Geometrías: fundamentación y experiencia sensible

Luis Carlos Cachafeiro Chamosa

Los profesores de matemáticas asociamos la discusión acerca de la fundamentación y axiomatización de las matemáticas con complejos teoremas y representaciones (Gödel, Cohen, Axiomática de Gödel-Bernays, por ejemplo), bastante apartados de la matemática educativa. Pero su conocimiento, aún a nivel general, es interesante por sí mismo y clave para la observación de las matemáticas como una disciplina en constante transformación, más real que la visión habitual de un cuerpo estático e indiscutible de conocimientos.

Por ello, me pareció conveniente, mostrar a los alumnos, una parte de la historia de los fundamentos de la geometría y su peculiar relación con el ser humano que es quien la crea o, por lo menos, la descubre, debate y aplica.

La axiomatización en matemáticas, es una manera de establecer unas bases sólidas de forma que se puedan conocer las características de los objetos con los que trabaja el matemático. Tales objetos pueden ser de cualquier tipo, siempre que, eso sí, verifiquen los axiomas.

El primero y durante más de mil años único sistema axiomático, fue el de Euclides, que fundamentó la geometría en una serie de postulados. ¿Por qué escogió esos postulados?: Fundamentalmente porque de ellos se deducían consecuencias "normales", o sea, resultados ya conocidos (ejemplo el teorema de Pitágoras), y además los principios eran bastante naturales considerándolos como aproximaciones teóricas a algunos objetos sensibles ya que los puntos, rectas, planos y sus propiedades (dadas por los correspondientes axiomas) están próximos a los objetos de la realidad percibida).

El quinto postulado de Euclides, siempre provocó discusiones acerca de su necesidad, que ya a Euclides le pareció menos "natural" que los otros. Ese 5º postulado dice[1] que por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela a esa recta y sólo una. Tratándose de un postulado menos claro que los otros ¿se podrá deducir matemáticamente de los otros?

Los axiomas pueden verificar dos tipos de condiciones:

1. Que los axiomas no se contradigan, lo que se conoce por CONSISTENCIA de la teoría.

2. Que ninguno de los axiomas sea una simple consecuencia de los otros. Esta es la INDEPENDENCIA de los axiomas.

La Consistencia es una propiedad exigible a todo sistema de axiomas mientras que la Independencia es una cualidad más "estética", aunque no exenta de importancia.

Dado un conjunto de axiomas A, este conjunto y todas las consecuencias que se deducen de él, forman la teoría de A. Si hay un axioma de A que depende de los otros, podemos eliminar ese axioma y el nuevo conjunto de axiomas, da lugar a la misma teoría. Pero si en vez de eliminarlo, es sustituido por su contrario, la teoría se vuelve contradictoria. Si un axioma independiente se sustituye por su negación, aparece una nueva teoría diferente de la anterior.

Se puede utilizar este método en el caso del 5º axioma de Euclides (sustituyéndolo por su negación) ¿Qué le ocurre a la teoría? ¿Es contradictoria? (y el 5º postulado es consecuencia de los otros)? ó bien ¿da lugar a una nueva teoría? (y el axioma es independiente)? Esto hizo en el siglo XVIII el italiano Sachieri. Pero le aparecieron resultados "extravagantes" y fue incapaz de ver claramente lo que tenía delante: ¡una nueva Geometría!

Cincuenta años después el prestigioso matemático C.F. Gauss descubrió el fondo del problema, pero el temor a mostrar unas consecuencias que iban a ser mal asumidad por los coetáneos, dio la posibilidad que

[1] En su versión moderna de playfair.

fueran los matemáticos Lobatchevski, ruso y Janos Bolyai, húngaro, los primeros en mostrar públicamente dos geometrías coherente, que a su vez negaban el axioma de las paralelas (la de Lobatchevski afirma que por un punto se pueden trazar más de una paralela, y la de Bolyai que no es posible trazar ninguna).

¿Tiene sentido hablar de una geometría, que afirme que por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela?, ¿no es ello una contradicción con el mismo concepto de geometría, de algo que expresa nuestro entorno físico (aunque algo idealizado)?

Efectivamente, eso parece, pero sólo en la medida en que cuando hablamos de rectas, nos estamos refiriendo a nuestras teóricas rectas sensibles, aquellas de las que nuestros sentidos nos informan de su existencia, características y propiedades.

¿Pero es posible "sin perder el juicio" hablar de otras rectas? ¿Esas rectas serán "no rectas"?.

Hagamos un simple experimento (fig. 1). Envolved una hoja de papel de aluminio sobre un trozo de papel haciendo un cilindro, con el aluminio por fuera. Poned una regla delante del cilindro y observad que "la recta se tuerce". Evidentemente a la reflexión de una recta no le llamamos recta, pero se puede hacer una geometría cuyas "rectas" sean las reflexiones del cilindro de rectas "normales".[(2)]

Fijamos un observador. Se puede establecer una transformación que lleve puntos del plano en puntos del cilindro. La función F no tiene las

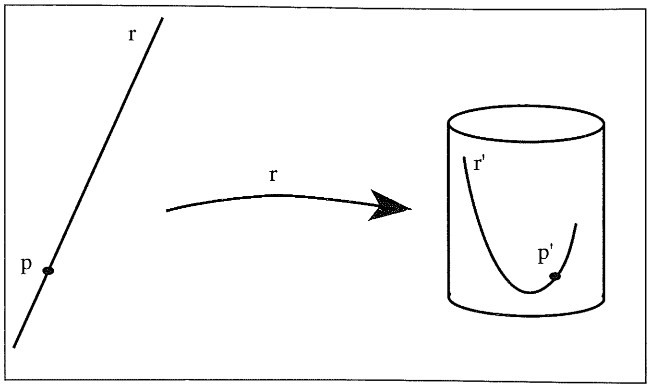

Figura 1

propiedades habituales de conservación (no conserva paralelas, ni ángulos, ni distancias) y sin embargo es una transformación bastante natural conocida por el nombre de anamorfosis.

Otra transformación no lineal es la que se establece entre los objetos del espacio, y su imagen correspondiente en la parte posterior del ojo (conos y bastones excitados). Las rectas en el espacio, pasan a ser curvas en el ojo y en el cerebro, debe rectificar algunas curvas del ojo, para que sean sentidas como rectas (fig. 2). ¿Cómo lo hace?: Aún no se conoce claramente.

Pero en el caso de pinturas de bóvedas (muy frecuentes en el Renacimiento y en el Barroco), aparecen nuevamente curvas que son vistas como rectas. Aquí encontramos una nueva trasformación anamórfica.

Parece lógico pensar que de todas formas la existencia de rectas está asegurada, y que se diferencian objetivamente de las curvas. Pero puede ser una apreciación subjetiva. ¿Podemos asegurar que *independientemente del hombre existen rectas*?

Supongamos que nos encontramos en Manhatan, en el piso 55 de

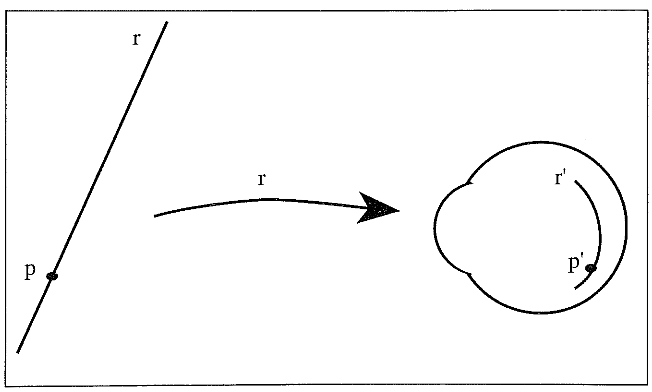

Figura 2

[(2)] Aunque no verifique las condiciones de Klein para una geometría, este concepto puede ser ampliado para incluir esta "geometría".

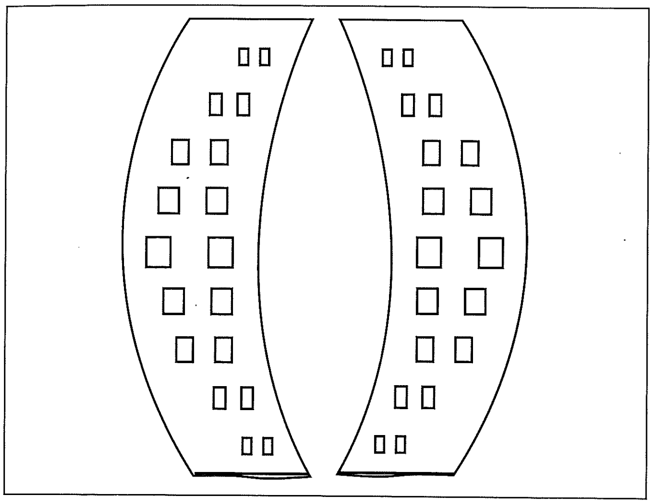

Figura 3. Representación de la vista de los edificios del World Trade Center (representación extremadamente exagerada).

un gran edificio y que enfrente tenemos los gigantescos edificios del World Trade Center de 110 pisos. ¿Cómo vemos los perfiles de estos dos edificios? Muy anchos y separados a la altura del piso 55, pero pequeñitos y juntos en la calle y en el piso 110. Por tanto "son curvas" (fig. 3).

Si tuvimos la experiencia de que toda recta suficientemente larga se curva, ¿aceptarían Euclides (y Enmanuel Kant) la existencia "a priori" de rectas, e incluso la noción de paralelismo?

Muchos de estos interrogantes quedan aún por resolver. A medida que se desarrollen los estudios sobre la sustentación de las matemáticas y de las peculiaridades del funcionamiento del cerebro y su sistema perceptivo, es de suponer que se irán aclarando.

Por lo de pronto, el susto que recibieron los matemáticos al saber que existen rectas que no lo son, fue impresionante. El matemático ya puede trabajar con rectas (de nombre) que no lo son (percepción). La propia teoría general de la Relatividad, considera un espacio esencialmente euclídeo en la inmensa mayoría vacía del Universo, pero que se curva en las proximidades de cuerpos astronómicos de grandes masas que "tuercen" las rectas.

Con el paso del tiempo, fueron cayendo grandes mitos. Así también cayó el de la existencia de rectas. Pese a todo la geometría básica de estudio es la euclídea. ¡y la más fácil!

Bibliografía

* R. ARHEIM (1985). **Arte y percepción visual**. Ed. Alianza. Madrid.

* R. RODRÍGUEZ VIDAL (1983): **Diversiones matemáticas**. Ed. Reverté. Barcelona.

* A. DOU (1974): **Fundamentos de la matemática**. Ed. Labor. Barcelona.

* J. REY PASTOR, J. BABINI (1984-85): **Historia de las matemáticas**. Vols. I, II. Ed. Gedisa. Barcelona.

* R. SAUMELLS. (1971). **La geometría como teoría del conocimiento**. Ed. Rialp, Madrid.

* A.S. SMOGORZHEVSKI. (1984). **Acerca de la geometría de Lobachevski.** Ed. Mir, Moscú.

Luis Carlos Cachafeiro Chamosa

I. B. Nº 6 de Santiago de Compostela