Una paradoja, una pregunta, un resultado, ...

Manuel Sobrino Reyes

En este artículo se muestra una pequeña investigación y un pequeño apunte pedagógico sobre una cuestión aparentemente cerrada como es la paradoja del Caballero de Méré. Donde dirijamos la mirada, en cualquier rincón de la matemática y su historia, es posible hallar algo nuevo, por insignificante que sea. Llevemos nuestras ideas al aula mas no privemos a nuestros alumnos del placer de descubrir. Descubrir es el motivo; aprender, la consecuencia.

Desde el punto de vista histórico se considera que la teoría del Cálculo de Probabilidades nace en el siglo XVII a partir de situaciones o problemas concretos planteados en los juegos de azar.

Antoine Gombaud, caballero de Méré, escritor y tahur, contribuyó al inicio de la probabilidad planteando a su amigo Pascal diversas cuestiones relacionadas con el juego y el azar. Algunas de tales cuestiones se mostraban contradictorias en algún sentido y es una de ellas la que a continuación se analizará.

La paradoja de Méré

En aquella época los jugadores sabían que apostando a una cara de un dado -as, por ejemplo- era necesario efectuar, al menos, cuatro lanzamientos para tener una probabilidad de ganar mayor que de perder.

El caballero de Méré pensó que, de igual modo, si se lanzan dos dados y se apuesta al doble as, veinticuatro lanzamientos serían suficientes para tener una probabilidad de ganar mayor que 0.5.

¡Cuál fue su desengaño comprobar que después de una larga noche apostando a favor de su **intuición** obtuvo como prueba unas cuantiosas pérdidas!

El **razonamiento** podría ser: "si cuando tenemos 6 resultados posibles necesitamos repetir 4 veces el experimento, teniendo 36 resultados necesitaremos 24 intentos".

La respuesta desde el punto de vista matemático a esa "extraña" proporcionalidad es clara: la probabilidad del primer suceso es $1-5^4/6^4 = 0.511747$[1] y la del segundo $1-25^{24}/36^{24} = 0.491404$. Irrefutable.

Una pregunta

Hasta aquí la paradoja. Una pregunta surge de manera inmediata: pues bien, ¿cuántos lanzamientos de dos dados son necesarios para que obtener, al menos, un doble as tenga probabilidad mayor que 0.5?

La respuesta es sencilla:

$$E\left(-\frac{\log 2}{\log \frac{35}{36}} + 1\right) = 25$$

donde E es la función parte entera.

Siendo 25 un número tan próximo a 24 no resisto la tentación de continuar con la extraña proporcionalidad de Méré.

¿Por qué no lanzamos tres, cuatro, cinco, ... dados apostamos por obtener tres, cuatro, cinco, ... ases respectiva y simultáneamente, e intentamos deducir un número de repeticiones del experimento necesarias para asegurarnos ganar con probabilidad mayor que 0.5?

[1] Todos los números decimales se han redondeado a la cifra de las millonésimas.

El número mínimo cuando lanzamos k dados es:

$$E\left(-\frac{\log 2}{\log \frac{6^k-1}{6^k}}\right)+1$$

¡Pero a mí me gustaría seguir con la idea intuitiva de Méré!

Tomemos como referencia los 25 lanzamientos necesarios de dos dados.

- **Experimento I:** Lanzamiento de tres dados.

¿Serán suficientes 25*6=150 tiradas? Veamos que sí.

Sea A_3 el suceso obtener al menos una vez los tres ases en 150 repeticiones.

$p(A_3) = 1 - (214/215)^{150} = 0.501453$

- **Experimento II:** Lanzamiento de 4 dados.

$t=25*6^2 = 900$ tiradas.

A_4: obtener al menos una vez los cuatro ases en 900 lanzamientos.
$p(A_4) = 1 - (1295/1296)^{900} = 0.500782$

- **De manera recurrente se obtiene:**

$p(A_5) = 1 - (7775/7776)^{5400} = 0.500671$

$p(A_6) = 0.500652$

...

Un resultado

A la luz de lo anterior se pueden hacer dos suposiciones:

1ª.- Tal probabilidad lanzando cualquier número de dados siempre es mayor que 0.5.

2ª.- Tal probabilidad tiende a 0.5.

Veamos que, según el **resultado** siguiente la primera suposición es cierta pero la segunda es falsa.

> Consideremos el experimento que consiste en lanzar k dados (k>1) simultáneamente.
> Repitamos el experimento $25*6^{k-2}$ veces.
> La probabilidad de obtener, al menos en una ocasión los k ases:
> a) es mayor que 0.5;
> b) tiende a $1 - e^{-25/26}$ cuando k tiende a infinito.

Sea A_k: obtener al menos una vez k ases en $25*6^{k-2}$ tiradas.

$$p(A_k) = 1-\left(\frac{6^k-1}{6^k}\right)^{5^2*6^{k-2}}$$

Veamos que $[p(A_k)]_{k=2}^{\infty}$ es decreciente, o lo que es igual

$$\left[\left(6^k-(1/6^k)\right)^{25*6^{k-2}}\right]_{k=2}^{\infty}$$

es creciente.

La última sucesión es una subsucesión de

$$[a_n]_{n=1}^{\infty} = \left[(1-1/n)^{(5/6)^2*n}\right]_{n=1}^{\infty}$$

La sucesión $[a_n]_{n=1}^{\infty}$ es creciente[2].

$$1-(1/n) < 1 - (n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-(1/n))^{(5/6)^2*n} < (1-(1/n+1))^{(5/6)^2*(n+1)}$$

La sucesión $[p(A_k)]_{k=2}^{\infty}$ es, por tanto decreciente; es necesarir que el límite es mayor que 1/2 para terminar la demostración de a).

$$\lim_{k\to\infty} p(A_k) = 1 - \lim_{k\to\infty} (1-(1/6^k))^{6^{k-2}*5^2} =$$

$$= 1 - e^{-(5/6)^2} = 0.500648$$

Esto concluye la demostración de a) y de b).

Podemos afirmar que la **intuición** de Méré era incorrecta pues falla en el primer paso pero, olvidándonos de él, no vuelve a fallar.

En un primer intento de generalizar aún más el **resultado** anteriormente demostrado, podríamos planteamos la siguiente conjetura:

Juego 1º: Lanzamos k dados simultáneamente y apostamos por obtener los k ases, con k>2.
Juego 2º: Lanzamos t (t<k) dados simultáneamente y apostamos por obtener los t ases.
Si el juego 1º es favorable lanzando los dados n veces, el segundo será favorable lanzándolos $n*6^{t-k}$ veces.

Sin embargo no hay más que observar ciertos casos particulares para hallar contraejemplos de ella.

¡Hagamos un último intento de generalización!

*Bajo las hipótesis de la conjetura anterior, añadiendo la siguiente: Si el juego 1º (k dados) es favorable lanzando los dados n veces y si lanzamos k+1 dados el nuevo juego fuera favorable en 6*n lanzamientos, entonces el 2º juego es favorable en $n*6^{t-k}$ lanzamientos, cualquiera que sea t (t>k+1).*

¿Cierto o falso?

Aplicación en el aula

La paradoja de Méré y la ampliación que he propuesto admiten un tratamiento didáctico por diversas razones.

- Se puede presentar a distintos niveles dentro de un mismo curso y

[2] La justificación exhaustiva se deja al lector. No es tan evidente como aquí parece, se pueden utilizar distintos resultados del cálculo diferencial a nivel de Bachillerato.

en distintos cursos de, incluso, distintas etapas educativas.

• Tiene las características de un trabajo de investigación que admite la utilización de distintos materiales manipulables para efectuar -dados- o simular -tablas de números aleatorios, calculadora, ordenador- los lanzamientos, así como para realizar los cálculos necesarios -calculadora u ordenador-.

El trabajo puede presentarse en la E.S.O. cerrando la paradoja de Méré y quizá abriendo posteriormente algún interrogante. De cualquier modo, en el primer ciclo no debemos pedir a los alumnos que lleguen más allá de obtener una aproximación al valor de la probabilidad de manera frecuencial lanzando dados y/o simulando el experimento.

En el Bachillerato se puede introducir el **resultado** donde se calculan probabilidades y se manejan conceptos de sucesión, crecimiento y límite de sucesiones, y en particular la del número **e**. Se puede establecer la comparación con el número mínimo de lanzamientos resultado de, además de introducir la función parte entera, resolver una ecuación cuya incógnita es un exponente, esto es, se necesita la noción de logaritmo o la utilización de métodos de aproximación numérica. También se puede ver que la diferencia entre el número mínimo de lanzamientos y el número del **resultado** tiende hacia infinito.

El trabajo debe seguir las líneas del razonamiento inductivo y permitir que sea el alumno quien experimente, infiera y descubra.

Con una calculadora científica se resuelven los casos de lanzamientos de al menos 7 dados y aparecen inmediatamente ciertas regularidades. A partir de 8 dados surgen, dependiendo de la precisión de la máquina, problemas, pero esto no es malo. El alumno debe apreciar la necesidad de usar instrumentos potentes de cálculo pero también debe tener en cuenta sus limitaciones cuando se producen desbordamientos o cuando los errores se hace incontrolables por la magnitud de las operaciones. Ese puede ser un buen momento para intentar deducir resultados teóricos más fiables y generales.

En suma, podemos presentar un trabajo atractivo para el alumno ya que se apoya en una situación histórica sobre los juegos de azar y con el que se tratan distintos aspectos del currículo de matemáticas. Algunos de ellos son el empleo de material y una metodología que permite la actividad del alumno y el tratamiento de la diversidad, y el corte transversal de distintos bloques de contenidos donde no sólo se pretenden objetivos terminales referidos a conceptos, sino que tienen gran importancia los de tipo procedimental y actitudinal.

Bibliografía

* CARL BOYER (1987). **Historia de la matemática**. Alianza, Madrid.

* WILLIAM FELLER (1975). **Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones**. Volumen I. Limusa, Méjico.

Manuel Sobrino Reyes
CEP. Valladolid