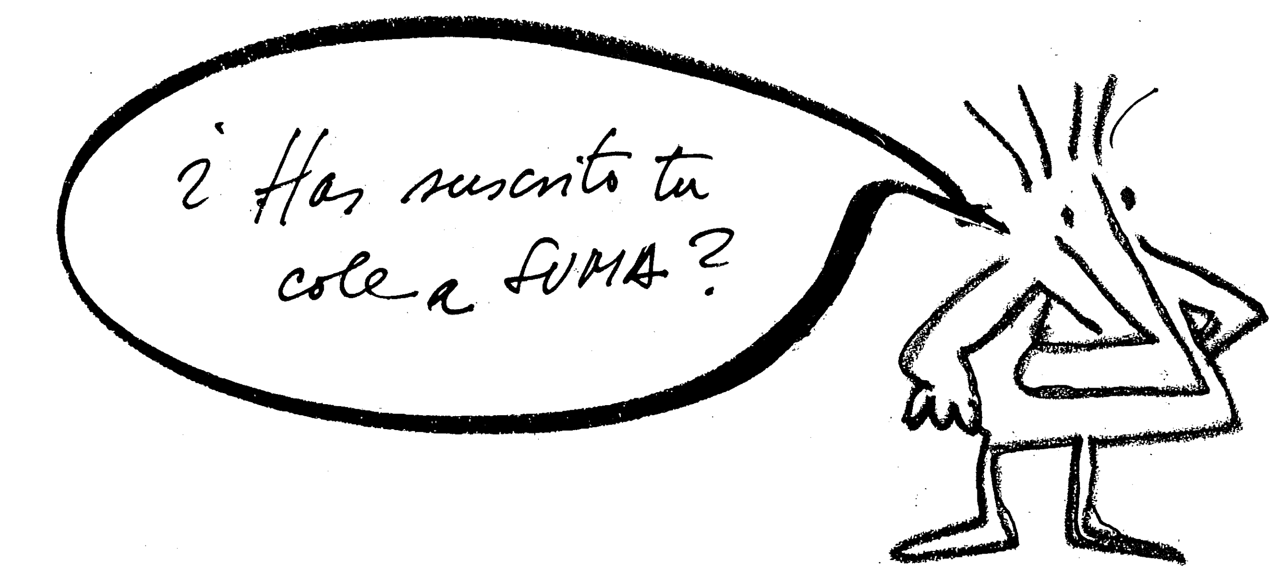
$$1= (2/\pi)+(2/\pi)-(2/3\pi)-(2/3\pi)+$$
$$+(2/5\pi)+(2/5\pi)-(2/7\pi)-(2/7\pi)\ \ldots$$

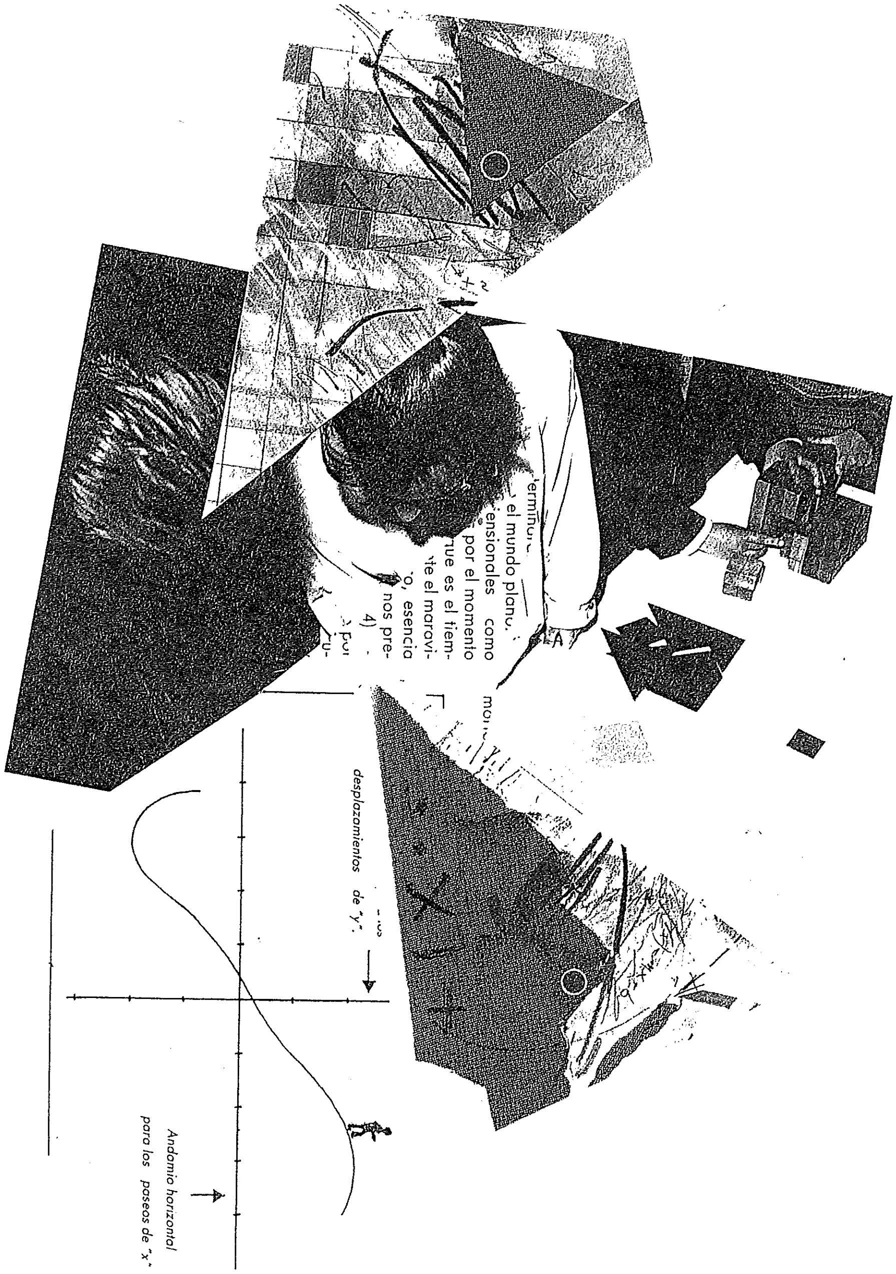
$$= (4/\pi)-(4/3\pi)+(4/5\pi)-(4/7\pi)+$$
$$+(4/9\pi)-\ldots \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi/4=1-(1/3)+(1/5)-(1/7)+}$$
$$\boldsymbol{+(1/9)-(1/11)+\ \ldots}$$

que es la conocida fórmula de Leibniz.

Jesús A. Temprano Marañón
I. de Formación Profesional de Infiesto (Asturias)





RECURSOS PARA EL AULA

Lo que hay cuando no queda nada

Carlos Usón Villalba

Sobre la construcción del concepto de volumen, sobre sus dificultades, sobre la persistencia de ciertas ideas previas se ha escrito, tanto por parte de los profesionales de la enseñanza como por sicólogos y pedagogos, lo suficiente como para que no sea necesario escribir aquí ni una línea más recogiendo citas, repitiendo ideas o haciendo pronunciamientos.

Hay un cierto consenso en lo que hace referencia a una idea previa muy persistente cuya superación se ha ligado con determinados estadios del desarrollo cognitivo y que no podía ser otra que la de "la conservación del área al modificar el volumen" o dicho de otro modo: la creencia "natural" de que existe una dependencia funcional entre las medidas de área y volumen de un mismo cuerpo. Es decir, que si se duplica el área se duplica el volumen y si se triplica uno se triplica el otro, etc.

Parece ser que llega un momento de nuestro desarrollo sicológico en el que se desbanca esta idea, aunque soy de los que piensan que persiste siempre (muy a menudo por lo menos) una idea, sino de dependencia funcional, si, al menos, de dependencia estadística... -"Si duplicamos el área es posible que no se duplique el volumen pero es seguro que aumenta. ¿O no?". ¿Quién no firmaría esta frase?

No parece que sea necesario saber gran cosa sobre el tema, quizás hasta sea conveniente, para buscarse modelos muy elementales, para uno mismo y para sus alumnos, con la pretensión de que funcionen, por ejemplo:

- Tomemos dos cubos (exaedros) idénticos y los unimos. El volumen se ha duplicado. ¿Qué ha sucedido con sus áreas? ¿Y con sus perímetros?

Y si los unimos por una cara. Pensemos, por ejemplo en dos piezas de Multilink, ¿cuál es la situación en la que se consigue área máxima? Y si uno se quiere comer el "tarro" un poco más ¿cuánto vale esa área?

- Se tiene ahora un bote de polvos de talco, ¿qué le sucede a su volumen, a su área y a su perímetro si se duplica su altura? ¿Y si duplica su anchura?

Por cierto que esta pregunta tan natural precisa para su respuesta de un cierto dominio de procedimientos geométricos y el buscar, quizás, otras modelizaciones. Si sorprende la afirmación es o porque en algún momento hemos hecho un uso abusivo de las fórmulas del volumen reduciendo de ese modo la geometría al álgebra o porque se ha sabido, con buen criterio, dotar a los alumnos y alumnas de una buena batería de procedimientos geométricos para abordar el problema.

Es sin duda un buen momento para pasar a dos dimensiones, y ahora estoy pensando en la clase, y retomar (si se tomó antes) el tema de la conservación del área al modificar el perímetro, pero no vamos a entrar en ello.

También se les puede pedir que tomen un folio y construyan con él un cilindro, con un poco de suerte saldrán de los dos tipos que nos interesan (uno con el folio apaisado y el otro con el folio vertical) y se les puede preguntar acerca de cuál de ellos tiene mayor volumen. Por cierto, ¿mayor volumen o mayor capacidad? Habrá que llegar a determinados consensos que nos permitan mantener la pregunta inicial. ¿Cuál tiene más área? ¿Y qué pasa con el perímetro? Con un poco más de suerte quizás alguno construya un cucurucho en lugar de un cilindro y nos brinde la posibilidad de trabajar el volumen del cono e incluso de plantearnos como se les puede "demostrar" o mejor qué preguntas plantear para que vean que el volumen del cilindro es el triple que el de un cono de su misma base y altura. Por cierto, ¿es la base un ente matemático perfectamente definido?, supongo que sí puesto que lo usamos mucho...

Como podéis comprobar no he sabido sustraerme a la tentación de escribir una larga introducción al tema a base de haceros unas propuestas recogidas de aquí y de allá. Pero en realidad lo que pretendía no era otra cosa que plantearos un problema sencillo, no uno de esos problemas de llevar a clase mañana mismo, que yo no he visto escrito por ahí lo que me hace sospechar que o no he leído lo suficiente o no merece la pena plantearlo (también esto lo dijo alguien antes que yo). Pero ahí va, con la pretensión de que os entusiasme, ¡ahí es nada!, porque de lo contrario no merece la pena que lo llevéis a clase.

"Se cogen unos cuantos multicubos, los suficientes para construir un cubo de arista tres". La pregunta es: ¿cuántos cubitos puedo quitar del cubo grande con la condición de que lo que quede tenta la misma área que el cubo de partida?

Llegados a este punto, estimado lector, a buen seguro que, si el problema ha conseguido captar tu atención y te ha resultado sugerente, te habrás puesto a resolverlo de inmediato. Por lo que te puedes saltar estos párrafos, al retomar la lectura, ya que estas disquisiciones no tienen otra finalidad que la de dilatar, lo más posible, el momento del sacrificio que no es otro que el de dar una solución al problema y con ella "matarlo" definitivamente.

Aunque también es posible, que a estas alturas ya hayas desconectado y no hayas llegado tan siquiera a leer el problema, y por lo tanto a este punto. Riesgo, por cierto, que también se corre en clase aunque mitigado porque el alumno no tiene la libertad de largarse cuando le aburrimos. O que lo hayas resuelto sin necesidad de construirte el cubo, ni de garrapatear sobre el papel una sola línea. En ese caso: ¡Enhorabuena, eres un sesudo matemático!; sólo que yo no le planteé el problema al matemático sino al enseñante.

En cualquier caso, ahí va..., que se le va a hacer... una forma, como otra cualquiera, de abordarlo.

Una posible línea de comienzo es quitar los cubitos de las esquinas, que tienen la propiedad de mostrar tantas caras como ocultan, (una propiedad muy humana por cierto), eso nos permite construir la siguiente tabla:

CUBITOS	0	1	2	4	4	5	6	7	8
ÁREA	54	54	54	54	54	54	54	54	54
VOLUMEN	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Tabla I

Al llegar a este punto el objetivo está cumplido, no hay dependencia funcional entre área y volumen o dicho menos pretenciosamente, a una misma área le pueden corresponder muchos volúmenes diferentes. Sin embargo el problema sigue en pie: ¿Se puede quitar más cubitos?

Dos cuestiones antes de seguir:

a) Se suele presentar un bloqueo al llegar a esta situación que es bueno examinar a la luz de las técnicas de resolución de problemas.

b) Si bien se puede pensar (más bien erróneamente) que ha desaparecido la idea de la dependencia funcional entre área y volumen (¡ni el milagro de Lourdes!) persiste a buen seguro la dependencia estadística. Razones para ello no faltan: ¿Podría aumentarse el volumen del cubo de arista tres conservando el área?

Parece claro, pues, que tenemos una nube de puntos, que a cada área se le puden asociar unos cuantos volúmenes, pero que si aumenta el área, dentro de ese área cabe más volumen o dicho de otra manera, que si aumento el volumen necesitaré más área para contenerlo. ¿Y si lo disminuyo? Aquí el globo, tan unido a nuestra experiencia, aporta imágenes contundentes, por cierto, ¿acerca del volumen o de la capacidad? Además, da la sensación de que algo sucede cuando disminuimos el volumen que no sucede al aumentarlo.

Bien, pero volvamos al problema...

Hasta ahora has quitado un cubito cada vez pero ¿podrías haber quitado piezas formadas por dos cubitos?, ¿y por tres, cuatro, etc.? ¿De cuántas formas posibles?

Podríamos seguir por el camino que acabamos de abrir, pero vamos a tomar otro. Si habíamos quitado en el cubo inicial un cubito en cada esquina, ¿por qué no quitar un cubo de arista dos en una de ellas?, esto supone quitar ocho cubitos de una "tacada" lo que nos lleva en la tabla a la situación en que la habíamos dejado. Pero ahora podemos quitar los cubitos de las otras cuatro esquinas:

CUBITOS	8	9	10	11	12
ÁREAS	54	54	54	54	54
VOLÚMENES	19	18	17	16	15

Tabla II

La figura que nos queda representa un cuerpo que ha surgido del cubo inicial sometido a una serie de transformaciones y cabe preguntarnos ¿qué conserva de él? Porque la respuesta nos da una posible manera de continuar el problema y llegar manteniendo esa invariante a quitar algún cubo hasta quedarnos con 13 cubitos del cubo inicial.

Ahora, la estructura de lo que nos queda ya no se sostiene y esto da pie a nuevas preguntas: ¿cuál es el máximo número de cubitos que puedo quitar manteniendo una estructura que se "mantenga en pie"? y por otro lado ¿cuántos cubitos más de esos trece puedo quitar conservando el área? Y evidentemente puedo jugar a compensar el número de caras ocultas y al descubierto de unos y de otros y al final me quedo con nueve que es la solución trivial y no me puedo sustraer al placer de mostraros la solución que dio al problema Alvaro, un alumno del aula ocupacional de Arnedo en la que plantee el problema.

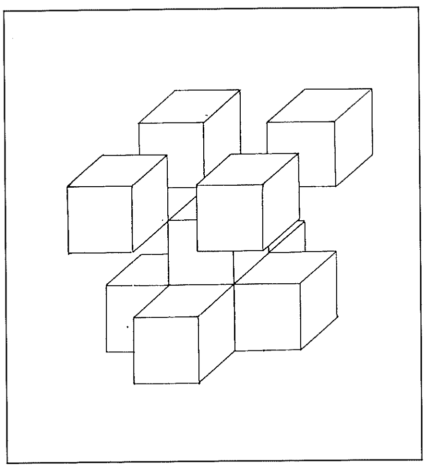


Figura 1

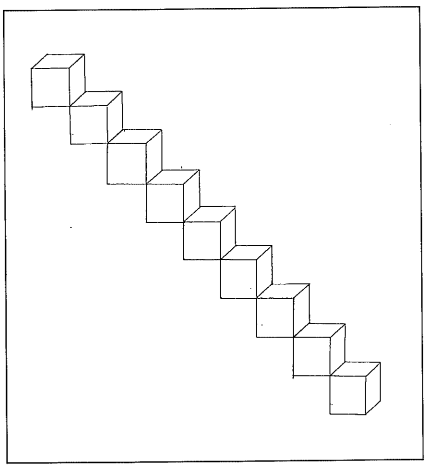


Figura 2

Todo problema se acaba cuando el que lo resuelve decide que se acaba y que suele ser habitualmente cuando el problema no le aporta retos intelectuales que abordar. Quizás por eso éste sea un buen momento para terminar, pero por si te quieres seguir comiendo el "coco" un poquito más, te planteo a modo de epílogo algunas otras cuestiones:

En la figura 2 tenemos los nueve cubitos colocados en una disposición que quizás pueda evocar un problema similar en dos dimensiones. Y cojo, de paso, la lupa y observo que a su vez cada uno de ellos está formado por otros 27 cubitos más pequeños y ello me permite reducir todavía más si cabe el volumen conservando el área... ¿en cuánto cada vez?, ¿hasta dónde?, ¿qué sucesión de volúmenes se obtiene?... No haré más preguntas pues a buen seguro que si has aguantado hasta aquí tendrás más preguntas para hecerme tu de las que yo te pueda hacer.

Si hubiéramos seguido construyendo la tabla, ésta sería ahora mucho más "continua" que antes. Pero ¿se podría hacer totalmente "continua"?

Un último esfuerzo, piensa en un cubo de poliespán de arista uno (p.e.) del que quitas en una de sus esquinas un cubo de arista z la que se quiera con tal de que 0<z<1. ¡Por fin la tabla es continua!.

Por mi parte se acabó el problema, otra cosa es que se haya conseguido el objetivo, tarea siempre ardua y más para un único problema. Pero por si acaso eres uno de esos/as "viciosos/as" que se enrollan con los problemas... ¿qué le ha ido pasando al perímetro en todo este proceso?, ¿quedan todavía razones para mantener esa idea de dependencia estadística de correlación positiva entre área y volumen de la que hablaba al principio?, ¿qué debe quedar de ella y qué debemos eliminar?, en definitiva: ¿...qué debe quedar cuando no queda nada? y por otro lado ¿qué otros modelos pueden inventarxe con esta excusa?, etc.

Carlos Usón Villalba
CEP. Calahorra

Una paradoja, una pregunta, un resultado, ...

Manuel Sobrino Reyes

En este artículo se muestra una pequeña investigación y un pequeño apunte pedagógico sobre una cuestión aparentemente cerrada como es la paradoja del Caballero de Méré. Donde dirijamos la mirada, en cualquier rincón de la matemática y su historia, es posible hallar algo nuevo, por insignificante que sea. Llevemos nuestras ideas al aula mas no privemos a nuestros alumnos del placer de descubrir. Descubrir es el motivo; aprender, la consecuencia.

Desde el punto de vista histórico se considera que la teoría del Cálculo de Probabilidades nace en el siglo XVII a partir de situaciones o problemas concretos planteados en los juegos de azar.

Antoine Gombaud, caballero de Méré, escritor y tahur, contribuyó al inicio de la probabilidad planteando a su amigo Pascal diversas cuestiones relacionadas con el juego y el azar. Algunas de tales cuestiones se mostraban contradictorias en algún sentido y es una de ellas la que a continuación se analizará.

La paradoja de Méré

En aquella época los jugadores sabían que apostando a una cara de un dado -as, por ejemplo- era necesario efectuar, al menos, cuatro lanzamientos para tener una probabilidad de ganar mayor que de perder.

El caballero de Méré pensó que, de igual modo, si se lanzan dos dados y se apuesta al doble as, veinticuatro lanzamientos serían suficientes para tener una probabilidad de ganar mayor que 0.5.

¡Cuál fue su desengaño comprobar que después de una larga noche apostando a favor de su **intuición** obtuvo como prueba unas cuantiosas pérdidas!

El **razonamiento** podría ser: "si cuando tenemos 6 resultados posibles necesitamos repetir 4 veces el experimento, teniendo 36 resultados necesitaremos 24 intentos".

La respuesta desde el punto de vista matemático a esa "extraña" proporcionalidad es clara: la probabilidad del primer suceso es $1-5^4/6^4 = 0.511747$[1] y la del segundo $1-25^{24}/36^{24} = 0.491404$. Irrefutable.

Una pregunta

Hasta aquí la paradoja. Una pregunta surge de manera inmediata: pues bien, ¿cuántos lanzamientos de dos dados son necesarios para que obtener, al menos, un doble as tenga probabilidad mayor que 0.5?

La respuesta es sencilla:

$$E\left(-\frac{\log 2}{\log \frac{35}{36}}+1\right)=25$$

donde E es la función parte entera.

Siendo 25 un número tan próximo a 24 no resisto la tentación de continuar con la extraña proporcionalidad de Méré.

¿Por qué no lanzamos tres, cuatro, cinco, ... dados apostamos por obtener tres, cuatro, cinco, ... ases respectiva y simultáneamente, e intentamos deducir un número de repeticiones del experimento necesarias para asegurarnos ganar con probabilidad mayor que 0.5?

[1] Todos los números decimales se han redondeado a la cifra de las millonésimas.

El número mínimo cuando lanzamos k dados es:

$$E\left(-\frac{\log 2}{\log \dfrac{6^k - 1}{6^k}}\right) + 1$$

¡Pero a mí me gustaría seguir con la idea intuitiva de Méré!

Tomemos como referencia los 25 lanzamientos necesarios de dos dados.

• **Experimento I:** Lanzamiento de tres dados.

¿Serán suficientes 25*6=150 tiradas? Veamos que sí.

Sea A_3 el suceso obtener al menos una vez los tres ases en 150 repeticiones.

$p(A_3) = 1 - (214/215)^{150} = 0.501453$

• **Experimento II:** Lanzamiento de 4 dados.

$t = 25*6^2 = 900$ tiradas.

A_4: obtener al menos una vez los cuatro ases en 900 lanzamientos.

$p(A_4) = 1 - (1295/1296)^{900} = 0.500782$

• **De manera recurrente se obtiene:**

$p(A_5) = 1 - (7775/7776)^{5400} = 0.500671$

$p(A_6) = 0.500652$

...

Un resultado

A la luz de lo anterior se pueden hacer dos suposiciones:

1ª.- Tal probabilidad lanzando cualquier número de dados siempre es mayor que 0.5.

2ª.- Tal probabilidad tiende a 0.5.

Veamos que, según el **resultado** siguiente la primera suposición es cierta pero la segunda es falsa.

> Consideremos el experimento que consiste en lanzar k dados (k>1) simultáneamente.
> Repitamos el experimento $25*6^{k-2}$ veces.
> La probabilidad de obtener, al menos en una ocasión los k ases:
> a) es mayor que 0.5;
> b) tiende a $1 - e^{-25/26}$ cuando k tiende a infinito.

Sea A_k: obtener al menos una vez k ases en $25*6^{k-2}$ tiradas.

$$p(A_k) = 1 - \left(\frac{6^k - 1}{6^k}\right)^{5^2*6^{k-2}}$$

Veamos que $[p(A_k)]_{k=2}^{\infty}$ es decreciente, o lo que es igual

$$\left[\left(6^k - (1/6^k)\right)^{25*6^{k-2}}\right]_{k=2}^{\infty}$$

es creciente.

La última sucesión es una subsucesión de

$$[a_n]_{n=1}^{\infty} = \left[(1-1/n)^{(5/6)^2*n}\right]_{n=1}^{\infty}$$

La sucesión $[a_n]_{n=1}^{\infty}$ es creciente[2].

$$1-(1/n) < 1 - (n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-(1/n))^{(5/6)^2*n} < (1-(1/n+1))^{(5/6)^2*(n+1)}$$

La sucesión $[p(A_k)]_{k=2}^{\infty}$ es, por tanto decreciente; es necesarir que el límite es mayor que 1/2 para terminar la demostración de a).

$$\lim_{k\to\infty} p(A_k) = 1 - \lim_{k\to\infty} (1-(1/6^k))^{6^{k-2}*5^2} =$$

$$= 1 - e^{-(5/6)^2} = 0.500648$$

Esto concluye la demostración de a) y de b).

Podemos afirmar que la **intuición** de Méré era incorrecta pues falla en el primer paso pero, olvidándonos de él, no vuelve a fallar.

En un primer intento de generalizar aún más el **resultado** anteriormente demostrado, podríamos plantearnos la siguiente conjetura:

Juego 1º: Lanzamos k dados simultáneamente y apostamos por obtener los k ases, con k>2.
Juego 2º: Lanzamos t (t<k) dados simultáneamente y apostamos por obtener los t ases.
Si el juego 1º es favorable lanzando los dados n veces, el segundo será favorable lanzándolos $n*6^{t-k}$ veces.

Sin embargo no hay más que observar ciertos casos particulares para hallar contraejemplos de ella.

¡Hagamos un último intento de generalización!

*Bajo las hipótesis de la conjetura anterior, añadiendo la siguiente: Si el juego 1º (k dados) es favorable lanzando los dados n veces y si lanzamos k+1 dados el nuevo juego fuera favorable en 6*n lanzamientos, entonces el 2º juego es favorable en $n*6^{t-k}$ lanzamientos, cualquiera que sea t (t>k+1).*

¿Cierto o falso?

Aplicación en el aula

La paradoja de Méré y la ampliación que he propuesto admiten un tratamiento didáctico por diversas razones.

• Se puede presentar a distintos niveles dentro de un mismo curso y

[2] La justificación exhaustiva se deja al lector. No es tan evidente como aquí parece, se pueden utilizar distintos resultados del cálculo diferencial a nivel de Bachillerato.

en distintos cursos de, incluso, distintas etapas educativas.

• Tiene las características de un trabajo de investigación que admite la utilización de distintos materiales manipulables para efectuar -dados- o simular -tablas de números aleatorios, calculadora, ordenador- los lanzamientos, así como para realizar los cálculos necesarios - calculadora u ordenador-.

El trabajo puede presentarse en la E.S.O. cerrando la paradoja de Méré y quizá abriendo posteriormente algún interrogante. De cualquier modo, en el primer ciclo no debemos pedir a los alumnos que lleguen más allá de obtener una aproximación al valor de la probabilidad de manera frecuencial lanzando dados y/o simulando el experimento.

En el Bachillerato se puede introducir el **resultado** donde se calculan probabilidades y se manejan conceptos de sucesión, crecimiento y límite de sucesiones, y en particular la del número **e**. Se puede establecer la comparación con el número mínimo de lanzamientos resultado de, además de introducir la función parte entera, resolver una ecuación cuya incógnita es un exponente, esto es, se necesita la noción de logaritmo o la utilización de métodos de aproximación numérica. También se puede ver que la diferencia entre el número mínimo de lanzamientos y el número del **resultado** tiende hacia infinito.

El trabajo debe seguir las líneas del razonamiento inductivo y permitir que sea el alumno quien experimente, infiera y descubra.

Con una calculadora científica se resuelven los casos de lanzamientos de al menos 7 dados y aparecen inmediatamente ciertas regularidades. A partir de 8 dados surgen, dependiendo de la precisión de la máquina, problemas, pero esto no es malo. El alumno debe apreciar la necesidad de usar instrumentos potentes de cálculo pero también debe tener en cuenta sus limitaciones cuando se producen desbordamientos o cuando los errores se hace incontrolables por la magnitud de las operaciones. Ese puede ser un buen momento para intentar deducir resultados teóricos más fiables y generales.

En suma, podemos presentar un trabajo atractivo para el alumno ya que se apoya en una situación histórica sobre los juegos de azar y con el que se tratan distintos aspectos del currículo de matemáticas. Algunos de ellos son el empleo de material y una metodología que permite la actividad del alumno y el tratamiento de la diversidad, y el corte transversal de distintos bloques de contenidos donde no sólo se pretenden objetivos terminales referidos a conceptos, sino que tienen gran importancia los de tipo procedimental y actitudinal.

Bibliografía

* CARL BOYER (1987). **Historia de la matemática**. Alianza, Madrid.

* WILLIAM FELLER (1975). **Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones**. Volumen I. Limusa, Méjico.

Manuel Sobrino Reyes
CEP. Valladolid

Juegos con monedas y palillos

Mª Trinidad Cobarro López

Es frecuente entre nosotros, los que nos dedicamos a la enseñanza de las Matemáticas por muy grande que sea nuestro amor por la materia y el deseo de comunicación, encontrarnos con un problema: ¿cómo mantener interesados a los alumnos?

De siempre soy de la opinión de que el mejor camino para hacer las Matemáticas divertidas a los que las recibe, es acercarles a ellas como si de un juego se tratase. Las matemáticas recreativas proporcionan el mejor camino para captar el interés del alumnado en la enseñanza de la matemática elemental. Un crucigrama numérico, un criptograma, un truco... puede excitar mucho más la imaginación del joven que las aplicaciones prácticas que a veces se encuentran muy lejanas y no han sido vividas.

En niveles superiores, las Matemáticas deben ser tan serias como la situación requiere, pero a niveles más inferiores es mayor el rendimiento obtenido seguramente con la utilización de trucos matemáticos.

No intento decir que la clase consista sólo y exclusivamente en exponer pasatiempos, es simplemente combinar lo serio con el juego de forma que mientras que el alumno esté alerta, la seriedad más tarde haga que el juego haya valido la pena.

A continuación espero que la serie de pasatiempos que expongo, recogidos de la amplia bibliografía existente en el mercado, sea del gusto y agrado de los lectores de la revista.

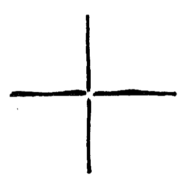
Los materiales empleados, palillos y monedas, son manipulativos como pocos y están al alcance de cualquiera.

Los palillos se venden económicamente en cajas conteniendo gran cantidad de ellos.

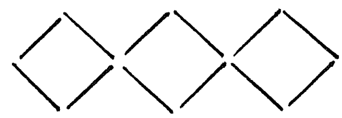
Las monedas tienen varias propiedades sencillas que pueden emplearse en este aspecto de la matemática: se apilan fácilmente, pueden usarse como fichas, utilizarse para representar un punto, son circulares y tienen dos superficies diferenciables.

Palillos

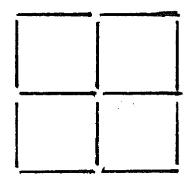
1) Moviendo un palillo, conseguir un cuadrado.



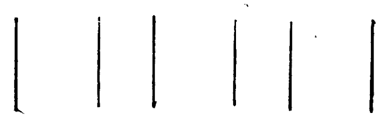
2) Cambiando cuatro palillos conseguir cuatro rombos.



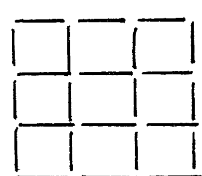
3) Suprimiendo dos palillos, conseguir dos cuadrados.



4) Añadiendo cuatro palillos, conseguir que quede uno.

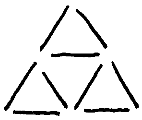


5) Quitando cuatro palillos, conseguir cinco cuadrados.

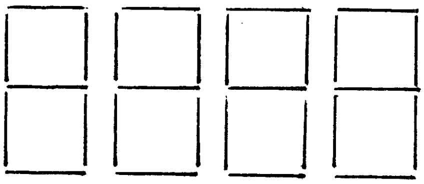


6) Con seis palillos, obtener seis triángulos equiláteros.

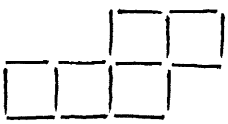
7) Retirando dos palillos dejar dos triángulos equiláteros.



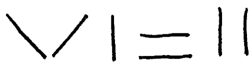
8) Retirando once palillos, dejar seis.



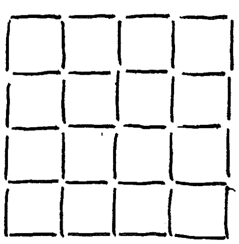
9) Cambiando de posición dos palillos, hay que reducir de cinco a cuatro el nº de cuadrados de la figura.



10) Cambiando de lugar un palillo, conseguir que la igualdad sea verdadera.

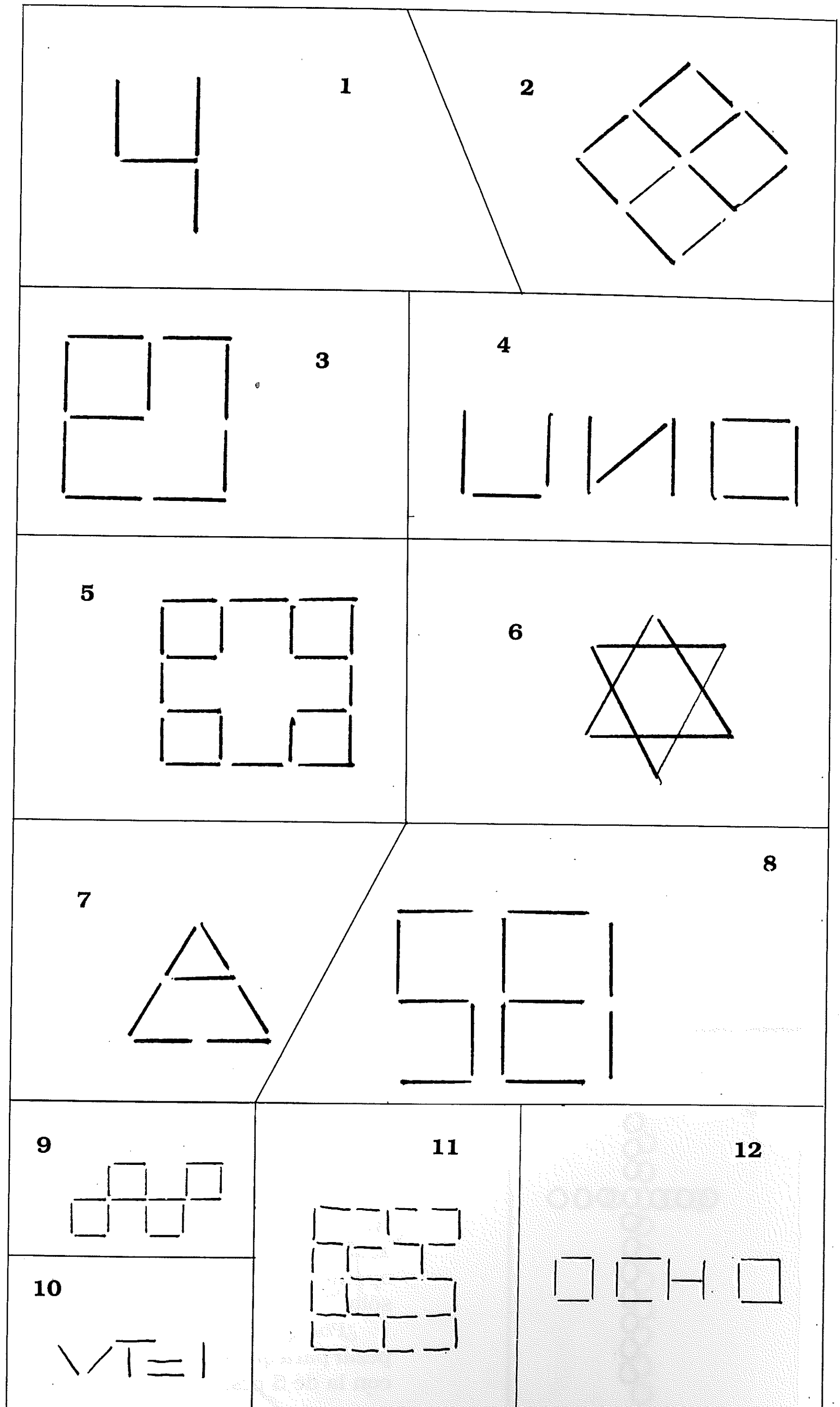


11) Retirar el nº mínimo de palillos de forma que se rompa el perímetro de todos los cuadrados (los 16 pequeños, los 9 de orden dos, los cuatro de orden tres y el mayor de orden cuatro).



12) Se le dan a un amigo dos montoncitos de palillos, uno en la mano izquierda de seis palillos, y otro en la derecha de ocho palillos. Se le invita a que los coloque de tal modo que quede ocho.

Soluciones



Monedas

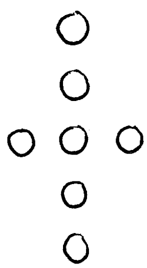
1) Colocar seis monedas en tres filas de forma que en cada una existan tres monedas.

2) Colocar 9 monedas en 10 filas a 3 monedas por fila.

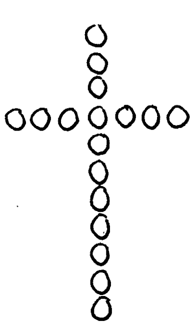
3) Colocar 10 monedas en 5 filas a 3 monedas por fila.

4) Dibuja un cuadrado con 36 casillas, se han de colocar 18 monedas, una por casilla, de manera que en cada fila y columna haya 3 monedas.

5) Con 7 monedas iguales, formamos una cruz como la de la figura, se trata de obtener una nueva cruz, que tenga los dos brazos iguales con tan solo haber cambiado dos monedas de sitio.



6) Suprimiendo dos monedas, obtener una nueva cruz, de forma que si contamos desde el pié hacia arriba en cualquier dirección, se tenga el mismo número de monedas.



7) Se tienen 10 monedas dispuestas como indica la figura 1, se trata de situarlas como en la figura 2 habiendo movido tan solo 3 monedas.

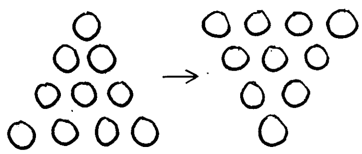
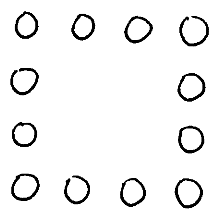


Figura 1 **Figura 2**

8) En la figura, hay 12 monedas formando un cuadrado en el que en cada lado se sitúan 4 monedas. Lo que hay que hacer es ponerlas formando un cuadrado pero con 5 monedas por lado.

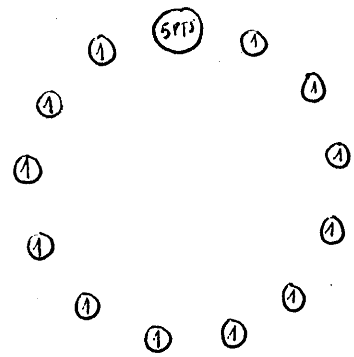


9) Tengo dos monedas que suman 30 ptos., pero una de ellas no es de 25 pts., ¿cuáles son sus valores?

10) Se tienen 13 monedas representadas en círculo, 12 de 1 pts., y una de 5 pts.

Empezando por la moneda que se quiere, hay que contar 13 y la moneda que se quede en ese lugar se elimina. Volveremos a contar trece empezando por la siguiente a la que acabamos de eliminar y repetimos la operación hasta dejar una moneda sólo.

¿Por qué moneda hemos de empezar para que al final nos quedemos con la de 5 pts.?



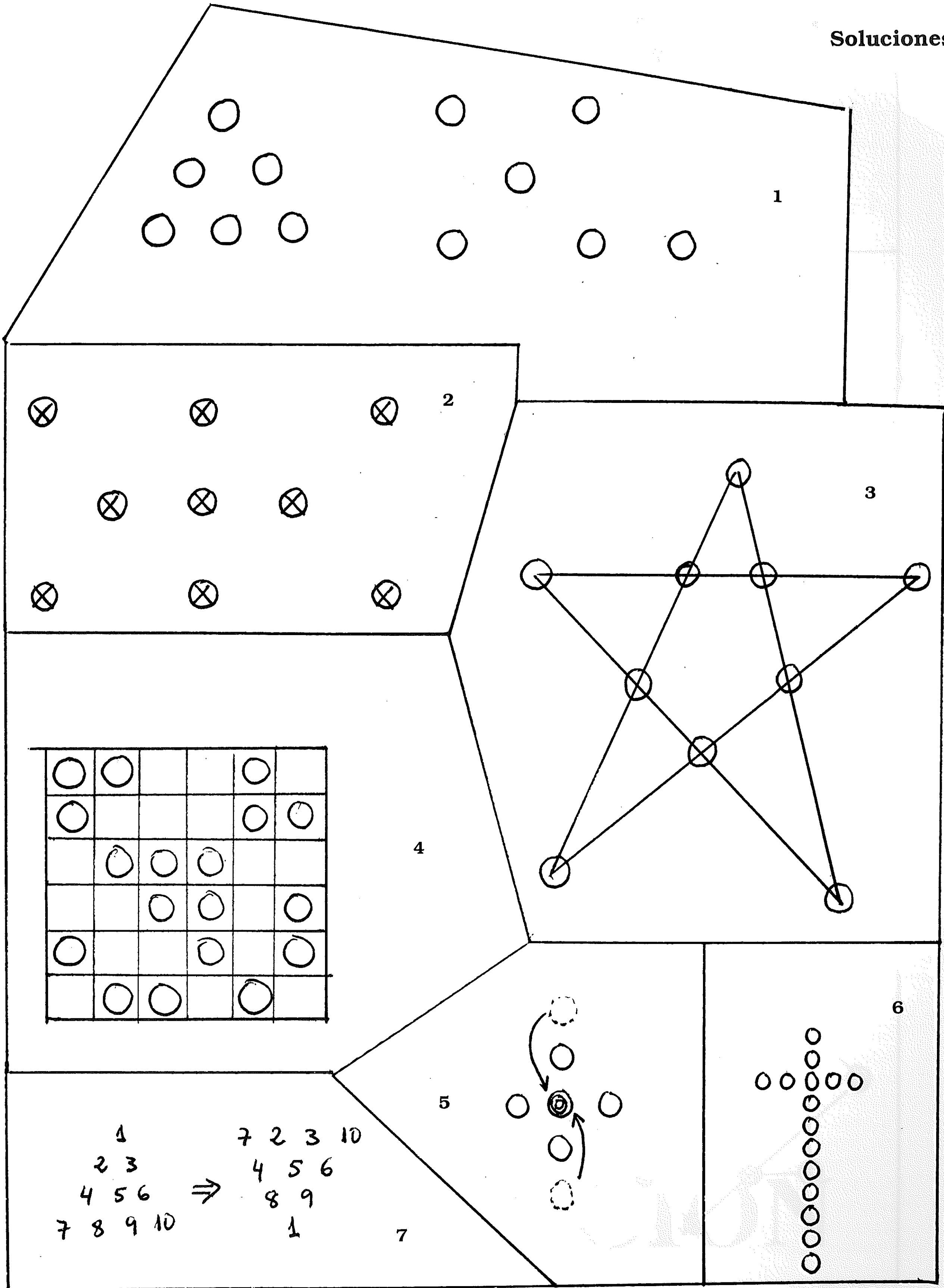
11) Colocar 10 monedas de forma que constituyan 5 líneas rectas con 4 monedas cada una.

12) Se colocan 4 monedas iguales, formando un cuadrado. Cambiando tan solo una moneda de posición, obtener dos hileras rectas de 3 monedas cada una.

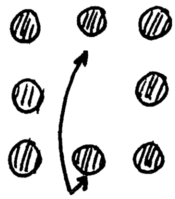
13) Disponer 24 monedas en seis filas a 5 por fila.

14) Disponer 16 monedas en ocho filas a 5 por fila.

Mª Trinidad Cobarro López
I.F.P. Caravaca de la Cruz (Murcia)


1
2
3
4
5
6
7
1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
7 2 3 10
4 5 6
8 9
1

8



dos monedas

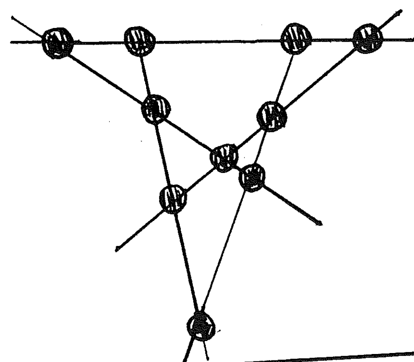
9

Las monedas son de 25 y 5 pts., pues, el que una no sea de 25 pts., no quiere decir que la otra no los sea.

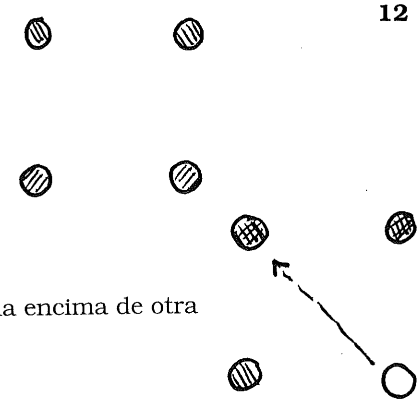
10

Empezariamos por la nº 7

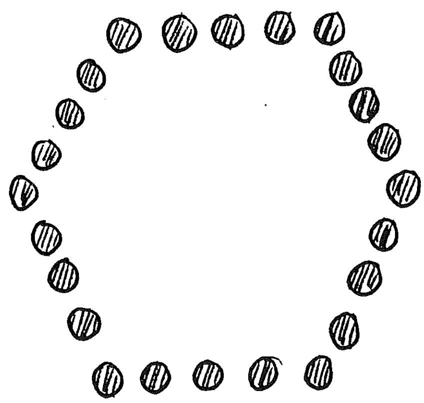
11 Otra solución:



12

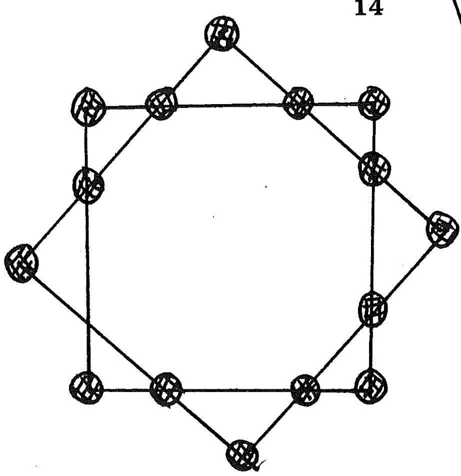


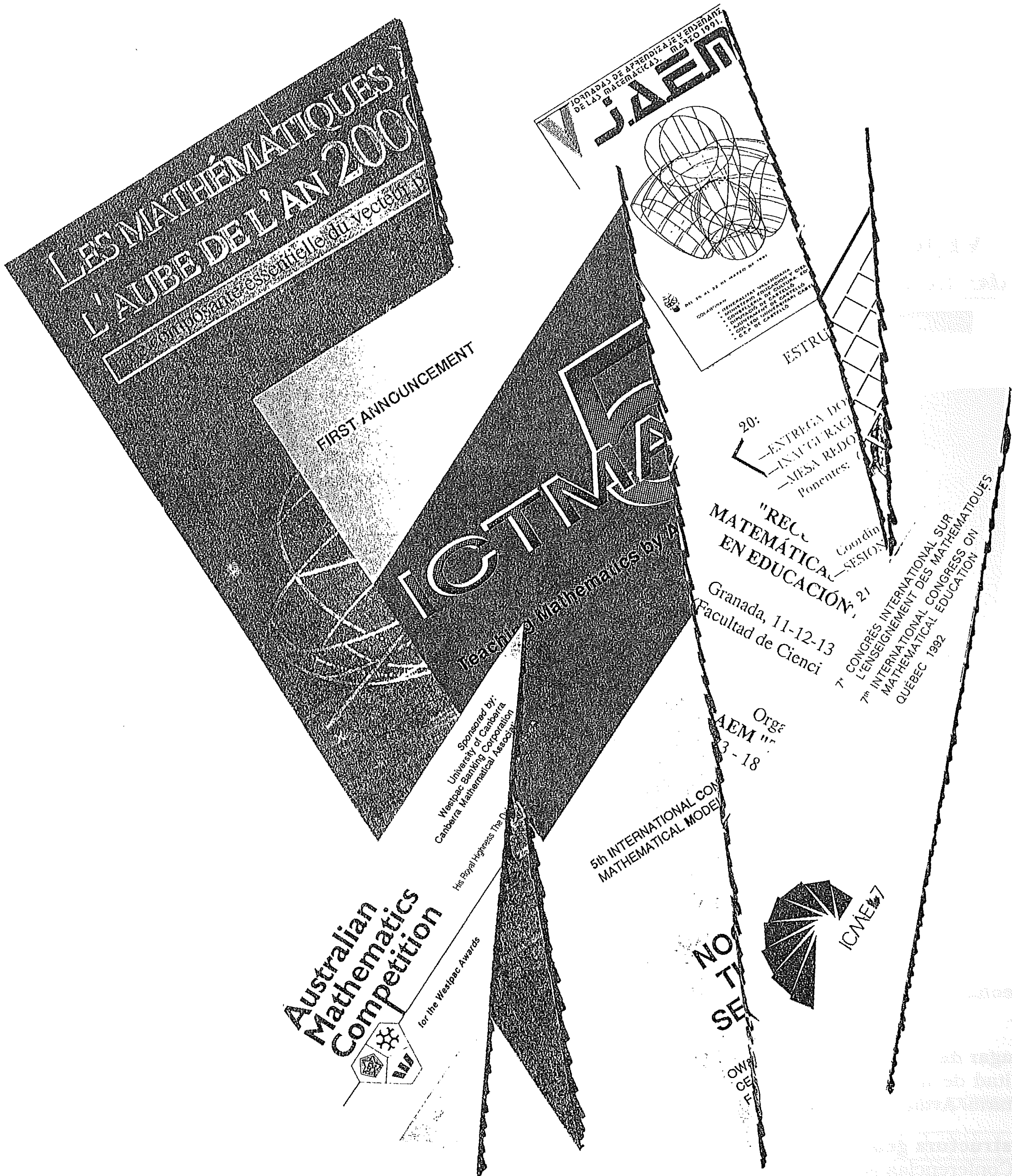
Una encima de otra



13

14



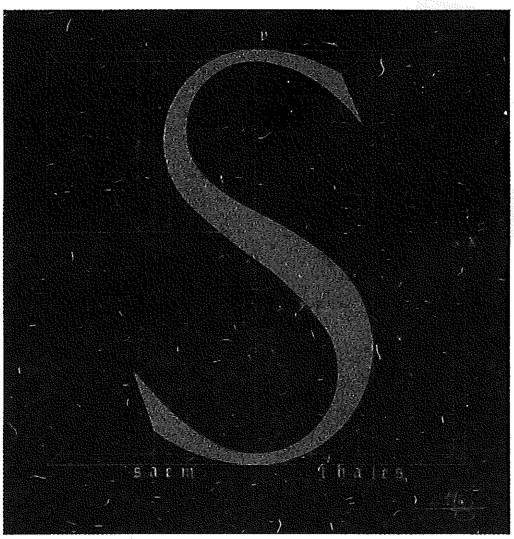


INFORMACIÓN

VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática

8-9-10-11 de Septiembre de 1993

SEVILLA



Información inicial

1.- **Fechas:** 8, 9, 10 y 11 de Septiembre de 1993 (X, J, V, S).

2.- **Lugar de celebración:** Facultad de Matemáticas y Facultad de Informática y Estadística. Campus Universitario. Avda. Reina Mercedes. Sevilla.

3.- **Estructura general:**
- Conferencias generales.
- Comunicaciones.
- Grupos de Trabajo:
  1.- El Laboratorio de Matemáticas.
  2.- Las Calculadoras en el Aula.
  3.- Resolución de Problemas.
  4.- Evaluación en Matemáticas.
- Paneles.
- Talleres.
- Exposiciones: fotografía, informática, libros, revistas, material didáctico, ...

4.- **Plazos y Cuotas de inscripción:**
- Hasta el 30 de Junio de 1993.
- Socios de la S.A.E.M. "THALES" y Soc. Federadas ...... 6.000 pts.
- No socios .... 15.000 pts.

- Después del 30 de Junio de 1993.
- Socios de la S.A.E.M. "THALES" y Soc. Federadas .... 10.000 pts.
- No socios .... 20.000 pts.

5.- **Actividades sociales:** (pendientes de confirmación)
- Recepción del Ayuntamiento.
- Recepción de la Universidad.
- Visita al Parque Temático de la Cartuja.
- Visita al Parlamento Andaluz.
- Visita Sevilla monumental.
- Cena final de Jornadas.

6.- **Normas para la presentación** de comunicaciones, paneles y material didáctico.

Comunicaciones

Extensión máxima: 7 hojas DIN A4 (todo incluido) a doble espacio.

Carteles

Dimensiones: 1 x 0,6 (m) en formato vertical.

En el panel se podrá fijar fecha y hora de encuentro de los autores con los asistentes a las Jornadas.

Material didáctico

En la exposición se podrá fijar fecha y hora de encuentro de los autores con los asistentes a las Jornadas.

Todos los trabajos que se presenten incluirán un **resumen con un máximo de 200 palabras**, el cual se entregará a los participantes con la documentación inicial, a su llegada a las Jornadas.

Todos los trabajos y resúmenes se acompañarán de soporte informático (preferible WP 5.1).

Plazos para la presentación de trabajos y resúmenes:

31 de Mayo de 1993

Información y recepción de documentos:

S.A.E.M. "THALES" VI JORNADAS. Apdo. 4172.
41080 - Sevilla
Tlf.: (95) 4623658. Fax: (95) 4236378.

Oficina técnica: Inscripciones, viajes, alojamiento, etc.

AGENCIA BOREAL
Tlf.: (95) 4218984. Fax: (95) 4218334

VI Jornadas Andaluzas
de Educación Matemática

8-9-10-11 de Septiembre de 1993

SEVILLA

RESERVA DE ALOJAMIENTO

ROGAMOS CUMPLIMENTAR A MÁQUINA O MAYÚSCULAS.
BOLETÍN VÁLIDO PARA UN SOLO PARTICIPANTE Y ACOMPAÑANTE, EN SU CASO.

PARTICIPANTE

APELLIDOS			NOMBRE
DOMICILIO			TELÉFONO
CÓDIGO POSTAL	CIUDAD	PROVINCIA	

ALOJAMIENTO

	POR PERSONA EN HABITACIÓN DOBLE (2)	POR PERSONA EN HABITACIÓN INDIVIDUAL
HOTEL AL ANDALUS 4 estrellas	6.400	9.950
HOTEL ARMENDARIZ 4 estrellas..........	5.300	8.000
COLEGIO MAYOR HERNANDO COLÓN (1)	2.500	3.500

Precios por noche con desayunos. IVA incluído.

HOTEL ELEGIDO..

DÍA LLEGADA .... DÍA SALIDA ....

TIPO DE HABITACIÓN ....

.... PTAS. X.................... PERSONA/S X.................... NOCHES = ...

TOTAL PESETAS

(1) Sólo disponible para un muy reducido número de habitaciones.
(2) Si comparte habitación con otro participante, indique su nombre:
D/Dª ....

NOTA: La reserva no será considerada definitiva en tanto no reciba confirmación escrita desde la Secretaría Técnica.

MEDIO DE PAGO

☐ Transferencia bancaria a nombre de
BOREAL S.A.
BANCO POPULAR ESPAÑOL O.P.
SEVILLA
c/c nº 60-08220-74
(Adjuntar comprobante transferencia)

☐ Adjunto talón nominativo a favor de
BOREAL S.A.

Nº ....

BANCO ....

SUCURSAL ....

☐ Tarjeta de crédito:
Autorizo el cargo de .... PTAS.
contra mi tarjeta:
☐ VISA ☐ AMERICAN EXPRESS

Nº

VÁLIDA HASTA: ....

TITULAR: ....

FECHA: ....

FIRMA: ....

USO EXCLUSIVO
SECRETARÍA TÉCNICA

FECHA DE RECEPCIÓN:

REGISTRO NÚMERO:

ROGAMOS REMITIR ANTES DEL 30 DE JUNIO DE 1993 A:
BOREAL S.A.
Federico Sánchez Bedoya, 7-2º L
41001 SEVILLA

SECRETARÍA TÉCNICA: BOREAL S.A.

F. Sánchez Bedoya, 7-2º L - Tfnos. (95) 421 89 84 / 421 89 85 - Fax: (95) 421 83 34 - Télex: 72522 - 41001 SEVILLA

Informe sobre el VII Congreso Internacional de Educación Matemática. Québec, agosto 1992[1]

Durante los pasados días 17 a 23 de Agosto de 1992 tuvo lugar en la Université Laval de Québec, Canadá, el VII Congreso Internacional de Educación Matemática. Dada la trascendencia de este acontecimiento para los profesionales de la Educación Matemática de todos los niveles, la Junta Directiva de la SAEM Thales encargó la redacción de un informe que cumpliese el doble objetivo de difundir los datos más importantes de este encuentro y estimular la participación mayoritaria en el próximo VIII Congreso, que tendrá lugar el año 96 en Sevilla.

Este trabajo se ha realizado con las aportaciones de los autores mencionados, todos ellos asistentes en Québec al VII Congreso.

¿Qué son los Congresos del ICMI?

La Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática (International Comission for Mathematical Instruction: ICMI), fue fundada en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Roma en 1908. Entre sus fundadores estuvieron el Profesor Klein de la Universidad de Gotinga, el Profesor Grenhill de la Universidad de Londres y el Profesor Fehr de la Universidad de Ginebra, que formaron parte del primero de sus consejos.

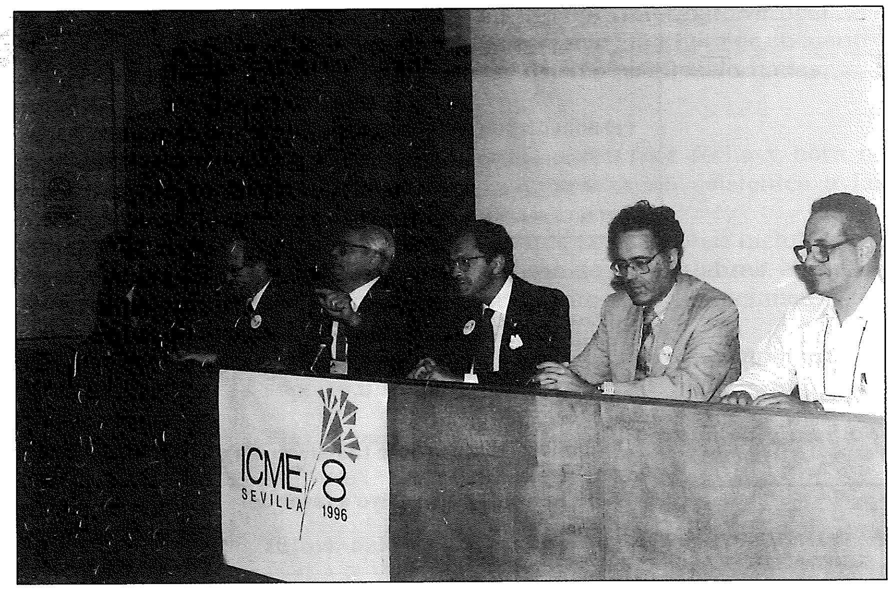
La Unión Internacional de Matemáticos (International Mathematical Union: IMU) mantuvo desde su creación una sección dedicada a temas educativos, aunque su influencia era muy limitada. En el año 1960 la IMU aceptó la afiliación del ICMI como una comisión diferenciada, con intereses propios, dentro del IMU. A partir de este momento se intensifica el interés y los trabajos sobre Educación Matemática.

En el año 1962, el Profesor A. Lichnerowiz resultó elegido por la Asamblea General del IMU primer Presidente de la Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática. En el año 1966, en el Congreso del IMU celebrado en Moscú, el Profesor H. Freudenthal fue elegido nuevo Presidente del ICMI. A la iniciativa y esfuerzo de Freudenthal se debe la organización del Primer International Congress on Mathematical Eduation (ICME), que se celebró en Lyon (Francia) en el año 1969, con la asistencia de seiscientos participantes, aproximadamente.

En Lyon se estableció el acuerdo de celebrar estos Congresos cada cuatro años, alternando con los Congresos Internacionales de Matemáticas. Desde entonces se han celebrado los siguientes Congresos:

- I Congreso en Lyon (Francia) en 1969
- II Congreso en Exeter (Reino Unido) en 1972
- III Congreso en Karlsruhe (Alemania) en 1976
- IV Congreso en Berkeley (California-USA) en 1980
- V Congreso en Adelaida (Australia) en 1984
- VI Congreso en Budapest (Hungría) en 1988
- VII Congreso en Québec (Canadá) en 1992

El próximo Congreso se celebrará en Sevilla en 1996.



Acto de Presentación del ICME-8

[1] Este informe ha sido elaborado pro Aranda, A; Fuente, M de la; González, E; Martínez, P.J.; Pérez, A.; Pérez, J.; Rico, L.; Sánchez, G.; Torralbo, M., todos ellos asistentes en Québec al ICME'7.

Desde su comienzo los ICME han ido aumentando en número de asistentes, en variedad de temas y profundidad de tratamiento, llegando a converitirse en el espacio internacional prioritario donde se encuentra la gran comunidad de Educadores Matemáticos, en donde se plantean y debaten multitud de cuestiones y se marcan las líneas prioritarias de desarrollo futuro para ese gran campo de problemas relacionados con la enseñanza, aprendizaje, creación y comunicación de las matemáticas.

¿Quiénes asisten al ICME?

Los asistentes al ICME cubren toda la gama de opciones profesionales en Educación Matemática: desde el Profesor de Preescolar o de Escuela Maternal al investigador universitario o de un Centro especializado de investigación en Educación Matemática; desde el Profesor de un aula para alumnos disca-pacitados hasta el Profesor que trabaja con alumnos de un alto coeficiente intelectual. Igualmente están representados la mayor parte de los países, con lo que la comparación entre Sistemas Escolares se produce de manera espontánea.

Según datos de la organización, al Congreso de Québec han asistido 2.896 participantes, procedentes de 88 países distintos; de todos los continentes. Los países con más participantes han sido:

U.S.A.	787
Japón	224
Australia	154
Francia	113
Alemania	61
Holanda	51
Nueva Zelanda	38
Finlandia	24
Portugal	23
Canadá	383
Reino Unido	188
España	122
Suecia	69
Italia	51
Israel	41
Brasil	29
Sudáfrica	24
México	20

Países con un sólo representante fueron: Andorra, Antigua, Arabia Saudita, Armenia, Bahrein, Bangladesh, Brunei, Darussalam, Costa Rica, Costa de Marfil, Cuba, Estonia, Fidji, Haití, Jamaica, Kenya, Lituania, Malawi, Martinica, Islas Mauricio, Namibia, Pakistán, República de Yemen, Qatar, Uganda, Ucrania, Uruguay, Uzbekistán, Yugoeslavia.

Asistentes al Happy Hour Español.

Interesante es destacar que España ha sido el 6º país por número de asistentes. El total de representantes de habla hispana ha sido de 174, procedentes tan sólo de 12 países.

La Comunidad Iberoamericana contó con un total de 246 asistentes, cifra aún escasa, si bien hay que tener en cuenta que grandes países como Rusia y China han estado representados por 13 y 9 participantes, respectivamente.

¿Cómo estuvo organizado el ICME?

La organización de un encuentro tan amplio y ambicioso como es un ICME, con la variedad de intereses y participantes que concurren, resulta una tarea compleja. Inevitablemente hay que seleccionar entre varias opciones, ya que simultáneamente concurren diversas actividades salvo en las muy contadas excepciones de las sesiones plenarias.

El ICME de Québec estuvo organizado con el siguiente Programa Científico:

Conferencias Plenarias, se celebraron cuatro conferencias plenarias en días alternos. Sus ponentes y títulos fueron:

Profesor Geoffrey Howson, Universidad de Southampton (Reino Unido), *Los enseñantes de Matemáticas.*

Profesora Maria Klawe, Universidad de Vancouver (Canadá), *Suscitar la investigación matemática en los alumnos de enseñanza media.*

Profesora Colette Laborde, Universidad de Grenoble (Francia), *Enseñar Geometría: permanencias y revoluciones.*

Profesor Benoit Mandelbrot, Universidad de Yale (USA), *Geometría experimental y fractales: un tema al alcance de los alumnos y de todo el mundo.*

Grupos de trabajo: constituyen uno de los elementos claves en la organización del ICME. Cada grupo de trabajo está configurado en torno a un tema o tópico fundamental. La lista de temas de los grupos de trabajo nos señalan cuáles son las prioridades establecidas por los organizadores del Congreso y los puntos de preocupación más señalados dentro de la comunidad de Educadores Matemáticos. El VII ICME contó con 23 grupos de trabajo, cada uno de los cuales dispuso de cuatro sesiones de 90 minutos cada una para desarrollar sus actividades. Igualmente, la organización de comunicaciones se hizo en base a los grupos de trabajo. En la inscripción al Congreso se solicitaba a cada asistente su adscripción a un grupo de trabajo. Al frente de cada uno de los grupos de trabajo había un coordinador responsable, asistido por un equipo de asesoramiento constituido por cuatro o cinco profesores de otros países; en cada uno de los equipos era preceptiva la presencia de un profesor del país anfitrión, canadienses en este caso. La lista de grupos de trabajo (Working Group: WG) con sus coordinadores es la siguiente:

WG 1: Formación de conceptos matemáticos elementales en la enseñanza primaria. Coordinadora: Helen Mansfield (Australia).

WG 2: Concepciones erróneas y contradicciones de pensamiento de los estudiantes. Coordinador: Sholomo Vinner (Israel).

WG 3: Dificultades de los estudiantes en el cálculo diferencial e integral. Coordinadores: Michèle Artigue (Francia) y Gontran Ervynk (Bélgica).

WG 4: Teorías sobre el aprendizaje de las Matemáticas. Coordinadora: Pearla Nesher (Israel).

WG 5: Mejora de las actitudes y de las motivaciones de los alumnos. Coordinadora: Gilah Leder (Australia).

WG 6: Formación inicial y perfeccionamiento del profesorado. Coordinador: John Dossey (USA).

WG 7: Lenguaje y Comunicación en el Aula. Coordinador: Heinz Steinbring (Alemania).

WG 8: Innovaciones en la evaluación de los estudiantes en la clase de matemáticas. Coordinadores: Zoltán Báthory y Júlia Szendrei (Hungría).

WG 9: Diferenciación de los programas de matemáticas dentro del aula y entre aulas diferentes. Coordinador: Skip Kifer (USA).

WG 10: Clases pluriculturales y plurilingües. Coordinador: Patrick Scott (USA).

WG 11: El papel de la geometría en la educación general. Coordinador: Rina Hershkowitz (Israel).

WG 12: Probabilidad y Estadística para el futuro ciudadano. Coordinadores: James Schultz (USA) y Mary Rouncefield (Reino Unido).

WG 13: El lugar del álgebra en la enseñanza secundaria y post secundaria. Coordinadora: Carolyn Kieran (Canadá).

WG 14: Actividades de modelización en el aula. Coordinador: Trygve Breiteig (Noruega).

WG 15: Matemáticas a nivel postsecundario para diferentes grupos de estudiantes. Coordinador: Daniel Alibert (Francia).

WG 16: El impacto de la calculadora en el currículo de las escuelas elementales. Coordinadora: Hilary Shuard (Reino Unido).

WG 17: La tecnología al servicio del cirrículo de matemáticas. Coordinador: Klaus-Dieter Graf (Alemania).

WG 18: Métodos para la implantación del cambio curricular. Coordinador: Hugh Burkhardt (Reino Unido).

WG 19: Matemáticas para alumnos que abandonan prematuramente sus estudios. Coordinador: Carlos Vasco (Colombia).

WG 20: Matemáticas en Educación a distancia. Coordinador: Gordon Knigth (Nueva Zelanda).

WG 21: La imagen pública de las matemáticas y de los matemáticos. Coordinador: Thomas Cooney (USA).

WG 22: Educación Matemática con medios limitados. Coordinador: Fidel Oteiza (Chile).

WG 23: Metodologías para investigar en Educación Matemática. Coordinador: Norbert Knoche (Alemania).

Una dinámica usual en los Grupos de Trabajo consistió en hacer una sesión general inicial, para contextualizar las principales líneas de estudio y reflexión que surgían de cada tópico; a continuación el grupo se dividía en cuatro o cinco subgrupos en cada uno los cuales se debatía específicamente uno de los apartados y se presentaban comunicaciones breves al respecto.

Conviene destacar la estricta puntualidad para comenzar y concluir las sesiones y las intervenciones de cada uno de los participantes dentro del horario asignado. Por sorprendente que pueda resultar cada actividad se iniciaba y concluía en el horario previsto. Al comenzar la intervención de cada uno de los ponentes o comunicantes el coordinador hacia su presentación, les controlaba el tiempo y, al finalizar, les agradecía su participación, lo que concluía con un aplauso de cortesía por parte de los asistentes.

Los grupos de trabajo terminaban sus sesiones con la presentación de las conclusiones de cada uno de los subgrupos y el acuerdo para editar un documento final con los datos más relevantes. Algunos grupos editarán Actas específicas con el contenido y los documentos trabajados durante el desarrollo del Congreso.

Otras Conferencias: Alternando con las Conferencias Plenarias, o bien a continuación, todas las mañanas tenían lugar una serie de conferencias invitadas por la organización, sobre temas más específicos que los de las conferencias plenarias. en total se celebraron 44 de estas conferencias.

Nos interesa destacar dentro de este apartado, por su especial significación para nosotros, las siguientes conferencias:

From sharing to fractions (Desde el compartir hasta el fraccionar), del Profesor Joaquín Giménez, de la Universidad de Tarragona;

The origin and evolution of mathemaitcal theories: implications for mathematical education, (Origen y evolución de las teorías matemáticas: implicaciones para la Educación Matemática), del Profesor Miguel de Guzmán, de la Universidad Complutense de Madrid.

Grupos Temáticos: Los Grupos Temáticos (Topic Groups: TG) constituyen una segunda variante de organización para el trabajo dentro del Congreso. A cada grupo temático se le asignaron dos sesiones de trabajo de 90 minutos de duración; cada asistente debía elegir un Grupo Temático al realizar su inscripción. En total se organizaron 16 Grupos Temáticos, cuyos títulos y organizadores fueron los que siguen:

TG 1: Competiciones matemáticas. Organizador: Edward Barbeau (Canadá).

TG 2: Ethnomatemática y Educación Matemática. Organizador: Ubiratán D'Ambrosio (Brasil).

TG 3: Matemática para el trabajo y enseñanza profesional. Organizador: Rudolf Sträesser (Alemania).

TG 4: Los pueblos autóctonos y la Educación Matemática. Organizador: Bill Barton (Nueva Zelanda).

TG 5: El contexto social de la Educación Matemática. Organizador: Alan Bishop (Reino Unido).

TG 6: La teoría y la práctica de la demostración matemática. Organizadores: Gila Hanna (Canadá) y Niels Jahnke (Alemania).

TG 7: Juegos y rompecabezas matemáticos. Organizador: Tibor Szentinayi (Hungría).

TG 8: Enseñanza de las matemáticas mediante proyectos. Organizador: Jarkko Leino (Finlandia).

TG 9: Las matemáticas en el contexto de un currículo total. Organizador: John Mack (Australia).

TG 10: Interpretaciones constructivistas de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. Organizadores: John Malone y Peter Taylor (Australia).

TG 11: Matemáticas y Arte. Organizador: Rafael Pérez (España).

TG 12: El papel de las posiciones teóricas fundamentales en Educación Matemática. Organizador: Hans Steiner (Alemania).

TG 13: La televisión en el aula de matemáticas. Organizador: David Roseveare (Reino Unido).

TG 14: Cooperación entre teoría y práctica en la educación matemática. Organizador: Falk Seeger (Alemania).

TG 15: Estadística en el currículo de la secundaria y postsecundaria. Organizador: Richard Schaeffer (USA).

TG 16: Filosofía de la Educación Matemática. Organizador: Paul Ernest (Reino Unido).

Grupos de Estudio: La Comisión Internacional para la Instrucción en Matemática (ICMI) cuenta con tres grupos internacionales de estudio, que desarrollaron un programa propio de actividades durante el Congreso; cada grupo contó con cuatro sesiones de 90 minutos.

Estos grupos son: Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME); Grupo Internacional para las relaciones entre la Pedagogía y la Historia de las Matemáticas (International Group for the Relations between the Pedagogy and History of Mathematic: HPM); y la Organización Internacional de mujeres y educación matemática (International Organization of Women and Mathematics Education: IOWME).

Estudios del ICMI: Durante el Congreso se hizo la presentación de tres estudios realizados por el ICMI.

El primer estudio: *La influencia de los ordenadores y de la informática en las matemáticas y en su enseñanza*, fue organizado por B. Cornu (Francia). Se trataba de una edición revisada de la original de 1985; a este estudio se dedicaron dos sesiones de 90 minutos.

El segundo estudio: *La popularización de las matemáticas*, organizado por Henry Pollack (USA), tuvo igualmente dos sesiones de 90 minutos dedicadas a vídeos, películas y otro tipo de eventos.

El tercer estudio: *La evaluación en la educación matemática y sus efectos*, fue organizado por Mogen Niss (Dinamarca). Este estudio utilizó cuatro sesiones de 90 minutos. Recogemos la descripción hecha por uno de los profesores asistentes:

"Entre los estudios presentados, el tercero tenía un especial interés personal para mí. Se dijeron muchas cosas importantes e interesantes, pero se me quedó grabada en la mente una definición que me llamó poderosamente la atención y, además, me hizo recapacitar sobre lo que representa la evaluación dentro del proceso de enseñanza -aprendizaje y sobre la relativa importancia de la misma. La definición era esta: ***Assessing is something imposed from outside to the didactical relationship and which comes to distrurb the phenomenon we want to observe****. La traducción puede ser la siguiente:* ***Evaluar el algo impuesto desde fuera al proceso de enseñanza y que viene a perturbar el fenómeno que queremos observar****".*

(Pedro J. Martínez).

Presentaciones Nacionales: Es una actividad usual en los ICME-s que algunos países hagan una presentación general sobre el estado de la enseñanza de las matemáticas en el momento actual y otras consideraciones relativas a la organización de estudios y formación de profesorado en cada caso. Así, España hizo una presentaicón en el VI ICME de Budapest, que corrió a cargo del Prof. Alsina.

En este ICME han sido cinco los países que han hecho su presentación: Brasil, Canadá, Finlandia, Reino Unido y Taiwan. En cada caso la presentación tuvo lugar dos veces, con una duración de 30 minutos.

Comunicaciones Breves: Entre las aportaciones más destacables de cualquier congreso se encuentran las que realizan los asistentes usuales, lo que podríamos llamar *congresistas de a pie*. Es en estas comunicaciones donde se produce un auténtico intercambio de información y experiencias, en donde cada asistente ha depositado sus ilusiones y esfuerzos y, precisamente, el medio por el que espera entrar en contacto con otras personas con las que comparte interés y preocupación. En esta ocasión los organizores han estimado que muchos congresistas pueden tener dificultades para expresarse o para comprender a sus colegas en uno de los idiomas oficiales o en los dos. Por este motivo desecharon las comunicaciones orales de 10 minutos, que era el modo usual de presentar las Comunicaciones Breves. En su lugar se ofreció la oportunidad de presentar las comunicaciones a través de posters o, excepcionalmente, por medio de vídeos o software.

Al comienzo del Congreso se entregó un libro de Actas con los resúmenes de las Comunicaciones Breves. En la publicación están recogidos los Abstracts de 376 posters, 36 softwares y 26 vídeos. En la lista de comunicantes que aparece al final encontramos 44 comunicantes españoles.

Proyectos: Durante las sesiones del Congreso se presentaron un total de 17 Proyectos de Desarrollo Curricular o de Investigación en el campo de la Educación Matemática. Entre los Proyectos que nos parecieron más interesantes se encuentran: el presentado por los IREM (Institus de Recherche su l'Enseignement des Mathématiques) de Francia; el denominado Mecanismos en Acción, de la Universidad de Manchester, en el que se presentaban diversos mecanismos físicos para trabajar sus aspectos matemáticos (engranajes, mecanos, etc.); el School Mathematics Project, de la Universidad de Southampton (Reino Unido), donde se presentan materiales curriculares para la enseñanza de las matemáticas escolares; los trabajos del Shell Centre for Mathematical Education de la Universidad de Nottingham (Reino Unido), con apartados especiales sobre sus publicaciones más conocidas ("El lenguaje de las funciones y las gráficas", "Problemas con patrones y números", "Conviertete en un ingeniero con el papel"), pero también otras sobre aprendizaje a distancia, evaluación, enseñanza por diagnóstico; también presentan trabajos sobre el uso de las nuevas tecnologías: vídeos interactivos y software de apoyo; también se presentó el trabajo del grupo CIRADE (Centro de Investigación Canadiense); los proyectos del Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht (Holanda); el trabajo del Centre for Mathematics Education de la Open University del Reino Unido; el Proyecto Century Mathematics; el "Equals Programs" de la Universidad de Cambridge; el Groupe International Cabri-géomètre; el Mathematics Centre de West Sussex; el Mathematics Education Unit, del King's College de la Universidad de Londres; el Statistical Education Projects de la Appalachian State University; etc.

¿Dónde se organizó el ICME?

Las necesidades de infraestructura para atender a cerca de 3.000 personas durante 7 días, desarrollando las actividades del Programa anterior, y otras complementarias que se comentarán más adelante, son complejas y variadas. La totalidad del Congreso transcurrió en el Campus Universitario de la Universidad Laval de Québec, que comprendía 29 áreas o edificios y, además, servicios de Fax, fotocopias, residencias de estudiantes, comedores, bancos, agencias de viajes, guarderías y transportes públicos. Las instalaciones de la Universidad Laval cubrieron adecuadamente las necesidades del Congreso y de los asistentes; la crítica más fuerte dentro del grupo español estuvo dirigida a la variedad y calidad de las comidas.

Dos edificios desempeñaron un papel destacable en la logística del Congreso. El primero de ellos, el *Pabellón Charles de Koninck*, albergó: el Servicio de Recepción e Información; una pantalla de TV que anunciaba presentaciones especiales de las distintas exposiciones, modificaciones del Programa; Librerías y puestos de venta de materiales didácticos; stands de exposición y venta de diversos software didácticos y calculadoras educativas y científicas; stand de presentación del VIII ICME de Sevilla y de las publicaciones de las Sociedades españolas de educadores matemáticos y de la Federación; Aulas para reuniones de grupos de trabajo y comunicaciones.

El segundo edificio en importancia era el *Pabellón de Educación Física y Deportes*. En su Zona A se impartieron las Conferencias Plenarias con traducción simultánea; este fue el lugar del acto inaugural y del de clausura, así como de la brillante gala cultural. La Zona B -ginmasio cubierto- sirvió como espacio para diferentes exposiciones; entre las exposiciones más destacables señalamos: Horizontes Matemáticos; la Exposición Iberoamericana, que comprendía:

1) *Prehistoria de la Teoría de Grupos en el Arte Hispano-Musulmán*, con una colección de fotografías sobre la Alhambra y la Mezquita de Córdoba, y los estudios matemáticos correspondientes, realizados por Rafael Pérez y Miguel de la Fuente, sobre la representación de grupos cristalográficos planos en ambos monumentos.
2) *Colección de Fotografías*, realizadas por Pilar Moreno, sobre distintos lugares y situaciones.
3) Exposición portuguesa sobre aspectos matemáticos de *Navegación y Astronomía*, relacionados con la Historia de Portugal.
4) Panel Boliviano sobre *Matemáticas e Instrumentos Musicales*.
5) Panel sobre el *Geoplano Aureo*, presentado por José Ángel Dorta.

También en esta Zona B del pabellón de Deportes estaba situada la exposición de los Proyectos, antes mencionados.

Finalmente, en la Zona C del Pabellón se encontraba el espacio para los Posters de las Comunicaciones Breves.

¿Qué información podía obtenerse?

A los largo de los 6 días que duró el Congreso se editaron y distribuyeron gratuitamente entre los asistentes varias publicaciones, entre ellas destacan por su interés: *Newsletter* y *Le Colloquin Avise*.

Newsletter era un Boletín Informativo diario que editaba la Organización del VII ICME, en el que se informaba de las actividades y acontecimientos destacables de cada día, así como de otras noticias e informaciones de interés general para los asistentes.

Le Colloquin Avise era una publicación en tamaño A-3 que editaba diariamente la representación de los IREM-s franceses. En esta hoja se informaba sobre las actividades que los miembros de los IREM llevaban a cabo en el VII ICME. Además, había una sección llamada *Probleme du Jour*, en la que se proponía diariamente un problema para resolver. Un ejemplo curioso es este enunciado, relacionado con el año 1789:

> "Entre todas las sumas de enteros positivos con resultado 1789, ¿cuál es la que da un resultado mayor al multiplicar sus términos?"

Vídeos, películas y exhibiciones: Hubo cuatro sesiones dedicadas a la proyección de vídeos y películas relacionados con las Matemáticas y con la Didáctica de las Matemáticas. De las cuatro sesiones destacó la tercera de ellas en las que se proyectaron las películas *Platonic Solids* y *Dihedral Kaleidoscopes*, magníficamente presentadas y de una gran belleza de imágenes.

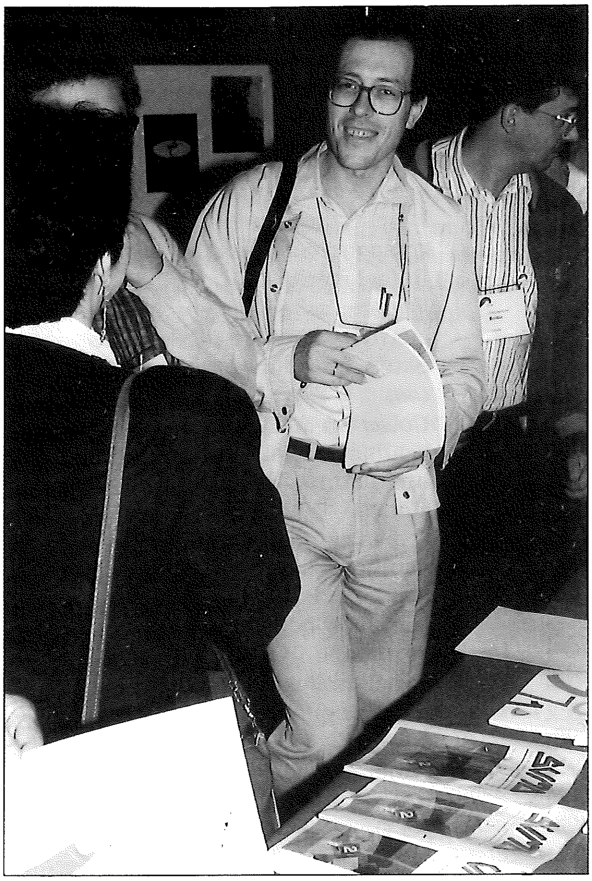
Estas películas están inspiradas en los trabajos del Profesor H. M. S. Coxeter, que estuvo presente en las proyecciones, haciendo la presentación de la segunda.

La primera trata del origen histórico, construcción y propiedades de los sólidos platónicos; la segunda, a través de un caleidoscopio, descubre una nueva dimensión desde la que se puede construir y contemplar la geometría y verificar algunas propiedades. Ambas proyecciones tienen un alto interés didáctico.

Una exposición muy sugerente fue la realizada por los Organizadores del Congreso: *-Le savoir compter: Lºecole primaire et les mathématiques (1800-1920)*, que presentaba una colección de materiales escolares relacionados con el currículo de matemáticas en Canadá en las fechas indicadas.

Publicaciones: En este Congreso es factible conseguir catálogos y publicidad de multitud de editoriales, casas comerciales, librerías y servicios especializados de todo el mundo, en donde es posible encontrar novedades, información, revistas, catálogos de libros, materiales didácticos, audiovisuales, software, etc., todo ellos relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Entre las instituciones que montaron un stand informativo y de ventas durante el Congreso podemos señalar: el National council of Teachers of Mathematics (USA), que presentaba su fondo editorial de casi 300 volúmenes, incorporando los cuadernos complementarios a los Stándares Curriculares: Adenda Serie; la Mathematical Association of America, con su serie de orientación didáctica; el Mathematics and Sciences Education Board; la Cambridge University Press; la Editorial Guerin; la Kluwer Academic Press; la casa Lego; un stand dedicado a editoriales francesas; el Zentrablatt für Didaktik der Mathematik; la casa Texas Instruments; Casio; Hewlett Packard; el Software "Mathematica" de Wolfram Research; Derve; Maple; etc.

El estilo japonés: la participación japonesa tiene unas características especiales -cuentan con intérpretes particulares- y unos rasgos sorprendentes. En cualquier esquina de los edificios utilizados por el Congreso, dentro de cualquier pabellón y a veces en un bar, era posible encontrar un pequeño grupo de japoneses que hacían una presentación informal de trabajos, experiencias didácticas, juegos, aplicaciones, etc. Las sesiones de Origami, en las que empleando papel y materiales muy sencillos se lograban recursos didácticos interesantes, tenían un efecto sorprendente para la mayoría de los asistentes.



Asistentes ojeando nuestra Revista.

Convivencia: Es muy importante destacar las grandes posibilidades que se presentan en este Congreso de conocer, entablar amistad e intercambiar información profesional con cientos de colegas de todo el mundo. Estas relaciones pueden tener, y de hecho así ocurre, continuidad posterior por medio del correo u otros sistemas de comunicación.

En este sentido es de señalar el papel que desempeñan la hora diaria de encuentro y convivencia, *happy hour* en el argot inglés, en las que de 17'30 a 19 horas se destinaban a tomar una copa o un refresco y entablar conversación con los asistentes; era el momento de contactar con la gente.

Digno de mención es también la carrera de 5 km., que se celebró durante el Congreso, que fue ganada en categoría masculina por nuetro compatriota Jesús María Goñi Zabalza, de la Universidad de Euskadi.

El jueves día 20 tuvieron lugar las excursiones previstas por la Organización para todos los participantes. Hubo una variedad de ofertas, desde visitas a la ciudad de Montreal hasta una excursión en barco para ver un grupo de ballenas.

Encuentro de Editores de Revistas de Educación Matemática

En el marco del ICME VII tuvo lugar el encuentro de Editores de Revistas de Educación Matemática, en el que se dieron cita sesenta y tres editores de todo el mundo.

La organiación de esta reunión corrió a cargo del Prof. G. König del Zentrablatt für Didaktir der Mathematik de Karlsruhe (Alemania). El proceso de preparación de esta reunión comenzó a finales de 1991; a lo largo de esos meses se cruzó correspondencia entre el Prof. König y varios editores de revistas, entre los que se encontraban el Prof. J. Pérez, editor de la Revista Epsilon y el Prof. S. Romero, editor de la Revista Suma. Se pudo así preparar el encuentro de forma eficaz, con una agenda de trabajo bien delimitada.

Entre las cuestiones tratadas se pueden destacar las siguientes:

1. Preparar el intercambio de ejemplares de las diferentes revistas;

2. facilitar una hoja informativa, con los datos más relevantes de cada revista;

3. realizar un debate en torno a los siguientes puntos:

* posibilidad y conveniencia de aceptar un lenguaje internacional en las revistas de diferentes países;
* activar la cooperación internacional entre los editores promoviendo el intercambio de revistas e información;
* impulsar y coordinar el uso de tecnología durante el proceso editorial, conveniencia de estandarizar un formato, uso de correo electrónico, etc.
* Determinación del perfil o perfiles de lectores de este tipo de revistas; necesidad de atender a los investigadores y a los profesores; búsqueda de un equilibrio entre los requerimientos de los distintos colectivos interesados e implicados en las revistas de enseñana de las matemáticas;
* ¿cómo etimular a los profesores para que escriban?
* ¿cómo fomentar la retroalimentación de los usuarios?
* ¿cómo trabajar de forma efectiva con otros proyectos editoriales?

Como logros de esta reunión se pueden destacar:

Un enriquecedor intercambio de información, lo que ha proporcionado un mejor conocimiento de realidades muy diversas por su origen geográfico, cultural y económico, por los objetivos específicos de las diferentes publicaciones, así como por sus medios de producción y financiación.

Esto ha permitido tener una visión de conjunto sobre la realidad de la comunicación en el Área de la Didáctica de la Matemática que, como cualquier otro ámbito de trabajo, es una pieza esencial para el progreso y avance de la comunidad correspondiente. El encuentro ha sido un marco efectivo para establecer el intercambio entre revistas de diferentes países y crear lazos de colaboración. También permitió tomar algunas decisiones para le próximo encuentro a celebrar en Sevilla en 1996.

¿Cuál fue la actuación española durante este Congreso?

Ya se han mencionado algunas actuaciones específicas de compañeros procedentes de distintas comunidades, pero el colectivo español de asistentes al Congreso de Québec tuvo una actuación mucho más amplia que la consignada hasta el momento. Nuestro compañero Miguel de Guzmán presidió acertadamente este VII ICME, con intervenciones destacadas tanto en la Sesión inaugural como en la de clausura. El Presidente y el Secretario de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, Gonzalo Sánchez y Luis Balbuena, asistieron a la Reunión Internacional de Sociedades de Profesores de Matemáticas, presidida por J. Egsgard (Canadá), en representación de la comunidad española de educadores matemáticos. Nuestro compañero José Romero, coordinador nacional de la Olimpiada Matemática organizada por la Federación, asistió a la reunión de Competiciones Internacionales de Matemáticas, presidida por P. Taylor (Australia). Nuestros compañeros Claudi Alsina y Luis Rico fueron invitados por el Comité del ICMI para participar en el Comité Internacional de Programas para el VIII ICME de Sevilla; a este Comité pertenecen igualmente Miguel de Guz mán, Antonio Pérez y Luis Balbuena.

Una de las misiones de la Delegación española consistía en la presentación de Sevilla como Sede del próximo ICME. Con esta finalidad se organizaron diversas actividades. Entre ellas destacamos el Stand instalado por la Federación en el hall del edificio Koning, lugar estratégicamente situado para proporcionar información a todos los asistentes. En este Stand se presentaban las Revistas Números, Epsilon y Suma, los stándares curriculares, Actas de Congresos celebrados por diferentes Sociedades y otras publicaciones. La presencia de las Revistas permitió una difusión entre colegas de más de ochenta países, que dejaron sus direcciones para envío posterior de información.

En el Stand se presentaba también la Exposición de Fotografía y Matemáticas, organizada por Evaristo González, con trabajos realizados por alumnos de diferentes niveles educativos: EGB, BUP y Universidad de Andalucía. Igualmente se proporcionaba información cultural y turística de diversas comunidades españolas, particularmente de Sevilla.

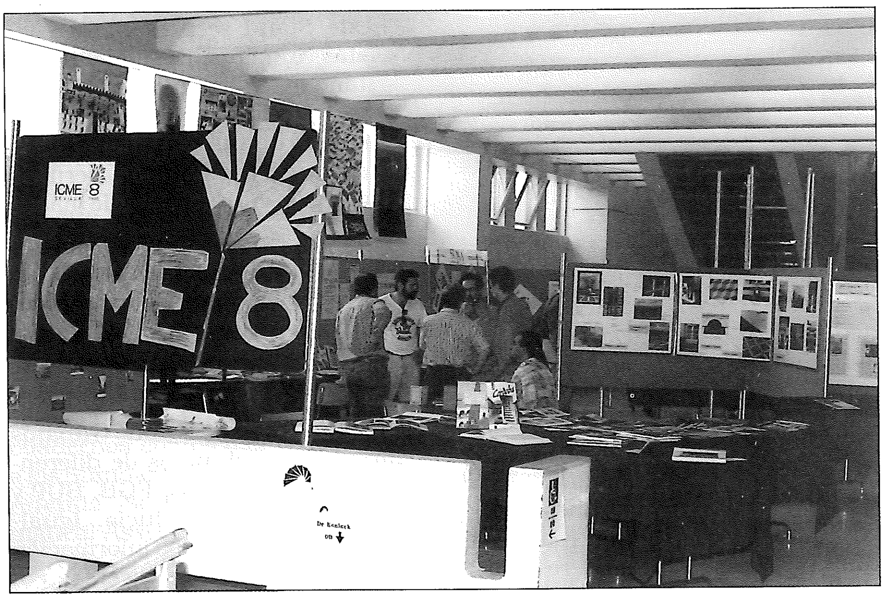
El Stand constituyó un observatorio privilegiado para relacionarse con los asistentes, detectar los intereses de los congresistas e informar sobre las condiciones de la ciudad de Sevilla y de Andalucía. Es Stand constituyó un éxito de difusión y contacto.

Dos días antes de la finalización del Congreso se celebraron dos actos relacionados con el VIII ICME de Sevilla. Por un lado, se organizó una presentación para la Comunidad Iberoamericana, con más de 200 asistentes, en la que intervinieron, entre otros, el Consul General de España en Québec, D. Carlos Arias y el Director del "Sevilla Convention Brureau", D. Gerardo Quintana. En este momento se presentó el logotipo del VIII ICME y se pasó un vídeo de 6 minutos de duración sobre Sevilla, montado por Manuel Selguero.

Tras concluir el acto anterior se pasó a ofrecer, dentro del "happy hour", una copa de vino español, que fue todo un éxito. Casi 2.500 profesores de todo el mundo degustaron el excelente vino de Jerez, donado para la ocasión por la División Internaiconal de Domecq S.A. En esta ocasión se distribuyó entre los asistentes una invitación del Sr. Alcalde de Sevilla para asistir al VIII ICME, el logotipo y un folleto informativo sobre Sevilla.

Dentro de los actos de Clausura intervino nuestro Presidente Gonzalo Sánchez, cuyas palabras aparecieron en el número 11 y 12 de SUMA.

FESPM



Vista del Stand de la FESPM.

Acerca del Convenio de Colaboración entre el M.E.C. y la F.E.S.P.M.

De acuerdo con la intención del M.E.C., de favorecer la formación y actualización permanente del profesorado, objetivo fundamental también para la F.E.S.P.M., y que ésta mejora incida decisivamente en una enseñanza cualitativamente mejor, firmaron en Madrid, de una parte, el entonces Secretario de Estado de Educación, hoy Ministro de Educación y Ciencia, D. Alfredo Pérez Rubalcaba, y de otra, el entonces Presidente de la F.E.S.P.M., D. Gonzalo Sánchez Vázquez, un convenio de colaboración que se encuadra en el plan Marco de Formación del Profesorado, y se recoge en los artículos dedicados a la calidad de la enseñanza, título IV de la L.O.G.S.E.

En este acuerdo se reconoce la labor desarrollada por la F.E.S.P.M., y sus Sociedades Federadas que inciden en la formación permanente desde el punto de vista didáctico y de actualización científica.

En general, el M.E.C., se compromete mediante este Convenio a dar su apoyo económico, técnico, administrativo y académico, los proyectos que se realicen de acuerdo a los siguientes procedimientos:

"a. Diseño y programación de innovaciones relacionadas con la Reforma, para su posterior aplicación en los Centros.

b. Programación y ejecución de actividades de formación de profesorado, mediante las siguientes actuaciones:

- realización directa de cursos de actualización de contenidos y de capacitación pedagógica;
- promoción de programas de Formación en los Centros encaminados, fundamentalmente, a la realización de proyectos curriculares y la coordinación pedagógica de áreas, ciclos y niveles;
- difusión de las actividades formativas previstas por el M.E.C., y abiertas al profesorado de los centros privados.

c. Programación y ejecución de actividades de popularización de las matemáticas que cooperen a dar a su enseñanza un carácter atractivo, proporcionando para ello al Profesorado métodos y medios adecuados.

Redacción

Jornadas Nacionales de la A.P.M.

Los días 24, 25 y 26 de octubre de 1992 se han celebrado en Strasbourg las jornadas de la Asociación Francesa de Profesores de Matemáticas (fundada en 1909), bajo el título **Matemáticas europeas - La Europa de los matemáticos de ayer, de hoy y de mañana**. (En contraposición al título que animó las anteriores: **Matemáticas sin fronteras**).

A estas jornadas han asistido más de 700 profesores, franceses en su mayoría, a los que tenemos que añadir como invitados por la organización, representantes de Sociedades de profesores de matemáticas de otros países europeos vecinos: España, Italia, Suiza, Bélgica, Alemania, Inglaterra, Dinamarca, Rumanía, Polonia y Rusia. Nosotros asistimos así en calidad de representantes de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Los actos principales de las Jornadas, además de la sesión de inauguración fueron las conferencias plenarias, puesto que no simultaneaban su tiempo con ninguna otra actividad. Fueron las siguientes:

Jean Pierre Bourguignon, (ex-Presidente de la Sociedad Matemática de Francia) habló de un Centenario, no del Quinto, sino del Segundo, del Centenario del nacimiento de Lobatchewski: **"Geometrías no-euclídeas doscientos años después de Lobatchewski"**.

Evelyne Barbin (Presidenta de la Comisión Inter IREM de Historia de las Matemáticas), habló sobre **"Pensamiento matemático en la historia y en la clase"**.

Pierre Legrand (Inspector General del Ministerio de Educación Francés), habló sobre la **"Enseñanza Secundaria Obligatoria en algunos países europeos"**.

Marc Lachieze-Rey (Investigador en Astrofísica) habló sobre el origen del Universao, bajo el título **"¿Instante cero: mito o realidad? (Datación y origen del Universo)"**.

Por los títulos, uno se puede hacer idea del contenido, que no vamos a desarrollar, simplemente señalar, la claridad y amenidad expositiva, tanto de J.P. Bourguignon como de M. Lachieze-Rey.

Además de las conferencias hubo tres espacios horarios (distribuidos en dos días) de unas dos horas de duración en los que se presentaban las comunicaciones (ateliers=talleres en el original francés). En cada uno de esos espacios horarios se presentaban, en diferentes lugares, aproximadamente quince simultáneamente. En uno de ellos es en el que se había incluido el **"Carrefour europeo"**, nombre que designaba la intervención de los representantes de las sociedades de los distintos países invitados. En el primer espacio presentaron Suiza y Alemania, en el segundo estábamos previstos España y Bélgica, y además intervino el representante de Rusia, y la tercera sesión correspondió a Italia e Inglaterra.

Tanto en estas intervenciones como en la conferencia de Mr. Legrand, lo que se presentaba era una panorámica general del sistema educativo del país: límite de la escolaridad obligatoria, horas o períodos lectivos dedicados a matemáticas en cada uno de las etapas y cursos, grandes temas matemáticos presentes en los programas o currículos, nivel de formación del profesorado, ...

Entre los talleres que se presentaban había uno dedicado a **Manuales escolares en distintos países europeos**, en el que los ponentes, nos pidieron participar. Allí se discutieron diferentes aspectos de libros de España y de Gran Bretaña.

Otra actividad de interés, (bastante mal anunciada en los programas y a nosostros), fue un **Mesa-redonda** con participantes de diferentes países sobre la enseñanza de las matemáticas en cada uno de ellos, pero ... era el lunes por la mañana y nuestro avión salía a esa misma hora, por lo que no pudimos asistir.

La organización local estuvo a cargo de la Regional de Strasbourg de la A.P.M., y los loclaes empleados eran los de la Universidad **Louis Pasteur**.

Los derechos de inscripción variables según la fecha eran de 210 francos franceses, para los madrugadores y hasta 300 para los últimos en inscribirse (el mes anterior a las jornadas).

Podíamos pensar los que allí asistimos en que se celebraría una reunión más o menos oficiosa de los representantes de las respectivas Sociedades de los países presentes. Pues efectivamente eso sucedió: un día, a la hora de comer, lo hicimos juntos, pero debido a la escasez de tiempo y de espacio no se pudieron tratar de manera amplia casi ningún tema, pero, al menos, en el ambiente flotaron algunas ideas:

La A.P.M. (Francia) se encargó de recoger las direcciones oficiales (o de representantes) de las distintas Asociaciones, así como de las fechas de celebración de sus respectivas/os Jornadas/Congresos. (Esperamos que en breve nos la envíen y poderlo publicar en esta revista).

Buscar una coordinación entre las distintas Sociedades, para intercambiar, materiales, exámenes, documentos oficiales, ... con la posibilidad de "crear" una Federación Europea de Sociedades (Asociaciones, Federaciones, ...) de Profesores de Matemáticas para estabilizar dichos contactos y quizá, conseguir subvenciones a través de organismos europeos, para realizar actividades en común. Se quedó en que cada país pensaría en el tema para en el encuentro de la C.I.E.A.E.M. de Cagliari en julio del 93 establecer relaciones más formales; pensándose que la presentación oficial de dicha Federación podría coincidir con el I.C.M.I. de Sevilla en el 96.

Los representantes de la F.E.S.P.M.
Ana García Azcárate
Florencio Villarroya Bullido

Jornadas Nacionales de la A.P.M.

Podemos adelantar ya que las jornadas de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Francia del año 93, tendrán lugar el Poitiers, los días 22, 23 y 24 de octubre en el Palacio de Congresos de FUTUROSCOPE, con el título:

Matemáticas y Enseñanza
Pasado ...Futuro

En ellas está ya prevista la intervención del Epistemólogo Jean DHOMBRE del C.N.R.S. y de Didier DACUNHA-CASTELLA, Presidente del Consejo Nacional de Programas (de Matemáticas de Francia), además de Gilles COHEN, de la Federación Francesa de Juegos Matemáticos, entre otros.

Para inscribirse habrá que dirigirse a la Regional de la A.P.M.E.P. de Poitou-Charentes, IREM, Faculté des Sciences, 40 avenuee du Recteur Pineau. F-86022 POITIERS Cedex.

Florencio Villarroya
C.E.P. Egea de los Caballeros

Información complementaria sobre la Reunión de la A.P.M.E.P.

Algunas personas se interesaron en tomar contacto con nosotros para futuras colaboraciones, entre ellas voy a señalar algunas:

IREM DE LYON. Nicole KOGEJ es responsable de un grupo de trabajo "Europa" del IREM de Lyon, que próximamente va a organizar un Coloquio en el IREM sobre "Problema abierto", "Situación Problema", "Trabajos sobre la Demostración", "Análisis de errores", intentan conseguir subvenciones de su Ministerio con el título "Hacer aprender matemáticas francesas a alumnos extranjeros", puesto que en su grupo hay profesores que tienen bastantes alumnos extranjeros, a menudo no francófonos.

INVITAN a participar a formadores de matemáticas y también a profesores "de base", interesados en esos problemas.

SUGIEREN, que después, otro país, organizaría otro coloquio análogo sobre su propia especificidad otro año.

Además esta profesora trabaja en la realización de un fichero de "vocabulario y resultados matemáticos en cinco lenguas": Francés (bien súr), Español, Inglés, Italiano y Alemán, y de nuevo

INVITA a colaborar con ella y se pone a disposición de todos los interesados en el tema.

Su dirección:
NICOLE KOGEJ
Lotissement du Mont d'Or
13 chemin du Tronchon
F-69410 CHAMPAGNE au Mont d'Or.

RALLYE MATEMÁTICO DE AQUITANIA: Un grupo de profesores de la región citada, en el Sur de Francia, organiza el citado concurso, para clases completas, la prueba se realiza en un día de clase, los problemas se resuelven entre todos los alumnos del grupo, participan alumnos de Troisième y Seconde (creo), es decir 1º y 2º de BUP, con la diferencia que en Francia Troisième se estudia en el Collège y Seconde ya en el Instituto. Lo que querrían es extender este tipo de concurso a "Regiones Vecinas".

Christian ARTIGUES
Résidence LE TAO B-79
Rue Ronsaro
F-64000 PAU

Es la persona que contactó conmigo y quedó encargada de enviarme el dossier sobre el tema (aún no lo he recibido). Además me indicó que había contactado con personas de Galicia y del País Vasco para coordinarse en este tema. Quizá desde las Sociedades Navarra y Aragonesa, a la vista del Dossier y con regiones más próximas se podría pensar en participar (solicitando subvenciones de los Gobiernos Autónomos correspondientes, de la Asociación Aragon-Bearn, etc.).

Colección de Exámenes o de trabajos de alumnos

Nicole LORRET
21 rue de l'Unité
F-14610 EPRON

Está interesada en recibir ejemplares de ejercicios propuestos en exámenes, así como de otros tipos de trabajos: deberes para casa, trabajos de investigación, ... Con, por supuesto, indicación del nivel (curso y edad de los alumnos) en que se han propuesto.

Todas las Sociedades o miembros de ellas, o no intersados en uno o varios de estos temas, podéis poneros en contacto con las personas citadas, bien directamente o bien haciendo yo de intermediario.

La dirección del Vicepresidente de la Sociedad Rusa de Profesores de Matemáticas, por si alguna sociedad o persona quiere contactar, colaborar, viajar, etc.

EVGENY A. BUNIMOVICH
MOSCOW, school N 710
STUDENCHESKAYA str. 29
Tlf.: 249-3964
103001 MOSCOW

Sociedad Rusa de Profesores de Matemáticas

Conferencia Anual del Grupo "P.M.E."

Entre los días 18 y 23 de julio de 1993, se celebrará en la Universidad de Tsukuba (Japón) la decimoséptima Conferencia anual del "International Group for the Psychology of Mathematics Eduation".

El tema general de la conferencia será "¿Cómo relacionar los aspectos afectivo y cognitivo en la educación matemática?".

Habrá cuatro sesiones plenaria, presentación de comunicaciones, grupos de trabajo sobre diversos tópicos, etc.

La pre-inscripciones deben hacerse antes del 15 de enero del 93, (enviando 10.000 yenes), para hacer la inscripción definitiva en abril, dirigidas al Secretariado de la Conferencia:

NOBUHIKO NOHDA
INSTITUTE OF EDUCATION,
UNIVERSITY OF TSUKUBA
TENNO-DAI 1-1-1, TSUKUBA,
IBARAKI
305 JAPAN
Tlf. 0298-53-4693
Fax 0298-53-4693, 0298-53-6619

La nueva presidenta del Grupo es **Carolyn Kieran**, de la Universidad de Québec (Montreal), y el nuevo Tesorero, **Ángel Gutiérrez**, de la Universidad de Valencia.

La siguiente conferencia se celebrará un poquito más cerca, en la Facultad de Ciencias de Lisboa (Portugal), entre el 30 de julio y el 3 de agosto de 1994. Y más cerca todavía dos años después, en 1996, se celebrará junto al **I.C.M.E.-8 en España**.

Florencio Villarroya

2nd Krems Conference on Mathematics Didactics: Teaching Mathematics with DERIVE

September 25-28, 1993, Krems, Austria

Computer algebra systems like DERIVE become more and more widely available, even on simple and affordable hardware like notebook and plamtop PCs. It is anticipated that computer algebra tools will become as widespread as numerical pocket calculators. How should mathematics teaching be changed to cope with this new development? The conference aims at bringing together people with an interest in developing a didactics for mathematics education at grade levels 6-13 using the computer algebra software DERIVE. Suggested topics include (but are not limited to):

- Using DERIVE to teach certain subjects (elementary algebra, functions, analytic geometry, calculus, theory of probability, etc.).
- Using DERIVE as a symbolic calculator.
- Using DERIVE as a tutor.
- Didactic principles of using DERIVE (white-box/black-box, black-box/white-box, genetic, etc.).
- Importance of DERIVE and other computer algebra systems for the various phases of mathematics teaching: modelling, operation, interpretation.
- DERIVE for visualization and simulation.
- Computer algebra at school, at home and for tests.
- Comparing computer algebra assisted teaching with traditional teaching.

- How is students' thinking affected?
- How will DERIVE and other computer algebra systems affect the curriculum?
- Report on ongoing experiments with DERIVE.

Authors are invited to submit 3 copies of a 4 page extended abstract of a 30 minutes lecture to the following address. Abstracts and lectures may be in English or German.

RISC-Linz/Krems'93
att. Bernhard Kutzler
(Program Committee Chairman)
University of Linz
A-4040 Linz, Austria
(Fax +43-7236-3231-30).

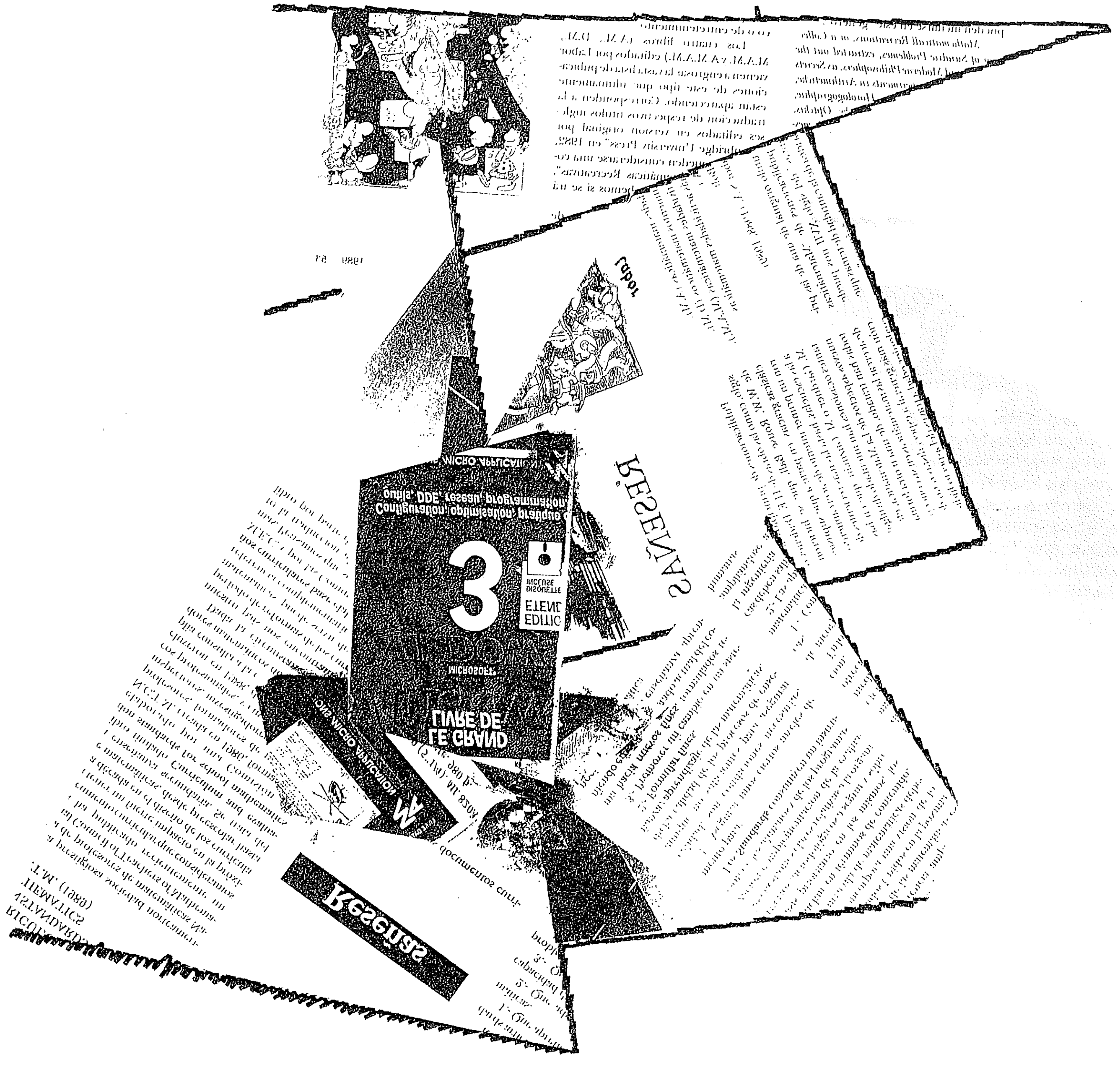
All submissions will be refereed by an international program committee. Authors of accepted lectures will be invited to write full papers (10-15 pages) for publication in the conference proceedings. For a limited number of participants the organizers will provide grants covering all living expenses during the conference (lodging and boarding). Authors are invited to informally apply for these grants when submitting their papers.

Deadline for submission of extended abstract and application of conference grants: **March 31, 1993**.
Notification of acceptance of lectures and awarding of conference grants: **May 7, 1993**.

Conference Chairman: Helmut Heugl.

Program Committee: Bärbel Barzel (*Düsseldorf, Germany*), Josef Böhm (*Würmla, Austria*), Helmut Heugl (*Vienna, Austria*), Bernhard Kutzler (*Linz, Austria*), Rafael Minano-Rubio (*Madrid, Spain*), John Monaghan (*Leeds, England*), Eduard Szirucsek (*Vienna, Austria*), Anthony Watkins (*Plymouth, England*).

The conference will be organized by the ACDCA (Austrian Center for the Didactics of Computer Algebra) on behalf of the Austrian Ministry of Education.

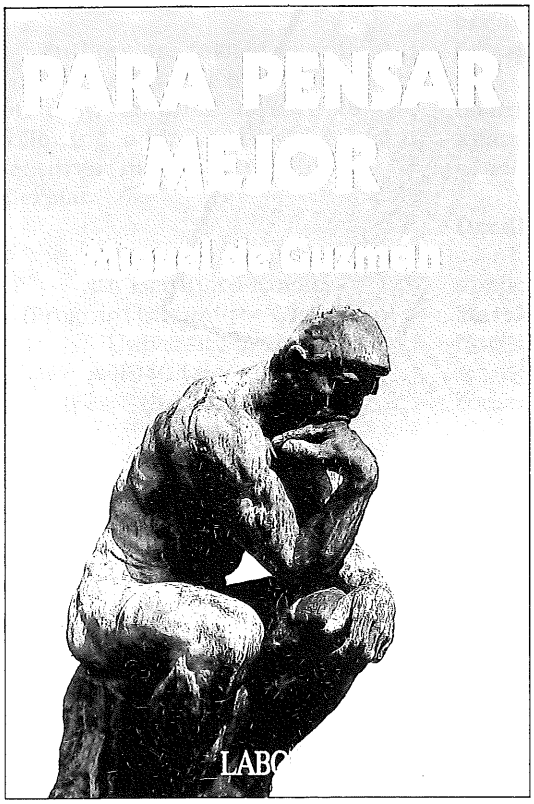


RESEÑAS

Para pensar mejor

Miguel de Guzmán (1991)

(Barcelona: Labor, 226 páginas)



¿Se puede aprender a pensar mejor? ¡Por supuesto! Sobre esta base Miguel de Guzmán introduce a los lectores de su libro "Para pensar mejor" en la aventura de tratar de hacer más eficaces los procesos creativos del pensamiento en el enfrentamiento con situaciones problemáticas.

En esta obra el autor se desmarca de sus libros anteriores sobre recreaciones y problemas matemáticos, entrando no sólo en el terreno de las ciencias cognitivas sino también en otros dominios como el afectivo y el emocional, que influyen de forma importante en los procesos de pensamiento. Lo hace partiendo de su experiencia, de lo que a través del trabajo le han comunicado sus compañeros y sus alumnos y del estudio de las obras de los clásicos sobre los fenómenos y los métodos implicados en la resolución de problemas, tratando, según el autor, de "evitar largas disquisiciones técnicas que un tratamiento científico profundo hubiera exigido" y dándole un aire divulgativo.

El trabajo se divide en cinco partes. La primera plantea un conjunto de situaciones de la vida intelectual o de la vida cotidiana que ayudan al lector a identificar los bloqueos de todo tipo con que se tropieza habitualmente y que le impiden explorar algunos caminos en la resolución de situaciones problemáticas. La segunda plantea las estrategias generales de pensamiento e introduce al lector en los protocolos de resolución, es decir, en el registro de "lo que ha ido realizando, lo que ha ido pensando y los sentimientos y situaciones afectivas por las que ha ido pasando" en el curso de la resolución de un problema, como medio para mejorar el modo de afrontar esta tares. La tercera parte, la central y la más larga, la dedica a las estrategias del pensamiento matemático, a través de problemas que requieren pocos conocimientos en este campo y que dejan por tanto transparentar las estrategias que se utilizan en su resolución. Esta parte puede resultar más conocida a los aficionados a la lectura de libros sobre "resolución de problemas" y en ella el autor invita a entrar en las estrategias de pensamiento describiendo distintas maneras de familiarizarse con los problemas. La cuarta parte, muy breve, indica la dirección en la que podría ir la selección de contenidos de aprendizaje de los diversos dominios de conocimiento, de modo que se favorezca en el individuo la creación de esquemas mentales eficaces para abordar problemas. La quinta y última parte la dedica a la actividad subsconciente y en ella hace "una descripción breve muy osada, pero no infundada, de lo que, en trazos extraordinariamente simplificadores, puede tal vez ocurrir en nuestra mente cuando se enfrasca con un problema de cualquier tipo y llega a tener una de esas vivencias de denominamos inspiración, para extraer a continuación las consecuencias prácticas que derivan del aprovechamiento de todas nuestras capacidades mentales en la tarea que nos ocupa. Quizá sea ésta la aportación más original y valiosa de este libro en lo que se refiere a tratar de comprender mejor como trabaja nuestra mente cuando se aborda una tarea compleja y creativa como es la resolución de verdaderos problemas.

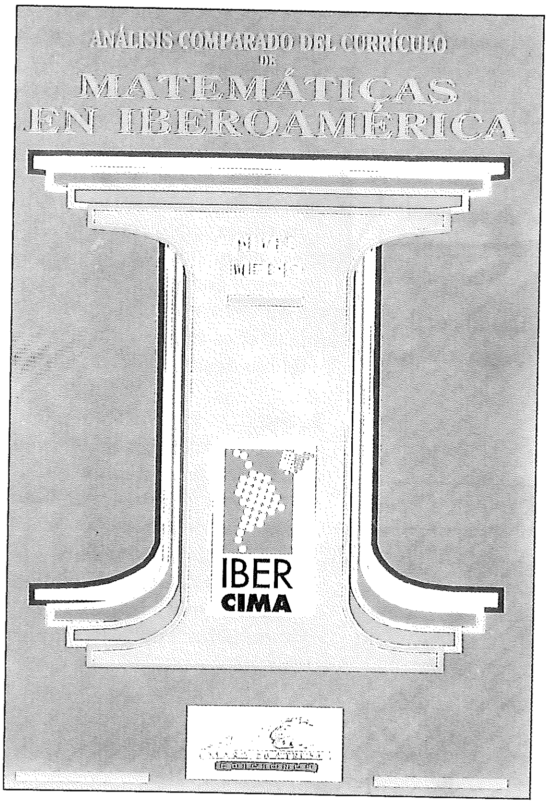
Se trata de un magnífico trabajo que puede ser de gran utilidad para todos los implicados en la formación intelectual de los jóvenes, para los estudiantes, y en general para los que dedican gran parte de su actividad al trabajo mental y, por último, para quienes se interesan por conocer mejor la actividad más propiamente humana: el pensamiento.

María Luz Callejo
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. I.E.P.S., Madrid

Análisis comparativo del currículo de Matemáticas (Nivel Medio) en Iberoamérica

José del Río Sánchez,
Luis Hernández Encinas y
Mª José Rodríguez Conde

Ediciones Mare Nstrum 1989



La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, el Ministerio de Educación y Ciencia Español y la Sociedad Estatal del Quinto Centenario de España han llevado a cabo desde 1991 un programa centrado, sobre todo, en el desarrollo del Curriculum de las matemáticas y las Ciencias Experimentales.

También se incluye en el programa la elaboración de materiales y la formación de docentes especializados. El objetivo de este programa denominado IBERCIMA -Programa Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática en el Nivel Medio-, se presenta en este libro de doscientas cuarenta páginas de fácil lectura.

En él se analizan, revisan y actualizan contenidos y metodologías de la enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias a nivel medio en los 22 países Iberoamericanos para desarrollar actividades de investigación, formación, elaboración de materiales didácticos y de apoyo docente y de movilización y participación de profesores y estudiantes, a fin de difundir una cultura proclive al aprendizaje tecnológico.

El libro de siete capítulos comienza exponiendo la importancia del currículo del nivel medio educativo en las edades comprendidas entre (12-13) y (17-18) años, resaltando lo particularmente difícil en su diseño, a través de:

- El Análisis de los currícula de Matemáticas en 1991 en cada uno de los países Iberoamericanos.

- La Comparación de los currícula analizado en cada región.

- La Valoreción global de estos currícula a tenor de las nuevas tendencias en Educación Matemática.

Se completa el libro con un capítulo de conclusiones generales que con su descripción se puede favorecer la compresión diagnóstica del modelo de cada uno de los países en relación con los de su entorno geográfico, estableciendo al final de cada capítulo, resúmenes tanto regionales como globales, a través de valoraciones y sugerencias, a partir de las que se puede obtener una acción curricular, presente o futura, inmersa en las actuales tendencias de la Educación Matemática.

En suma, un libro útil y provechoso donde todas las personas que han intervenido -representantes de los ministerios de educación, técnicos, colaboradores, expertos invitados y miembros del comité de Seguimiento del Programa Ibercima, han conseguido que con este programa de enseñanza se trate de favorecer no sólo la formación de científicos y tecnólogos que el área iberoamericana necesita para su desarrollo sino también de orientar a las nuevas generaciones hacia la adquisición de una conciencia científica que les permita estar mejor preparados ante el evidente crecimiento y presencia del binomio CIENCIA Y TECNOLOGÍA en el mundo desarrollado actual.

Sixto Romero Sánchez

hoja para fotocopiar y enviar

Nombre y Apellidos: ______________________

Calle: ______________________

Población: ______________________ C.P.: __________

Provincia/País: ______________________ Tfno.: (   ) __________

CIF/NIF: ______________________ Centro de Trabajo __________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

☐ Renovación (Nº de suscriptor ______________)*

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número en curso al precio: 3.000 pts. particulares y 3.500 pts. Centros./Europa $35 U.S.A./América y resto del Mundo $45 U.S.A. (Ver condiciones de suscripción)

☐ Cheque bancario adjunto

☐ Domiciliación bancaria

☐ Giro Postal Nº_______ Fecha __________

* Imprescindible poner el nº de suscriptor

Domiciliación Bancaria

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________

Agencia: ______________________ Nº C/C: __________

Calle: ______________________

Población: ______________________ C. Postal: __________

Provincia: ______________________

Titular: ______________________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

Firma:

Condiciones de Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a **Revista SUMA, Apdo. 1304, 21080 Huelva (España)**. El número de inicio de la suscripción es siempre el que en ese momento se vaya a editar, considerándose los números precedentes como números atrasados. Dichos números, se enviarán previa solicitud contrarreembolso, al precio de **1.200 pts.** para España y **$ 12 U.S.A.** para el resto del Mundo cada ejemplar, más gastos de envío, excepto el nº 1 que está agotado. Para su comodidad la suscripción le será renovada automáticamente al finalizar el período inicial indicado, si no nos comunica por escrito, su deseo de causar baja. Para Iberoamérica, Europa y resto del Mundo, sólo se aceptará la suscripción por el importe indicado, mediante transferencia internacional a la c/c nº **101.133920286** de EL MONTE, Caja de Huelva y Sevilla, Oficina Principal, sita en c/Plus Ultra, 4. 21001 HUELVA (España). Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirle la domiciliación banciaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso no olvide rellenar con letra clara y firmar y, en el caso de los Centros sellar, los datos bancarios que aparecen en el boletín.

RECOMENDACIONES A AUTORES

1. De carácter general:

1.1. Los artículos se remitirán por triplicado, mecanografiados a doble espacio, por una sola cara y en formato DIN A-4.

1.2. Adjunto al artículo se redactará un resumen (Abstract) de cinco líneas como máximo, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción. Debe ir escrito en hoja aparte.

1.3. Si el/los autor/es ha/n utilizado un procesador de textos, recomendables Wordstar y Wordperfect 5.1. Es conveniente enviar un diskette para facilitar el trabajo de edición y posibles erratas.

1.4. Se identificara el autor o los autores debidamente al final del artículo. Deberá aparecer el nombre completo, lugar de trabajo (si procede) y dirección completa; en el caso de ser varios autores, los datos de al menos uno de ellos y para todos un número de teléfono de contacto.

2. Normas específicas.

2.1. Es aconsejable no rebasar las quince páginas de extensión.

2.2. Los símbolos y unidades empleadas no deben dar lugar a equívocos en su interpretación.

2.3. Las referencias bibliográficas deben ir numeradas entre corchetes y listadas al final del artículo claramente identificadas.

2.4. Las notas a pie de página deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. Los listados de ordenador deben ser rigurosamente originales.

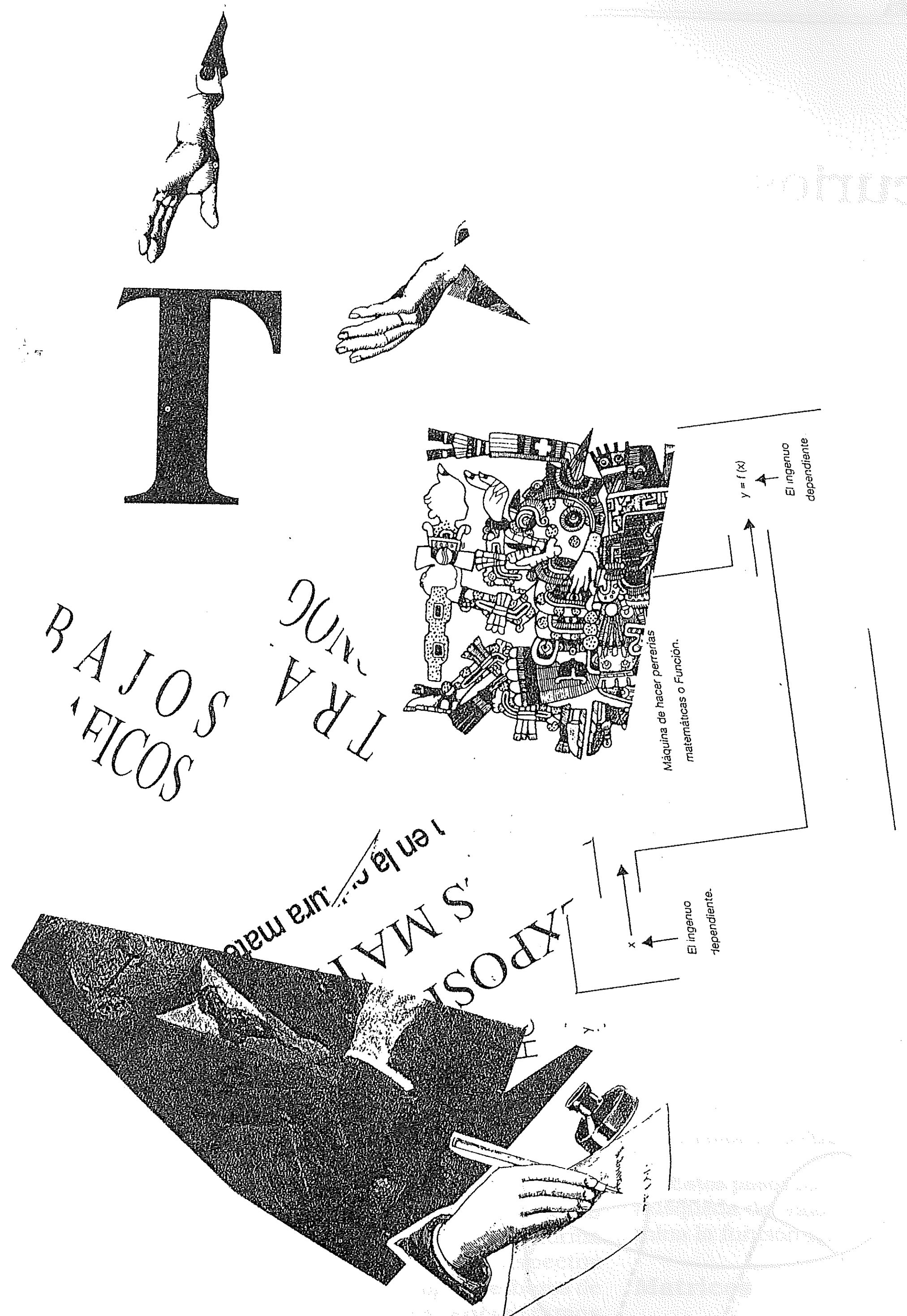
2.6. Las ilustraciones y fotografías (preferentemente en hojas aparte e identificadas), deben estar hechas en blanco y negro, en el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

La mejor forma de presentar las ilustraciones es a tinta china sobre papel vegetal, en el caso de estar hechas con impresora, que sean originales.

3. Envíos.

Revista SUMA, Aptdo. 1304, 21080-HUELVA. España.

Excepcionalmente se puede enviar a cualquiera de los miembros del Consejo de Redacción.


Máquina de hacer perrerías matemáticas o Función.
y = f (x)
El ingenuo dependiente.

MISCELÁNEA

La curiosa historia de ....

Los calzoncillos (con perdón) de Möbius

Mariano Martínez Pérez

Casi todo el mundo sabe lo que es una "banda de Möbius", la curiosa superficie de una sola cara, que se puede construir fácilmente a partir de una simple tira rectangular de papel, pegando entre sí los dos lados cortos, una vez girando uno de ellos 180°.

Muchos menos (naturalmente) conocen los "calzoncillos de Möbius", que, como era de esperar en todas las prendas de vestir de Möbius, también tienen una sola cara (se ruega abstenerse de comentarios soeces o de mal gusto). La figura muestra cómo construir estos interesantes calzoncillos, y es fácil comprobar que, efectivamente, tienen sólo una cara.

Mariano Martínez Pérez

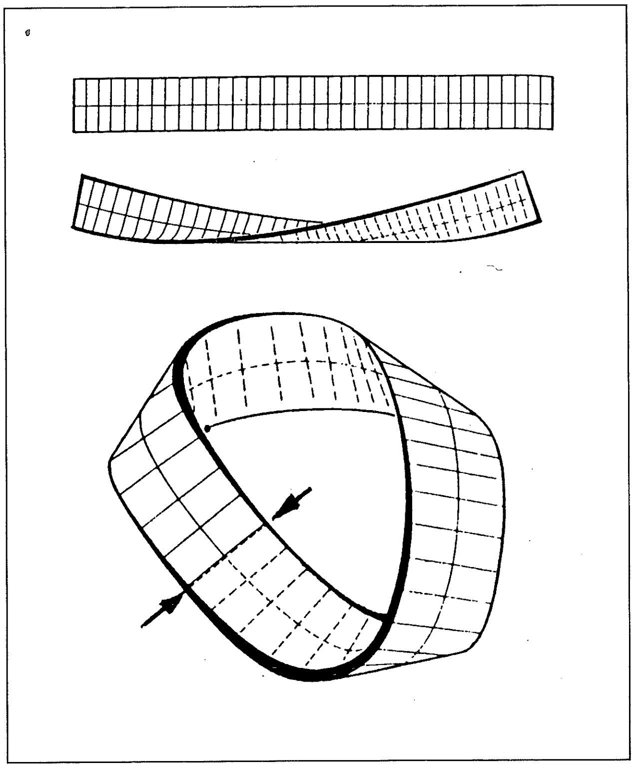


Figura 1

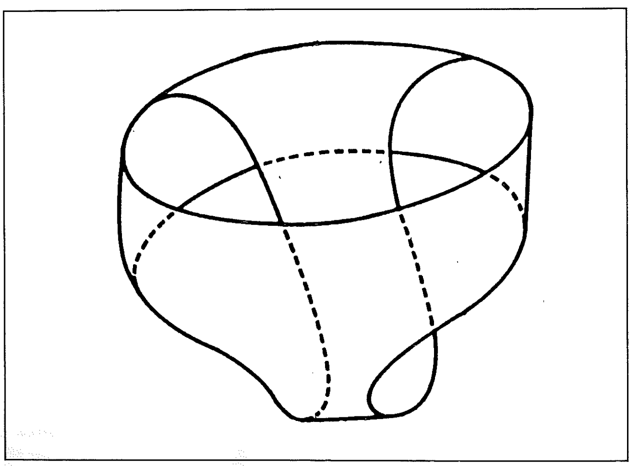


Figura 2

Los orígenes del Álgebra Lineal

Fernando Castro Gutiérrez

El propósito de este artículo es mostrar que una rama de la Matemática, relativamente joven como el Álgebra Lineal, tiene sus raíces en antiguas civilizaciones. El autor revisa el origen del concepto de transormación lineal en la cultura egipcia y algunos antecedentes matriaciales presentes en el *quipu* usado en el imperio Incaico en la época precolombina.

Introducción

El Álgebra Lineal se consolida a mediados del siglo XIX con los aportes de Grassmann, quien anticipa aspectos fundamentales de los espacios de dimensión finita, tales como la noción de subespacio engendrado, independencia lineal, dimensión, la proyección de un vector sobre un subespacio, el Teorema Espectral. Otros Matemáticos que hicieron notables contribuciones son Hamilton, Cayley y Sylvester.

Sin embargo los orígenes de algunos conceptos algebraicos son de vieja data. Consideremos la noción de Ley de Composición -según Bourbaki, una de las más primitivas de la Matemática- es posible que haya surgido durante la etapa recolectora del hombre, en efecto, la elección del mayor de dos frutos es ya una operación binaria: ésta que da origen a una estructura de semigrupo.

$$A*B = \text{máx}\{A,B\}$$

También hay antecedentes estructurales en el Álgebra Babilónica: la ejecución de la división como multiplicación de un número por el inverso del divisor lleva implícitos rudimentos de la Teoría de Grupos. No obstante esta vía fue abandonada, el Álgebra se consagró por largo tiempo a la resolución de ecuaciones. Habrían de pasar muchos siglos antes que la Matemática retomara el estudio de las estructuras algebraicas.

Entre los conceptos del Álgebra Lineal de más larga gestación en la historia de la humanidad están los de transformación lineal y matriz. En lo que sigue examinaremos sus raíces en la civilización egipcia y en el imperio incaico.

Las Funciones Lineales

Uno de los antecedentes más lejanos de las transformaciones lineales se encuentra en el manejo de la proporcionalidad, tanto en su forma geométrica como en su forma algebraica. Estos dos aspectos constituyen los primeros esbozos de la linealidad, los encontramos presentes en los aportes de Thales y en uno de los métodos de resolución de ecuaciones de primer grado, empleado por los egipcios. Este procedimiento, comparable a lo que conocemos como regular *falsi*, aparece en el papiro Rhind y consiste en reemplazar la incógnita por un número diferente de cero, luego se compara el valor alcanzado por la expresión con el valor deseado. Finalmente, a través de proporciones, se encuentra la solución correcta de la ecuación. En términos de nuestra notación consideremos el siguiente ejemplo:

$$x + (1/2)x = 15$$

Si tomamos $x=2$ y reemplazamos, el primer miembro queda

$$2+(1/2)2 = 3$$

luego de la proporción:

$$15/3 = x/2$$

obtenemos la solución $x = 10$

Estos pasos son equivalentes a la búsqueda del valor de A que determina la función lineal $F(x) = Ax$

Matrices

La matriz -término introducido por Cayley en el siglo XIX- tiene sus primeras manifestaciones en la actividad lúdica del hombre: los tableros de algunos juegos surgidos en distintas culturas, así como los cuadrados mágicos desarrollados en China son antecedentes matriciales.

Estas creaciones llevan también implícito el germen de un sistema de coordenadas.

El registro de cifras en cuerdas anudadas ha sido un recurso vastamente difundido. Los Incas de los Andes sudamericanos idearon una interesante composición de cuerdas llamada Quipu, que utilizaban para sus cómputos y registros numéricos.

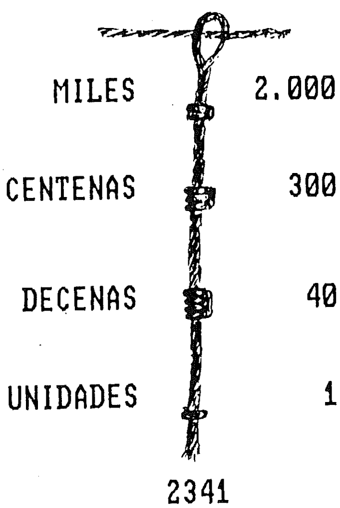


Figura 1. Representación de un número en un Quipu.

El Quipu está formado por una cuerda, que se mantiene en forma horizontal, de la cual penden cuerdecillas de varios colores, sobre éstas últimas hay grupos de nudos dispuestos a intervalos regulares representando unidades, decenas, centenas, etc. El conjunto se completa con una cuerda situada en un costado, la cual permite totalizar las cantidades representadas en las otras cuerdas.

En estos registros se consignaba toda la información del imperio sobre asuntos militares, censos de población, inventarios de recursos materiales, control de la producción animal, etc.

Desde nuestro punto de vista el Quipu no sólo es una materialización de un sistema numérico posicional de base diez, sino que también tiene el carácter de una matriz, en un sentido más general que el estrictamente numérico. Para los incas fue además un instrumento de comunicación muy versátil y de gran capacidad de información. Estas características permiten apreciar su importancia en una civilización que posiblemente no conoció la escritura.

Analizando el rol que desempeña la cuerdecilla que registra la suma de las cantidades representadas en el Quipu, es posible advertir que, cuando el quipumayoc -funcionario del imperio encargado de registrar los datos- reunía información de diferentes quipus estaba señalando el camino de las operaciones con matrices.

La concepción de un recurso matricial es una conquista de profunda significación y enormes alcances. En nuestros días podemos decir que la matriz alberga -entre otros campos del conocimiento- prácticamente todo el Álgebra Lineal de espacios de dimensión finita.

Bibliografía

* BABINI, J. **Historia de las Ideas Modernas en Matemática**. Monografía de la O.E.A. Washington, 1967.

* BOURBAKI, N. **Elementos de la Historia de las Matemáticas**. Alianza Universal. Madrid, 1972.

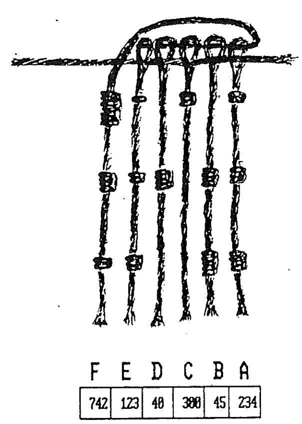
* BOYER, C. **A History of Mathematics**. Wiley. U.S.A., 1968.

* FEARNLEY-SANDERS, D. **Hermann Grassmann and the Invention of Linear Algebra**. The American Mathematical Monthly. Vol. 86, nº 10. pp 809-817. Dec. 1979.

* IFRAH, G. **Histoire Universelle des Chiffres**. Editions Seghers, París, 1981.

* STRUIK, D. **A Concise History of Mathematics Dover** N.Y. 1967.

Fernando Castro Gutiérrez
Universidad Nacional Abierta
Venezuela



$$\begin{array}{l} \text{CENTENAS} \\ \text{DECENAS} \\ \text{UNIDADES} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} E & D & C & B & A \end{array}$$

Figura 2. El número 742 de la cuerda F representa el total de los valores de las otras cuerdas. Prescindiendo de la cuerda F tenemos una matriz.

Entrevista con el Profesor Gonzalo Sánchez Vázquez

Nuestra Redacción se ha entrevistado con el Profesor Gonzalo Sánchez Vázquez, Presidente de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" desde su creación en 1981. Es también Presidente de Honor de la Federación Española de Profesores de Matemáticas, y fue su Presidente efectivo desde su fundación en 1988 hasta diciembre de 1992.

En ese intervalo, el Profesor Sánchez Vázquez ha participado intensamente en las actividades federativas, impulsando el nacimiento e incorporación de varias sociedades regionales, y promoviendo las relaciones más estrechas y fecundas con los movimientos educativos internacionales, especialmente con los iberoamericanos.

Por tratarse de un compañero conocido y estimado por todos, con una dilatada experiencia docente y asociativa, cuya ilusión se mantiene intacta y al día (a sus setenta y cinco años sigue dando conferencias y cursos a los profesores), nos ha parecido interesante conocer diversos aspectos de su vida, consagrada a la enseñanza durante más de cincuenta años, así como su opinión sobre las cuestiones que afectan al presente y al futuro de la Federación.

- *¿Cómo fueron, amigo Gonzalo, sus primeros estudios?*

- Nacido un trece de mayo de mil novecientos diecisiete en San Juan de Aznalfarache (Sevilla), pronto, a los ocho años de edad, fui a vivir a Málaga. Mi padre, teniente de Carabineros, fue trasladado allí y, tanto por razones económicas como vocacionales, fue mi único profesor durante algunos años, así como también de mi hermano Adolfo (exiliado durante décadas en Méjico, donde ha llegado a ser un filósofo de reconocido prestigio).

Una anécdota a propósito de mi fehca de nacimiento: coincide exactamente con la de la aparición de la Virgen de Fátima. Quizás pensando en una posible predestinación del cliente, los hoteleros de Portugal me han tratado siempre muy bien, cuando han conocido a través del pasaporte esta circunstancia.

Realicé mis estudios de Bachillerato en el único Instituto que había en Málaga (actualmente I.B. Gaona), entre los años 1927 y 1932. En el plan de estudios entonces vigente se cursaban las Aritmética, la Geometría (euclídea: lemas, teoremas, corolarios, ...), el Álgebra y la Trigonometría, como materias independientes y no simultáneas, desarrolladas de un modo teórico-deductivo, sin ejemplos motivadores y sugerentes, apenas sin prácticas ni problemas. ¡Perfectamente contraindicado para despertar vocaciones matemáticas!

- *¿Cuándo profundizó en las matemáticas y se inició en su didáctica?*

- Fue como consecuencia de haber estudiado en la Escuela Normal de Málaga en Plan Profesional del Magisterio. Implantado por la II República en 1931, constituyó un plan renovador y universitario, que seguía las ideas pedagógicas de la Institución Libre de Enseñanza. Entonces conocí lo que es una enseñanza viva, mediante los métidos más modernos y activos, con prácticas contínuas y en el aula, lecturas y experiencias didácticas personales. Desgraciadamente, el triunfo del movimiento franquista truncó esta corriente renovadora de la enseñanza en nuestro país, y me dejó a la intemperie, aunque ello no pudo apagar una vocación pedagógica irreversible.

En aquella época, años previos a nuestra guerra civil, había en Málaga un ambiente cultural extraordinario. Con frecuencia, era posible escuchar conferenciantes como Ortega y Gasset, Unamuno, Marañón, etc. Florecía la vida literaria y las publicaciones poéticas (por ejemplo, la revista Litoral) despertaban las inquietudes de nuestra joven generación. Entonces publiqué mis primeros versos (y últimos), influido por la fuerte y humanísima personalidad de un amigo entrañable, Emilio Prados, el gran poeta malagueño de la Generación del 27.

Al mismo tiempo, los estudios de Magisterio me incitaron a interesarme por las teorías matemáticas (pienso, como entocnces, que no es posible profundizar en la didáctica, o simplemente ser un buen profesor, sin poseer un amplio bagaje de conocimientos). Hice el primer curso de Ciencias en la Universidad de Sevilla en 1935, como alumno libre. Mi bautismo serio en los estudios matemáticos tuvo lugar con el "Análisis Algebraico", de Rey Pastor, obra dura para un principiante, pero que ponía a prueba definitiva una vocación, igual que las prácticas anatómicas los hacían con los estudiante de Medicina. Creo que éste fue el punto de inflexión que iba a marcar mi futuro, la entrada en el mundo de las matemáticas y de su enseñanza.

- *¿Cuándo y cómo se inició como Profesor de Matemáticas?*

- Terminé la carrera de Exactas en Madrid, en 1944, tras unos años de post-guerra muy difíciles, en que tuve que afrontar sumarios, depuraciones y represiones, y sostenerme con las clases particulares. Como no podía entrar en la enseñanza oficial, me dediqué intensamente a la enseñanza de las matemáticas, sobre todo de la geometría, para el ingreso en las carreras de Ingeniería, en que se proponían a veces problemas realmente difíciles. Fruto de mi actividad en esa época, fue la publicación de mi obrita "Lecciones de Cónicas", tratadas teórica y prácticamente con métodos gráficos y proyectivos, no analíticos, y dedicadas a los estudiantes de ciencias e ingenierías.

Cuando al fin pude opositar a Cátedras de Instituto, y ganarlas, marché a Oviedo en 1954, haciéndome cargo también de las Matemáticas en la Universidad, que carecían de profesor titular. Tres años después, y durante seis, dirigí el departamento de Matemáticas de la Universidad de Maracaibo (Venezuela), hasta aterrizar definitivamente en Sevilla, tanto en la enseñanza media como en la universitaria. Durante los últimos treinta años, puede hacer compatible mi actividad docente en el aula (todavía la echo de menos y añoro esa labor de formación del alumno, despertando su curiosidad más que satisfaciéndola), con la de la orientación didáctica de los profesores, y con la puesta en marcha de nuestra Sociedad de Educación Matemáticas "Thales" (y más tarde de la Federación), uniéndome a los profesores de matemáticas en un hermoso proyecto que hoy es una realidad vigorosa, y en cuya madeja continúo felizmente comprometido.

En mi vida he tenido la oportunidad de haber impartido matemáticas en los tres niveles, primario, medio y superior, tanto en la enseñanza pública como en la privada. Quizás, con esa perspectiva universal, veo claro que el proceso de aprendizaje de las matemáticas es único, y resulta lamentable la falta de conexión, incluso el desconocimiento, entre los diversos niveles. Pero también creo que es necesaria en todos ellos una formación didáctica del profesorado, mejorando en algún nivel la preparación científica y, en otros, la pedagógica.

- ¿Qué opina sobre la formación matemática en el momento actual?

- No sé si la pregunta se refiere a la formación científica de los matemáticos en la Universidad o a la formación de profesorado de esta disciplina.

En cuanto a la primera, o me considero un experto para valorarla, ni mucho menos para juzgarla, salvo en su repercusión en la formación del profesorado de primaria y media. Comparando los estudios actuales con los de mi época pienso que se ha ganado en especialización, que se está más al día en el conocimiento de los avences de la investigación matemática. Pero creo también que se ha renunciado a conseguir una visión más integradora y universal de esta materia y de sus aplicaciones. Pienso que se ha alejado bastante, en suma, de una interpretación más histórica, humanística y cultural, y que se hanb sepultado en el museo del olvido conocimientos más generales, elementales si se quiere, pero fundamentales, necesarios y formativos para el profesor de Matemáticas en los niveles anteriores.

Por ejemplo, he podido comprobar, en los cursos para profesores de estos niveles que he desarrollado en los últimos años sobre transformaciones geométricas y métodos de resolución de problemas gráficos, el grado increible de desconocimiento de las propiedades y relaciones de las figuras geométricas más elementales, y la incapacidad para resolver sencillos problemas o justificar construcciones que se enseñan sólo en las clases de dibujo, sin la debida formación científica. Y no se trata sólo de conocimientos, sino de métodos de trabajo, de interpretaciones gráficas de cuestiones algebraicas o analíticas, de la posibilidad de construir modelos concretos en que se puden contrastar conjeturas o abrir un cauce intuitivo a la demostración de propiedades.

Sin embargo, soy optimista en cuanto al futuro, por la actitud de interés y deseo de perficcionamiento del profesorado. Más de veinte años de actividad de los grupos y sociedades de profesores de matemáticas, han impulsado un movimiento de preocupación por las cuestiones didácticas y por el mejoramiento y renovación de la enseñanza de las matemáticas, que se ha extendido por todo el país, influyendo en los planes de reforma, a través de experiencias de clase, encuentros, seminarios, congresos y publicaciones.

Un síntoma de que esta inquietud está penetrando, no sólo en la Administración educativa, sino en la propia Universidad (aparte de la valiosa contribución de las actuales Escuelas de Magisterio, que están superando la larga travesía del desierto que representó la escasa preparación y el bajo "status" de los maestros en buena parte de la época franquista), es el hecho de que, por primera vez en nuestro país, se ha creado una Cátedra de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada, de la que es impulsor y titular nuestro compañero Luis Rico. Constituye éste un signo esperanzador y un precedente muy importante para que la Universidad Española preste, a la problemática de la enseñanza de las matemáticas, en un próximo futuro, la atención que hace tiempo es habitual en prestigiosas universidades de Francia, Inglaterra, Alemania, Italia, Canadá y Estados Unidos, a donde algunos profesores españoles debieron trasladarse para realizar sus tesis doctorales en didáctica de las matemáticas, en la imposibilidad de hacerlo en nuestro propio país.

- ¿Qué opina sobre las asociaciones de profesores de matemáticas?

- Hay que remontarse más de veinte años para comprobar cómo surge con fuerza, aunque disperso, un movimiento de profesores de a pie que plantean la necesidad de mejorar los métodos de enseñanza de las matemáticas y de perfeccionar su propia preparación. Habría que citar, entre otros, el movimiento Rosa Sensat en Cataluña, las Escuelas de Verano, los grupos de Barcelona, Valencia, Madrid, Sevilla, Tenerife, Salamanca, etc. Trabajan estos gru-pos, al principio, al margen de la Administración, si no frente a ella, pues los planes oficiales permanecen prácticamente inalterables. Contra la enseñanza libresca y pasiva, emplean una metodología más activa, con plena participación del alumno; una enseñanza motivada por el entorno y por los intereses y la curiosidad de los auténticos protagonistas del proceso educativo.

Pero la labor de los grupos, que fue y sigue siendo muy valiosa, como vanguardia del movimiento renovador, no era muy conocida por amplios sectores del profesorado. Las necesidades educativas de la nueva sociedad democrática exigían una proyección más extensa, diríamos que masiva, de sus esfuerzos dispersos. Por ello, a fines de los setenta y a principios de los ochenta, aparecen de una manera natural las asociaciones de profesores de matemáticas.

Hacia el curso 78-79 se gesta la Sociedad "Isaac Newton", de Canarias, y en el curso 80-81, la Sociedad Andaluza "Thales". El movimiento asociativo se extiende en estos doce años por todo el país, organizándose Jornadas regionales y nacionales, encuentros, seminarios, y tanto los grupos como las Sociedades promueven la edición de revistas y publicaciones. Este movimiento es una de las fuerzas que hacen posible y necesaria la realización de una reforma del sistema educativo, en general, y de la enseñanza de las matemáticas en particular, proyectada posteriormente por las autoridades educativas. La coordinación de las múltiples actividades que se desarrollaban en las diversas regiones era ya inaplazable, y, por ello, surgió en 1988 la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

- ¿Cómo se consolidó la Federación Española?

- Iniciaron su puesta en marcha la Sociedad Canaria, la Sociedad Aragonesa, las dos Sociedades andaluzas, con sedes en Sevilla y Granada (que estaban en proceso de fusión) y la Sociedad Castellana "Puig Adam" (que luego se retiraría, reintegrándose el año pasado), así como una representación de los grupos. No puedo dejar de recordar los nombres de Luis Balbuena, Antonio Pérez, Florencio Villarroya y Alberto Aizpún, entre otros, como gestores entusiastas en esa primera hora.

Una vez superados los trámites administrativos, los dos primeros objetivos de la naciente Federación eran la reactivación de las Jornadas Nacionales, que habían dejado de celebrarse, y la publicación de una revista de educación matemática, SUMA, de ámbito estatal.

Hay que señalar que ambos se han cumplido eficazmente. Las V JAEM se celebraron en Castellón, en 1991, y las VI tendrán lugar en Badajoz (mejor dicho, habrán tenido lugar cuando se publique esta entrevista), organizadas por dos jóvenes Sociedades, la Castellonenca y la Extremeña, demostrando así la capacidad y la pujanza de las nuevas sociedades federadas. Además de las citadas, pertenecen a la Federación la Sociedad Navarra, la Sociedad Madrileña, la Sociedad Alicantina, la Sociedad de Galicia y la Sociedad Castellano-Leonesa. Y están en proceso de incorporación o se están gestando sociedades en Tarragona, Gerona y Castilla-La Mancha. Aunque el ámbito estatutario para las sociedades federadas es el autonómico, se aceptan temporalmente sociedades provinciales hasta que se consolide su integración regional.

En cuanto a la revista SUMA, se han publicado recientemente los números 11 y 12, bajo la dirección de Sixto Romero, que está continuando con éxito la brillante trayectoria abierta por el primer director, Rafael Pérez.

La otra actividad estatal, que entra ya en su cuarta edición, es la Olimpiada Matemática Nacional, que reúne a los finalistas de los concursos que se celebran en todo el país, en los que participan más de cinco mil alumnos de octavo de educación general básica, y cuya final se celebrará este año en Andorra.

- ¿Qué acogida ha tenido la Federación entre los profesores y las Instituciones?

- El propio desarrollo, casi galopante, de la Federación en tod el país, de que he hablado anteriormente, contesta a la primera parte de la pregunta. Los profesores de matemáticas han encontrado un espacio común para intercambiar sus experiencias, conocer las nuevas aportaciones a la didáctica de las matemáticas, recibir información al día de las actividades pedagógicas que se desarrollan en España y en el extranjero, y conectar a través de los encuentros y publicaciones con los grupos de trabajo afines a sus inquietudes. Es tan alto el interés del profesorado que, con frecuencia, ha habido que limitar el número de ins-cripciones en los cursos y jornadas, porque las peticiones desbordan las posibilidades materiales de organización. Así ha sucedido, por ejemplo, en las recientes Jornadas Nacionales de Badajoz.

En cuanto a la segunda parte de la cuestión, debo declarar que nuestra Federación es una asociación no oficial, independiente. Nuestro único objetivo es contribuir al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas, al perfeccionamiento del profesorado y a la investigación didáctica en esta disciplina. Colaboramos así con la sociedad, en general, y las Instituciones, en particular, en la desmitificación del "coco" de las matemáticas, trabajando en favor de una enseñanza más atractiva, más participativa, más rica en recursos, con un profesorado cada día más motivado y mejor preparado.

- ¿Existen contactos internacionales?

- No podemos vivir aislados de la corriente mundial de la renovación de la enseñanza de las matemáticas, pues podrían venirnos de fuera reformas impuestas (como pasó en la introducción de la matemática moderna), sin haber participado en su elaboración ni tenido en cuenta las particularidades de nuestro sistema educativo.

Estas relaciones son especialmente estrechas con los países iberoamericanos, a cuyos congresos asistimos y con los que mantenemos intercambios y colaboraciones en los últimos años. Cristalizó esta conexión con la realización del I-CIBEM (Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática), que tuvo lugar en Sevilla en 1990. A él asistieron unos ciento cincuenta profesores de esos países y unos cien portugueses. Pudimos contar con la prestigiosa participación del Profesor Santaló, que pronunció la conferencia inaugural. El próximo CIBEM se celebrará en Brasil en 1994, con lo que se consolidará el movimiento educativo matemático de nuestra área cultural.

Asimismo, hemos participado en los últimos Congresos Internacionales de Educación Matemática (los ICMES) que se celebran cada cuatro años (Budapest-1988, Quebéc-1992). Por cierto, en el ICME de 1984, celebrado en Adelaida (Australia), no hubo más que un participante español, que fue el representante de la Sociedad THALES. En cambio, al último han asistido más de ciento cincuenta profesores españoles. Esta fuerte presencia da idea del peso creciente de nuestro movimiento.

Otro síntoma es la designación de nuestro compañero Sixto Romero como miembro directivo de la CIEAEM (Comisión Internacional para el estudio y mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas), prestigiosa organización internacional, a la que pertenecieron entro otros los profesores Puig Adam y Emma Castelnuovo, bien conocidos y apreciados por todos nosotros.

- ***¿Qué puede decirnos sobre el presente y el futuro de la Federación?***

- Yo creo que aunque las instituciones (las autoridades educativas y la propia Universidad), sean más sensibles en el futuro a los planteamientos didácticos, el movimiento de profesores debe siguir jugando un papel fundamental, tanto en su formación permanente como en el mejoramiento de la enseñanza, para que ésta se alimente de la práctica diaria, de las experiencias reales del aula y no sólo de investigaciones teóricas. Para ello, las sociedades siguen siendo un cauce indispensable.

Un hecho trascendente, que fortalecerá el futuro de nuestras actividades fue la firma de un Convenio por el Ministerio de Educación y Ciencia y la Federación, consecuencia del prestigio de nuestro movimiento y de la confianza que, tanto los profesores como las instituciones, han depositado en él.

La Federación publica periódicamente, además de la revista SUMA, el boletín informativo "N-ágono", bajo la dirección del compañero Luis Balbuena, nuestro Secretario General. En él se anuncian y se resumen las múltiples actividades organizadas por la Federación, así como las de las Sociedades. Por ejemplo, hay que destacar entre las celebradas, los Seminarios Monográficos sobre Diseño Curricular Base en Primaria y Secundaria Obligatoria (Pamplona), Popularización (Granada), Alumnos Singulares (La Coruña), Los Nuevos Bachilleratos (Alicante), Software Educativo (Madrid) y Formación Científico Didáctica del Profesorado de Secundaria (Granada), todos ellos en relación con las Matemáticas y su enseñanza.

Internacionalmente, la Federación tiene graves responsabilidades, en un futuro próximo. Por primera vez, España, a través de nuestro movimiento ha sido designada como país anfitrión, para organizar el próximo ICME, que tendrá lugar en Sevilla en julio de 1996, por el máximo organismo internacional, el ICMI (Comité Mundial para la Enseñanza de las Matemáticas), en una decisión unánime.

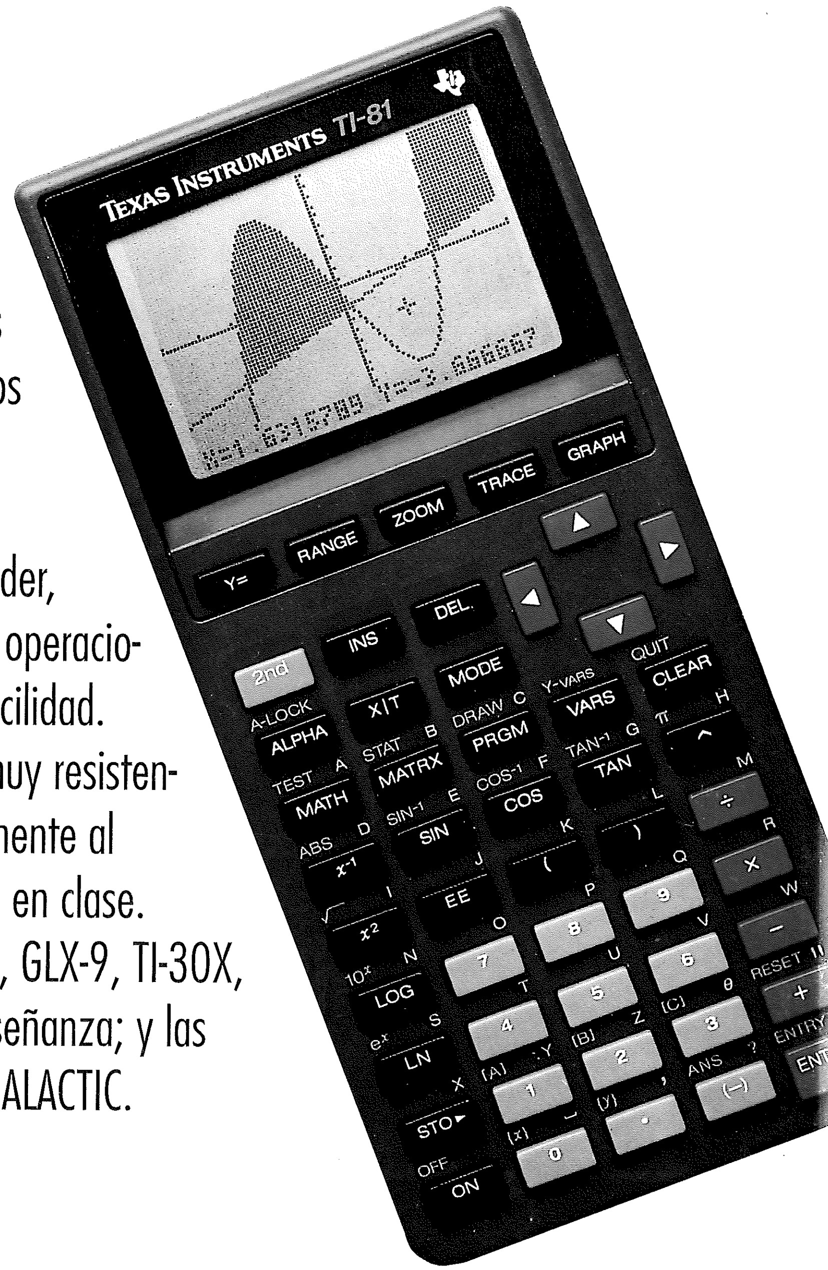
A este acontecimiento no han sido ajenos dos hechos. Por una parte, el prestigio creciente del movimiento de educación matemática de nuestra aptria más allá de sus fronteras. Por otra, el nombramiento, también por primera vez, de un profesor español Miguel de Guzmán, como Presidente del ICMI, nombramiento que supone un alto honor para él y para todos nosotros.

Ante el reto histórico que se nos avecina, no defraudemos la confianza que, tanto los profesores de dentro y fuera, como las instituciones, han depositado en nuestro movimiento. No puedo olvidar el momento solemne en que tuve que intervenir en Quebéc, en la sesión de clausura del ICME-7. Allí me comprometí en nombre de la Federación a que la comunidad educativa matemática española concentraría todos sus esfuerzos para asegurar el éxito del ICME-8.

Quizás ha sido ése el mensaje más importante que he tenido que dar en mi vida, muy superior por su trascendencia a los méritos de un modesto profesor. Pero lo hacía con la seguridad de que mis compañeros en esta hermosa aventura de enseñar matemáticas, que ha llenado mi existencia, no me dejarán en la estacada.

PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A.
SCPM "Puig Adam", Madrid.
Arias Vílchez, J.
SAEM "Thales". I.B. "Auringis", Jaén.
Arrieta Gallastegui, J.
Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P.
EUPEGB, Cádiz.
Balbuena Castellano, L.
SCPM "Isaac Newton". La Laguna.
Bou García, L.
I.B. "Zalaeta", La Coruña.
Benítez Trujillo, F.
SAEM "Thales", E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C.
Escola de Mestres " S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J.
EUPGB, Melilla.
Cancio León, Mª P.
SCPM "Isaac Newton", Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. Mª
EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A.
Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo "Manuel Sacristán"
Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J.
I.B. "Colmenar Viejo", Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M.
SAEM "Thales" (Granada).
Díaz Godino, J.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Fernández Sucasas, J.
EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. Mª
Escola de Mestres "S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M.
SAEM "Thales", I.B. "Averroes", Córdoba.
García Arribas, C.
SAEM "Thales", I.B. "Padre Suárez", Granada.
García Cruz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
García González, E.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
García Cuesta, S.
Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M.
SAEM "Thales", Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F.
SAEM "Thales", EUPEGB, Almería.
Giménez, J.
EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL
ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA
EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO
Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS
ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO
Escola de Mestres "S. Cugat", Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de
Facultad de Matemáticas, Univ. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
López Gómez, J.
SAEM "Thales", I.B. "Luis Cernuda", Sevilla.
Luelmo Verdú, Mª J.
SMPM, I.B. "San Mateo", Madrid.
Llinares Ciscar, S.
SAEM "Thales", EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A.
SAEM "Thales", EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G.
Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A.
Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P.
Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J.
Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A.
EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R.
SNPM "Tornamira", EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L.
SAEM "Thales", I.B. "Emilio Prados", Málaga.
Pérez Fernández, J.
SAEM "Thales", IFP "Las Salinas", San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R.
SAPM "P. S. Ciruelo", I.B. "Miguel Servet", Zaragoza.
Pérez Jiménez, A.
SAEM "Thales", I.B. "Nervión", Sevilla.
Petri Etxeberría, A.
SNPM "Tornamira", C.P. "Mª Ana Sanz", Pamplona.
Puig Espinosa, L.
Dept. de Didáctica de la Matemática, Universitat de Valencia.
Rico Romero, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Ruiz Garrido, C.
SAEM "Thales", Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A.
I.B. "San Mateo", Madrid.
Sánchez Cobos, F. T.
SAEM "Thales", I.F..P. "Andrés de Vandelviva", Baeza. Jaén.
Santos Hernández, A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA
(M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Soto Iborra, F.
EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A.
SAEM "Thales", C.E. "Blanco White", Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A.
SAEM "Thales", I.B. "Trafalgar", Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L.
SAEM "Thales", Facultad de Matemática, Sevilla.



Texas Instruments TI-81

Texas Instruments
TI-106

Libros y artículos de Martin Gardner

La influencia de Martin Gardner en las matemáticas recreativas y, a través de ellas, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha sido y es muy grande. Han sido traducidas al castellano la mayoría de sus obras, muchas de ellas recopilación de sus artículos publicados en *Scientific American*. Precisamente por este hecho, al leer un libro de estos artículos, no se tiene conciencia del momento en que fue publicado por primera vez. En estos "Para Coleccionar" pretendo subsanar este hecho y para ello expongo la relación de los artículos en *Scientific American* y en *Investigación y Ciencia* y el libro donde se encuentra recopilado. A continuación expongo una relación de libros escritos por Martín Gardner dando, siempre que me es posible, la versión castallana de los mismos. al no ser una relación exahustiva debería ser completada en el futuro; esta es mi intención y para ello pido la colaboración de todos aquellos que puedan completarla y corregirla.

NOTA: *Esta información se distribuye en tres "Para Coleccionar".*

Cronología de la columna "Mathematical Games" de Martin Gardner en Scientific American.

Libros en que están recopilados estos artículos:

1. Mathematical Puzzles and Diversions.
Penguin Books, Pelican Books, 1965.
Primera edición en U.S.A.: The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.
Simon and Schuster, 1959.

Editado en español en dos volúmenes, a partir de la edición en inglés: Hexaflexagons and other Mathematical Diversions. The University of Chicago Press, 1988. Los títulos en español son:

1a. Diversiones Matemáticas: Un laberinto de estimulantes fantasías.

1b. Mental Games: Los mejores juegos matemáticos del Scientific American.
Selector. Actualidad editorial. México, 1989, 1990.

Traducción de Susana Liberti.
No está traducida la introducción. Hay actulizaciones al final de cada libro respecto de la primera edición.

2. More Mathematical Puzzles and Diversions.
Penguin Books, Pelican Books, 1966.
Primera edición en U.S.A.: The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.
Simon and Schuster, 1961.

3. Nuevos Pasatiempos Matemáticos.
Alianza Editorial. LB-391. Madrid, 1972.
Edición original: News Mathematical Diversions from Scientific American.
Simon and Schuster, 1966.

Traducido por Luis Bou García.
Todos los libros tienen la bibliografía correspondiente a cada artículo, sin embargo este libro en la edición castellana no la tiene.

4. Los mágicos números del Doctor Matrix.
Editorial Gedisa. Barcelona, 1986.
Edición original: The Magig Numbers of Dr. Matrix.
Prometheus Books, Buffalo, New York, 1985.
(Los primeros siete capítulos aparecieron en el libro: "The Numerology of Dr. Matrix".
Simon and Schuster, 1967.
Fue ampliado hasta el capítulo 18 en el libro: "The Incredible Dr. Matrix", Charles Scribner's Sons, N.Y., 1976).

Traducido por Daniel Zadunaisky.
El último capítulo (19) del libro "Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas" está dedicado al Dr. Matrix y su título es "El regreso del Dr. Matrix".

5. El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos.
Alianza Editorial. LB-1549. Madrid, 1991.

Traducido por Gonzalo del Puerto y Gil.
Further Mathematical Diversions.
Penguin Books, Pelican Books. 1977.
Edición original: The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions.
Simon and Schuster, 1969.
George Allen & Unwin, 1970.

6. Comunicación extraterrestre y otros pasatiempos matemáticos.
Ediciones Cátedra, S.A., 1986.
Edición original: Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American.
W.H. Freeman and Co. San Francisco, 1971.

Traducido por Rafael Millán y Fernando González.
En la edición española falta el capítulo 15: "Word Play".

7. Carnaval Matemático.
Alianza Editorial. LB-778. 1980.

Edición original: Mathematical Carnival.
Alfred A. Knopf, Inc. N.Y., 1975.
George Allen & Unwin Ltd. London, 1976.

Traducido por Andrés Muñoz Machado.

8. Festival Mágico-Matemático.
Alianza Editorial. LB-1023. Madrid, 1984.
Edición original: Mathematical Magic Show.
Alfred A. Knopf, Inc. N.Y., 1977.
George Allen & Unwin, Sidney-London.

Traducido por Luis Bou García.
En la edición española falta el capítulo 6: "Doble Acrostics".

9. Circo Matemático.
Alianza Editorial. LB-937. Madrid, 1983.
Edición original: Mathematical Circus.
Alfred A. Konpf, Inc. New York, 1979.
Allen Lane. Penguin Books, Ltd. London, 1981.

Traducido por Luis Bou García.

10. Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas.
Editorial Labor, 1985.
Edición original: Wheels, Life, and other Mathematical Amusements. W.H. Freeman and Co. 1983.

Traducido por Luis Bou García.

11. Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas.
Editorial Labor, 1987.
Edición original: Knotted doughnuts and other mathematical entertaiments. W.H. Freeman and Co. 1986.

Traducido por Luis Bou García.

12. Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas.
Editorial Labor, 1988.
Edición original: Time travel and other mathematical bewilderments. W.H. Freeman and Co. 1988.

Traducido por Luis Bou García.

13. Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas.
Editorial Labor, 1990.
Edición original: Penrose tiles to trapdoor ciphers. W.H. Freeman and Co. 1989.

Traducido por Luis Bou García.

14. Fractal Music, Hypercards and more.
W.H. Freeman, 1992.

Francisco Herrero Ruiz