Tecnología Popular Tradicional: Medición de la Capacidad de Barriles y Toneles por métodos empíricos

José Manuel González Rodríguez

Introducción

Entre las técnicas populares conocidas en Canarias por artesanos, mercaderes y agricultores encontramos una que nos habla de la valoración de la capacidad de barricas y barriles. La figura del viticultor o del fiel ejecutor con su varilla de medir introduciéndola en la boca del barril y evaluando de inmediato el volumen que este aforaba era particularmente popular en las zonas de raigambre vinícola de Canarias. Su recuerdo ha perdurado y aún en la actualidad es rememorado por bodegueros y vinicultores.

Tratamos de estudiar en estas páginas los fundamentos científicos que gobiernan este método empírico de cálculo de la capacidad de toneles y barriles; y lo haremos describiendo con detalle su ejercicio y comparándolo con otros métodos también tradicionales, recogidos en textos elementales de geometría de tiempos pasados. El **Aforo Diagonal**, que es el nombre que se le da a la práctica de que hablamos se nos mostrará entonces como el modelo más peculiar entre todos estos procedimientos. Su origen data de épocas remotas y se relaciona con elementos tradicionales pintorescos como **la verga** de El País Vasco o **la vara** vinícola dieciochesca.

En cuatro apartados describiremos los métodos de cálculo de la capacidad de los toneles, su justificación matemática; así como los elementos imprescindibles que conforman la elaboración de los recipientes de que hablamos. En el último párrafo discutiremos con detalle este método de Aforo Diagonal que forma parte sustantiva de la tradición vitivinícola canaria.

Los toneles y el oficio de tonelero

Plinio atribuye a los galos la introducción del barril y del tonel en la viticultura. Según sus escritos, éstos construían barriles uniendo tablillas de madera de encina curvadas y sujetas con ramas flexibles o mimbres (Integral: El hombre y la madera). Todo ello provocó una gran revolución en la ciencia de la viticultura, dando lugar al oficio de tonelero que se ha sostenido en vigencia hasta nuestros días.

El tonelero, artesano de tradición antigua como vemos, se nos presenta como uno de los fabricantes de productos tradicionales más completos; pues el oficio de constructor de barriles es uno de los más complejos dentro de los trabajos tradicionales. Recordemos en este sentido la conocida frase *a ojo de buen cubero* que nos habla de los acertados conocimientos que se le reconocen al oficiante de tonelero. En esencia, se trata de un trabajo delicado que exige de aquel que lo practica un buen número de habilidades.

En España se conocen algunas zonas de tradición antigua en la construcción de barriles y toneles. En particular, y en la actualidad, aquellos que se fabrican en Extremadura, Andalucía, Valencia, Castilla y El País Vasco son los que, con mayor frecuencia, se distribuyen entre otras regiones productoras de vinos. Por otro lado, hemos encontrado que las técnicas que se usan en la fabricación de las piezas son muy semejantes en cada una de estas zonas; por lo que habremos de considerar sólo un modelo uniforme en el proceso de construcción de tales recipientes.

Mas, enseguida se nos plantea una primera cuestión: ¿tratamos de barriles o de toneles, de barricas o de cascos? El nombre varía según el tamaño y su capacidad; a tenor de su estructura externa, más o menos ovalada; e incluso según el uso que se le dé. Podemos, no obstante, establecer unas clasificaciones básicas, distintas en cada comarca o región de procedencia de las piezas.

En Andalucía los nombres de las piezas varían según su capacidad:

Así, se suelen conocer con la denominación genérica de *barril chico* todas las medidas que van desde el de dos litros al de 128, que ya se denomina *media bota...*

Las capacidades siguientes se conocen como *botas* y se miden por arrobas, cada una de las cuales equivale a 16 litros. Existen así las botas de 32, 36 y 38 arrobas, reservándose el nombre específico de *tonel* a las capacidades que superan las 38 arrobas

Pedro Martínez Massa.

En Extremadura ocurre algo similar, mas se tiene en consideración igualmente las dimensiones de las duelas que conforman la pieza:

Se distinguen varios tipos: el *bocoy*, en plural, los bocoyes, entre 650 y 700 litros; las *pipas*, desde 500 litros, aunque pueden llegar hasta 900; tienen otra hechura que los bocoyes; el *medio* (medio bocoy) 400 litros; y los *barriles*, inferiores a 400 litros pueden ser de 250, 200, 160, 130, 100, 64, 32, 16,...

Como es evidente, las distintas capacidades se forman sobre distintas longitudes de duelas. La pipa, 130 centímetros, el bocoy, 115 cms.; el medio, 105 cms.; los barriles de 250 y 200, llevan duelas de 95 centímetros, etc.

Guía de la artesanía de Extremadura, pág. 72

El tonel, la pipa, la bota y el barril también se conocen en El País Vasco, y aparecen considerados como unidades de medida de capacidad o de volumen tradicionales (*Basas Fernández*). Por otra pate, la denominación de *barrica* también la encontramos, significando la cuarta parte del tonel o de la bota.

Por lo demás, **Carmen Ortíz García** en su trabajo sobre la Tonelería en Madrid nos muestra un exhaustivo cuadro de denominaciones para toneles y barriles que se clasifican de acuerdo a sus capacidades que recogemos aquí:

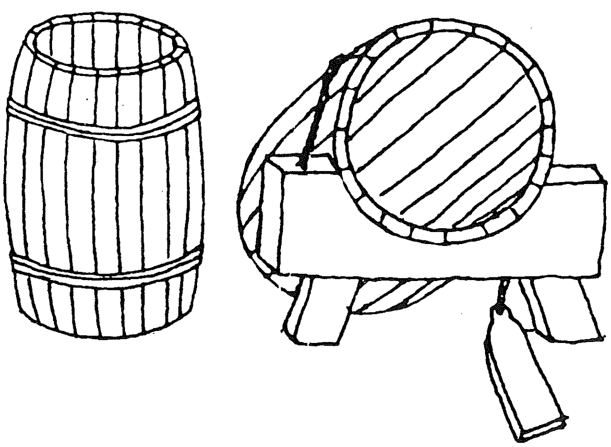
a) *Media Pipa*: Tonel con un aforo de 200 litros aproximadamente, es decir unas 12 arrobas y media.
b) *Bordelesa*: Tonel de 16 arrobas de capacidad que toma su nombre de la medida francesa para vinos de igual capacidad y denominación.
c) *Cuarta*: Tonel de 20 arrobas de capacidad...
d) *Pipa*: Recipiente que puede llegar a contener hasta 30 arrobas de líquido en su interior.
e) *Bocoy*: Cuba que normalmente tiene una capacidad de 40 arrobas, midiendo 83 cms. de diámetro de cabeza, un metro 10 cms. de diámetro de barriga y un metro 10 cms. de altura.
f) *Foudre*: Se denomina así a la cuba a partir de las 60 ó 70 arrobas de capacidad. Este nombre quizá pueda derivarse de la voz *fuder* que denomina una medida para líquidos en Alemania.
g) *Cuba*: No tiene límite claro en su aforo ya que puede llegar a tener 100 arrobas de capacidad o incluso más.

Para dicha autora todas estas piezas se nombran con el término genérico de *tonel* o *barril*, pues incluso las distinciones que se dan según sean las variaciones en la forma, en su opinión, no inciden en la variación del nombre de la pieza. En este sentido es de la opinión de que:

Las proporciones entre la altura y la circunferencia de un tonel son muy variadas y dependen del gusto del destinatario de la pieza o bien del uso general del oficio en la región.

Con todo, las distintas denominaciones que se conocen confunden y entremezclan los nombres de barril y de tonel en función de las influencias que se hayan dadao en cada región; y así, en particular, en Canarias, tierra de frecuentes intercambios e influencias vitivinícolas, encontramos denominaciones varias tales como: *casco, tonel, cuba, bota, barrica, bocoy, barril, barrilote, fole, garrafa*, ... entre otras.

Pensemos pues en un tonel o barril prototipo como el que se recoge en la figura que reúne todos



los elementos de una pieza característica de tonelería e intentemos describir cada una de sus partes. En primer lugar distinguimos tres divisiones en su estructura: la central, más abultada, llamada *barriga* o *estesa*; los dos extremos, denominados *testas*, y los dos círculos que cierran las bocas, que reciben el nombre de *fondos*. El tonel está formado por varias tablas longitudinales, más estrechas en sus estremos que en su centro, llamadas *duelas*. Las duelas se mantienen en posición por medio de aros de hierro o madera. Para conseguir una resistencia suficiente en el tonel se suelen encajar hasta siete aros en cada lado, tres junto a la barriga y cuatro cerca de la testa. El más próximo al fondo se llama *pendiente*, el segundo, madre, el que le sigue, *colete* y el último *bajo colete*. El más inmediato al vientre, *primero de vientre*, y los otros, *segundo y tercero de vientre*. Los fondos pueden ser de una o varias piezas, en este último caso, las tablas centrales reciben los nombres de *llave o pieza maestra*, las intermedias se llaman *sobaqueras* y las extremas *gambas o canteras*.

Por último, ya indicamos que la construcción de un barril o de un tonel sigue una serie de etapas que, siempre son las mismas en todas las regiones, y que podemos resumir del modo que sigue:

Primera. Fabricación de las duelas, que se cortan longitudinalmente de un tronco de árbol

Segunda. Armado del casco; donde, partiendo de una plantilla, molde o aro de armar, se reúnen circularmente un número par de duelas hasta conseguir el aforo necesario para alcanzar la capacidad deseada para la pieza.

Tercera. Eslomado del casco, durante el cual, ayudándose con un fuego tenue pero parejo se consigue formar la barrica.

Cuarta. Herrado del casco, o colocación de los aros con la ayuda de las *chasas* y el martillo.

Quinta. Labrado de las testas a fin de conseguir el igualado de las duelas y que comprende las faenas de *estovado, ejecución del garce* y el *rematado* de las duelas.

Sexta. *Fondado*: tras la toma del punto o centro del fondo se procede al *enclavillado*, al *ribeteo* de los fondos y a su colocación.

Séptima. Acabado de la pieza, que se consigue con el cepillado interior y externo y con la apertura de agujeros.

Queda enteramente elaborada la pieza de tonelería, lista entonces para su uso en el embase, trasiego o transporte de vinos y licores.

Fórmulas clásicas de cálculo de la capacidad de un barril

La pregunta que se nos plantea en este apartado estriba en conocer de qué modo el tonelero calcula la capacidad de la pieza que acaba de construir. Partamos del principio de que al artesano se le pide que fabrique un barril de capacidad prefijada; sin que el cliente se preocupe en ningún modo de la forma que tendrá éste. El tonelero dispone entonces de moldes o plantillas que le permiten determinar la capacidad deseada de la pieza; y, con su ayuda, acopla un número fijo de duelas de dimensiones elegidas de antemano.

Algunas veces la plantillas es *un aro de armar que es el molde clave, ya que llenando todo su perímetro se conseguirá la capacidad propuesta para el tonel (Carmen Ortíz García, pág 168).* En otros lugares se usa una medida lineal para establecer el número de duelas necesarias de forma que se alcance la capacidad deseada. Así, en Extremadura:

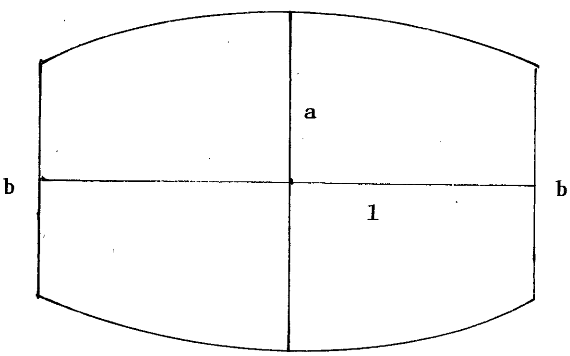
... Un tablón en el suelo del taller marca las longitudes de circunferencia de las panzas de cada tonel. Se han de reunir el número de duelas cuyos anchos conjuntamente den la medida precisa... La tabla maestra es un útil decisivo, conservado en el taller a través de las generaciones.

Guía de la Artesania de Extremadura, pág. 72

Las longitudes de las duelas se conocen con precisión según la capacidad buscada; y en la relación que se establece entre esta longitud y aquella del aro o de la tabla maestros se fundamenta el cómputo del volumen que aforará el recipiente. En esencia, dos magnitudes lineales determinan por entero la capacidad del tonel. Según esto, las fórmulas que se conocen y que permiten obtener la capacidad encerrada en un casco adquieren su fundamento empírico en este principio. En el modelo ideal de barril se debe reconocer la siguiente relación entre sus partes:

$$a = (18/21)\ l \qquad\qquad b = (16/21)\ l$$

donde: l es la altura total del recipiente; a es el valor del diámetro del vientre; y b determina el diámetro de cada uno de los fondos.



En todo caso se conocen varias fórmulas que, operando con los valores conocidos de a, b y l, nos dan la capacidad de cada pieza, evaluada ésta siempre de forma aproximada. Estas fórmulas se introdujeron con posterioridad a la invención del *Sistema Métrico Decimal*, y se obtienen comparando el tonel prototipo con figuras geométricas más sencillas.

Encontramos, en primer lugar, que si comparamos el tonel con un tronco de cono doble de áreas de las bases $\pi a^2/4$ y $\pi b^2/4$, obtenemos el límite inferior de su capacidad, que es igual a:

$$V_1 = (1/12)\,\pi\, l\ (a^2 + b^2 + ab) \qquad (1)$$

Por otra parte, siendo el valor dado por la fórmula (1) el volumen del barril, evaluado por defecto, conviene sustituir ab por a^2 y resulta:

$$V_2 = (\pi/12)\ l\ (2a^2 + b^2) \qquad (2)$$

fórmula recogida en *Morroyo y Gago, pág. 447* y que la encontramos en el tratado de Geometría de Bruño en la forma:

$$V_3 = (11/42)\ l\ (2a^2 + b^2) \qquad (3)$$

Esta fórmula nos muestra una aproximación de $\pi/12$ dada por $11/42$; es decir, nos da como valor del número trascendente π la buena aproximación de 3,1428.

Siguiendo con *Morroyo y Gago*, pág. 447:

Si se sustituye cada medio tonel por un cilíndro de l/2 de altura y cuya base sea para uno de ellos la del fondo, y para el otro, la del vientre; el primero nos da el volumen de medio tonel por defecto, y el segundo el de medio tonel por exceso, y la suma de ambos es aproximadamente el volúmen del tonel, luego:

$$V_4 = l\,\pi\,(a/2)^2/2 + l\,\pi\,(b/2)^2/2 = (\pi/8)\ (a^2 + b^2) \qquad (4)$$

También obtendremos otra fórmula para la capacidad de un tonel, debida a *Béziers*, considerando éste como un cilíndro de altura l que tenga por base un círculo cuyo diámetro sea (a+b)/2; es decir:

$$V_5 = \pi\, l\,((a + b)/4)^2 = 0{,}2l\,(a + b)^2 \qquad (5)$$

fórmula muy utilizada en las apreciaciones del volumen *(Integral, El hombre y la madera. Pág. 126. Bruño. Pág. 169. Morroyo y Gago. Pág. 448).*

Otra fórmula conocida, usada en aduanas, según recogemos de Basas Fernández, pág. 51 y de un reglamento de aduanas de la Isla de Cuba, escrito en 1847 es:

$$V_6 = ((a\text{-}b)\ 0{,}625 + b)^2\ l\ 0{,}7854 \qquad (6)$$

fórmula que da el volumen del tonel regularmente conformado, según apreciaciones hechas anteriormente, y que para otros tipos de toneles variaba la cantida 0,625 por 0,667 si el tonel tenía mucha comba o por 0,55 ó 0,6 si ésta era escasa. La explicación rigurosa de (6) habremos de darla en el siguiente apartado.

Por último, en un texto francés del siglo pasado *(A. Coindre)* encontramos la fórmula que sigue:

$$V_7 = (\pi l/4)\ [(2a + b)/3]^2 \qquad (7)$$

En resumen, hemos enumerado siete fórmulas distintas que fueros usadas en la determinación de forma aproximada del volumen encerrado por un barril o tonel. Todas éllas se acercan notablemente al valor exacto de éste; por cuanto al efectuar cálculos con los valores de a, b y l estimados como prototipos (ver párrafos anteriores), obtenemos para cada fórmula los valores que siguen:

$$V_1 = 0{,}515275\ l^3$$

$$V_2 = 0{,}5366459\ l^3$$

$$V_4 = 0{,}5164623\ l^3$$

$$V_5 = 0{,}52426\ l^3$$

$$V_6 = 0{,}5299445\ l^3$$

que dan expresiones muy próximas entre sí.

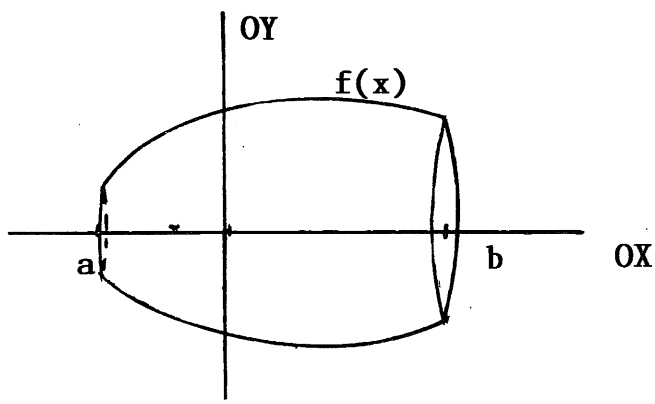
Existe aún otra fórmula que permite calcular el volumen encerrado en un tonel, conocida como Aforo Diagonal, que estudiaremos con detalle más adelante, siendo su derivación de carácter eminentemente empírico.

Justificación matemática de las fórmulas encontradas

En este apartado intentaremos encontrar explicaciones matemáticas rigurosas de las fórmulas enumeradas anteriormente. Partimos de la base de que el cálculo de áreas y volúmenes de sólidos de revolución (de los que el tonel es un caso particular) es un problema de cuadraturas estrechamente ligado a la teoría de la integración. La relación entre ambos tópicos era conocida en Europa ampliamente en los comienzos del siglo XIX; y en especial en España como lo aseveran los textos de *José Mariano Vallejo*, de 1819 y de *Gabriel Ciscar Ciscar*, de 1803; entre ótros. Apuntemos que de estas fechas datan las fórmulas reunidas en 3.

En definitiva, si una curva plana de ecuación y = f(x) que abarca dos abcisas a y b gira alrededor del eje OX, el volumen del sólido que se genera se calcula con la ayuda de la integral:

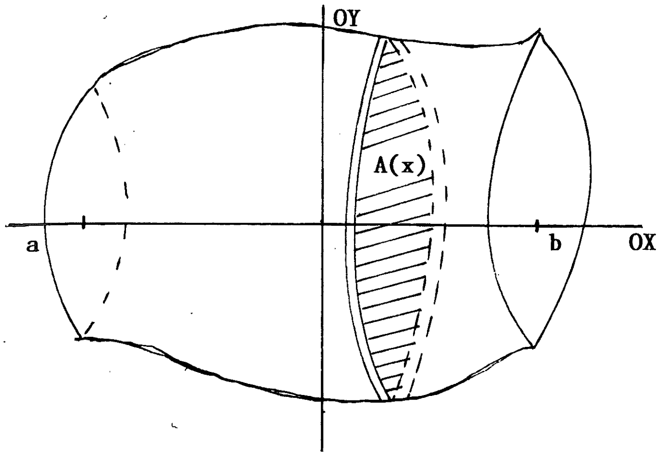
$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\, dx$$



Por otra parte, si en un sólido de R^3 conocemos el área A(x) de cada sección transversal perpendicular a un eje dado (OX) en función de la distancia medida en ese eje desde el origen de coordenadas su volumen será:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Entonces, el volumen del tonel se obtendrá fácilmente siempre que se conozca la curva y = f(x) que delimita su contorno o el área de cada sección transversal A(x) paralela a los fondos. Mas, no



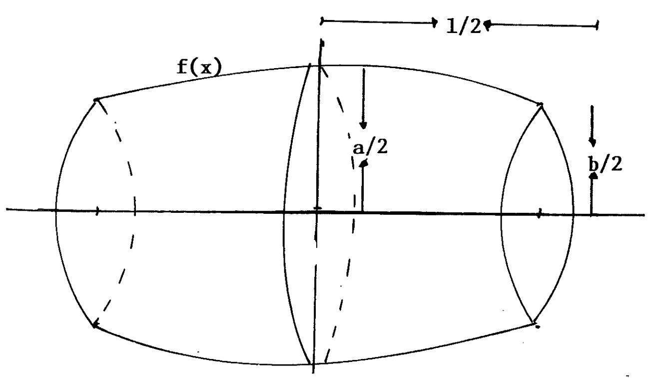
conocemos ninguna de estas dos funciones; y únicamente podremos aproximar éstas con la ayuda de curvas de fácil manipulación. En todo caso, aún con el uso de la integración sólo encontraremos valores aproximados de la capacidad encerrada en el tonel.

Analicemos al menos dos casos: el tonel considerado como una parábola que gira alrededor del eje OX, o bien imaginado como un elipsoide de revolución truncado.

En el primero de los casos la curva f(x) tendrá como ecuación $f(x) = \alpha - \beta x^2$ que gira alrededor de OX entre las abcisas $a = -l/2$ y $b = l/2$. Para determinar los valores de α y de β sabemos que para $x = 0$, será $f(0) = \alpha = a/2$ y para $x = l/2$ se tendrá $f(l/2) = b/2$, esto es:

$$\alpha - \beta\, l^2/4 = b/2$$

es decir: $\beta = 2(a-b)\,/l^2$



Tendremos así que: $f(x) = (a/2) - [2(a-b)/l^2]x^2$

$$V = 2\int_0^{l/2} \pi\, [(a/2)-2(a-b)x^2/l^2]^2\, dx =$$

$$= 2\pi\, [a^2 x/4 - 2a(a-b)x^3/3l^2 + 4(a-b)^2 x^5/5\, l^4]_0^{l/2}$$

$$= 2\pi\, [a^2\, l/8 - a(a-b)l/12 + (a-b)^2\, l/40] =$$

$$= (\pi l/60)\, (15a^2 - 10a^2 + 10\, a\, b + 3(a-b)^2)$$

$$= (\pi l/60)\, (8a^2 + 4\, a\, b + 3b^2).$$

Ahora bien, si escogemos la media aritmética $(a^2+b^2)/2$ en lugar de la geométrica $\sqrt{a^2b^2}$ la fórmula del volumen quedará:

$$V = (\pi l/60)\, (10a^2 + 5b^2) = (\pi l/12)\, (2a^2 + b^2) \qquad (8)$$

Es decir, encontramos la fórmula (2) con lo cual le hemos asignado un cierto rigor o fundamento matemático. Por otra parte, escogiendo 11/14.3 como aproximación de $\pi/12$ encontraremos la fórmula (3).

En todo caso hemos aproximado el valor del volumen real, mas sabiendo que el error que se comete al reemplazar $A = (a^2 + b^2)/2$ por $G = ab$ es:

$$A - G < (a^2-b^2)^2/8a^2$$

entonces, en el cálculo del volumen anterior se habrá cometido un error de:

$$E < (\pi l/60)\ .\ [(a^2-b^2)^2/8a^2]\ .\ 4$$

error muy pequeño en comparación con el valor de las magnitudes que se manipulan. Así, en el caso del barril estandar o prototipo, donde $a = 18l/21$ y $b = 16l/21$ el error que separa el volumen real del calculado es menor que $0{,}0008469\, l^3$; aproximación del volumen real considerablemente buena.

En el segundo cálculo del volumen habremos de suponer que el tonel lo asemejamos a un elipsoide de ejes a, c y a, truncado en los puntos de abcisas $x = -l/2$ y $x = l/2$. Entonces, siendo el elipsoide un sólido de revolución limitado por una superficie de ecuación:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{a^2/4} + \frac{z^2}{a^2/4} = 1$$

su volumen coincide con la integral:

$$V = 2 \int_0^{l/2} A(x)\, dx = 2 \int_0^{l/2} \pi\, (R(x))^2\, dx$$

donde A(x) representa el área de un círculo de radio R tomado a una distancia x del origen,

es decir $R = a/2 \sqrt{l - x^2/c^2}$ entonces:

$$V = 2 \int_0^{l/2} \pi\, (a^2/4)\, (l - x^2/c^2)\, dx =$$

$$= \pi(a^2/2)\, [l/2 - l^3/24c^2] =$$

$$= (\pi/12)\, a^2\, [3l - l^3/4c^2]$$

mas sabemos que los valores de x y z se relacionan en el elipsoide en la forma:

$$\frac{l^2/4}{c^2} + \frac{b^2/4}{a^2/4} = 1, \text{ es decir: } c = l\,(1 - b^2/c^2)^{-1/2}/2$$

entonces, encontramos que el volumen queda en la forma:

$$V = (\pi/12)a^2 \left[3l - \frac{l^3[1 - b^2/a^2]}{l^2} \right] =$$

$$= (\pi/12)\, a^2\, [3 - (1 - b^2/a^2)]\, l =$$

$$= (\pi/12)\, (3a^2 - (a^2 - b^2))\, l =$$

$$= (\pi/12)\, (2a^2 + b^2)\, l$$

Es decir, encontramos directamente la fórmula anterior.

Insistimos en la apreciación de que estos cálculos responden a modelos matemáticos del problema, no son exactamente una transcripción de la realidad; pues la curva que delimita cada duela no debe coincidir con exactitud con las reseñadas. Además, con lo anterior sólo podemos justificar una única fórmula entre las enumeradas; y para encontrar un fundamento de algunas otras habremos de recurrir a otras técnicas.

En esencia nos valdremos de una versión depurada del conocido Principio de Cavalieri. Según éste: *Si en dos cuerpos de igual altura las áreas de las secciones por planos paralelos a la base son iguales, ambos tienen el mismo volumen (J. García Arenas y C. Bertran Infante, pág. 151).* De forma más general: *Si tres sólidos comprendidos entre los planos $z = 0$ y $z = h$ dan, al ser cortados por una plano $z = k$, tres secciones cuyas áreas son, respectivamente $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ y además se tiene: $f(z) = \alpha g(z) + \beta h(z)$, con α y β constantes se verifica que $V_1 = \alpha V_2 + \beta V_3$, en donde V_1, V_2, V_3 son los volúmenes de los tres sólidos (A. Palacio Gros, pág 884).*

Entonces podemos hacer uso de lo anterior para explicar fórmulas tales como las (2), (4) y (6) de 3.. Comencemos describiendo con mayor precisión la fórmula (6), recogida de *Basas Fernández*. Tendremos que:

$$V_6 = ((a-b)0{,}625 + b\,)^2\; 0{,}7854\; l =$$

$$= ((a-b)\; 0{,}625 + b)^2\; (3{,}1416/4)\;\; l =$$

$$= (\pi/4)\; l\;\; (0{,}625a + 0{,}375b)^2 =$$

$$= (\pi/4)\; l\; [(a-b)\; (5^4/1000) + b]^2 =$$

$$= (5^6/1000^2)\; (\pi/4)\; l\;\; (5a + 3b)^2 =$$

$$= (1/64)\; (\pi/4)\; l\, (25a^2 + 9b2 + 30ab)$$

y sustituyendo ab por $(a^2 + b^2)/2$ encontramos que:

$$V_6 \cong (1/64)\; (\pi/4)\; l\, (40\, a^2 + 24\, b^2) =$$

$$= (\pi/12)\; l\, (15a^2 + 9b^2)/8$$

Otra de las fórmulas de *Basas Fernández* es:

$$V'_6 = ((a-b)\; 0{,}667 + b)^2\;\; 0{,}7854\; l =$$

$$= (\pi/4)\; l\;\; (\,(a-b)(1/3) + b)^2 =$$

$$= (\pi/36)\; l\;\; (a + 2b)^2 = (\pi/36)\; l\;\; (a^2 + 4ab + 4b^2)$$

y tomando 4ab por $2(a^2 + b^2)$ quedará:

$$V'_6 = (\pi/12)\ l\ (a^2 + 2b^2)$$

que es la misma fórmula (2) sustituyendo a por b.

Entonces escojamos los tres sólidos siguientes: el tonel, un cilindro de base circular de diámetro a y altura l y un cilindro de base circular de diámetro b y de altura l. Cortando por un plano perpendicular al eje de las duelas quedarán las secciones que siguen:

g(z), área de la sección del tonel,
$f(z) = \pi a^2/4$, área de la sección del primer cilindro, y
$h(z) = \pi b^2/4$, superficie de la sección del segundo cilindro.

Admitimos por otra parte, la hipótesis evidente que:

$$g(z) = \alpha f(z) + \beta h(z), \quad \text{con } \alpha + \beta = 1$$

Entonces los volúmenes respectivos vendrán dados en relación a:

$$V_{tonel} = \alpha\ \pi l\, a^2/4 + \beta\ \pi\ l\ b^2/4; \text{ es decir:}$$

$$V_{tonel} = (\pi l/12)\ (3\alpha a^2 + 3\beta b^2)$$

Entonces, escogiendo los valores $\alpha = 2/3$ y $\beta = 1/3$ encontraremos la fórmula (2). Para $\alpha = 5/8$ y $\beta = 3/8$ aparece la primera fórmula recogida de Basas Fernández, en la que, de nuevo, encontramos que $\alpha + \beta = 1$. Para $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$ aparece la fórmula anterior modificada. Escogiendo $\alpha = 3/5$ y $\beta = 2/5$ encontraremos otra de las fórmulas recogidas por dicho autor. Y, por último, la fórmula (4) se obtendrá de la recogida en párrafos anteriores, tomando $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1/2$.

En todo caso, hemos encontrado que el volumen real del tonel se obtiene como combinación lineal de la forma $\alpha V^1 + \beta V^2$, siendo $\alpha + \beta = 1$, y V^1, V^2 los volúmenes respectivos de dos cilindros circulares que aproximan el volumen deseado por defecto y por exceso. La adecuada elección de los parámetros α y β determinará el mejor o peor ajuste al valor real del volumen que nos interesa evaluar.

Aforo Diagonal de un barril: modelo canario de medición de su capacidad

El procedimiento de *Aforo Diagonal* consiste en medir la distancia L que se extiende entre la boca del barril horadada en su vientre hasta el extremo más alejado de uno de los fondos; a continuación se eleva el valor calculado al cubo y se multiplica el resultado por el factor corrector 0,625, obteniéndose de esta forma el volumen:

$$V_8 = 0{,}625.L^3$$

Esta fórmula, recogida por numerosos textos de geometría elemental *(Dalmau Carles, J. Estévez, Morroyo y Gago, Bruño, etc.)* es la que se utilizaba en Canarias, en ejercicio de maestros de tonelería y viticultores expertos, y, según recoge Morroyo y Gago:

En la práctica, la distancia L se mide con una varilla graduada, que tiene por una cara divisiones que dan la longitud L y por la otra el volumen que corresponde a cada división, y por consiguiente se halla dicho volumen, introduciendo dicha varilla por el agujero hasta que su extremo toque en el punto más bajo de cualquiera de los fondos, y haciendo lectura correspondiente se tiene el volumen pág. 448.

La fórmula del volumen obtenida por Aforo Diagonal desconoce una formalización matemática rigurosa, y habremos de otorgarle un origen y fundamento empíricos. Sin embargo, debemos de reconocer que su frecuente uso se encuentra bien extendido en distintas comarcas y en diferentes épocas. Así, en El País Vasco Basas Fernández ha recogido este método, que era conocido con el nombre de *vergar*. Reconoce el autor que:

La verga venía a ser como una especie de tara de una barrica, cuya capacidad se medía con la verga, que era un instrumento, una barra metálica que se introducía, indicando o señalando la cantidad de vergas que contenía.

Esto era lo que se llamaba *vergar* un líquido o un recipiente que lo contenía. De donde venía el oficio de *vergador*. pág. 52.

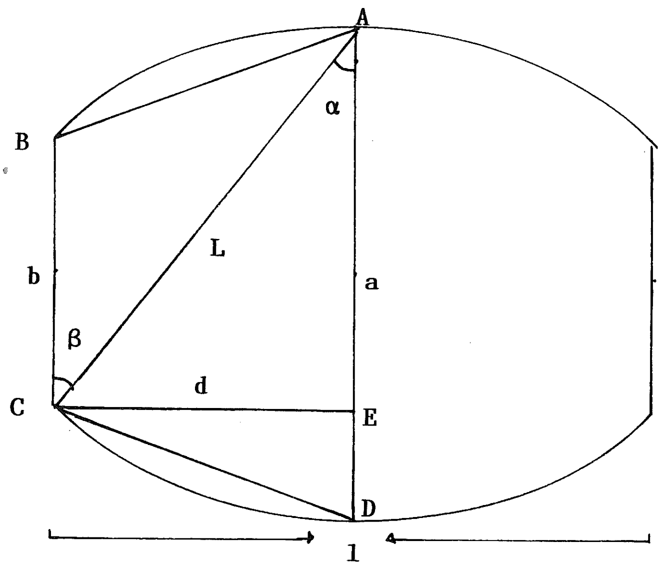
Según dicho autor en la *... alhóndiga de Bilbao... la verga equivalía a 14 libras... pág. 37.*

Por otra parte el Aforo Diagonal debió de usarse desde tiempos remotos, pues en textos de geometría y aritmétrica diciochescos encontramos trazas de métodos similares, utilizados en la medición de la capacidad encerrada por barriles y toneles. En particular, conocemos la existencia de la vara vinaria utilizada en aforos de barricas según recoge P. Giannini en su obra *Práctica de Geometría y Trigonometría* de 1784. Expone el autor que:

Por la vara vinaria se medirá con mas precision, por tratar la cuba como esferoide; i porque la tengo presente, daré aora su fabrica, i uso. Hacese la vara vinaria, para medir con brevedad, i saber las arrobas ó cantaros de vino, agua, aceite, ó cualquier liquido, que caben en una cuba. A cuyo fin se tiene bien sabido el solido de una cierta medida del licor; i por aora supongo que una arroba castellana de vino ocupa, ó tiene de solidéz, un cubo ó dado de 13 dedos, tambien Castellanos, por un lado.

Tomo una regla, ó vara de bastante longitud, v. g. de 11 palmos, que es a lo que alcanza la tabla q voi à dar, i en la una parte pongo divisiones iguales de 13 en 13 dedos, hasta 10 i aun puedo dividir los intervalos en ocho partes iguales, que seran azumbres: a cada senal se pondrá numeros 1. 2. 3. etc. en la otra parte de la vara se pondrán las divisiones, que llaman de planos, que proceden de las diagonales de los cuadrados dobles; el primer numero, ó arroba a 13 dedos; el segundo la diagonal del cuadrado de 13 dedos; el tercero la diagonal del segundo cuadrado, i assi de los demás. Pero por la tabla siguiente, calculada á esse, i á otros fines, se assignarán los planos, hasta el numero que se quiera. El intervalo, ó linea total de 13 dedos dividiré en 100 partes, pomendo alli numero 1 a la 147 pondré 2 á las 173 pondré 3 etc. como se vé. pág. 59.

La vara vinaria medía la capacidad en arrobas, azumbres o cuartillos; unidades de medida anteriores a la introducción del Sistema Métrico Decimal, pero en su explicación encontramos el fundamento básico de este Aforo Diagonal. Otros métodos de medición de volúmenes de cubas o toneles con el uso de varas de medir también nos son conocidos con anterioridad a 1849, fecha en que se dicta la Real Orden por la que se introducía el SMD en España. Como ejemplos señalemos los recogidos por *Bordazar de Artazu*, en su tratado de 1736 o por *J. Justo García* en su texto de 1815. Con todo, la explicación rigurosa de la fórmula 0.625. L^3 la podemos detallar como sigue:



La figura representa la mayor sección del tonel, y en élla se han señalado los elementos que necesitaremos en la demostración. Aplicando el teorema del coseno en los triángulos ACD y ABC quedará:

$$a^2 + L^2 - 2a\cos\alpha = d^2$$
$$b^2 + L^2 - 2b\cos\beta = d^2$$

Mas, siendo α y β ángulos alternos, serán iguales y tendremos:

$$a^2 + L^2 - 2a\cos\alpha = b^2 + L^2 - 2b\cos\alpha$$
$$a^2 - b^2 = 2(a-b)\, L \cos\alpha$$
$$a + b = 2L \cos\alpha$$

es decir: $L = (a+b)/2\cos\alpha$

Por otra parte, según el teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo ACE será:

sen $\alpha = l/2L$, es decir:

$$\cos \alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-(l/2L)^2}$$

con lo cual, será:

$$L = \frac{a+b}{\sqrt{4-(l/L)^2}} \quad \text{ó} \quad \sqrt{4L^2 - l^2} = (a+b)$$

$$4L^2 = l^2 + (a+b)^2 \quad \text{ó} \quad L = \sqrt{(a+b)^2 + l^2}\,/2$$

y por tanto el volumen que da el aforo vendrá dado por:

$$V_8 = 0{,}625\,[\,(a+b)^2/2 + [l/2]^2]^{3/2}$$

Como podemos comprobar, encontramos una fórmula que no admite comparación directa con las otras recogidas anteriormente, y que dificilmente puede interpretarse geométricamente. Sólo aventuramos que se trata de una fracción del volumen de un cubo que tiene por lado la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos (a +b)/2 y l/2. Con todo reiteramos el uso intensivo, aunque empírico, que dicha fórmula ha concitado en nuestras comarcas vitivinícolas.

Bibliografía

* BASAS FERNÁNDEZ, M. **Antiguos sistemas de pesos y medidas**. Caja de Ahorros Vizcaína. Bilbao. 1980.

* BERTRÁN INFANTE, C. GARCÍA ARENAS, J. **Geometría y Experiencias**. Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra. Ed. Alhambra. Madrid. 1987.

* BORDAZAR DE ARTAZU, A. **Proporción de monedas, pesas i medidas, con principios practicos de Arithmetica i Geometría para su uso.** Valencia. 1736.

* CISCAR CISCAR, G. *Curso de Estudios Elementales de Marina, Tomo II que contiene el Tratado de Geometría.* Imprenta Real. Madrid. 1803.

* COINDRE, A. **Aritmétique: Leçons accompagnées d'exercises oraux et de devoirs écrits**. Impr. et Libraire Edouard Privat, Touluse.

* DALMAU CARLES, J. **Lecciones de Aritmética. Grado Superior.** Dalmau Carles Pla S. A. Gerona. 1894.

* DERRY, T. K. - WILLIAMS, T. J. **Historia de la Tecnología**. Siglo XXI de España Editores S. A., Madrid. 1986.

* ESTEVEZ MENDEZ, J. **Problemas de Matemáticas**. Santa Cruz de Tenerife. 1959.

* GIANNINI, P. **Prácticas de Geometría y Trigonometría**. Segovia. 1784.

* GUÍA DE LA ARTESANIA DE EXTREMADURA, Ministerio de Industria y Energía, Consejería de Industria y Energía de la Junta de Extremadura, Madrid, 1986.

* INSTRUCCIÓN REGLAMENTARIA PARA EL SERVICIO DE LAS ADUANAS EN LO DE LA ISLA DE CUBA, Imprenta del Gobierno y Real Hacienda por S. M., La Habana, 1847.

* INTEGRAL, Número 14 **El Hombre y la Madera**. Barcelona. 1986.

* JUSTO GARCÍA, J. **Elementos de Aritmética, Algebra y Geometría**. Imprenta de D. Vicente Blanco. Salamanca. 1815.

* LECCIONES ELEMENTALES DE GEOMETRÍA SEGUNDO GRADO. Ed. Bruño, Madrid.

* MARIANO VALLEJO, J. **Compendio de Matemáticas**. Imprenta de Estévan. Valencia. 1819.

* MARTÍNEZ MASSA, P. **Toneleros de Montilla**. Diario EL País. Suplemento Dominical. 11 de septiembre de 1988. Pág. 28.

* MITRINOVIC, D. S. **Elementary Inequalities**. P. Noordhoff Ltd. Groningen. 1964.

* MORROYO Y GAGO, B. **Tratado Elemental de Geometría**. Imprenta y Librería Moderna. Logroño. 1916.

* ORTIZ GARCÍA, C. - FERNÁNDEZ MONTES, M. **Dos oficios tradicionales de Madrid: La Hojalatería y la Tonelería**. Diputación Provincial de Madrid. Madrid. 1980.

* PALACIO GROS, A. **Ejercicios de Matemáticas**. Universidad Central de Venezuela. Ediciones de la Biblioteca. Caracas, 1968.

José Manuel González Rodríguez
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna