Nuevas tendencias en la matemática y su enseñanza

Elfriede Wenzelburger Guttenberger

El destino supremo de la matemática consiste precisamente en encontrar el orden oculto en el caos que nos rodea.

Norbert Wiener, 1981.

En el artículo se destaca la importancia de la matemática en todos los ámbitos de la cultura humana y en particular en las ciencias - por un lado en las ciencias físicas y por otro lado en las ciencias sociales.

La edad de oro, que vive actualmente la matemática, está estrechamente relacionada con la revolución de informática que vivimos.

Se plantea que la computadora ha cambiado la manera de hacer matemáticas. La matemática ha adoptado ciertas metodologías de trabajo de las ciencias experimentales. Exploración y descubrimiento a través de actividades como observar, hacer predicciones, probar hipótesis, conducir ensayos, controlar variables, etc., son ahora propios de la investigación de la nueva matemática experimental.

La enseñanza de la matemática también se ve afectada por la presencia de las microcomputadoras ya que hay que revisar contenidos y métodos de enseñanza. Esto requiere que los profesores de matemática, especialmente del nivel medio-superior tendrán que actualizarse con tópicos contemporáneos como son las matemáticas discretas, métodos interactivos, conjuntos borrosos, fractales, caos y catástrofes entre otras.

Se ilustran estos cambios en contenidos y métodos de enseñanza con los cursos de Cálculo y Álgebra y se insiste en la importancia de incluir computadoras y calculadoras en los diseños didácticos para visualizar conceptos y experimentar.

Introducción

Cuando Lebesgue desarrolló su análisis de la relación entre la lógica y la aritmética (Lebesgue, 1931), escribió que la matemática fue creada por el hombre por necesidad para resolver sus problemas y dedujo que el profesor de matemáticas debe ser un profesor de "acción". La matemática es la ciencia que tiene más conexiones culturales (Howson, 1986) y responde a las exigencias de distintas sociedades lo cual ha conducido al desarrollo de nuevas ideas matemáticas.

En las últimas décadas las matemáticas han sido reconocidas como herramienta importante y esencial en muchas disciplinas y desarrollos tecnológicos.

Estamos cada vez más cerca de que se cumpla el sueño de Descartes de una matematización del mundo (Davis, Hersh, 1986).

Es muy conocido que las matemáticas han sido esenciales en las teorías físicas ya que hay un paralelismo entre las diversas ramas de la matemática y las grandes síntesis de la filosofía natural métodos matemáticos permitieron avanzar a los teóricos de la física que a su vez plantean problemas que llevan a nuevas adquisiciones matemáticas. El ejemplo clásico de lo último es el descubrimiento del análisis infinitesimal por Newton y Leibnitz, mientras que aplicando las ideas abstractas que 50 años antes habían desarrollado Gauss y Riemann, Einstein elaboró su teoría de la relatividad (Bergamini, 1964).

Pero no sólo la física, también la economía o linguística, entre otras, requieren un nuevo nivel de matematización (Trillas, 1980). La matemática surgió desde siempre del estudio de las reglas para escudriñar la naturaleza y llegar a conocer todo lo que existe.

La biología y medicina como ciencias de la vida adquieren cada vez un carácter más matemático. Lo mismo sucede en la sociología y psicología. Las matemáticas también han llegado a la composición musical, la coreografía, la poesía y a otras artes, muchas veces a través de una informatización. Como ejemplo, para grabaciones de música se filtran las ondas mediante transformaciones de Fourier.

Aún más, nuestra vida cotidiana está impregnada por el pensamiento matemático, de pronto de manera trivial, de pronto de manera compleja (Alvarado, 1990). Es posible en la actualidad vivir sin música y sin literatura, pero sin matemáticas es imposible.

La teoría de la complejidad y la teoría de juegos han invadido la filosofía y la religión. Hay pocos campos en los que las matemáticas no hayan penetrado o no puedan penetrar.

Avances de la matemática y cambios en sus métodos de investigación

El impacto de la revolución de información que actualmente vivimos a causa del avance tecnológico en equipos de computación se siente en los avances en ramas tradicionales de la matemática, en la aparición de nuevas ramas y en la metodología de trabajo de los matemáticos investigadores. Además es indiscutible el papel crucial que la matemática juega en los aspectos teóricos de la computación.

Las informatizaciones, en general, tienen un sustrato matemático y una computadora es un instrumento matemático por excelencia.

Las computadoras ofrecen nuevas maneras de escritura y de cálculo y permiten ver las ideas más tradicionales de una nueva perspectiva.

Las áreas nuevas o descubiertas nuevamente para la investigación en matemáticas incluyen ecuaciones no lineales de ondas, trabajos relacionados con funciones de Weierstrass, Takagi y la función singular de Lebesgue. Las computadoras tienen también un impacto en la teoría de grupos, combinatoria, teoría de números, geometría y análisis matemático, para mencionar los más importantes (ICMI, 1986).

Es conveniente aquí mencionar la metáfora de la matemática como un árbol grande y frondoso con raíces, tronco y ramas que crece en el tiempo (Davis, Hersh, 1982). En las últimas décadas ese árbol creció rápido y sigue creciendo. Se estima que la matemática conocida se puede representar en unos 100.000 volúmenes de una biblioteca. La estructura fina que se puede dar a estos escritos matemáticos consta de 3.000 categorías. Según estimaciones de la productividad anual de la comunidad matemática se habla de unos 200.000 teoremas nuevos lo cual pone al matemático investigador ante un dilema: es imposible mantenerse al tanto ni siquiera en los resultados más destacados. Este desarrollo dinámico y acelerado de la matemática parece no tener fin. Sin embargo, la cantidad de matemáticas "vivas" que en algún momento existe tiene límites por lo cual especialidades más viejas serán desechadas conforme surjan las nuevas y con ellas metodologías de investigación novedosas.

La idea de la demostración matemática como una cadena de deducciones a partir de los axiomas, ha sido afectada por las computadoras que sugieren resultados que luego se prueban o que han realizado demostraciones como en el caso del teorema de los cuatro colores. En ocasiones se generan contraejemplos con la computadora y se refutan conjeturas.

Demostraciones por computadora a veces se critican porque se basan en "la fuerza bruta" por ejemplo, un análisis exhaustivo de todos los casos. Pero este método puede generar sistemas expertos que hacen matemáticas para cumplir el sueño de Leibnitz de una "máquina calculadora racional".

Algunas ramas de la matemática como, por ejemplo, la teoría de números siempre han sido abiertas a la experimentación la cual es más factible con computadoras. Experimentos llevan a conjeturas y a veces a teoremas. En estadística, por ejemplo, experimentación puede hacerse a través de simulaciones o análisis exploratorio de datos.

La matemática experimental está ganando cada vez más adeptos y ya existen revistas como el "Journal of Experimental Mathematics", algo inconcebible hace algunos años.

El interés en métodos iterativos ha sido revivido por las computadoras y se obtuvieron resultados fascinantes, como por ejemplo, la teoría de los fractales. La necesidad de encontrar algoritmos económicos para la programación de computadoras ha llevado a la teoría de las complejidades. La existencia de paquetes simbólicos alivia el trabajo "pesado" para los matemáticos y los anima a atacar problemas considerados inaccesibles. (ICMI, 1986).

Ilustramos el impacto de las computadoras en la enseñanza matemática con el ejemplo de un curso clásico en el currículo matemático, el cálculo.

Durante muchos años, el cálculo diferencial e integral ha sido el núcleo de los primeros semestres de matemáticas en la universidad. La introducción de computadoras a la enseñanza en las universidades puede tener varios efectos para estos cursos de cálculo, por un lado va a cambiar la metodología de enseñanza y por otro lado el mismo contenido de los cursos. (Seidman, Rice, 1986).

Para los matemáticos el cálculo representa métodos y técnicas para estudiar funciones que pueden ser definidas en los números reales, en espacios euclidianos de 2, 3 ó n dimensiones o en el plano complejo. El cálculo efrece al alumno herramientas formales y abstractas para el estudio de las matemáticas superiores. Por otro lado, el cálculo representa las bases para aplicaciones de las matemática a las ciencias físicas y las ingenierías. Todas las aplicaciones basadas en el cálculo están relacionadas con modelos matemáticos que pueden considerarse contínuos, e.d. definidos en los números reales. El cálculo predominaba justamente por las numerosas aplicaciones de las matemáticas contínuas.

Pero en los últimos años se ha incrementado considerablemente el interés en aplicaciones de las matemáticas discretas: combinatoria, métodos de conteo, inducción, recurrencia, teoría de grafos, árboles, máquinas finitas, codificación y álgebra booleana; este interés está relacionado con el uso cada vez más amplio de computadoras y representa un reto para el currículo tradicional de cálculo. Existen por un lado tendencias de incluir más métodos numéricos en cálculo, por el otro lado hay que tomar en cuenta la existencia de paquetes de software que manejan símbolos haciendo el estudio de las técnicas de diferenciación e integración aparentemente obsoletos.

Los conceptos básicos del cálculo siguen siendo importantes: cambio, razón de cambio instantáneo, relación funcional, resultados acumulados, pero se pueden explorar desde el punto de vista contínuo y discreto; por ejemplo, a los conceptos contínuos como función, ecuación diferencial, derivación, integral le corresponden los conceptos discretos: sucesión y serie de tiempo, ecuación de diferencias, diferencia y sumatoria. Se puede observar que los conceptos discretos son técnicamente e intelectualmente más simples que sus contrapartes contínuas.

Obviamente, la matemática discreta no sólo tiene un impacto en los cursos de cálculo sino es una rama de la matemática que cada vez es más importante. El mundo físico se puede modelar con el cálculo diferencial e integral, como el lenguaje de los cambios contínuos, pero el mundo de la información necesita la matemática discreta (Finkbeiner, Lindstrom, 1987).

La matemática contemporánea

En las últimas décadas entonces, la matemática ha adoptado ciertas metodologías de trabajo de las ciencias experimentales, sobre todo debido a los medios electrónicos de cómputo.

Las actividades como observar, explorar, formar discernimientos, intuiciones, hacer predicciones, probar hipótesis, conducir ensayos, controlar variables, simular situaciones reales son cada vez más importantes. Actividades tradicionales como demostrar, generalizar y abstraer no se dejan de lado, pero esta apertura es una oportunidad para el profesor de presentar la matemática como una ciencia viva y en pleno desarrollo y no como una serie de "recetas" y conocimientos acabados. Sin embargo, la matemática nunca será una ciencia puramente experimental. Para el matemático investigador siempre hace falta la demostración, para el alumno se puede quedar a veces en lo experimental e intuitivo. Tópicos de probabilidad, estadística y métodos iterativos se prestan para este enfoque, tal como aspectos modernos de la geometría de fractales. (Goldenberg, 1989).

Es importante destacar que los cursos de actualización para profesores de matemáticas deben incluir tópicos de las matemáticas contemporáneas, tales como matemáticas discretas, subconjuntos borrosos, la geometría fractal, teoría de caos y catástrofes, para mencionar algunos.

Subconjuntos borrosos:
La teoría de subconjuntos borrosos empezó en 1965 con un trabajo de Zadeh y se trata básicamente de un análisis lógico-funcional de la vaguedad como contraste al análisis de la claridad de la lógica booleana y la teoría clásica de conjuntos. (Trillas, 1980). La teoría de subconjuntos

borrosos permite plasmar en fórmulas, descripciones vagas en relación con clases mal definidas. Esta teoría como generalización funcional de la de conjuntos, en base a una lógica multivalente, ha surgido por la necesidad de iniciar la escritura matemática de complicadas situaciones relacionales entre objetos vagos. Subconjuntos borrosos son clases con límites indeterminados en las que la transición de membresía a no-membresía es más bien gradual que brusca. Se puede afirmar que la lógica humana no es de dos valores sino es una lógica de verdades borrosas. En la matemática clásica no se admite lo borroso, pero el tratamiento sistemático de lo borroso permite nuevos avances en la matematización de la psicología, sociología, ciencias políticas, filosofía, fisiología, economía, linguística, etc. (Kaufman, 1982).

Fractales:
Otra rama de la matemática contemporánea es la teoría de los fractales que es un auténtico nexo entre arte y ciencia y abre la posibilidad de hallar el orden que se esconde tras una multitud de fenómenos caóticos que no encajaban en ninguna geometría. (Ruiz, 1990). La geometría de los fractales es la geometría que permite modelar la naturaleza: paisajes, árboles, plantas, costas, cristales, copos de nieve, ríos, valles. Matemáticamente son curvas infinitas contenidas en una superficie finita con una dimensión fraccionaria que se caracteriza por la recursividad y la autosimilaridad: el hecho que el todo siempre está contenido en las partes. (Peitgen, Richter, 1986).

Caos:
Cualquier proceso que transcurra en el tiempo es un ejemplo de un sistema dinámico. Estos sistemas ocurren en muchas ciencias, en la vida diaria y en la naturaleza. Ejemplos de tales sistemas encontramos en la meteorología, economía, astronomía, química, etc.

El estudio de sistemas dinámicos tiene como objetivo predecir el resultado del proceso. Algunos sistemas dinámicos son predecibles y otros no, se vuelven caóticos. La noción matemática del caos es importante, simplemente porque permite afirmar que sistemas dinámicos simples y determinísticos pueden comportarse en forma impredecible o caótica. La clave del estudio de sistemas dinámicos es la iteración: la repetición sucesiva de un proceso. Si el proceso dinámico se puede describir mediante una función matemática se generan para cada valor de la función a través de iteraciones sucesivas las llamadas órbitas. Algunos sistemas dinámicos tienen órbitas inestables que muchas veces forman un fractal. En la naturaleza se nos presentan fenómenos impredecibles, que sin embargo se rigen por leyes.

Hace más de una década los científicos se dieron cuenta que ciertos sectores del caos en la naturaleza pueden ser descritos por leyes. Un sistema de este tipo, que sigue por un lado las leyes físicas de causa y efecto, pero que tiene consecuencias imprevisibles es llamado en el lenguaje de la ciencia moderna "sistema caótico".

Para la investigación del caos, la geometría fractal es un medio auxiliar importante.

Catástrofes:
Una descripción matemática del mundo requiere muchas veces una interacción entre continuidad y fenómenos discretos (Arnold, 1987). Para describir la aparición de estructuras discretas a partir de estructuras suaves, regulares y contínuas se usan términos como singularidad, bifurcaciones y catástrofes. El desarrollo de la teoría de singularidades en combinación con la teoría de la bifurcación (Poincaré, 1989; Andronov, 1933) es una poderosa herramienta con un amplio campo de aplicaciones en ciencia e ingeniería. Los matemáticos René Thom y E.C. Zeeman (Thom, 1975) sugieren que la teoría de singularidades y sus aplicaciones debería llamarse teoría de catástrofes.

La teoría de catástrofes tiene por ende sus orígenes en la teoría de singularidades de aplicaciones suaves y en la teoría de bifurcaciones de sistemas dinámicos. En el caso de la teoría de singularidades se trata de una generalización muy amplia del estudio de funciones en puntos máximos y mínimos, sólo se sustituyen las funciones por aplicaciones que son colecciones de varias funciones de varias variables. Bifurcación quiere decir ramificación y se usa en un sentido amplio para designar todo tipo de reorganizaciones cualitativas mientras que catástrofes son cambios bruscos que surgen como respuesta repentina de un sistema a un cambio suave en las condiciones externas. Había muchos intentos de aplicar la teoría de catástrofes a materias tan diversas como el estudio del latido del corazón, la linguística, la economía, la geología, la estabilidad de los barcos, los motines en las prisiones y la influencia del alcohol en conductores.

Conclusiones

Los contenidos matemáticos han cambiado en calidad y cantidad en las últimas décadas y también la manera de hacer matemáticas.

Si el investigador matemático adoptó nuevos métodos de trabajo de exploración y descubrimiento, con mayor razón el profesor de matemáticas debe incluir estas técnicas en sus clases. Equipo de cómputo y calculadoras son excelentes herramientas para lograr ésto. El aprendizaje activo es más efectivo y la exploración dirigida hace la matemática interesante y atractiva. Los alumnos aprenden contenidos matemáticos y hábitos de construir el conocimiento, de "matematizar" y así encontrar la utilidad de conceptos matemáticos. La resolución de problemas debe ser central en el quehacer matemático de profesores y alumnos.

Los cursos de actualización para profesores de matemáticas deben incluir tópicos contemporáneos, muchos de los cuales se pueden llevar también al nivel de los alumnos.

Como ejemplo mencionamos un trabajo de Goldenberg (1989) en el cual se propone llevar la geometría de fractales a la escuela secundaria y preparatoria. Como medio gráfico se usa el LOGO (Abelson, Disessa, 1981) de una microcomputadora. De esta manera se incorpora una rama importante de la matemática del siglo XX al nivel medio-superior y se ilustra la cultura y vitalidad de la investigación en la matemática actual. También el concepto de funciones iterativas y recursivas se puede introducir en el nivel medio superior al igual que el estudio de la función logística (NCTM, 1991).

La idea de recursión e iteración es básica para comprender los conceptos fundamentales del estudio de sistemas dinámicos y caos y se puede discutir a nivel medio-superior. Una excelente publicación reciente llamada "Fractals for the Classroom" (Peitgen, 1992) ofrece material para el estudio de recursión, caos y fractales en las escuelas.

Es urgente que los profesores de matemáticas del nivel medio-superior y los educadores en matemáticas que se ocupan del mejoramiento de tales maestros intenten seriamente terminar el virtual divorcio entre la matemática contemporánea y la investigación en este campo y los contenidos de los cursos que se ofrecen a los alumnos. Debemos buscar alternativas a la vieja costumbre de enseñar una matemática anticuada, estática y mecanizada de manera anticuada, estática y mecanizada.

Como ejemplo podemos considerar los cursos tradicionales de álgebra. Estos cursos normalmente ponen inicialmente mucho énfasis en la manipulación de expresiones algebraicas fuera de contexto los cuales hay que transformar y simplificar según ciertas reglas. Después se trabaja con ecuaciones de diversos tipos y problemas de texto irrelevantes para la mejoría de los alumnos. Estos cursos llevan a muchos alumnos al fracaso y al repudio de las matemáticas que les afecta para el resto de su vida. Afortunadamente hay alternativas viables para remediar esta lamentable situación de la enseñanza del Álgebra en el nivel medio-superior y en los cursos "remediales" a nivel profesional. Un grupo de investigadores de dos universidades de Estados Unidos ha realizado un esfuerzo durante varios años para cambiar radicalmente el enfoque didáctico y de contenido a lo que puede ser un primer curso de álgebra en la preparatoria. El proyecto llamado "Computer Intensive Algebra" utiliza herramientas numéricas, gráficas y simbólicas y el apoyo de calculadoras científicas, calculadoras gráficas y computadoras para desarrollar en el alumno las ideas algebraicas básicas y los métodos de razonar con expresiones simbólicas para resolver problemas cuantitativos. Procedimientos algebraicos complejos se manejan con paquetes simbólicos de álgebra. Por otro lado, alumnos que tienen problemas en organizar y manipular relaciones complejas entre los datos de una situación realista pueden usar computadoras para construir los modelos matemáticos adecuados. El enfoque de CIA se distingue por tres características:

1. Uso extensivo de modelos y representaciones para ideas algebraicas.
2. La organización del álgebra alrededor de los conceptos de variable y función.
3. Una nueva relación entre conocimiento conceptual y procedimientos en álgebra. Se hace énfasis en un álgebra aplicada y modelos matemáticos.

Si logramos cambiar contenidos tradicionales e incluir tópicos matemáticos contemporáneos que se prestan para la adopción de un estilo de aprendizaje visual y experimental, podríamos iniciar cambios dramáticos y fundamentales en el desempeño de los alumnos (Goldenberg, 1989).

Tópicos de investigación de frontera en matemática que tienen una gran aplicabilidad en otras ciencias pueden jugar un papel importante en los contenidos de la matemática en la escuela para atraer los alumnos a la belleza intelectual de la matemática y su utilidad y actualidad. Herramientas gráficas de alta velocidad y definición en computadoras pueden ser un factor importante en esta apertura.

Si matemáticos investigadores cooperan con profesores de matemáticas del nivel medio-superior será posible darle una información actualizada, mejorando su cultura matemática y fomentando nuevos métodos de hacer matemáticas.

La vitalidad de la matemática contemporánea que experimentan los matemáticos, está en contraste a lo que viven la mayoría de los alumnos debido a que los matemáticos tratan de resolver problemas novedosos mientras que los alumnos se enfrentan con "problemas" que sus maestros pueden resolver. De ahí que la matemática aparece como un cuerpo de hechos y técnicas, muerto e inerte, que heredamos de nuestros antepasados, que no admite exploración, tal que cada pregunta tiene una y sólo una respuesta que alguien ya sabe (Goldenberg, 1989). Es tiempo que hagamos un esfuerzo de cambiar esta imagen de la matemática.

Bibliografía

* ABELSON, H., DI SESSA. (1981). **Turtle Geometry: The Computer as a medium for exploring mathematics**. Cambridge, MA: MIT Press.

* ALVARADO, Z.J., (1990). **La Enseñanza de las Matemáticas y los Índices de Reprobación en el Colegio de Bachilleres**. Memoria del Encuentro de Profesores de Matemáticas.

* ARNOLD, V.I., (1987). **Teoría de Catástrofes**. Alianza. Universidad de Madrid.

* BERGAMINI, D., (1964). **Matemáticas**. Colección Científica de LIFE en español. México. Pág. 165.

* DAVIS, P.J., HERSH, R. (1982). **Experiencia Matemática.** MEC, Madrid.

* DAVIS, P.J., HERSH, R. (1986). **El Sueño de Descartes**. MEC, Madrid.

* FEY, J. HEID, K.M., (1991). **Computer Intensive Algebra**. University of Maryland, College Park.

* FINKBEINER, D.T., LINDSTROM, W.D., (1987). **A Primer of Discrete Mathematics,** Freeman, New York.

* GOLDENBERG, E. PAUL, (1989). **Seeing Beauty in Mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry.** Journal of Mathematical Behavior, 8, 169-204.

* ICMI STUDY SERIES, (1986). **The Influence of Computers and Information on Mathematics and its Teaching**. Cambridge. University Press.

* KAUFMAN, A., (1982). **Introducción a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos**. CECSA, México.

* NCTM (1991). **Student Math Notes.** September 1991.

* PEITGEN, M.O.; RICHTER, P.H., (1986). **The Beauty of Fractals.** Springer-Verlag, Berlin.

* PEITGEN, H.O., JURGENS, H., SAUPE, D., (1992). **Fractals for the Classroom,** Springer, New York.

* RUIZ, M., (1990). **Fractales, el orden que surgió del Caos.** Revista Muy Interesante. Año 6, nº 8, pág. 32.

* SÁNCHEZ, C. (1990) **La Matemática en la Síntesis del Panorama Científico.** Educación Matemática, Vol. 2, nº3.

* SEIDMAN, S.A.: RICE M.D., (1986). **A Fundamental Course in Higher Mathematics. Incorporating Discrete and Continuous Themes.** ICMI Study Series #1, Cambridge University Press.

* STWERTKA, A. (1987) **Recent Revolutions in Mathematics.** Science Impact, Franklin Watts, New York.

* TRILLAS, E., (1980) **Conjuntos Borrosos.** Editorial Vicens-Vives.

* THOM, R., (1975) **Catastrophe Theory: Its Present State and Future Perspectives,** in: Dynamical Systems - Worwik 1974. Lect. Notes Math. 468, Springer Verlag. Berlin.

* WENZELBURGER, E., (1987) **La Influencia de las Computadoras en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad.** Didac, 11p.

* WHITNEY, H. (1955) **On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces.** I. Mappings of the Plane into the Plane. Math. 62, 374-410.

* WIENER, N., (1981) **Yo, matemático.** Ed. Conacyt, México.

* ZADEH, L.A., (1965) **Fuzzy Sets.** Information and Control, 8, 338-353.

Elfriede Wenzelburger Guttenberger
Universidad Nacional Autónoma de México