El Cálculo simbólico automático y la Enseñanza del Álgebra: el diseño curricular base[1]

Tomás Recio

En este artículo se persiguen dos objetivos complementarios: por una parte, la presentación y divulgación de los métodos y paquetes informáticos característicos del Álgebra por ordenador o Cálculo Simbólico Automático, atendiendo a su futura utilidad en la enseñanza del Álgebra pre-universitaria. Por otra parte, el análisis de determinados planteamientos didácticos para la enseñanza del Álgebra-como los contenidos en el Diseño Curricular Base-desde las aportaciones conceptuales que suponen ciertas técnicas de Cálculo Simbólico.

Introducción

El desarrollo, relativamente reciente, de programas de ordenador capaces de operar con símbolos y otros elementos característicos del álgebra, abre una serie de posibilidades para la utilización de estos programas en la enseñanza elemental de las matemáticas (ciclo superior de la E.G.B. y B.U.P.). En primer lugar, obviamente, como herramienta para la realización de los cálculos algebraicos por parte del profesor y de los alumnos durante y después de la clase. La utilización en este sentido limitado pero importante de los programas de cálculo simbólico debe ir precedida de un análisis de las consecuencias y alteraciones didácticas que conllevaría su empleo generalizado, una **discusión, en cierto sentido, similar a la que suscitó hace años el uso de las calculadoras de bolsillo por parte de los escolares**. En segundo lugar debemos señalar que la propia tarea de elaboración e implementación de los programas de cálculo simbólico ha supuesto y supone en la actualidad un análisis conceptual importante sobre aspectos básicos del álgebra, tan básicos que aparecen usualmente en la enseñanza escolar de la misma. Este análisis conceptual arroja también cierta luz sobre las dificultades del aprendizaje del álgebra, con posibles consecuencias para su didáctica, que se estudian, en el tercer apartado de este trabajo, relacionándolas con las propuestas del Diseño Curricular Base. En tercer lugar, el desarrollo teórico de los algoritmos del cálculo simbólico está modificando la perspectiva, desde un punto de vista estrictamente matemático y no didáctico, tradicional sobre temas tales como la geometría euclídea o los sistemas de números, que son materia habitual en el curriculum escolar. El análisis de las futuras implicaciones didácticas de estas nuevas perspectivas científicas es el último punto a considerar en este trabajo.

Se observará que en lo que sigue no se establecen propuestas didácticas concretas como consecuencia de las reflexiones y hechos que se

[1] Parcialmente basado en la conferencia pronunciada en el curso "La Educación Matemática", Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca, 5 de julio de 1989, y en los cursos de actualización científica y didáctica impartidos en los CEP de Cáceres, Zaragoza y Santander, en 1988 y 1990.

exponen. Esta tarea, ciertamente mucho más difícil que la que tratamos de desarrollar aquí, no puede ser emprendida seriamente por el autor del artículo, no vinculado en la actualidad con la enseñanza de la matemática escolar. Si se considera que no es procedente que las orientaciones didácticas surjan exclusivamente de las mesas de los despachos universitarios, la hipotética utilidad de trabajos como éste, de actualización científica en un sentido amplio del término, radica en la difusión de avances científicos y tecnológicos entre el profesorado no universitario para que este, en último término, elabore y adapte las implicaciones didácticas que procedan.

Si son bien conocidas las dificultades de realización de artículos de divulgación científica por la propia complejidad de la tarea y la falla, casi siempre, de práctica en los autores, lo es menos la habitual carencia de motivaciones, en un mundo científico que valora sobre todo los resultados técnicos. En este trabajo y con independencia del valor del mismo, debo reconocer el aliento para su elaboración proveniente de los organizadores y asistentes a los cursos de actualización científica y didáctica celebrados en el otoño de 1988 y en el verano de 1990 en los C.E.P. de Cáceres, Zaragoza y San-tander, donde tuve la oportunidad de exponer y discutir alguna de las ideas que constituyen este artículo. Mi agradecimiento también para los profesores L. Rico y J.L. Soriano, director y secretario, respectivamente-del curso "La Educación Matemática" celebrado en la Universidad de Castilla-La Mancha (Cuenca, en 1989. Muchas de las ideas **que aquí se** plasman se han ido formando con la colaboración inestimable de los profesores Carmen Da Veiga, Miguel Soler y Juan Manuel Olazabal. Junto con mi reconocimiento hacia ellos, mis disculpas si no he sabido interpretar adecuadamente sus opiniones sobre este tema.

El Cálculo simbólico automático: conceptos, sistemas y aplicaciones

Cálculo simbólico, cálculo formal, álgebra por ordenador... son alguna de las expresiones usadas en los últimos veinte o treinta años para designar el estudio y la implementación de algoritmos que actúan sobre objetos algebraicos: polinomios en una y varias variables, fracciones racionales, matrices de elementos numéricos o simbólicos, funciones elementales del análisis... Es difícil definir con precisión el ámbito de esta disciplina por vías distintas a la de los ejemplos; una descripción por comparación pondría el énfasis en la exactitud (precisión ilimitada) de los cálculos realizados en los programas de álgebra por ordenador frente a la precisión limitada de los cálculos numéricos en los programas matemáticos "habituales". Otra forma de aproximación al concepto de cálculo simbólico automático podría venir dada por la referencia a algunos libros que tratan el tema de manera general y básica: el volumen dos de la conocida obra de Knuth "The Art of Computer Programming" Addison-Wesley, 1969, que incluye el tratamiento de los algoritmos *seminuméricos*, puede considerarse dentro del espíritu del álgebra por ordenador. Otras dos obras de referencia obligada son las denominadas "Calcul Formel" de Davenport- Syret-Tournier, en la editorial Masson, 1987; y la colección de artículos introductorios, "Computer Algebra" recopilados por Buchber-ger-Collins-Loos y editados por Springer-Verlag en 1982. Los aspectos más estrictamente matemáticos son objeto de tratamiento específico en el texto reciente de Mignotte "Mathematiques pour le calcul formel" Presses Universitaires de France, 1989.

Dos algoritmos típicos del cálculo simbólico podrían ser el denominado de Euclides, para el cálculo del máximo común divisor de dos polinomios en una variable con coeficientes enteros; o el de Hermite, para el calculo de la integral indefinida de una fracción racional con coeficientes en un cuerpo (este último ejemplo de algoritmo de integración formal ejemplifica la importancia de los aspectos no algebraicos, pero sí de cálculo simbólico, dentro del Álgebra por Ordenador). Ambos algoritmos se encuentran razonablemente dentro del ámbito de la matemática escolar pero su implementación por ordenador (o la realización de los cálculos a mano) presenta una serie de problemas característicos del Cálculo Simbólico. En el caso del algoritmo de Euclides aplicado a los polinomios

$x^8+x^6-3x^4-3x^3+8x^2+2x-5$ y $3x^6+5x^4-4x^2-9x+2$

se observa que los coeficientes racionales de los polinomios que surgen de las sucesivas divisiones, expresados como cocientes de números enteros primos entre sí, son de un tamaño considerable (hasta diez dígitos en el numerador y en el denominador), siendo la fracción

$$\frac{1288744821}{543589225}$$

el máximo común divisor buscado. Por la sencillez de los polinomios dados, es evidente que la aplicación directa de este método no podría generalizarse a casos más complejos, de mayores coeficientes de partida o de grados más elevados. Así, la búsqueda de algoritmos para el cálculo del máximo común divisor, sin un crecimiento exponencial del tamaño de los coeficientes que intervienen en los pasos intermedios, constituye una tarea típica del Cálculo Simbólico. Es claro, además, que la alternativa (de tipo "cálculo numérico") consistente en representar las fracciones involucradas por números decimales aproximados conduciría a resultados incorrectos (y no sólo "aproximadamente incorrectos") para el cálculo del máximo común divisor. Considérense, por ejemplo, los polinomios

$$x^3-8 \quad y \quad (1/3)x^2-(4/3)$$

cuyo m.c.d. es

$$(1/3)x-(2/3)$$

mientras que el m.c.d. de x^3-8 y $0,333333x^2-1,33333$ es 0,000001. En el caso de los algoritmos de integración indefinida de funciones racionales (cocientes de polinomios con coeficientes, por ejemplo, enteros) recordemos -sin entrar en detalles- que es necesario factorizar "de alguna forma" el denominador, descomponer en fracciones simples, hallar algunas raíces de polinomios... De nuevo los errores de redondeo en el cálculo de raíces o en la determinación de su multiplicidad pueden dar lugar a resultados radicalmente diferentes. Surge así el problema, fundamental en Cálculo Simbólico, de la representación exacta y del cálculo con números que son raíces de polinomios con coeficientes enteros (tales como $\sqrt{2}$), sin acudir a su representación decimal.

Estos ejemplos, entresacados del libro Calcul Formel, citado arriba, pueden servir para atisbar el concepto de Cálculo Simbólico en su dimensión más próxima al Álgebra. Pero ya hemos señalado al principio que forma parte de ese mismo concepto la implementación de los algoritmos algebraicos formando paquetes de programas denominados Sistemas de Cálculo Simbólico Automático. Tras un período en el que los sistemas más capaces de realizar tareas interesantes debían necesariamente cargarse sobre ordenadores de un tamaño considerable, puesto que la contrapartida a la precisión ilimitada es la exigencia de mayores recursos de tiempo y memoria, muchos empiezan a ser accesibles para un usuario con un micro ordenador (tipo PC, con un mega de memoria). REDUCE, MAPLE son dos sistemas de propósito general, actualmente utilizados sobre un ordenador personal por numerosos grupos de usuarios. Otros sistemas de propósito más específico, para la manipulación de polinomios en una o varias variables, como el COCOA o el ALPI o el MACAULAY, son también manejables en ordenadores PC. muMATH es otro sistema de propósito general que opera sobre pequeñas máquinas, si bien sus características son un tanto limitadas. Sin ningún ánimo de ser exhaustivos debemos mencionar entre los sistemas de Cálculo Simbólico que exigen ordenadores de tamaño medio a MATHEMATICA, MACSYMA y a SAC-2 (este último especializado en algoritmos para la eliminación de cuantificadores en la teoría de cuerpos realmente cerrados). Posiblemente una configuración mínima razonable para un centro educativo no universitario consistiría en la adquisición del sistema MAPLE instalado en un disco duro al que accedieran varios PCs. Esta recomendación, sin duda, está influida por el esfuerzo realizado por los creadores de este sistema, en la universidad canadiense de Waterloo, para adecuar el mismo a las necesidades de alumnos y profesores, distintas muchas veces de las de los investigadores (véase el artículo "Computer Algebra in the Under-graduate Mathematics Classroomt", Char-Geddes-Gonnet-Marshman-Ponzo, Proceedings SYMSAC 86, ACM 1986). Otra opción, empleada por el profesor Olazabal en compañía del autor de este artículo, en los Cursos de Actualización Científica y Didáctica mencionados en el apartado anterior, es la instalación de REDUCE en ordenadores compatibles. En ambos casos el software necesario puede adquirirse en varias casas comerciales a un precio razonable para un seminario o centro educativo.

Las aplicaciones de estos sistemas se apoyan en tres características comunes a todos ellos: una fórmula matemática puede ser objeto de evaluación numérica, cuando las variables y parámetros de la misma han recibido valores numéricos (como ocurre en FORTRAN, PASCAL o BASIC) y **además puede ser objeto de manipulación formal** como simplificación, derivación, integración, factorización, desarrollo... de la fórmula dada.

La aritmética en ciertos dominios básicos (enteros, racionales,...) es **exacta.**

La mayor parte de las habilidades operatorias algebraicas básicas **están incorporadas al sistema.** Además de la aritmética con polinomios, funciones racionales, matrices... se incluyen comandos para la realización del máximo común divisor, descomposición en fracciones simples, diferenciación, desarrollo en serie de Taylor, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, determinación de la existencia de soluciones complejas para sistemas de ecuaciones no lineales, integración formal, solución formal de ecuaciones diferenciales ordinarias, cálculo de límites y series...

Además de la utilización de estos sistemas como meras "supercalculadoras" de mesa, uno puede escribir programas en un lenguaje próximo al PASCAL para la realización de algoritmos o aplicaciones no contempladas directamente por los creadores del sistema.

En ambos modos de utilización es claro que el Cálculo Simbólico Automático proporciona una herramienta extraordinaria para la exploración de una parte importante de las matemáticas, por ejemplo, en geometría algebraica es frecuente que el desarrollo de ejemplos no absolutamente triviales sea una tarea excesivamente pesada para realizar a mano (piénsese en la realización de un cambio lineal de coordenadas sobre un polinomio de grado cinco, en dos o tres variables), o para la obtención de resultados de naturaleza cualitativa, por ejemplo, para escribir un algoritmo que obtenga el tipo topológico (número de óvalos, por pequeños que sean, y su inclusión relativa) de una curva plana como método auxiliar en el estudio del problema 16 de Hilbert. Otras situaciones relativamente simples que ilustran las aplicaciones matemáticas de estos sistemas se basan en la capacidad recientemente incorporada para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas: así se pueden desarrollar algoritmos para la determinación de las ecuaciones paramétricas de la intersección de dos superficies, obteniendo por evaluación numérica con coma flotante puntos de la curva resultante; o hallar las ecuaciones implícitas de un objeto geométrico dado por ecuaciones paramétricas. Las aplicaciones de estas técnicas a la Geometría Computacional o a la Geometría Sólida Constructiva o C.S.G. están siendo investigadas en la actualidad. Más sofistificadas son las aplicaciones a algunas áreas como la planificación de movimientos de robots o a la demostración automática de teoremas. Las referencias **bibliográficas citadas** anteriormente contienen indicaciones precisas sobre la forma en la que los sistemas de Cálculo Simbólico intervienen en estas aplicaciones y sobre otras muchas, quizás más importantes y con ámbitos no matemáticos de utilización: física de altas energías, química y biología... debe pensarse que algunos sistemas de Cálculo Simbólico fueron primariamente concebidos para una aplicación extra matemática concreta). Las que hemos mencionado aquí con algún detalle han sido elegidas por ser el campo particular de intereses del autor y del grupo de Álgebra Computacional de la Universidad de Cantabria.

El álgebra escolar en el diseño curricular base: aspectos, tareas y dificultades

Desde una perspectiva meramente descriptiva, álgebra escolar es sinónimo de manipulación de letras: como dice el profesor Freudenthal en "Didactical Phenomenology of Mathematical Structures" (D. Reidel Pub. Co. 1983) "the long step from arithmetic *towards algebra... is calculating with letters rather than numbers*". Ciertamente el **cálculo literal** es uno de los aspectos característicos del álgebra escolar, al que yo añadiría, tanto por razones históricas como por la coincidencia en el tiempo de aprendizaje, la manipulación **no decimal** de ciertos números (radicales, radicales imbricados, potencias): es decir, la realización de ciertas tareas (simplificar, verificar la igualdad, etc.), con tales números sin recurrir a realizar las operaciones indicadas mediante la obtención de la expresión decimal correspondiente. Aún puede añadirse al bagaje de características del Álgebra escolar la introducción al concepto de **función;** ciertamente las letras aparecen aquí también y, además, puede hablarse de una tendencia didáctica (explicitada en el libro de Freudenthal mencionado arriba, hacia la algebrización de las funciones, enfatizando el papel de las letras como variables y de las expresiones algebraicas como funciones, ofreciendo así una vía alternativa de aproximación al álgebra, distinta de las clásicas ecuaciones o identidades. También, si continuamos con esta aproximación descriptiva al álgebra, es característica de esta parte del curriculum escolar la **resolución de ecuaciones o de establecimiento de identidades por medios formales,** la formulación y resolución de problemas de modo que la dificultad se encuentra fundamentalmente en **la traducción simbólica** de la situación planteada y en la identificación de la incógnita a determinar. La frontera con la aritmética es aquí difusa, ya que tales problemas pueden ser muchas veces abordables, también, desde una perspectiva que podemos llamar aritmética, en la que es posible determinar el valor de la incógnita mediante la ejecución de un "plan" operacional que parte directamente de los datos (véase al respecto el análisis que se realiza en "Problemas Aritméticos Escolares" de Luis Puig-Fernando Cerdán, Ed. Síntesis, 1988).

Por cualquier vía que se opte para aproximarse al álgebra escolar, otra nota característica y uno de los puntos más conflictivos de su enseñanza es la **multiplicidad de esquemas conceptuales en los que se realiza el cálculo literal,** como los catalogados por Kuchemann para la utilización escolar de las letras. En todos los casos catalogados, las tendencias didácticas actuales, en particular las reflejadas en el documento del Ministerio de Educación y Ciencia español, denominado Diseño Curricular Base, preven una metodología para la enseñanza del álgebra que conlleva interpretar las letras como símbolos que representan algo (números, cantidades..); es decir, se estima que un aprendizaje significativo de la manipulación de símbolos ha de requerir una interpretación de los mismos en un cierto referente. La pluralidad de contextos conceptuales en los que surgen los símbolos se extiende también a la realización de tareas específicas: *resolver* debe predicarse de las *incógnitas*, mientras que *simplificar* es más propio de las situaciones con *indeterminadas*. En la práctica escolar, buena parte de los problemas que habrían de surgir, por la sutileza de las distintas semánticas en el uso de letras, son

resueltos mediante la creación en los alumnos de meros hábitos de acomodación condicionada a las tareas repetitivas que deben realizar. Así, si aparece un enunciado con la palabra I simplifica" o "factoriza" el alumno sabe que la expresión que debe calcular al otro lado del símbolo = ha de ser el resultado de la aplicación de ciertas reglas, sacar la mayor potencia posible común a una serie de monomios, operar unos paréntesis, etc.; mientras que si se trata de "resolver" el símbolo = es un mero obstáculo para comprobar su habilidad para "pasar" la expresión de la derecha a la izquierda de dicho símbolo, sin que en la mayoría de los casos se le ocurra simplificar en un contexto de resolución o viceversa (y, ¿que ocurriría si lo hace?:
piénsese en una ecuación de la forma $x^2-1=x^2+3x+2$ visualizada como $(x-1)(x+1)=(x+l)(x+2)$, y en la que el alumno se "confunde" de contexto y se pone a simplificar antes de proceder a resolver). Tal vez este fenómeno de mera acomodación social (en el sentido de la restringida sociedad del aula) y también la limitación didáctica de la enseñanza semántica de las letras, en la que se reitera el D.C.B., confundiendo tal vez **aprendizaje significativo del Álgebra por aprendizaje interpretativo, o, dicho negativamente, tomando como aprendizaje reiterativo el aprendizaje inteligente de reglas sintácticas,** pueden explicar alguna de las tareas algebraicas con mayor índice de fallos, singularmente semejante en distintos niveles y cursos, propuestas en los test de Álgebra de C.S.M.S. de análisis de las dificultades en el aprendizaje del Álgebra escolar y aplicados en algunos centros educativos de nuestro país por la profesora C. Da Veiga: son aquellas tareas que podríamos denominar de **obtención de consecuencias de ligaduras.** Ejemplos de estas tareas son: si $P=R+S-T$, ¿$S-T=$? ¿$P-R=$? O, si $A+B=C$ y $D-B=E$ entonces ¿$A+D=$? Y, ¿$A+3D=$? Otro ejemplo podría ser el siguiente: si

$$2a+1=5a+7$$
$$5a+7=3a+1$$

entonces ¿$2a+1=$?

Ante estas tareas no habituales, y por tanto más difíciles de acomodar a los modelos estandarizados de la escuela, los alumnos se enfrentan con la necesidad de decidir el significado de las igualdades y letras de las ligaduras algebraicas que tienen como dato; y además deben dirimir sobre las consecuencias de adoptar uno u otro esquema conceptual a la hora de buscar las soluciones, las expresiones más pertinentes a la derecha del símbolo = en la fórmula entre interrogaciones. En el primer ejemplo, $P=R+S-T$ podría indicar una relación de carácter funcional, en la que P resulta ser una función de las variables R, S y T. En este caso sólo cabe pensar que S, T es igual a S-T, puesto que ninguna relación debe ligar a las variables independientes de una función; mientras que P-R sería igual a $(R+S-T)-R=S-T$. La interpretación funcional choca, sin embargo, con la siguiente tarea, en la que A y D no aparecen como funciones explícitas de las restantes variables. Cabe, entonces, interpretar ecuacional-mente las expresiones $A+B=C$ y $D-B=E$, entendiendo que A, B, C, D y E representan números verificando las ecuaciones dadas y por tanto $A=C-B$ y $D=E+B$ (tomando A y D como incógnitas y despejando). Así $A+D=(C-B)+(E+B)=C+E$. Puede pensarse que la distinción entre interpretación ecuacional y funcional es un tanto artificiosa, en definitiva toda expresión funcional $y=f(x)$ puede considerarse trivialmente como una ecuación $y-f(x)=0$; recíproco, pero no trivialmente, toda ecuación induce implícitamente cierta o ciertas funciones y esta misma consideración podría extenderse, con un análisis bastante delicado, al caso de un sistema de ecuaciones[2]. De la dificultad matemática del concepto de descripción implícita de una o unas funciones por un sistema de ecuaciones podemos deducir la radical diferencia de los esquemas conceptuales usados, según se elija una u otra aproximación a la tarea escolar propuesta. Cabe, sin duda, una reducción trivial del caso funcional al ecuacional, como señalamos arriba. Pero ciertamente el considerar toda expresión de igualdad algebraica como una ecuación entre ciertas incógnitas acarrea notables complicaciones. Por ejemplo, es cierto, desde una perspectiva ecuacional sobre los enteros, que si $x^4=y^4$ entonces $x^2=y^2$; (y posiblemente (si se verifica el gran teorema de Fermat), sobre los racionales, $x^n+y^n=1$ implica $x.y=0$). Pero, obviamente, el esquema conceptual ecuacional para deducir estas consecuencias de las ligaduras algebraicas es fundamentalmente distinto del que usamos para resolver las tareas escolares antes mencionadas, la diferencia no radica en la mayor complejidad de estos ejemplos, cuyas soluciones dependen de la aritmética de cierto cuerpo, sino en que, para las tareas escolares, **implícitamente,** estamos considerando que la solución debe venir dada por una especie de **manipulación abstracta de las ligaduras dadas,** sin la intervención de otro dominio aritmético que el generado por los propios coeficientes de las expresiones: es decir, estamos real-

[2] Curiosamente, el profesor Freudenthal, en la obra ya citada, aboga, coherentemente con su propuesta de aproximación al álgebra vía funciones, por la introducción de las funciones definidas implícitamente a través de ecuaciones: "give a fresh chance to the natural operations with implicitly given functions..." Desafortunadamente, esta propuesta no es desarrollada con detalle.

mente requiriendo una interpretación sintáctica de las letras, aunque choque con los postulados didácticos actuales. Por manipulación abstracta entendemos la existencia de unas reglas automáticas de tratamiento de las ligaduras que conduzcan a la resolución, en todos los casos, de todas las ligaduras que son consecuencia de otras dadas.

Para ejemplificar este punto de vista consideremos la última tarea propuesta arriba: si

$$2a+1=5a+7$$
$$5a+7=3a+1$$

entonces ¿2a+1= ?

Una aproximación desde una perspectiva ecuacional no arrojaría ninguna respuesta coherente, ya que despejando "a" en la primera ecuación tendríamos a=-2, luego 2a+1 sería -3; pero el resultado sería distinto si despejáramos "a" en la segunda ecuación. Sin embargo, desde la óptica de una manipulación abstracta (que en este ejemplo puede considerarse como sinónimo del método de eliminación de Gauss) las ligaduras dadas se transforman, primero, en las ligaduras

$$-3a-6=0$$
$$2a+6=0$$

y, luego, en un sistema triangular eliminando la letra "a" de la segunda ecuación

$$-3a-6=0$$
$$\text{**}$$
$$2.(-6) - (-3) = 0$$

es decir, finalmente, el sistema original se convierte en:

$$-3a-6=0$$
$$\text{**}$$
$$6=0$$

lo que implica automáticamente que cualquier expresión en "a" puede ser obtenida como una combinación de las dos ligaduras en las que hemos transformado las dadas por la secuencia de reglas: 1) agrupar todos los términos a un lado del signo igual, 2) eliminar en la segunda ligadura la letra "a". Así 2a+1 es **igual** a cualquier expresión, por ejemplo $2a+1 = 3a^2-9$, en el sentido **sintáctico** de que $(2a+1)-(3a^2-9)$ puede ser considerado como una combinación de las ligaduras que aparecen en **. Así $(2a+1)-(3a^2-9)=0.(-3a-6)++(1/6).(2a+1-3a^2+9).(6)$. La argumentación seguida contiene, sin duda, numerosos puntos oscuros, en particular el concepto o esquema mental de manipulación algebraica, sobre el que volveremos más adelante al inter-relacionar Álgebra escolar y Cálculo Simbólico Automático, pero sí creemos que pone de manifiesto alguna de las dificultades básicas de la enseñanza del Álgebra: curiosamente, el ítem del cuestionario de Da Veiga con mayor número de contestaciones inconsistentes (ya que no puede hablarse de contestaciones erróneas, por la propia naturaleza de la cuestión planteada) es el que hemos ana-lizado en último lugar y con mayor detalle. Podría esgrimirse que concedemos una excesiva importancia a la clarificación de determinados esquemas conceptuales que muestran sus limitaciones o contradicciones en tareas más complejas que las que habitualmente ocupan a los escolares, siendo, por el contrario, totalmente adecuados para el nivel de los ejercicios que deben realizar estos; y también puede argumentarse que la consolidación de unos esquemas imperfectos y aún erróneos (por ejemplo, la sola interpretación funcional o ecuacional de las expresiones algebraicas) es una etapa necesaria para el aprendizaje posterior de esquemas más refinados. Ambos argumentos entran de lleno en un debate sobre propuestas concretas en el que, como ya hemos indicado, no parece oportuno que el autor se pronuncie, por su desconocimiento del tema. Pero no cabe duda de que tales problemas deben de estar presentes en el profesorado que ha de enseñar el Álgebra en la escuela y en el B.U.P. Es ciertamente muy difícil, en la enseñanza superior, reubicar unos conceptos que se refieren a aspectos básicos del aprendizaje del Álgebra y que han sido cimentados en los niveles inferiores de la enseñanza...

Aún otra situación en la que los esquemas conceptuales funcionales o ecuacionales plantean dificultades es la relativa a la manipulación de fracciones algebraicas, como cuando se pide que el alumno racionalice.

$$\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}$$

En este contexto, la obtención de otra fracción algebraica *igual* a la dada, por ejemplo

$$\frac{1-\sqrt{x-1}}{2-x}$$

no puede interpretarse desde la consideración de las letras como variables de una función, puesto que el reemplazamiento x=2 tiene sentido en la primera fracción pero no en la segunda (a no ser que se le asigne en ese caso el valor de la primera; pero este recurso habitual implícitamente hace uso de la igualdad entre ambas fracciones, con lo que estamos en el punto de partida, ¿por qué son iguales?, o entramos en consideraciones sobre continuidad, que ciertamente no deberían formar parte de los esquemas conceptuales precisos para la comprensión del Álgebra escolar). Algo similar ocurre en las tareas sencillas de simplificación de fracciones como $(x^3y-y^3x)/(x^2y-y^2x)$ equivalente a x+y; o en los casos de división de polinomios con coeficientes literales, $(x^2+bx)/(ax+c)$, cuya expresión formal del cociente y el resto incluye denominadores con potencias de "a" y no son, por tanto, válidas para todos los valores de esa variable o parámetro. En todos estos casos parece que un esquema conceptual de tipo manipulación sintáctica de los símbolos interpreta más adecuadamente las tareas a realizar.

Pero aún debemos señalar en este epígrafe una última dificultad del Álgebra escolar que el D.C.B. no analiza suficientemente. Ya hemos apuntado anteriormente que el relativo éxito de los alumnos en la realización de determinados ejercicios de la clase de Álgebra se produce, antes que por una comprensión racional de lo demandado en los mismos, por una extraordinaria acomodación social (lo que a *priori* no debe desdeñarse como recurso didáctico). Un ejemplo notable de este hecho es la **ruptura decimal** que conlleva la operatoria con radicales sin la extracción de los mismos cuando la raíz no es exacta.

Así, cuando leemos en algunos ejercicios escolares algo como "simplifica la expresión"

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

no resulta fácil imaginar qué esquemas conceptuales han sido elaborados en la mente del alumno que identifica, velozmente, como "simplificación" la racionalización de esta fracción, en vez de tomar su calculadora y contestar 0, xxxxxx (máxime cuando, como en este caso, la racionalización conlleva ocho sumandos en el numerador, cada uno de los cuales implica varios productos de raíces de dos, tres, cinco o siete).

Dejando a un lado la caricaturización de este tipo de prácticas escolares abusivas, no cabe duda que la utilización no decimal de ciertos números en Álgebra, por razones bien distintas y aún opuestas a las del afán simplificador, exige, en mi opinión, dos acciones en la enseñanza elemental. La primera es la explicación (por vía de ejemplos como los que hemos señalado en el apartado de este trabajo dedicado a la presentación del Cálculo Simbólico Automático) de los motivos por los que en Álgebra la representación y manipulación numérica es esencialmente finita, por ejemplo $\sqrt{5}$ es una estupenda forma algebraica para representar al número positivo cuyo cuadrado es 5; asimismo sabemos que $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ no es cero pues el cuadrado de la primera raíz no coincide con el cuadrado de la segunda, una forma bastante sencilla de hacer aritmética con estos números no decimales. La segunda es la construcción del esquema mental que corresponde a este concepto de número, y a su aritmética. Tal vez esta propuesta, implícita cuando enseñamos a los niños a decidir a través de manipulaciones no decimales que

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

choque con dos objeciones iniciales: las tendencias didácticas actuales, muy presentes en el D.C.B., convergentes mayoritariamente hacia la utilización, en el estilo del cálculo numérico, del concepto de aproximación; y la ignorancia sobre cómo desarrollar sistemáticamente el modo de representación numérica que hemos esbozado. Sobre ambas objeciones nos extenderemos en otros apartados de este trabajo.

Ahora bien, a esta descripción somera de algunos problemas didácticos de la enseñanza del álgebra escolar a los que el D.C.B. no aporta, en mi opinión, la atención debida o no opta por enfoque más adecuado, debe añadirse otra serie de objeciones que se refieren a las actitudes y los valores que predominan en la disciplina algebraica. Así el álgebra se distingue por su carácter de lenguaje, con reglas para la formación y deducción de sentencias, que aprehende con exactitud una parte de la realidad modelada matemáticamente; y es precisamente la validez automática de las operaciones realizadas siguiendo correctamente tales reglas lo que confiere ventajas al lenguaje, no es necesario verificar la validez de las interpretaciones en cada paso. Sin embargo, en el marco del D.C.B. la situación de la enseñanza del álgebra escolar resulta aparentemente contradictoria, al enmarcarse en un diseño curricular que implícitamente o explícitamente opta por rechazar la enseñanza desnuda de un lenguaje, pero que establece, en general, los contenidos y actividades de modo que dependen en gran medida de este lenguaje. Aclaremos esta afirmación. Es evidente que nuestro conocimiento de los distintos procesos de aprendizaje tiene, en la actualidad, un papel esencial en la organización del curriculum, llegando al extremo, en el D.C.B., de suscitar la oportunidad de informar a los alumnos sobre su propio proceso de aprendizaje y sobre el estadio en el que pudieran encontrarse y las dificultades características del mismo. Sin embargo es poco lo que se conoce sobre los procesos de aprendizaje en álgebra y aún menos sobre la forma de enseñar o favorecer tales procesos. La prioridad que se asigna en el mismo documento a la **trasmisión oral o al trabajo manual (no escrito), o al cálculo mental y a la estimación** como mecanismos importantes para la exploración matemática de la realidad, en la etapa primaria; la **valoración terminal** de los conocimientos, en la etapa secundaria y primaria; el enfoque **empírico inductivo**, la insistencia en la **comprensión conceptual frente a la manipulación automática**; la búsqueda de alternativas pedagógicas recomendadas para hacer frente a los problemas derivados de la existencia de bloques de conocimiento "atractivos" o motivadores que, sin embargo, dependen jerárquicamente de otros de carácter básico y por ende -como ocurre en general a los lenguajes- áridos; **los entronques globalizadores y motivadores en la** enseñanza de los distintos aspectos de las matemáticas; todos estos datos apuntan las dificultades de la inserción del álgebra en las nuevas tendencias curriculares (puesto que el Diseño Curricular Base no es sino una opción en la línea propugnada por la mayoría de los pedagogos y educadores actuales). Sustituir el carácter predominantemente **escri-**

tendencias curriculares (puesto que el Diseño Curricular Base no es sino una opción en la línea propugnada por la mayoría de los pedagogos y educadores actuales). Sustituir el carácter predominantemente **escri-**

to del álgebra, su búsqueda de soluciones mediante manipulaciones exactas de los coeficientes, modificar su papel como **lenguaje instrumental y no terminal para la** formulación y manipulación deductiva de propiedades, reemplazar los hábitos de ejercitar al alumno en la adquisición de **habilidades meramente técnicas** (destrezas) por otros que enfaticen el carácter conceptual de las manipulaciones, entroncar con problemas motivadores y procedentes de otras áreas de conocimiento la **rutina necesaria en** la adquisición de las bases de un lenguaje, parece un esfuerzo tan desmesurado que exige realmente una reflexión sobre la necesidad de realizarlo. Tal vez una conclusión más aceptable sería la limitación y reducción de los aspectos algebraicos en la enseñanza escolar... por coherencia didáctica.

En contradicción con este primer análisis, observamos, desde una óptica un tanto amplia, que en el curriculum de contenidos conceptuales o procedimentales que propone el Diseño Curricular Base (y que no es extremadamente diverso del actual) todo lo que no es pura aritmética es álgebra o se sustenta en ella, por lo que esta materia se encuentra extraordinariamente representada. En efecto, la desaparición del concepto de límite en diversas situaciones, impartido hoy en segundo curso de bachillerato, que se correspondería con el último curso de la enseñanza secundaria obligatoria, reduce los contenidos propuestos en toda la enseñanza obligatoria a una matemática discreta, cuyo

Así este aparece en la descripción de las medidas de cuerpos y figuras geométricos, en la interpretación y análisis de gráficas y fenómenos aleatorios, en el estudio de las probabilidades, en la formulación de algunos principios de la geometría (teoremas, movimientos de figuras), en los algoritmos numéricos de esti-

análisis de gráficas y fenómenos aleatorios, en el estudio de las probabilidades, en la formulación de algunos principios de la geometría (teoremas, movimientos de figuras), en los algoritmos numéricos de esti-

mación de raíces.... Además, una corriente de opinión cada vez más extendida aboga por equilibrar, al menos, el carácter formativo de las matemáticas con una componente utilitaria, que dote a los alumnos con un cierto “know-how” frente a las necesidades de adaptación a un mundo con una creciente componente tecnológica. Esta componente útil implica, sin duda, no sólo el aprendizaje de los esquemas conceptuales adecuados sino también el dominio de los mecanismos pertinentes de manipulación procedimental de la representación técnica de esa realidad... es decir, la destreza necesaria para abordar y operar sobre los problemas con un lenguaje y unas reglas y estrategias efectivas. Volvemos, pues, al punto de partida: la necesidad curricular de incidir en aquellos aspectos que desde un punto de vista cognitivo o pedagógico nos parecen menos convenientes si se asumen los principios que se explicitan en el D.C.B.

Naturalmente este dilema, aunque tal vez planteado menos groseramente, no escapa a los ojos de numerosos especialistas en didáctica de las matemáticas. Las medidas adoptadas para resolverlo han pasado en épocas pretéritas por inclinar a ultranza la balanza en favor de la enseñanza desnuda del formalismo algebraico, vertiendo todos los esfuerzos en la búsqueda de fórmulas magistrales didácticas que permitieran tal enseñanza a la población escolar. Hoy, más atinadamente, se intentan paliar las dificultades inherentes al dilema mediante la adop-

de los llamados “excesos” del lenguaje algebraico: el lenguaje algebraico como punto de llegada, a través de la comprensión conceptual de sus principios, obtenida por la manipulación de objetos aritméticos, eliminación de los ejercicios repetitivos no significativos, necesidad de motivar las tareas de simplificación o

de la comprensión conceptual de sus principios, obtenida por la manipulación de objetos aritméticos, eliminación de los ejercicios repetitivos no significativos, necesidad de motivar las tareas de simplificación o

resolución algebraica, búsqueda de métodos de estimación (algoritmos) frente a la deducción de fórmulas de extracción de raíces. Ciertamente no se indica nunca cómo ese menor trabajo de adquisición de destrezas no acabará resultando en una menor destreza en la utilización “significativa” requerida del lenguaje!

Una respuesta, en cierto sentido, lo constituye el que el curriculum que se debate en estos días está parcialmente basado en ese artefacto llamado calculadora: gracias a su existencia se proponen mecanismos de estimación y de análisis y de aproximación y de representación gráfica donde antes sólo era rentable, didácticamente hablando, el mero cálculo algebraico. Ciertamente el cálculo numérico ha existido siempre, pero era pedagógicamente irrelevante como consecuencia de la penosidad de sus métodos, realizados manualmente. El “descubrimiento curricular” de la calculadora ha precisado, tal vez, una quincena de años de trabajos semiclandestinos de naturaleza didáctica para que ahora adquiera ese papel predominante. La crítica a esta vía de resolución parcial del dilema que supone la enseñanza del álgebra en la escuela es, sin duda, la diferencia de velocidad (obligada) entre los ritmos de cambio tecnológico y de cambio curricular. Apoyarse sobre un artefacto que puede estar ya desplazado como herramienta didáctica puede llevarnos a una situación similar a la de un curriculum que hace años tenía serios prejuicios para adaptarlo. ¿Por qué enfatizar el interés diciones de ecuaciones, cuando muchas calculadoras avanzadas ya poseen una tecla que resuelve las mismas? ¿Qué alumno con una calculadora que posea esta opción va a encontrar motivadora la estimación de unas raíces o el aprendizaje de los métodos de resolución de las ecuaciones de primer grado? Desechado del curriculum el concepto de límite y por ende los números reales no algebraicos, ¿dónde quedará la justificación del predominio didáctico del sistema decimal frente a la representación fraccionaria de los números si las calculadoras comienzan ya a ser capaces de realizar cálculos con estas fracciones y aún con números radicales, sin redondeo? Naturalmente esto significará que las **fracciones** decimales y las de pequeño denominador (pero **no cualquier número decimal**, lo que implica un cambio en el énfasis didáctico) adquieren un papel relevante, pero no sólo por razones didácticas, sino de utilidad en la vida adulta. ¿Para qué esforzarse en arribar al lenguaje algebraico, con sus reglas tantas veces aparentemente contradictorias con el lenguaje aritmético, como punto de llegada de un largo proceso de comprensión de las bases de estas reglas cuando poseemos ya instrumentos de cálculo que adecúan nuestras expresiones no canónicas a la formulación correcta? Si la calculadora respondiera que (3+n)* 5 es 15+5*n, en vez de 35+n ó cualquier otra expresión errónea, ¿cómo y para qué motivar al alumno al descubrimiento significativo de una regla distributiva entre números y letras que él domina ya en el caso puramente numérico? Y por otra parte? ¿Qué razones podrían esgrimirse para obviar la inclusión de partes más avanzadas del álgebra, como la manipulación de polinomios o de expresiones con radicales, en el nivel obligatorio, si las mismas fueran realizadas, frente a la complejidad actual, mediante simples órdenes a las calculadoras? En resumen, las propuestas curriculares que basan hoy una reducción de los contenidos de lenguaje algebraico en el curriculum en la aridez de las manipulaciones y en la falta de motivación de las mismas, proponiendo vías de alternativa basadas en el uso de calculadoras como fuente de recursos para el aprendizaje de las matemáticas numéricas, deberán ir un paso más allá y concebir una situación inmediata en la que las mismas calculadoras avanzadas son una fuente de recursos de aprendizaje del lenguaje algebraico y en la que, en consecuencia, su enseñanza pueda recibir el impulso que demandan los otros contenidos de la enseñanza escolar.

Sin embargo, obviadas las dificultades mecánicas, quedará por hacer la tarea de desarrollar, como se ha hecho antaño en el caso de las calculadoras numéricas, las situaciones de verdadera relevancia didáctica, la búsqueda de estrategias y problemas motivadores, el análisis de los mecanismos de aprendizaje y enseñanza, la determinación de los auténticos esquemas cognitivos involucrados en el uso de estas herramientas.

El álgebra escolar desde la perspectiva del cálculo simbólico automático

Como hemos señalado en la introducción, tal vez la aplicación más inmediata del Cálculo Simbólico Automático en la clase de Álgebra sea la utilización de alguno de los sistemas que desarrollan estos programas como mero **ejecutor** de tareas técnicas. Incluso en este sencillo modo de empleo se presenta una doble vía didáctica: limitando al ordenador a actuar como una "pizarra o encerado electrónico", bajo el control rígido del profesor, o dejando a los alumnos interactuar con el ordenador, explorando las posibilidades de la máquina para la resolución de los ejercicios o la búsqueda de ejemplos y modelos. Como ocurrió en las fases introductorias de la calculadora de bolsillo en la escuela, parece, a primera vista, que la herramienta informática "escupe" simplemente las respuestas que precisan los alumnos a las preguntas que estos les plantean. Afortunada o desafortunadamente esto no es así de simple. Por ejemplo, el sentido de la simplificación de una expresión no tiene por qué coincidir para el alumno y para el programa de cálculo simbólico, lo que obliga a manipular este para obtener la solución requerida; una cierta expresión puede ser cero pero no ser reconocida como tal por el ordenador a menos que se le den algunas instrucciones complementarias; el orden en el que se introducen las instrucciones no tiene por qué ser necesariamente el correspondiente a la expresión verbal de las mismas, etc. En todo caso, y a la espera de que la generalización del conocimiento de los programas de Cálculo Simbólico entre el profesorado conduzca al desarrollo de metodologías activas de uso del mismo en la clase de álgebra, conviene recordar que su mera existencia obliga a plantearse "que es cada vez más difícil justificar el tratar de enseñar a los alumnos a ser buenos manipuladores de símbolos, salvo que pueda demostrarse, lo que no ha hecho nadie todavía, que tales habilidades se requieren para desarrollar la comprensión de las matemáticas subyacentes a tales manipulaciones, cualquiera que fuere el nivel de comprensión deseado" (traducción de parte del Apéndice "Symbolic Mathematical Systems" del documento "An aid for teaching and learning" en el Simposio "The influence of Computers and Informatics on Mathemathics and its teaching" Howson- Kahane ed. Estrasburgo 1985). Por el contrario, el uso de los programas de Cálculo Simbólico sí podría contribuir a esa comprensión de las matemáticas involucradas en los cálculos, al eliminar lo que tienen de automático y al potenciar, por consiguiente, la capacidad de manipulación inteligente. Tal vez el verdadero problema, como hemos apuntado antes, radica en la búsqueda de auténticas actividades inteligentes (y que ya hemos visto en las tareas de Da Veiga que pueden encontrarse sin recurrir a la interpretación semántica) en la clase de álgebra, que reemplacen los aspectos puramente operatorios (aunque los mismos se realicen sobre símbolos con interpretación).

En cierto sentido la propia elaboración de los programas de Cálculo Simbólico supone la búsqueda de esos verdaderos aspectos conceptuales del Álgebra, algo así como enseñarle el Álgebra básica al ordenador, infinitamente menos inteligente que cualquiera de nuestros alumnos. ¿Cuáles son los objetos matemáticos que deseamos manipular en Álgebra? ¿Tenemos una (o varias) formas "normales"[3] de representarlos? ¿Sabemos llevar cada objeto a su forma normal, o a una de ellas previamente establecida? Las formas normales ¿son únicas? ¿Podemos hablar del tamaño de una forma normal y acotar el tamaño del resultado de operar formas normales de un tamaño dado? Por ejemplo, es bien sabido por los escolares que el grado de un producto de dos polinomios es la suma de los grados de los polinomios. ¿Qué ocurre si tomamos como tamaño de un polinomio el número de monomios no nulos, en vez del grado? Extiéndase esta cuestión al máximo común divisor de dos polinomios, tratando de encontrar el número máximo de términos de este en función del número de términos de los polinomios dados y estaremos ante un problema nada trivial. Otros problemas no triviales se encuentran si deseamos buscar una forma normal para representar expresiones algebraicas con radicales (tan sencillos como $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{3}$). Ya hemos señalado en otro lugar lo escasamente sencilla que puede resultar la operación de quitar radicales de un denominador; es posible, en todo caso, contemplar la racionalización de estas expresiones como un procedimiento de búsqueda de formas canónicas i.e. de representar unívocamente cada número definido por medio de radicales. Esto es exactamente lo que solicitamos a los alumnos, también, cuando pedimos que "simplifiquen"

$$5\sqrt{2}-3\sqrt{50}+7\sqrt{288}=74\sqrt{2}$$

Estas tareas se realizan en las clases de Álgebra desde una laxitud conceptual, que no puede ser tolerada desde la perspectiva del Cálculo Simbólico, entre **equivalencia de expresiones algebraicas** (como las dos expresiones con radicales del ejemplo de arriba, unidas por un símbolo de igualdad que es realmente el signo de una equivalencia dada por la coincidencia del valor numérico de ambas expresiones), **criterios de simplificación, y simplificación canónica.** Dado un cierto criterio de simplicidad (por ejemplo, tener menos radicales o tener los radicandos mas pequeños) y suponiendo que tengamos un procedimiento para aumentar, en cada paso de aplicación del mismo, la simplicidad de una expresión, cabe aún que la reiteración de este procedimiento no conduzca a un resultado único, a una representación de simplicidad canónica. Por ejemplo $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$ podría considerarse como una expresión para la que las reglas escolares usuales de simplificación no producen ninguna otra expresión equivalente más sencilla. Sin embargo, descompuesta de la forma

$$\sqrt{1^2+2.\ 1.2\sqrt{2}+22.(\sqrt{2})2}$$

se observa que realmente $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=1+2\sqrt{2}$. Así pues, podríamos decir que los procedimientos de simplificación que suelen enseñarse a los alumnos no conducen, en general, a formas canónicas (una consecuencia "práctica" sería que dos alumnos pueden llegar a obtener soluciones distintas del mismo problema de simplificación). Nótese que, sin embargo, la determinación de la equivalencia entre las dos expresiones radicales es muy sencilla y no descansa sobre el cálculo aproximado de las raíces sino que basta obtener los cuadrados de las mismas (en general, la existencia de un método exacto y computacional para decidir la equivalencia entre expresiones implica la existencia de otro, que no viene al caso, por su carácter algorítmico pero ineficiente, para construir un simplificador canónico, en este ejemplo, para las expresiones radicales). La dificultad, aún no resuelta satisfactoriamente en el Cálculo Simbólico, de obtener un algoritmo práctico de simplificación canónica para estas expresiones explica, tal vez, que no se puedan enseñar a nuestros alumnos un conjunto de reglas de simplificación mejores; pero creemos que incluso esas reglas parcialmente operativas deberían enseñarse en un contexto de mayor matización conceptual, que haga referencia a los tres aspectos involucrados en el problema, a los que hemos hecho referencia arriba en negrita.

[3] Aquí, y en las líneas siguientes, las palabras "forma normal" no se emplean en sentido técnico, como una debilitación del concepto de forma canónica, sino como un sinónimo de forma elegida usualmente por el profesor....

Además, buena parte de las dificultades mencionadas tienen su origen en la relación entre radicales y polinomios mínimos de números algebraicos, un tema de gran riqueza manipulativa que, sin adentrarse en la jungla terminológica, podría ser explorado en el Álgebra escolar como sustitutivo a los ejercicios rutinarios: hallar un polinomio que tenga como raíz $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; hallar un polinomio que tenga como raíz $1+2\sqrt{2}$ ó $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$, que no es lo mismo... Sentarse ante un ordenador personal con un programa de Cálculo Simbólico Automático e intentar "ayudar" a la máquina a simplificar radicales puede convertirse en un ejercicio apasionante.

La situación planteada arriba no es un hecho aislado. Se repite cuando se trabaja con fracciones racionales (cocientes de polinomios en una o más variables). Aquí los alumnos también se acostumbran a simplificar, lo que lleva aparejado en el contexto escolar, aunque no explícitamente, la búsqueda de formas canónicas. En este caso se produce, a veces, una identificación, en la ejecución de las tareas asignadas a los alumnos, entre simplificar una fracción y factorizar el numerador y el denominador, para luego eliminar aquellos factores comunes. De nuevo, desde el punto de vista del Cálculo Simbólico, tal identificación es peligrosa, si queremos enseñarle al ordenador a simplificar cualquier fracción, pues reduce un problema de moderada dificultad (la eliminación de factores comunes vía el máximo común divisor) a un problema mucho más difícil, como es el de la factorización. Enfatizar el papel del algoritmo del máximo común divisor es, quizás, una de las posibles aportaciones temáticas del Cálculo Simbólico al Álgebra escolar. Piénsese, para mencionar otro ejemplo, en la posibilidad de obtener, usando este mismo algoritmo con una pequeña variación, la parte "libre de cuadrados" de un polinomio dado p(x); es decir, de hallar una familia de polinomios $p_i(x)$ tales que $p(x)=\prod p_i(x)^i$, siendo cada P_i el producto de todos los factores de p(x) de multiplicidad i. Por ejemplo, si p(x) es $(x-1).(x-2).(x-3)^2.(x-4)^2.(x-5)^3$ entonces $p_1(x)=(x-1).(x-2)$, $p_2(x)=(x-3)$ y $p_3(X)=(x-5)$. No es preciso factorizar ni, naturalmente, calcular las raíces. Sólo hace falta la noción, formal, de derivada de un polinomio; junto con la propiedad que relaciona las raíces múltiples de un polinomio y las raíces de su derivada.

De nuevo, las dificultades conceptuales que rodean a la simplificación aparecen en un tercer grupo de tareas escolares a las que ya hemos hecho referencia antes. Se trata de la obtención de consecuencias de ligaduras algebraicas. Desde este punto de vista se trata de encontrar, a partir de las reglas dadas por las ligaduras algebraicas (como A+B=C y D-B=E), la representación más simple, canónica, de las consecuencias que se pidan (como A+D= ó A+3D=). Ejemplos no triviales aparecen cuando se calcula formalmente el valor del cos(a+b) a partir de la fórmula del sen(a+b) y de las relaciones conocidas $sen(a)^2+cos(a)^2=1$ y la análoga para el ángulo b. Si llamamos x_1=sen(a); y_1=cos(a); x_2=sen(b); y_2=cos(b); z=sen(a+b); y se tiene

$$x_1^2+y_1^2=1$$
$$x_2^2+y_2^2=1$$
$$x_1y_2+y_1x_2=z$$

entonces $1-z^2=$? La respuesta deseada es, naturalmente, $(y_1y_2-x_1x_2)^2$. Ninguna propiedad trascendente del seno o del coseno interviene en la obtención de esta consecuencia de las ligaduras algebraicas establecidas por las tres ecuaciones. La manipulación habitual, con las variante personales, procede elevando z al cuadrado en la forma dada por la última expresión, y obteniendo así lo siguiente $1-z^2$; luego en la fórmula resultante se reemplaza x_1^2 por el valor indicado en la primera ligadura y análogamente para y_1^2; eliminando los paréntesis se obtiene una nueva expresión en la que aparece $1-x_2^2-y_2^2$ que se reduce a cero mediante la segunda ligadura. Finalmente obtenemos el cuadrado buscado. Este mecanismo de manipulación algebraica puede generalizarse algorítmicamente con cualesquiera ligaduras algebraicas y consecuencias fijadas: se trata, groseramente hablando, de elegir el orden en el que las distintas variables, que aparecen en la consecuencia, van a ir siendo sustituidas por el resultado de "despejarlas" en las expresiones de ligadura dadas. Al llegar finalmente a una fórmula que no admite más sustituciones porque sus monomios no contienen ninguna variable que pueda despejarse, como ocurre en $(y_1y_2-x_1x_2)$ al no aparecer ningún cuadrado de las cuatro variables, se afirma que esta fórmula es insimplificable y que hemos llegado a la forma normal de la consecuencia pedida. Nótese que la operación de despejar que usamos en este contexto se reduce a la realización de restas y productos, eliminando cualquier extracción de raíces. Por ejemplo, si en una ligadura aparece $x^3y-y^2=0$ mientras que en la consecuencia tenemos x^4y, el significado de "despejar" sería el reemplazamiento de este último monomio por xy^2, si la variable x se considera antes que la y. No es pertinente el detallar aquí, formalmente, el sencillo mecanismo de manipulación algebraica que puede verse, además de en la bibliografía referida al comienzo de este trabajo, en el artículo de la revista "L'Enseignement Mathematique" (órgano oficial de la Comisión Internacional de la Enseñanza Matemática) "The theory of Grobner Basis" por Pauer y Pfeinhofer (tomo 34, 1988). Pero sí es oportuno señalar que este algoritmo conduce a una consideración conceptual de las igualdades entre expresiones algebraicas como reglas sintácticas de reescritura, al margen de las interpretaciones funcional o ecuacional, de modo que la obtención de consecuencias resulta fundamentalmente un proceso de reescribir las mismas usando las reglas dadas por las ligaduras. Este esquema conceptual parece resolver las dificultades que hemos mencionado en el epígrafe anterior y, aunque choca con las tendencias didácticas de carácter semántico (las letras deben significar algo, las igualdades deben considerarse en un campo de validez para las variables que las componen), entendemos que puede estar más cerca de la verdadera construcción mental que se elabora en la enseñanza del Álgebra escolar. Algunas investigaciones didácticas en esta línea podrían aclarar la validez de este punto. Naturalmente, no tratamos de señalar como nueva línea de contenidos del álgebra elemental la enseñanza rigurosa de las reglas de simplificación canónica relativa a una fase de un ideal de polinomios, que es la terminología técnica para lo que hemos llamado manipulación algebraica de ligaduras, sino apuntar que la existencia de este esquema conceptual demanda cierta atención por parte del profesorado para desarrollar versiones informales del mismo, adaptadas a las exigencias del nivel no universitario. En particular parece que debería señalarse que ciertas ligaduras algebraicas no conducen a la obtención de consecuencias expresables canónicamente, como el par

$$2a+1=5a+7$$
$$5a+7=3a+1$$

pero que siempre es posible obtener algorítmicamente nuevas ligaduras a partir de las dadas, de un modo similar a como obtuvimos en el epígrafe anterior el par

$$-3a-6=0$$
$$6=0$$

en las que las reglas de reescritura conducen a una forma canónica (cero en este caso para cualquier consecuencia; y por tanto cualquier expresión es una forma, no canónica- de consecuencia de 2a+1=). Debe señalarse que las versiones más recientes de la mayoría de los programas de Cálculo Simbólico que hemos mencionado incorporan instrucciones que ejecutan tanto el refinamiento de las ligaduras algebraicas como la obtención de formas canónicas de consecuencias. Es así como hemos analizado el comportamiento del ordenador en la realización del mismo test que Da Veiga empleó para medir las dificultades escolares en Álgebra; ciertamente los items con mayor dificultad para los alumnos fueron también aquellos en los que la "traducción" en términos del lenguaje, más formal, del ordenador conllevó mas esfuerzo por nuestra o su parte.

Pero hemos mencionado en la introducción un tercer aspecto a la hora de plantear la perspectiva del Álgebra escolar desde el Cálculo Simbólico. Herramienta, análisis conceptual de contenidos y tareas propios del Álgebra, y, en último lugar, consideración de otros avances de carácter teórico que son una consecuencia del Cálculo Simbólico y que suponen una reflexión en áreas de interés didáctico como la enseñanza de la Geometría y de los sistemas de números. Para nosotros la diferencia fundamental, entre los dos primeros aspectos comentados y este último que iniciamos, radica en los términos temporales de su aplicación didáctica, más próxima para aquellos y más lejana para este. Dejando a un lado los detalles técnicos, que pueden consultarse en la reciente obra de S.S.Chou "Mechanical Geometry Theorem Proving" (D. Reidel Pub. Co. 1988), podemos decir que en la actualidad existen varios programas que pueden probar la veracidad o falsedad de una gran cantidad de teoremas de la Geometría euclídea (incluyendo la mayoría de aquellos que suelen plantearse en todos los niveles de enseñanza) en unos pocos segundos de trabajo con un ordenador de tamaño medio; además tales programas suelen, en el caso de que el teorema planteado sea falso, exhibir las hipótesis necesarias para que sea cierto. Estos programas no son demostradores lógicos sino que operan mediante la traducción de las hipótesis y tesis a términos de ecuaciones algebraicas, introduciendo un sistema de referencia cartesiano, de modo que la verdad o falsedad del teorema equivale a verificar si las ecuaciones de las tesis son una consecuencia de las ecua-ciones que describen las hipótesis. Insistimos en el carácter absolutamente no matizado de todas estas afirmaciones, en aras de la claridad. Como ya puede comprenderse, los programas de Cálculo Simbólico que hemos mencionado antes, de manipulación algebraica, sirven para resolver esta versión algebrizada de la Geometría Euclídea. La obra de Chou contiene una impresionante cantidad de ejemplos desarrollados por medio del ordenador; alguno de los cuales corresponden a teoremas desconocidos y conjeturados antes de su resolución por Chou. Desde nuestro punto de vista esta situación debe conducir al planteamiento de la siguiente reflexión: además de desarrollar en los alumnos (de cualquier nivel) ciertas destrezas, visión, capacidad de razonamiento y comprensión, para que sean capaces de crear sus propios métodos de planteamiento y resolución de los problemas que se le presenten, en el área de la ciencia que corresponda, la enseñanza ¿no debería verse afectada, sesgada, influida, (úsese aquí cualquier vocablo absolutamente moderado) por la existencia de un método que conduce eficiente-mente a la resolución de los mismos? Tal vez no sea ninguno de los programas actuales ese método ideal, todavía; pero la validez de la pregunta no por ello queda en entredicho: sólo la urgencia de la respuesta aplazada.

El segundo apunte de futuro se refiere a la utilización de los números decimales para representar números irracionales algebraicos, un tema que ya hemos esbozado e introducido en el epígrafe anterior, al comentar el tratamiento momentáneamente distinto de estos números en las clases de Álgebra. El requerimiento de manipularlos sin pérdida de precisión (no admitiendo que se tome ($3\sqrt{5}$- $2\sqrt{11}$). 1/10.000 como cero, por ejemplo) podría extenderse a los números racionales, relegando su representación decimal al papel de indicar de forma rápida la medida del número, su tamaño: 345678/ 1254 nos da menos información en ese sentido que 275,66028708; pero es bien sabido que podemos realizar exactamente todas las operaciones aritméticas y comparaciones entre números racionales sin recurrir a la notación decimal (obteniendo esta expresión sólo cuando se desee tener una interpretación de la medida del número calculado). La exactitud se paga ciertamente con una mayor incomodidad, si es que se realizan los cálculos con lápiz y papel. Este argumento, sin embargo, hoy día no tiene el peso necesario para compensar la pérdida de precisión, salvo en situaciones muy técnicas, los ordenadores calculan eficientemente con números enteros arbitrariamente grandes; además, los programas de Cálculo Simbólico trabajan directamente con fracciones. Ciertamente, si se deja a un lado el problema de la medida, la conversión de los resultados de algunas operaciones con números enteros, dividir, extraer raíces, a números decimales se justifica principalmente en los números irracionales. ¿Qué podríamos hacer con tales operaciones sin la representación aproximada de los resultados de las mismas? Supongamos que alguien estima que la solución a un problema es la suma de las raíces positivas de las ecuaciones x^2-2=0 y x^2-3=0 y desea saber si este resultado es mayor o menor que la raíz positiva de x^2-5=0. Naturalmente es sencillo determinar esto sin recurrir al cálculo decimal de las raíces, pero imagínese el mismo problema con ecuaciones mucho más complejas, tal vez con coeficientes que son a su vez raíces de otras ecuaciones, y con raíces que sólo pueden determinarse indicando "la tercera raíz real" o "la décima raíz real positiva" de una cierta ecuación. En estos casos parece que el único recurso es la búsqueda de las raíces mediante una aproximación a su representación decimal. (Un tema que, al margen o complementariamente a este análisis, debería potenciarse en la clase de Álgebra) .

Existe, sin embargo, una metodología distinta y reciente, que ha elaborado una aritmética (incluyendo comparaciones entre números y extracciones de raíces de ecuaciones cuyos coeficientes son números irracionales algebraicos) partiendo de una representación **finitista** de los irracionales algebraicos: así $\sqrt{2}$ es representado como el par (x^2-2, +) y la aritmética procede operando de cierta forma con tales representaciones **exactas, esencialmente reduciendo los procesos operativos a la aritmética de números enteros.** El resultado fundamental por el que el Cálculo Simbólico Automático puede resolver algorítmicamente este planteamiento es un lema del conocido matemático francés René Thom, por lo que esta forma de representación de los números algebraicos recibe el nombre de "códigos a la Thom". (Véase "Thom's lemma, the coding of real algebraic numbers and the computation of the topology of semi-algebraic sets" de Coste y Roy, Journal of Symbolic Computation, vol. 5, No. 1 & 2. 1988). Desarrollados teóricamente por los matemáticos franceses Coste y Roy, la implementación de la aritmética correspondiente en un sistema de Cálculo Simbólico está siendo llevada a cabo por los profesores Olazabal y González-Vega de la Universidad de Cantabria. De esta forma es posible que en un futuro no muy lejano, al disponer de un marco teórico y práctico en el que las operaciones entre todos los números algebraicos pueden realizarse con descripciones finitas de los mismos y precisión infinita, el esquema conceptual vigente hoy para la manipulación de los números radicales en la clase de Álgebra pudiera extenderse a todos los aspectos de manipulación, en el nivel escolar, de cualesquiera números, salvo para estimaciones de medida. Se evitaría así la necesidad, presente ahora, de recurrir al infinito actual (definición de un número radical como límite de las aproximaciones decimales) para "entender" lo que son ciertos números; la formulación con "códigos" implica, en el fondo, contemplar esencialmente todos los números algebraicos como números enteros o como operaciones **potenciales** sobre los mismos... El marco conceptual que proponemos, para el futuro, es por tanto mucho más sencillo, un retorno al viejo dicho de Kronecker sobre la creación divina de los números naturales ...

Se habrá observado que el análisis precedente excluye a los números trascendentes, que no pueden representarse **simultáneamente** con procedimientos finitistas. Precisar el auténtico papel que desempeñan, para la elaboración en la mente de los alumnos de un esquema conceptual global del sistema numérico, los escasos números trascendentes (e, π) que aparecen en el curriculum escolar, mas bien como símbolos desprovistos de concreción numérica, o el carácter numérico de la construcción de la recta real, es ciertamente difícil. En nuestra opinión, cualquiera que sea la importancia curricular de la completación de los números racionales, en definitiva, la introducción del infinito actual en el discurso del alumno, no debe ser un condicionante para el establecimiento de aproximaciones didácticas propias a la manipulación de los números no trascendentes.

Conclusiones

La utilización de ordenadores en la clase de matemáticas ha de ser contemplada desde la perspectiva de las **modificaciones conceptuales** que conlleva, a veces puntuales y a veces más amplias, afectando a buena parte del aprendizaje de un tema, y no sólo como **herramienta** para la realización de cálculos o como **recurso didáctico** en el aula (ya sea en una concepción asistida de la enseñanza o como instrumento para un aprendizaje por descubrimiento dirigido...). En el caso de la enseñanza del Álgebra escolar, tradicionalmente poco afectada por el uso de calculadoras y microordenadores y limitada al aprendizaje de unas técnicas de manipulación simbólica de carácter aislado, aislado del contexto científico escolar y de las aplicaciones, la generalización creciente de programas de Cálculo Simbólico Automático que pueden ser usados en ordenadores personales ha de tener consecuencias en las tres líneas que señalamos en negrita. Tras el análisis realizado en el artículo se deduce la necesidad de reducir las prácticas manipulativas como objetivo fundamental, tal vez no declarado, pero sí de facto, de la clase de Álgebra, sustituyéndolas por una mayor exploración de los sentidos de esta manipulación, tal y como son revisados desde la perspectiva del Cálculo Simbólico Automático. En particular, el significado de las igualdades y de los símbolos algebraicos desde un punto de vista exclusivamente semántico, esto es, con una interpretación meramente ecuacional o funcional, de reemplazamiento por valores numéricos, debería ser ampliado a una interpretación sintáctica de reglas de reescritura, como pone de manifiesto el estudio de la investigación, encuesta iniciada por otros profesores en el campo de las dificultades del Álgebra escolar. Asimismo el concepto, tan abundante en los ejercicios de Álgebra, de simplificación debería ser empleado en sentido más restrictivo y más vigilante del desarrollo correcto de esquemas conceptuales de simplificación en el alumno. La utilización de expresiones numéricas sin evaluación decimal, también característico de la clase de Álgebra, podría ser clarificada desde la consideración global de la construcción mental del significado del sistema numérico. La operatoria implementada actualmente en los Sistemas de Cálculo Simbólico permitiría de forma efectiva evitar esta dicotomía o ruptura decimal, reduciendo la elaboración del sistema numérico a la comprensión de los números decimales.

Tomás Recio
Universidad de Cantabria
Departamento de Matemáticas