Grafos a través de juegos

María Inés Sobrón Fernández
María Candelaria Espinel Febles

El objeto del presente artículo es presentar, partiendo de juegos, algunos problemas que incentiven el enfoque de una situación desde distintos ángulos. Concretamente el trabajo se estructura en tres epígrafes, correspondiendo cada uno a un juego: I. Pasar la pelota en un corro. II. El juego de las cerillas. III. Hundimiento de barcos. En cada epígrafe se comienza planteando el problema en forma intuitiva, introduciéndose a continuación los conceptos, relacionados con las cuestiones suscitadas, de los distintos campos de la matemática: Geometría, Álgebra, Combinatoria, Teoría de Grafos, Programación Lineal, Computación, etc. Adicionalmente se presentan algunos resultados que facilitan el análisis del problema.

Introducción

Con frecuencia una misma idea puede llevar a desarrollos muy distintos según el ámbito en que ésta surja o la utilidad que se le piense dar. Los modelos matemáticos más fructíferos en el campo del pensamiento humano son aquellos que presentan un mismo problema bajo distintos puntos de vista. Además, los de fácil comprensión, aunque conlleven problemas difíciles, son un estímulo para la creatividad y un extraordinario instrumento para la enseñanza.

El objeto del presente artículo es presentar, partiendo de juegos, algunos problemas que incentiven el enfoque de una situación desde distintos ángulos. Concretamente el trabajo se estructura en tres epígrafes, correspondiendo cada uno a un juego: I. Pasar la pelota en un corro. II. El juego de las cerillas. III. Hundimiento de barcos.

En cada epígrafe se comienza planteando el problema en forma intuitiva, introduciéndose a continuación los conceptos, relacionados con las cuestiones suscitadas, de los distintos campos de la matemática: Geometría, Álgebra, Combinatoria, Teoría de Grafos, Programación Lineal, Computación, etc. Adicionalmente se presentan algunos resultados que facilitan el análisis del problema.

Pasar la pelota en un corro

Consideremos que se traza una circunferencia en el patio de un colegio y sobre ella, aproximadamente equidistantes, se sitúan n niños que se numeran consecutivamente en el sentido de las agujas del reloj. El juego consiste en pasarse la pelota cumpliendo alguna regla determinada, por ejemplo, cada niño debe lanzarla al que está d lugares más avanzado que él.

Si representamos gráficamente el juego, obtenemos figuras que desde el punto de vista de la geometría reciben el nombre de polígonos. Por ejemplo, si $n = 8$ y consideramos los casos $d = 2$ y $d = 3$, obtenemos la figuras 1 y 2 que se denominen respectivamente *estrella* $\left\{ \begin{smallmatrix} 8 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ y *polígono estrellado*

$\left\{ {8 \atop 3} \right\}$. Si interpretamos los niños como vértices y las trayectorias de la pelota como aristas entre los vértices, las figuras anteriores reciben el nombre grafos.

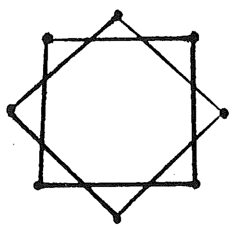


Figura 1

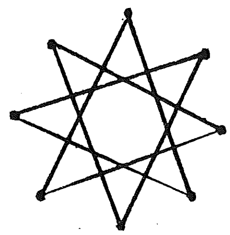


Figura 2

En relación con el juego surgen las siguientes cuestiones. ¿En qué situaciones la pelota llega a todos los niños? ¿Cuántos lanzamientos hay que realizar para que la pelota vuelva a quien inició el juego? Precisamos a continuación las ideas expuestas para polígonos y para grafos.

Un *polígono estrellado* es la figura formada al unir por rectas los puntos que resultan de dividir la circunferencia en *n* partes iguales, partiendo de uno dado y contando de *d* en *d*. Se representa por $\left\{ {n \atop d} \right\}$, siendo *d* la *densidad* del polígono. Para $d = 1$ se tiene el polígono regular de *n* lados. Se llama orden o *género* al número *g* de rectas o *cuerdas* necesarias para volver al punto de partida.

Se pueden presentar los siguientes casos:

1] *n* es múltiplo de *d*. En este caso se obtiene un polígono de género, $g = n/d$.

A la figura que resulta de dibujar todos los polígonos de la misma densidad, para un determinado valor de n, se les llama polígono de segunda especie o sencillamente *Estrella*. La figura 1 se representa la estrella correspondiente a $n = 8$, $d = 2$, $g = 8/2 = 4$.

2] $n \neq d$, pero *n* y *d* no son primos entre si. Sea $k = m.c.m.(n,d)$, entonces $g = n/k$. En el ejemplo de la figura 3, $n = 10$, $d = 4$, $m.c.d.\ (10,4) = 2$, $g = 10/2 = 5$.

3] *n* y *d* son primos entre sí. En este caso $g = n$ y se obtiene un polígono de *n* lados, en el que la circunferencia es recorrida *d* veces. En el ejemplo de la figura 2, $n = 8$, $d = 3$, $m.c.m.\ (8,3) = 1$, $g = 8$.

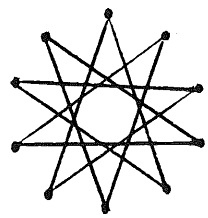


Figura 3

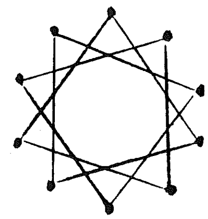


Figura 4

A los polígonos que resultan de los casos 2] y 3] es a los que propiamente se les llama *polígonos estrellados* o de primera especie. En estos casos, el polígono se forma con una sola línea poligonal. El polígono $\left\{ {n \atop d} \right\}$ se considera el mismo que $\left\{ {n \atop n-d} \right\}$ pero trazado en sentido inverso.

La figura 4 corresponde al polígono estrellado $\left\{ {10 \atop 3} \right\}$.

La idea de unir puntos situados sobre una circunferencia se puede trasladar fácilmente a la teoría de grafos.

Un grafo no dirigido G = (V,E) es una estructura que consta de un conjunto finito V de elementos llamados *vértices* y de un conjunto E de pares no ordenados de vértices llamadas *aristas*. Se llama *grafo complementario* G de un grafo G, al grafo formado por los vértices de G y por las aristas que no están en G. Al número de aristas que inciden en un vértice se le llama *grado*.

Algunos grafos reciben nombres especiales. Un grafo con n vértices se dice *completo* si y sólo si para cada par de vértices existe una arista que los relaciona, se indica por K_n. Un grafo en el que todos los vértices tinen el mismo grado se llama *regular*.

Un *ciclo* es una sucesión de aristas donde el vértice inicial y final coinciden. C_n simboliza un ciclo de longitud $n > 3$. Una *cuerda* de un ciclo es una arista que une dos vértices no consecutivos en el ciclo.

Un grafo con *n* vértices, $n \geq 4$, que es un ciclo sin cuerdas se llama un *agujero* y se indica por H_n. El grafo complementario de un agujero H_n^d se le llama *antiagujero*, $\overline{H}_n$. Indicaremos por H_n un agujero de n vértices y cuerdas de longitud *d*.

Un grafo con *n* vértices, $n \geq 3$, se llama *tela de araña*, A_n^d, si para cada vértice $i \in \{1,2,\dots,n\}$ existe una arista que le relaciona con los vértices $i+d$, $i+d+1$, $i+d+2,\dots,i+n-d$ (las sumas se toman módulo n), siendo $1 \leq d \leq [n/2]$. Al grafo complementario $\overline{A}_n^d$ se le llama *antitela de araña*.

Si consideramos que los n vértices están situados sobre una circunferencia, siguiendo la notación de los polígonos estrellados, un grafo completo se representaría:

$$K_n = \left\{\begin{matrix} n \\ 1\ 2\ \dots\ [n/2] \end{matrix}\right\}$$

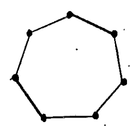
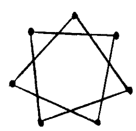
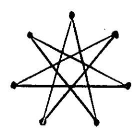
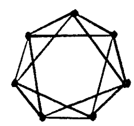
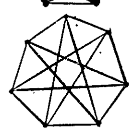
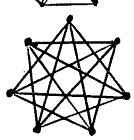
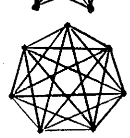
Un ciclo tendrá la notación:

$$C_n = H_n = \left\{\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right\}$$

Mientras que la tela de araña y la antitela de araña quedarían, respectivamente:

$$A_n^d = \left\{\begin{matrix} n \\ d\ \ (d+1)\ \dots\ ([n/2]-d) \end{matrix}\right\} \quad \text{y} \quad \overline{A}_n^d = \left\{\begin{matrix} n \\ 1\ 2\ \dots\ (d-1) \end{matrix}\right\}$$

Para $n = 7$ se pueden presentar los siguientes casos:

Especie	**Polígono**	**Grafo**	**Nombre**	**Dibujo**
$\left\{\begin{matrix} 7 \\ 0 \end{matrix}\right\}$		$\overline{A}_7^1$	Grafo desconexo	
$\left\{\begin{matrix} 7 \\ 1 \end{matrix}\right\}$	Polígono	$\overline{A}_7^2 = C_7$	Antitela de araña o ciclo	
$\left\{\begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix}\right\}$	Polígono Estrellado	H_7^2	Agujero	
$\left\{\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix}\right\}$	Polígono Estrellado	$H_7^3 = A_7^3$	Agujero o tela de araña	
$\left\{\begin{matrix} 7 \\ 1\ 2 \end{matrix}\right\}$		$\overline{H}_7^3 = \overline{A}_7^3$	Antiagujero o Antitela de araña	
$\left\{\begin{matrix} 7 \\ 1\ 3 \end{matrix}\right\}$		$\overline{H}_7^2$	Antiagujero	
$\left\{\begin{matrix} 7 \\ 2\ 3 \end{matrix}\right\}$		A_7^2	Tela de araña	
$\left\{\begin{matrix} 7 \\ 1\ 2\ 3 \end{matrix}\right\}$		A_7^1	Tela de araña	

El juego de las cerillas

A partir de un montón de cerillas, dos jugadores que actúan alternativamente, van retirando en cada jugada una, dos o tres cerillas. Gana el juego quien consigue dejar en el montón una sola cerilla.

Como veremos, el análisis de esta situación tan sencilla genera gran número de conceptos: juego de información perfecta, grafo dirigido, circuitos de un grafo, juego de Nim, conjuntos internamente estables, conjuntos externamente estables, núcleo de un grafo, función de Grundy.

Este juego es un ejemplo de *juego de información perfecta*. Un juego se dice de información perfecta, cuando jugándose alternativamente entre dos o más jugadores, estos conocen de antemano tanto todos los estados del juego como todas las jugadas que se pueden realizar desde cada estado. Cuando dichas jugadas son las mismas para todos los jugadores el juego se dice *equilibrado*.

En el estudio de muchos juegos resulta muy útil su modelización mediante un grafo. Un *grafo dirigido* G = (V,E) es un par formado por un conjunto finito V, cuyos elementos se denominan *vértices*, y otro conjunto $E \subset V \times V$, cuyos elementos se denominan *arcos*.

Para el análisis de nuestro juego, consideraremos el grafo cuyos vértices son los estados del juego, es decir, el número de cerillas *n* con que se inicia el juego y el número de cerillas que pueden permanecer en el montón a lo largo de su desarrollo,

$$V = \{1, 2,..., n\}$$

y los arcos son los pares ordenados de estados entre los que la transición del primero al segundo es posible en una jugada,

$$E = \{ (n,k) / n \in V \wedge k \in V \cap \{(n-1), (n-2), (n-3)\} \}.$$

Si consideramos $n = 16$, podemos representar el juego mediante el grafo de la figura 5.

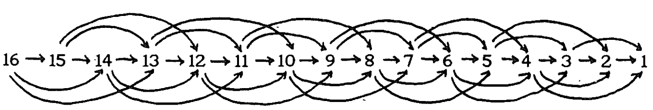


Figura 5

Un juego se dice que es un *juego de NIM*, cuando es un juego de información perfecta que se puede representar mediante un grafo dirigido. En estos juegos resulta vencedor quien conduce el juego a un vértice final, es decir un vértice $u \in V$ tal que $\forall v \in V, (u,v) \notin E$.

Nuestro juego evidentemente es un juego de NIM. Muchos otros también pertenecen a esta clase: ajedrez, damas, tres en raya, juegos de Marienbad, etc.

Se llama *circuito*, en un grafo dirigido, a un conjunto de arcos $\{(u_i, v_i)\}$, i = 1,...,n, tal que $v_n = u_0$ y $v_i = u_{i+1}$, $\forall i = 1,...,n-1$. Claramente todo juego de Nim cuyo grafo no tiene circuitos, como ocurre en nuestro juego, finaliza con un ganador.

Nuestro objetivo es la caracterización de las posiciones ganadoras del juego, es decir, aquellos vértices que debe elegir un jugador para vencer independientemente de las jugadas de su oponente.

En esta dirección tienen especial importancia los conceptos de *conjunto internamente estable*, *conjunto externamente estable* y *núcleo* de un grafo. Un conjunto de vértices se dice internamente estable, si siempre que un jugador elija uno de sus vértices obliga a que su contrario no pueda elegir ningún vértice de dicho conjunto. Un conjunto de vértices se dice externamente estable, si desde cualquier vértice de su complementario es posible elegir uno de sus vértices. Evidentemente todo conjunto externamente estable contiene todos los vértices finales del grafo. Un conjunto, $S \subset V$, que sea a la vez externamente estable e internamente estable se llama *núcleo del grafo*.

De acuerdo con estas ideas, la determinación de un nucleo S del grafo, si existe, proporciona una estrategia no perdedora para el jugador que consiga situar el juego en uno de sus vértices. Si un jugador A elige un vértice $v_1 \in S$, o bien es un vértice final (triunfo), o bien obliga a su oponente B a elegir un vértice $v_2 \in V - S$. Entonces el jugador A puede elegir nuevamente un vértice $v_3 \in S$, etc. El juego termina cuando uno de los dos jugadores elige un vértice final v_k y puesto que $v_k \in S$ el jugador ganador no puede ser B. Además si el grafo no tiene circuitos, la anterior estrategia conduce claramente al triunfo.

De forma más precisa, en un grafo G = (V, E), un conjunto $I \subset V$ se dice que es internamente estable o independiente, si y sólo si,

$$u, v \in I \Rightarrow (u,v) \notin E \wedge (v,u) \notin E \qquad [1]$$

Un conjunto $J \subset V$ se dice *externamente estable o dependiente*, si y sólo si, verifica:

$$\forall\, u \notin J\ \exists\ v \in J \text{ tal que } (u,v) \in E \qquad [2]$$

Un conjunto de vértices se dice que es *núcleo* del grafo, si y sólo si, verifica las propiedades [1] y [2].

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, nuestro interés debe centrarse en encontrar, si existen, los núcleos del grafo. Ahora bien, un grafo sin circuitos posee núcleo y además es único, como ocurre en el grafo que nos interesa.

Una buena ayuda a la hora de determinar los núcleos de un grafo es proporcionada por la *función de Grundy*.

Dado un grafo dirigido G = (V,E), se define la función de Grundy, como una función $g: V \rightarrow N \cup \{0\}$ cumpliendo la condición:

$$g(v) = \text{Min}\ \{\, n \ /\ n \notin \{\, g(u) \ /\ (v,u) \in E \,\}\,\}.$$

El valor de la función de Grundy *g* en un vértice *v*, es el menor de los números naturales, incluido el cero, que no ha sido asignado por la función de Grundy *g*, a ninguno de sus vértices siguientes.

Así puede no existir función de Grundy y puede no ser única.

Un ejemplo de grafo con más de una función de Grundy es el representado en la figura 6, donde el valor de la función se escribe junto al vértice correspondiente.

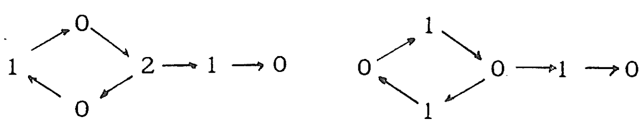


Figura 6

Si un grafo tiene función de Grundy g, entonces tiene un núcleo

$$S = \{\, v \in \ /\ g(v) = 0 \}$$

puesto que este conjunto satisface simultáneamente [1] y [2]:

$$v \in S \Leftrightarrow g(v) = 0 \Rightarrow \text{Min}\ \{\, g(u) \ /\ (v,u) \in E \,\} > 0$$

$$\Rightarrow u \notin S\ \forall\, u \in V \text{ tal que } (v,u) \in E;$$

$$v \notin S \Leftrightarrow g(v) > 0 \Rightarrow \text{Min}\ \{\, g(u) \ /\ (v,u) \in E \,\} = 0$$

$$\Rightarrow \exists\ (v,u) \in E \text{ tal que } u \in S.$$

El recíproco no es cierto. En la figura 7 se representa un grafo que no tiene función de Grundy aunque tiene núcleo S = {d}.

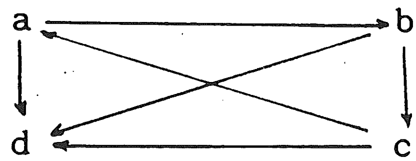


Figura 7

Un grafo sin circuitos, como el de nuestro juego, posee una única función de Grundy. Por tanto un juego de NIM cuyo grafo asociado no tenga circuitos, puede analizarse completamente mediante un mecanismo teóricamente sencillo: se calcula la función de Grundy y, a partir de ella, se halla el núcleo del grafo, que son los vértices para los que la función de Grundy valen cero.

Si el punto de partida del juego es un vértice que no pertenece al núcleo, gana el primer jugador, siempre que en todas sus jugadas elija vértices del núcleo; por el contrario, si el juego se inicia en un vértice del núcleo, gana el jugador que actúe en segundo lugar siguiendo la misma estrategia.

En nuestro ejemplo, con *n = 16* cerillas, la función de Grundy se define de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lllll} g(1) = & g(5) = & g(9) = & g(13) = & 0 \\ g(2) = & g(6) = & g(10) = & g(14) = & 1 \\ g(3) = & g(7) = & g(11) = & g(15) = & 2 \\ g(4) = & g(8) = & g(12) = & g(16) = & 3 \end{array}$$

por tanto el núcleo del grafo es

$$S=\{1, 5, 9, 13\}$$

y puesto que el vértice inicial «16» no pertenece al núcleo, ganará el primer jugador si sigue la estrategia indicada, que en las sucesivas jugadas le conducirá a los vértices: 13, 9, 5, 1; independientemente de la actuación de su oponente.

En general, si se comienza con n cerillas, la función de Grundy queda definida por:

$g(4k+1) = 0$ para $k \in N$ tal que $4k+1 \leq n$
$g(4k+2) = 1$ para $k \in N$ tal que $4k+2 \leq n$
$g(4k+3) = 2$ para $k \in N$ tal que $4k+3 \leq n$
$g(4k) = 3$ para $k \in N$ tal que $4k \leq n$

y el núcleo es el conjunto:

$$S = \{4k+1 \ / \ k \in N \wedge 4k+1 \leq n\}.$$

Por tanto, siguiendo la estrategia acertada, el primer jugador vence si $n \neq 4+1$ y pierde en caso contrario.

Hundimiento de barcos

A partir de un rectángulo dividido en *m x n* casillas, un jugador marca un número determinado de casillas, simulando que esas posiciones están ocupadas por barcos, con la condición de no marcar casillas adyacentes. El segundo jugador, en cada jugada, dispara sobre una de las casillas, pudiendo ser el resultado:

a] hundir el barco, si dispara a la casilla donde se encuentra,
b] tocar algunos barcos, si dispara a una casilla adyacente a ellos,
c] hacer agua, si el resultado no se encuentra entre los anteriores.

El objetivo del juego es hundir todos los barcos con el mínimo número de disparos.

El juego puede representarse mediante un rectángulo convenientemente cuadriculado, por ejemplo, si $m = 4$ y $n = 6$ tendremos la figura 8.

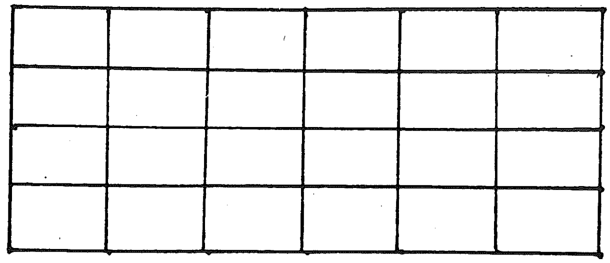


Figura 8

También se puede representar por una matriz

$$(a_{ij}),\ i = 1, 2, 3, 4;\quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

o bien por un grafo no dirigido, como el de la figura 9, donde los vértices son las casillas, simbolizadas por los pares

$$(i,j),\ i = 1, 2, 3, 4;\quad j= 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

y dos vértices están conectados si las casillas son adyacentes:

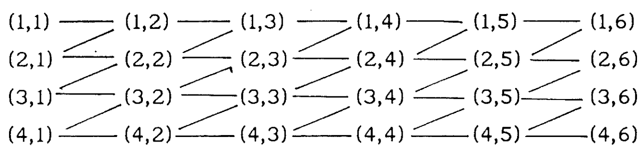


Figura 9

Dependiendo de la representación elegida, cada colocación de los barcos es un subconjunto de cuadriculas, elementos de la matriz o vértices del grafo, cumpliendo la condición establecida. Sea $\mathfrak{C}_0$ la clase de dichos subconjuntos, es decir: $A \in \mathfrak{C}_0$, si y sólo si, para todo par de elementos a, b de A, estos no son adyacentes. Claramente si $A \in \mathfrak{C}_0$ y $B \subset A$, entonces $B \in \mathfrak{C}_0$; propiedad que se expresa diciendo que la clase $\mathfrak{C}_0$ de poposiciones de los barcos es una *clase hereditaria*.

Si consideramos el grafo $G = (V,E)$, siendo

$$V = \{ (i,j) \ / \ i = 1,2,\ldots,4 \ j = 1,2,\ldots,6\}$$

$$((i,j),(s,t)) \in E \Leftrightarrow |i-s| \leq 1 \wedge |j-t| \leq 1$$

en el lenguaje relativo a grafos, la clase $\mathfrak{C}_0$ está formada por los conjuntos independientes del grafo.

Consideraremos algunos problemas que se pueden formular en relación con este juego.

El problema de determinar el número máximo de barcos que se pueden colocar, es equivalente al problema de calcular el cardinal de los elementos maximales de la clase $\mathfrak{C}_0$. Número que puede determinarse resolviendo el problema de programación lineal binaria:

$$\text{Máximizar} \sum_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,6}} x_{ij}$$

sujeto a:

$$x_{ij} + x_{st} \leq 1 \text{ donde } i = 1,\dots,4;\ j = 1,\dots,6;$$

$$\text{y siendo } |i-s| \leq 1 \wedge |j-t| \leq 1 \quad (i,j) \neq (s,t)$$
$$\text{con } x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1,..,4, \quad j = 1,..,6$$

donde $x_{ij} = 1$ significa que en el vértice (i,j) se sitúa un barco, y $x_{ij} = 0$ en caso contrario.

En el intento de optimizar la eficacia de los disparos, parece razonable disparar aleatoriamente entre los vértices que pertenezcan a la intersección del mayor número posible de subconjuntos de la clase $\mathfrak{C}_0$.

Procediendo secuencialmente, si el barco blanco del disparo n-ésimo fue elegido entre los pertenecientes al mayor número posible de subconjuntos de la clase $\mathfrak{C}_{n-1}$, para el siguiente disparo consideraremos la clase $\mathfrak{C}_n$ cuya construcción dependerá del resultado del último disparo:

1] Si el disparo produce un *hundimiento*, la clase $\mathfrak{C}_n$ se obtiene de la clase $\mathfrak{C}_{n-1}$ suprimiento los elementos que no contengan el barco hundido.

2] Si el resultado fue *agua*, la clase $\mathfrak{C}_n$ estará formada por los elementos de $\mathfrak{C}_{n-1}$ que no contengan ni el barco al que se disparó ni a ninguno de los adyacentes.

3] Por último, si el resultado del disparo es *tocó a k barcos*, $\mathfrak{C}_n$ se formará con los elementos de $\mathfrak{C}_{n-1}$ que contengan *k* barcos adyacentes al blanco del disparo.

Siguiendo esta estrategia, realizaremos el n+l-ésimo disparo contra uno de los barcos que pertenezcan al mayor número posible de subconjuntos de la clase $\mathfrak{C}_n$.

Evidentemente, si se fija de antemano el número de barcos, la clase $\mathfrak{C}_0$ debe restringirse considerando únicamente los subconjuntos de V que contengan el número de barcos señalados.

Otra cuestión a considerar en el juego es el número de barcos que le interesa colocar al primer jugador y donde debe colocarlos, para obligar a su oponente a realizar el número máximo de disparos.

Bibliografía

* BALAS, E - PADBERG, M.W. (1979) **Set Partitioning-a Survey**. Combinatorial Optimization. John Wiley & Sons.

* BERGE, C. (1973) **Graphs and Hypergraphs**. North - Holland.

* BRUÑO. (1978) **Geometría. Curso superior**. Bruño. Madrid.

* COXETER, H.S.M. (1969) **Fundamentos de geometría**. Limusa - Wiley.

* PUIG ADAM, P. (1973) **Geometría Métrica**. Vol I, Madrid.

* SÁNCHES GARCÍA, M. (1979) **Técnicas de Optimización Subsecretaria de Planificación**. Presidencia del Gobierno.

María Inés Sobrón Fernández
Universidad Complutense
María Candelaria Espinel Febles
Universidad de La Laguna