Euler y el número π

Jesús Antonio Temprano Marañón

Uno de los más prolíficos matemáticos, sino el que más, que han existido a lo largo de toda la historia, ha sido el suizo Leonhard Euler (1707-1783).

Además de, en nuestro caso, introducir el uso de la letra griega π (inicial de perímetro) para nuestro número, dio numerosas aproximaciones mediante desarrollos en serie de la relación existente entre la circunferencia y su diámetro.

El presente artículo trata de explicar el ingenioso procedimiento seguido por Euler en dos de dichas series:

- la serie de Jacques Bernouilli y,
- la serie de Leibniz.

Vamos a ver el ingenioso procedimiento seguido por Euler para calcular la suma de dos famosas series:

- la serie de Jacques Bernouilli y,
- la serie de Leibniz.

Supongamos una ecuación de segundo grado de la forma

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 = 0$$

Cuyas soluciones sean b_1 y b_2, por lo que si descomponemos en factores resulta:

$$a_0-a_1x+a_2x^2 = a_2\ (x-b_1)\ (x-b_2) =$$
$$= a_2\ (x^2-x\ (b_1+b_2) + b_1b_2)$$

Con lo cual, si igualamos coeficientes, queda:

$$a_1 = a_2\ (b_1+b_2)$$
$$a_0 = a_2b_1b_2 \Rightarrow a_2 = a_0/b_1b_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = (a_0/b_1b_2)\ (b_1+b_2) =$$
$$= a_0\ ((1/b_1) + (1/b_2))$$

Y, si transformamos la descomposición factorial, resulta:

$$a_2\ (b_1-x)(b_2-x) = (a_0/b_1b_2)(b_1-x)(b_2-x) =$$
$$= a_0\ (1-(x/b_1)(1-(x/b_2)$$

Si procedemos de igual modo que una ecuación de tercer grado de la forma:

$$a_0-a_1x + a_2x^2-a_3x^3 = 0$$

Cuyas soluciones sean b_1, b_2 y b_3 resulta:

$$a_0-a_1x + a_2x^2-a_3x^3 =$$
$$= -a_3\ (x-b_1)\ (x-b_2)\ (x-b_3) =$$
$$=-a_3(x_3-x_2(b_1+b_2+b_3)+$$
$$+x\ (b_1b_2+b_1b_3)-b_1b_2b_3)$$

Con lo cual, si igualamos coeficientes

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_3(b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3) \\ a_0 = a_3b_1b_2b_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a_3 = a_0/b_1b_2b_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = a_0/b_1b_2b_3(b_1b_2 + b_1b_3+b_2b_3 =$$

$$= a_0\ ((1/b_1) + (1/b_2) + (1/b_3))$$

y

$$-a_3(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3) =$$
$$= -a_3(b_1-x)(b_2-x)(b_3-x) =$$
$$= a_0/b_1b_2b_3\ (b_1-x)(b_2-x)(b_3-x) =$$
$$= a_0(1-(x/b_1))(1-(x/b_2))(1-(x/b_3))$$

Y si procedemos de igual modo para una ecuación de cuarto grado completa cuyas soluciones sean b_1, b_2, b_3 y b_4 resulta

$$a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+a_4x^4 =$$
$$= a_4\ (x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4) =$$
$$= a_4[x^4-x^3(b_1+b_2+b_3+b_4)+$$
$$+x^2(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+b_2b_3+b_3b_4)-$$
$$-x_3(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4)] \Rightarrow$$

Igualando coeficientes que

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_4(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+ \\ \quad + b_1b_3b_4+b_2b_3b_4) \\ a_0 = a_4b_1b_2b_3b_4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a_4 = a_0/b_1b_2b_3b_4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = a_0/b_1b_2b_3b_4(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+$$
$$+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4) =$$
$$= a_0(1-(x/b_1))(1-(x/b_2))(1-(x/b_3)$$
$$(1-(x/b_4))$$

Es decir:

- Para una ecuación de segundo grado nos sale:

$a_0 = a_2b_1b_2$

$a_1 = a_0\ ((1/b_1)+(1/b_2))$

Y $a_0-a_1x+a_2x^2 = a_0(1-(1/b_1))(1-(1/b_2))$

- Para una ecuación de tercer grado nos sale:

$a_0 = a_3b_1b_2b_3$

$a_1 = a_0\ ((1/b_1)+(1/b_2)+(1/b_3))$

Y $a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3 = a_0(1-(x/b_1))(1-(x/b_2)(1-(x/b_3))$

- Para una ecuación de cuarto grado sale:

$a_0 = a_4b_1b_2b_3b_4$

$a_1 = a_0\ ((1/b_1)+(1/b_2)+(1/b_3)+(1/b_4))$

Y $a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+a_4x^4 = a_0(1-(x/b_1))(1-(x/b_2)(1-(x/b_3)(1-(x/b_4))$

...Con lo que, si generalizamos, para una ecuación de grado "n" nos saldría:

$a_0 = a_nb_1b_2b_3...b_n$

$a_1 = a_0((1/b_1)+(1/b_2)+(1/b_3)+...+(1/b_n))$

Y $a_0-a_1x+a_2x^2-...+(-1)^{n-1}\ a_{n-1}x^{n-1} + (-1)^na_nx^n =$
$= a_0(1-(x/b_1))(1-(x/b_2))+(1-(x/b_3))+...+(1-(x/b_n))$

Si empleamos este mismo procedimiento para una ecuación bicuadrada de la forma $a_0-a_1x_2+a_2x^4=0$ con soluciones $\pm b_1$ y $\pm b_2$ ⇒

$a_0=a_2b_1^2b_2^2$
$a_1=a_0\ ((1/b_1^2)+(1/b_2^2))$

Y $a_0-a_1x^2+a_2x^4 =$
$= a_0(1-(x^2/b_1^2))(1-(x^2/b_2^2))$

Y si la ecuación fuera de grado "2n"

$a_0 = a_nb_1^2b_2^2b_3^2...b_n^2$

$a_1 = a_0\ ((1/b_1^2)+(1/b_2^2)+(1/b_3^2)+ +...+(1/b_n^2))$

Y $a_0-a_1x^2+a_2x^4-...+(-1)^{n-1}\ a_{n-1}x^{2n-2} + (-1)^na_nx^{2n} =$
$= a_0(1-(x^2/b_1^2))+(1-(x^2/b_2^2))+ +(1-(x^2/b_3^2))+...+(1-(x^2/b_n^2))$

Recordando que la fórmula de Taylor para el desarrollo de una función en serie de potencias en un punto "x_0" es

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{I}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{II}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+...+\frac{f^{<n-1}(x)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{<n}(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

Si aplicamos este desarrollo a la función y=senx en el punto $x_0=0$, resulta

$f(0)$ = sen 0=0
$f^{I}(0) = \cos 0=1$
$f^{II}(0)$ = -sen 0=0
$f^{III}(0) = -\cos 0=-1$
$f^{IV}(0)$ = sen 0=0
$f^{V}(0) = \cos 0=1$
....

En donde vamos viendo que las derivadas de orden par son 0, mientras que las de orden impar son las de la forma $f^{<2n+1}(0) = (-1)^n$ ⇒

sen $x=x-(x^3/3!)+(x^5/5!)-(x^7/7!)+ +...+(-1)^n(x^{2n-1}/(2n-1)!)$

Y aunque ya sabemos que la función desarrollada representa a la y=Sen x, si hacemos la representación gráfica se ve que cada vez más se confunden con la original

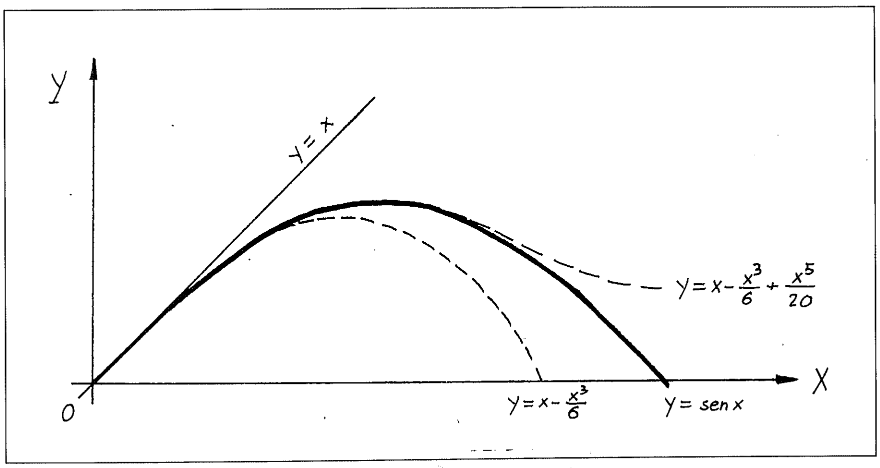

Figura 1

Al considerar Euler la ecuación sen x=0 ⇒

$x-(x^3/3!)+(x^5/5!)-(x^7/7!)+(x^9/9!)... = 0$

Y como el lado izquierdo tiene infinitos términos ⇒ tiene que tener una infinidad de raíces que son

$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, ...$

Sacando factor común resulta

$x(1-(x^2/3!)+(x^4/5!)-(x^6/7!)+ +(x^8/9!)...)=0$

Y como para que un producto de dos factores sea igual a cero tiene que ser uno de ellos o los dos igual a cero, podemos suponer que el segundo es igual a cero ⇒

$$1-(x^2/3!)+(x^4/5!)-(x^6/7!)+ \\ +(x^8/9!)-\ldots=0 \qquad (2)$$

que tiene por soluciones

$$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \pm\ldots$$

Con lo que aplicando lo visto para las ecuaciones de grado "2n" resulta que

$$(2)=((1-(x^2/\pi^2))(1-(x^2/4\pi^2)) \\ (1-(x^2/9\pi^2))\ldots(1-(x^2/n^2\pi^2)) \Rightarrow$$

$$1/3!=1[(1/\pi^2)+(1/4\pi^2)+ \\ +(1/9\pi^2)+\ldots+(1/16\pi^2)+\ldots+(1/n\pi^2)] \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi^2/6=(1+(1/4)+(1/9)+(1/16)+ \\ +\ldots+(1/n^2))}$$

que es la conocida serie de Jacques Bernouilli.

El paso siguiente de Euler es el de considerar la ecuación 1-sen x=0 ó bien

$$1-(x/1!)+(x^3/3!)-(x^5/5!)+(x^7/7!)-\ldots=0$$

que tiene como raíces

$$\pi/2,\ -3\pi/2,\ 5\pi/2,\ -7\pi/2, \\ 9\pi/2,\ -11\pi/2,\ \ldots$$

aunque cada una de estas raíces es doble ya que la curva y=sen x no corta a la curva y=1 en esas abcisas, sino que es tangente a ellas, pero la misma derivada primera del lado izquierdo se anula para los mismos valores de x, pero no su segunda derivada por lo tanto, recordando lo que habíamos visto para las ecuaciones de grado "n"

$$1-\text{sen } x = 1-(x/1!)+(x^3/3!)-(x^5/5!)+ \\ +(x^7/7!)\ \ldots=$$

$$=\left(1-\frac{x}{\pi/2}\right)\left(1-\frac{x}{\pi/2}\right)\left(1-\frac{x}{-(3\pi/2)}\right)$$

$$\left(1-\frac{x}{-(3\pi/2)}\right)\left(1-\frac{x}{5\pi/2}\right)\left(1-\frac{x}{5\pi/2}\right)$$

$$= (1-(2x/\pi))^2(1+(2x/3\pi))^2 \\ (1-(2x/5\pi))^2(1+(2x/7\pi))^2\ldots$$

$$1= (2/\pi)+(2/\pi)-(2/3\pi)-(2/3\pi)+ \\ +(2/5\pi)+(2/5\pi)-(2/7\pi)-(2/7\pi)\ \ldots$$

$$= (4/\pi)-(4/3\pi)+(4/5\pi)-(4/7\pi)+ \\ +(4/9\pi)-\ldots \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi/4=1-(1/3)+(1/5)-(1/7)+ \\ +(1/9)-(1/11)+\ \ldots}$$

que es la conocida fórmula de Leibniz.

Jesús A. Temprano Marañón
I. de Formación Profesional de Infiesto (Asturias)