Lo que hay cuando no queda nada

Carlos Usón Villalba

Sobre la construcción del concepto de volumen, sobre sus dificultades, sobre la persistencia de ciertas ideas previas se ha escrito, tanto por parte de los profesionales de la enseñanza como por sicólogos y pedagogos, lo suficiente como para que no sea necesario escribir aquí ni una línea más recogiendo citas, repitiendo ideas o haciendo pronunciamientos.

Hay un cierto consenso en lo que hace referencia a una idea previa muy persistente cuya superación se ha ligado con determinados estadios del desarrollo cognitivo y que no podía ser otra que la de "la conservación del área al modificar el volumen" o dicho de otro modo: la creencia "natural" de que existe una dependencia funcional entre las medidas de área y volumen de un mismo cuerpo. Es decir, que si se duplica el área se duplica el volumen y si se triplica uno se triplica el otro, etc.

Parece ser que llega un momento de nuestro desarrollo sicológico en el que se desbanca esta idea, aunque soy de los que piensan que persiste siempre (muy a menudo por lo menos) una idea, sino de dependencia funcional, si, al menos, de dependencia estadística... -"Si duplicamos el área es posible que no se duplique el volumen pero es seguro que aumenta. ¿O no?". ¿Quién no firmaría esta frase?

No parece que sea necesario saber gran cosa sobre el tema, quizás hasta sea conveniente, para buscarse modelos muy elementales, para uno mismo y para sus alumnos, con la pretensión de que funcionen, por ejemplo:

- Tomemos dos cubos (exaedros) idénticos y los unimos. El volumen se ha duplicado. ¿Qué ha sucedido con sus áreas? ¿Y con sus perímetros?

Y si los unimos por una cara. Pensemos, por ejemplo en dos piezas de Multilink, ¿cuál es la situación en la que se consigue área máxima? Y si uno se quiere comer el "tarro" un poco más ¿cuánto vale esa área?

- Se tiene ahora un bote de polvos de talco, ¿qué le sucede a su volumen, a su área y a su perímetro si se duplica su altura? ¿Y si duplica su anchura?

Por cierto que esta pregunta tan natural precisa para su respuesta de un cierto dominio de procedimientos geométricos y el buscar, quizás, otras modelizaciones. Si sorprende la afirmación es o porque en algún momento hemos hecho un uso abusivo de las fórmulas del volumen reduciendo de ese modo la geometría al álgebra o porque se ha sabido, con buen criterio, dotar a los alumnos y alumnas de una buena batería de procedimientos geométricos para abordar el problema.

Es sin duda un buen momento para pasar a dos dimensiones, y ahora estoy pensando en la clase, y retomar (si se tomó antes) el tema de la conservación del área al modificar el perímetro, pero no vamos a entrar en ello.

También se les puede pedir que tomen un folio y construyan con él un cilindro, con un poco de suerte saldrán de los dos tipos que nos interesan (uno con el folio apaisado y el otro con el folio vertical) y se les puede preguntar acerca de cuál de ellos tiene mayor volumen. Por cierto, ¿mayor volumen o mayor capacidad? Habrá que llegar a determinados consensos que nos permitan mantener la pregunta inicial. ¿Cuál tiene más área? ¿Y qué pasa con el perímetro? Con un poco más de suerte quizás alguno construya un cucurucho en lugar de un cilindro y nos brinde la posibilidad de trabajar el volumen del cono e incluso de plantearnos como se les puede "demostrar" o mejor qué preguntas plantear para que vean que el volumen del cilindro es el triple que el de un cono de su misma base y altura. Por cierto, ¿es la base un ente matemático perfectamente definido?, supongo que sí puesto que lo usamos mucho...

Como podéis comprobar no he sabido sustraerme a la tentación de escribir una larga introducción al tema a base de haceros unas propuestas recogidas de aquí y de allá. Pero en realidad lo que pretendía no era otra cosa que plantearos un problema sencillo, no uno de esos problemas de llevar a clase mañana mismo, que yo no he visto escrito por ahí lo que me hace sospechar que o no he leído lo suficiente o no merece la pena plantearlo (también esto lo dijo alguien antes que yo). Pero ahí va, con la pretensión de que os entusiasme, ¡ahí es nada!, porque de lo contrario no merece la pena que lo llevéis a clase.

"Se cogen unos cuantos multicubos, los suficientes para construir un cubo de arista tres". La pregunta es: ¿cuántos cubitos puedo quitar del cubo grande con la condición de que lo que quede tenta la misma área que el cubo de partida?

Llegados a este punto, estimado lector, a buen seguro que, si el problema ha conseguido captar tu atención y te ha resultado sugerente, te habrás puesto a resolverlo de inmediato. Por lo que te puedes saltar estos párrafos, al retomar la lectura, ya que estas disquisiciones no tienen otra finalidad que la de dilatar, lo más posible, el momento del sacrificio que no es otro que el de dar una solución al problema y con ella "matarlo" definitivamente.

Aunque también es posible, que a estas alturas ya hayas desconectado y no hayas llegado tan siquiera a leer el problema, y por lo tanto a este punto. Riesgo, por cierto, que también se corre en clase aunque mitigado porque el alumno no tiene la libertad de largarse cuando le aburrimos. O que lo hayas resuelto sin necesidad de construirte el cubo, ni de garrapatear sobre el papel una sola línea. En ese caso: ¡Enhorabuena, eres un sesudo matemático!; sólo que yo no le planteé el problema al matemático sino al enseñante.

En cualquier caso, ahí va..., que se le va a hacer... una forma, como otra cualquiera, de abordarlo.

Una posible línea de comienzo es quitar los cubitos de las esquinas, que tienen la propiedad de mostrar tantas caras como ocultan, (una propiedad muy humana por cierto), eso nos permite construir la siguiente tabla:

CUBITOS	0	1	2	4	4	5	6	7	8
ÁREA	54	54	54	54	54	54	54	54	54
VOLUMEN	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Tabla I

Al llegar a este punto el objetivo está cumplido, no hay dependencia funcional entre área y volumen o dicho menos pretenciosamente, a una misma área le pueden corresponder muchos volúmenes diferentes. Sin embargo el problema sigue en pie: ¿Se puede quitar más cubitos?

Dos cuestiones antes de seguir:

a) Se suele presentar un bloqueo al llegar a esta situación que es bueno examinar a la luz de las técnicas de resolución de problemas.

b) Si bien se puede pensar (más bien erróneamente) que ha desaparecido la idea de la dependencia funcional entre área y volumen (¡ni el milagro de Lourdes!) persiste a buen seguro la dependencia estadística. Razones para ello no faltan: ¿Podría aumentarse el volumen del cubo de arista tres conservando el área?

Parece claro, pues, que tenemos una nube de puntos, que a cada área se le puden asociar unos cuantos volúmenes, pero que si aumenta el área, dentro de ese área cabe más volumen o dicho de otra manera, que si aumento el volumen necesitaré más área para contenerlo. ¿Y si lo disminuyo? Aquí el globo, tan unido a nuestra experiencia, aporta imágenes contundentes, por cierto, ¿acerca del volumen o de la capacidad? Además, da la sensación de que algo sucede cuando disminuimos el volumen que no sucede al aumentarlo.

Bien, pero volvamos al problema...

Hasta ahora has quitado un cubito cada vez pero ¿podrías haber quitado piezas formadas por dos cubitos?, ¿y por tres, cuatro, etc.? ¿De cuántas formas posibles?

Podríamos seguir por el camino que acabamos de abrir, pero vamos a tomar otro. Si habíamos quitado en el cubo inicial un cubito en cada esquina, ¿por qué no quitar un cubo de arista dos en una de ellas?, esto supone quitar ocho cubitos de una "tacada" lo que nos lleva en la tabla a la situación en que la habíamos dejado. Pero ahora podemos quitar los cubitos de las otras cuatro esquinas:

CUBITOS	8	9	10	11	12
ÁREAS	54	54	54	54	54
VOLÚMENES	19	18	17	16	15

Tabla II

La figura que nos queda representa un cuerpo que ha surgido del cubo inicial sometido a una serie de transformaciones y cabe preguntarnos ¿qué conserva de él? Porque la respuesta nos da una posible manera de continuar el problema y llegar manteniendo esa invariante a quitar algún cubo hasta quedarnos con 13 cubitos del cubo inicial.

Ahora, la estructura de lo que nos queda ya no se sostiene y esto da pie a nuevas preguntas: ¿cuál es el máximo número de cubitos que puedo quitar manteniendo una estructura que se "mantenga en pie"? y por otro lado ¿cuántos cubitos más de esos trece puedo quitar conservando el área? Y evidentemente puedo jugar a compensar el número de caras ocultas y al descubierto de unos y de otros y al final me quedo con nueve que es la solución trivial y no me puedo sustraer al placer de mostraros la solución que dio al problema Alvaro, un alumno del aula ocupacional de Arnedo en la que plantee el problema.

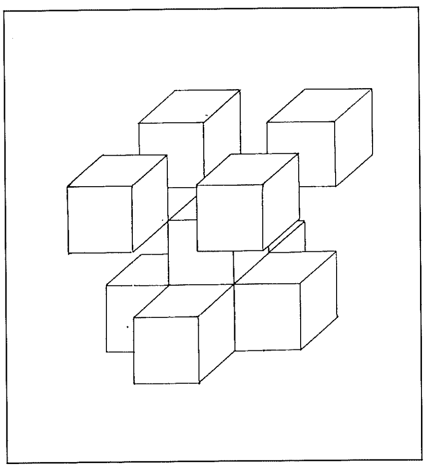

Figura 1

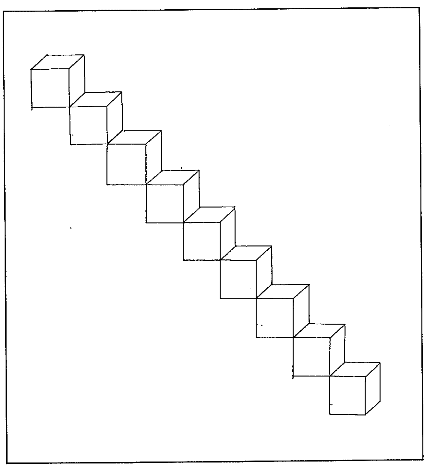

Figura 2

Todo problema se acaba cuando el que lo resuelve decide que se acaba y que suele ser habitualmente cuando el problema no le aporta retos intelectuales que abordar. Quizás por eso éste sea un buen momento para terminar, pero por si te quieres seguir comiendo el "coco" un poquito más, te planteo a modo de epílogo algunas otras cuestiones:

En la figura 2 tenemos los nueve cubitos colocados en una disposición que quizás pueda evocar un problema similar en dos dimensiones. Y cojo, de paso, la lupa y observo que a su vez cada uno de ellos está formado por otros 27 cubitos más pequeños y ello me permite reducir todavía más si cabe el volumen conservando el área... ¿en cuánto cada vez?, ¿hasta dónde?, ¿qué sucesión de volúmenes se obtiene?... No haré más preguntas pues a buen seguro que si has aguantado hasta aquí tendrás más preguntas para hecerme tu de las que yo te pueda hacer.

Si hubiéramos seguido construyendo la tabla, ésta sería ahora mucho más "continua" que antes. Pero ¿se podría hacer totalmente "continua"?

Un último esfuerzo, piensa en un cubo de poliespán de arista uno (p.e.) del que quitas en una de sus esquinas un cubo de arista z la que se quiera con tal de que 0<z<1. ¡Por fin la tabla es continua!.

Por mi parte se acabó el problema, otra cosa es que se haya conseguido el objetivo, tarea siempre ardua y más para un único problema. Pero por si acaso eres uno de esos/as "viciosos/as" que se enrollan con los problemas... ¿qué le ha ido pasando al perímetro en todo este proceso?, ¿quedan todavía razones para mantener esa idea de dependencia estadística de correlación positiva entre área y volumen de la que hablaba al principio?, ¿qué debe quedar de ella y qué debemos eliminar?, en definitiva: ¿...qué debe quedar cuando no queda nada? y por otro lado ¿qué otros modelos pueden inventarxe con esta excusa?, etc.

Carlos Usón Villalba
CEP. Calahorra