

Una experiencia con el Teorema de Pitágoras según Iowo

**Manuel Cortegoso Iglesias
Enrique Gómez Cabrero**

Introducción

Esta Unidad está englobada dentro de cuatro de geometría plana:

- El cuadrado y el rectángulo
- Triángulos
- El Teorema de Pitágoras
- Áreas de figuras planas

las cuales han sido llevadas al aula durante los tres últimos cursos en 1º de FP1 a razón de tres grupos en cada curso.

Las cuatro están pensadas para ser impartidas en la ESO.

Para la elaboración de la unidad del Teorema de Pitágoras, nos hemos basado en la unidad que con el mismo título hizo el grupo Holandés IOWO.

Su puesta en práctica en el aula se realiza utilizando retroproyector y transparencias en las que aparecen los dibujos que figuran en el texto, los cuales fueron pasados a transparencias por el Profesor Edelmiro Barreiro Gómez, del Departamento de Dibujo del Centro.

Los materiales utilizados han sido: cuerdas, papel milimetrado, calculadoras, geoplanos, puzzles de madera y barras de mecano.

Dado que en el Centro hay la Especialidad de Madera, esto nos permite contar con la colaboración de Profesores y Alumnos de esta Especialidad para construir los puzzles, cubos, y vaciados en madera a los que se hace referencia a lo largo de la unidad.

Metodología

Con el siguiente diagrama se inicia la Unidad, al cual se volverá siempre que sea necesario, con el fin de no perder la idea global de la historia.



A lo largo de la primera clase se da una visión global de la unidad, aclarando en las notas históricas, lo que puede haber de verdadero o de fantástico en esta historia. Como actividad complementaria a las notas históricas utilizamos como material de apoyo la película *El Pato Donald en el País de las Matemáticas* (véase Revista Suma nº 1, trabajo de José del Río Sánchez).

Durante las ocho clases siguientes los alumnos van resolviendo los problemas planteados, y al

finalizar cada uno de los problemas, se procede a una puesta en común por parte de toda la clase, no excluyendo en ningún momento cualquier tipo de solución.

A la hora de construir materiales por parte de los alumnos, concretamente la cuerda y el papel milimetrado, la experiencia nos dice que se rompe mucho el ritmo de la clase si los elaboran en el aula, por lo tanto es aconsejable que los construyan previamente en casa o si no proporcionárselo.

Notas históricas

Hace unos 2.500 años vivía en la antigua ciudad griega de Crotón en el Mediterráneo, un sabio llamado Pitágoras de Samos, todos los sabios griegos adoptaron como segundo nombre el de la ciudad donde nacieron así es que Pitágoras nació en la isla griega de Samos. Fue un hombre emprendedor que viajó mucho, estuvo en Egipto, Babilonia y se cree que incluso en la India.

Al regreso de sus viajes, Pitágoras contaba a sus amigos, cosas sobre lo que había visto.

Nadie sabe exactamente lo que ocurrió hace 2.500 años, pero con un poco de fantasía trataremos de contarte la historia del TEOREMA DE PITÁGORAS.

Si se sabe que Pitágoras no fue el primero que descubrió el teorema que lleva su nombre. Unos 1000 años antes ya había gente en Babilonia que lo conocía. Eso está demostrado en tablillas de barro con escritos de esa época.

Puede ser que Pitágoras fuera uno de los primeros que se preocuparon de la demostración del TEOREMA, pero eso tampoco es seguro. Después de él innumerables amantes de las matemáticas se han dedicado a hacer diversas demostraciones del TEOREMA. Así a lo largo del tiempo se han dado más de 100 demostraciones.

También es seguro que él fundó una ESCUELA, LA LLAMADA ESCUELA PITAGÓRICA, en la que además de dedicarse a las matemáticas estudiaban ASTRONOMÍA, MÚSICA, MÍSTICA Y RELIGIÓN.

Realmente Pitágoras era visto en la antigüedad más como un profeta que como un científico.

Sus seguidores, los pitagóricos, vivían con reglas muy estrictas; vivían como monjes en un monasterio y eran vegetarianos. Como emblema para reconocerse usaban la estrella de cinco puntas, el símbolo de la salud.

La influencia de los pitagóricos en el desarrollo científico de ese tiempo fue muy grande y tuvo su resonancia durante muchos siglos después. Se puede decir que los pitagóricos son los primeros en la historia de la Ciencia occidental en ejercer la actividad científica en equipo.

Tensadores de cuerda en Egipto

Durante una de sus clases Pitágoras mostró a sus amigos como los albañiles egipcios sabían trazar ángulos rectos con mucha exactitud.



1.- ¿Por qué sería tan importante en la construcción trazar ángulos rectos con mucha exactitud? ¿Tienes alguna idea de cómo lo hacen nuestros albañiles?

2.- Coge un trozo de cuerda y mide en ella 12 trozos iguales. Ata los extremos para obtener una cuerda cerrada con 12 nudos.

3.- Con esta cuerda puedes tensar un triángulo de tal manera que cada uno de los vértices coincida justamente con un nudo. A este triángulo lo llamaremos un *Triángulo de 12 nudos*. ¿Cuántos triángulos diferentes de 12 nudos puedes hacer?

4.- Dibuja esos triángulos de 12 nudos a escala y con precisión. Distancia entre los nudos 2 cm.

5.- ¿Cuál de esos triángulos usaron los tensadores de cuerda egipcios? ¿Por qué precisamente ese?.

6.- De uno de esos triángulos de 12 nudos puedes, sin medir ángulos, decir con mucha exactitud el tamaño de esos ángulos. ¿Qué triángulo es ese y qué tamaño tienen esos ángulos?

Pitágoras había enseñado así a sus amigos como los albañiles egipcios podían tensar un triángulo rectángulo con una cuerda de doce nudos. Pero esos amigos no se dejaron convencer así como así...



Para Pitágoras eso no era problema. Pitágoras dijo: *Naturalmente hay muchos triángulos de nudos que puedes hacer con menos de 12 nudos; en total hay 15. Pero entre ellos no hay ningún triángulo rectángulo...*

7.- Dibuja con precisión (usa regla y compás) esos 15 triángulos. Los triángulos rectángulos son, desde luego, raros. Se encuentran difícilmente, al menos si pretendes que la longitud de cada lado sea un número entero. Pitágoras conocía algunos y enseñó a sus amigos esta lista.

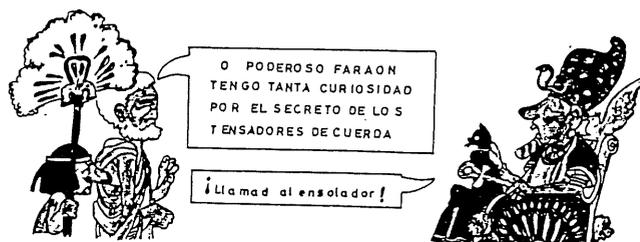
TRIANGULOS RECTANGULOS	
Nº DE NUDOS	LADOS
12	3, 4, 5
24	6, 8, 10
30	5, 12, 13
36	9, 12, 15
40	8, 15, 17

¿Cómo consiguió estos números?

Pitágoras y el ensolador del Faraón

Filolaios tenía muchas ganas de saber como su maestro había descubierto el secreto de los tensadores de cuerda. Pitágoras, que siempre estaba dispuesto a enseñar algo a los demás gustosamente accedió a contárselo:

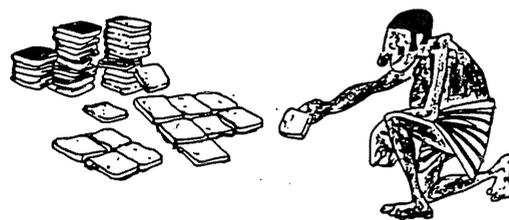
Debes saber que el día después de mi encuentro con los tensadores de cuerda fui recibido en el palacio del faraón de Egipto. Me arme de valor y...



El faraón mandó llamar a su ensolador y le pidió que trajera 2480 baldosas: 1240 blancas como el marfil y 1240 azules como el mar, pero todas de forma cuadrada.

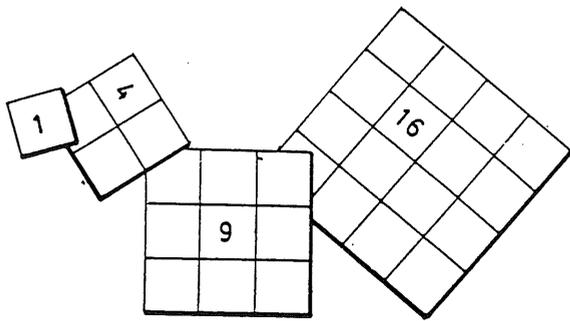
Y cuando el ensolador volvió con su carga de baldosas, el faraón le mandó formar el mayor número posible de cuadrados, pero todos diferentes de tamaño. Con las baldosas azules tenía que hacer lo mismo.

9.- Lee detenidamente el encargo al ensolador. ¿Cuántos cuadrados blancos diferentes podía colocar el ensolador?¹

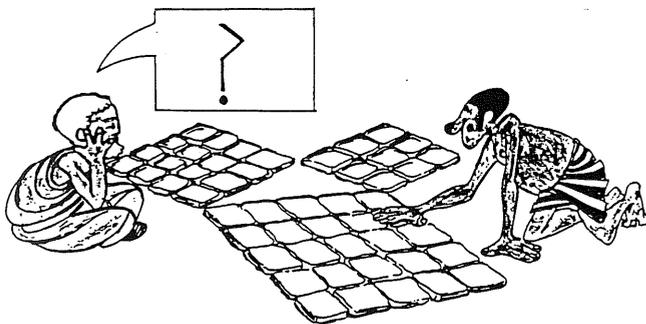


¹ Como actividad complementaria sugerimos que se utilice una demostración geométrica de la suma de los cuadrados que se encuentra en el libro del siglo XVII *La Llave de las Matemáticas* cuyo autor es Du Zhigeng, según un artículo aparecido en la Revista Suma nº 7 del que es autor Vicente Meavilla Seguí.

10.- Recorta los cuadrados del ensolador en papel milimetrado, colorea de azul el primer conjunto que hagas con los 1240 y deja sin colorear el otro conjunto de 1 240. Escribe en cada cuadrado el número de baldosas.



Cuando el ensolador hubo hecho su trabajo sin ningún error, pregunté al faraón por la relación entre los cuadrados del ensolador y el triángulo de los tensadores de cuerda. El faraón contestó sencillamente: *mira como mi ensolador hace un triángulo...*



11.- Coge tres cuadrados de los que has recortado y construye con ellos un triángulo a la manera del ensolador.

¿Tiene importancia los cuadrados que eliges?.

Y el faraón dio el encargo a su ensolador de hacer una serie de triángulos. Le dijo que el cuadrado más grande debía ser blanco y los dos más pequeños azules.

A uno de los sirvientes que estaban presentes les pidió que contara las baldosas blancas para cada

triángulo, un segundo sirviente debía de contar las baldosas azules; y un tercero debía comprobar si el ángulo más grande del triángulo era agudo, recto u obtuso...



12.- El ensolador usó para el primer triángulo cuadrados azules con 25 y 64 baldosas respectivamente. Tal como le habían encargado usó baldosas blancas para el cuadrado más grande.

El triángulo que hizo era acutángulo.

¿Cuántas baldosas tenía el cuadrado blanco?.

13.- Para el segundo triángulo usó baldosas azules con 100 y 81 baldosas respectivamente. Ahora le salió un triángulo obtusángulo. ¿Cuántas baldosas tenía el cuadrado blanco?.

14.- Haz una serie de 10 triángulos, mira en cada triángulo.

- Cuántas baldosas azules has usado
- Cuántas baldosas blancas has usado
- Qué tipo de triángulo te sale.

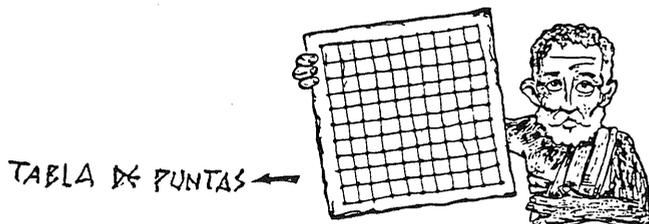
Escribe los resultados en una tabla.

15.- ¿Puedes imaginarte ahora que tipo de triángulo obtienes si usas cuadrados de 100, 225 y 400 baldosas?.

Mi siguiente destino era la India, allí en ese lejano país, me encontré con un viejo fakir...



La almohada del fakir me dio la idea para una investigación más profunda sobre los triángulos con cuadrados alrededor. Me regaló la almohada, mira..»



16.- En una tabla de puntas (hoja de trabajo nº 1) dibuja: un rectángulo, un triángulo obtusángulo, un triángulo isósceles, una cometa.

17.- Calcula de cada una de las figuras cuantos cuadrados de puntas tienen de superficie.

18.- Haz en una tabla de puntas (hoja de trabajo nº 2) cuatro figuras que sean distintas pero que tengan todas una superficie de seis cuadrillos de puntas.

19.- Tensa en la tabla de puntas un cuadrado de 49 cuadrillos de puntas. A las puntas a lo largo de los lados les das un número (como en el dibujo)

a) Tensa una goma con las puntas que tienen el número 2. ¿Qué figura has construido?. Dibújala en la hoja de trabajo nº 3.

b) Haz lo mismo con los números 3 y 4.

c) Calcula la superficie en cuadrados de las figuras anteriores.

1	7	6	5	4	3	2	1	
2								7
3								6
4								5
5								4
6								3
7								2
								1
1	2	3	4	5	6	7		

20.- El fakir enseñó a Pitágoras un truco para hacer cuadrados que estén inclinados en la rejilla.

a) Termina de dibujar los cuadrados que están dibujados a medias en la hoja de trabajo nº 3.

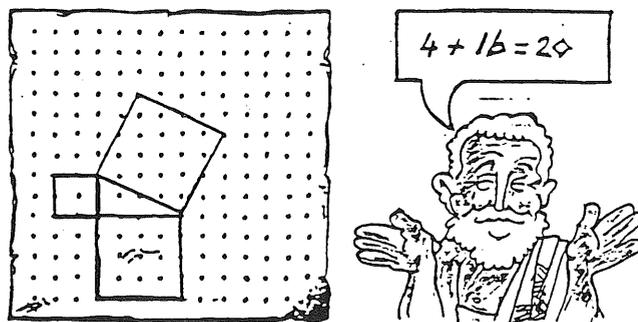
b) Explica como hace el fakir para conseguirlo.

21.- a) Calcula la superficie del cuadrado de la hoja de trabajo nº 4.

b) Busca los puntos medios de los lados de ese cuadrado. Une esos puntos. ¿Qué figura te sale? ¿Cuál es su superficie?

22.- Dibuja en la tabla de puntas una serie de cuadrados aumentando el tamaño. Empieza por un cuadrado de una cuadrícula de puntas y termina con uno de 10 cuadrados de puntas. Usa la hoja de trabajo nº 4.

Era para mí entonces una cosa chupada tensar triángulos rectángulos en el tablero de puntas con cuadrados alrededor. Comparaba la superficie del cuadrado más grande con la suma de las superficies de los cuadrados más pequeños...



23.- Tensa tú mismo otro triángulo rectángulo rodeado de cuadrados. Compara la superficie del cuadrado grande con la suma de las superficies de los cuadrados pequeños. ¿Qué pasa..?

24.- Dibuja sobre los triángulos de la hoja de trabajo nº 5, los cuadrados que lo rodean y compara de nuevo las superficies del grande con la suma de las de los otros dos.

25.- Los amigos de Pitágoras también habían hecho triángulos y cuadrados en el tablero de puntas. Filolaios fue el primero en descubrirlo.

Dijo: Si el triángulo tiene un ángulo recto, entonces el cuadrado del lado más largo es...Intenta terminar la frase.

Pero Alkmaión, plomo como siempre, farfullaba: ¿y como puedo estar seguro de que eso es así, de que eso ocurre con todos los triángulos rectángulos?

Y Pitágoras siguió contando...

Pitágoras y los dos rompecabezas del mercader

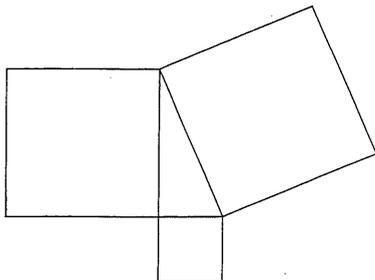
En Alejandría me embarque para regresar a casa.

A bordo empecé a conversar con un mercader...



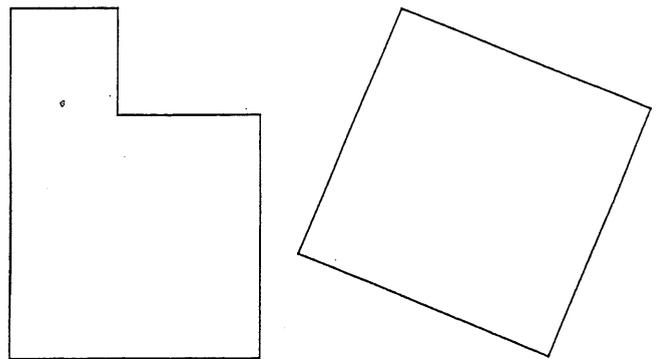
Y le conté lo del triángulo rectángulo. Pero el no se mostró sorprendido y me enseñó los siguientes rompecabezas...

26.- El primer rompecabezas tiene las siguientes piezas: tres cuadrados distintos y ocho triángulos iguales. Con los tres cuadrados y uno de los triángulos se ha construido la figura siguiente:



Si de los tres cuadrados iniciales los más pequeños tienen de área 9 cm^2 y 49 cm^2 ¿Cuántos cm^2 de área tiene el grande?. Resuélvelo utilizando el rompecabezas, construyendo con el dos cuadrados iguales.

27.- El segundo rompecabezas tiene las siguientes piezas: dos cuadrados iguales y ocho triángulos iguales. Construye con las piezas las dos figuras siguientes:



- ¿Qué relación hay entre las dos piezas?
- ¿Sería posible recubrir el cuadrado grande con una de las piezas y los dos pequeños con la otra?

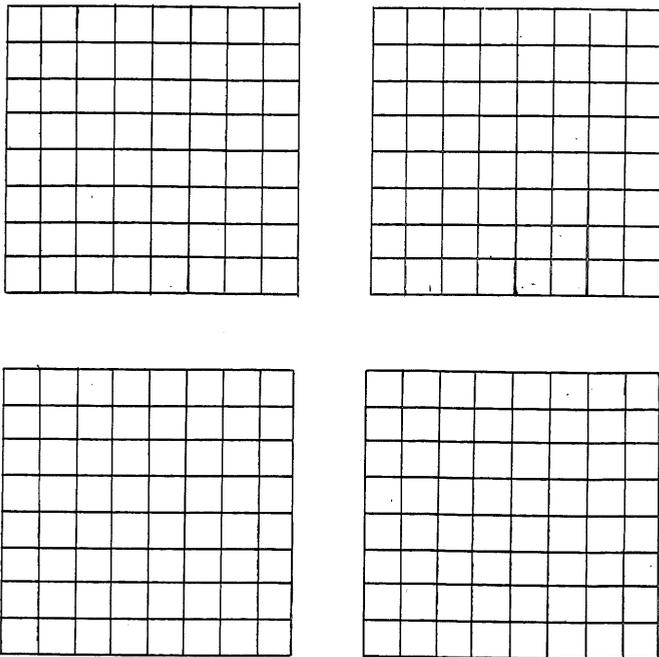
Después de esto por fin Pitágoras convenció a todo el mundo y desplegó el pergamino



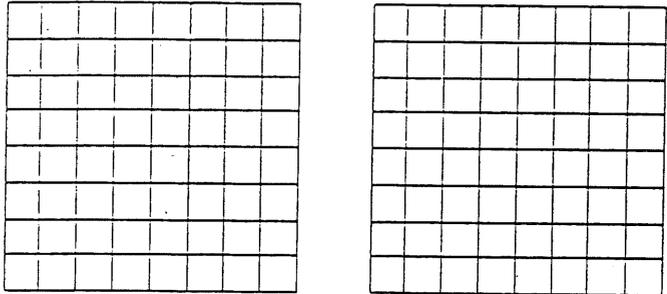
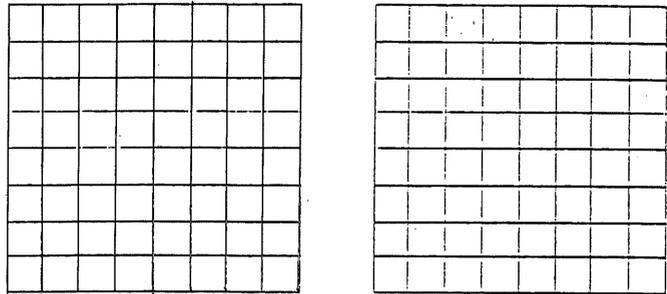
28.- ¿Qué puedes decir del cuadrado más grande si el triángulo es obtusángulo? ¿Y si el triángulo es acutángulo?

Manuel Cortegoso Iglesias
Enrique Gómez Cabrero
I.F.P. Xunqueira. Pontevedra

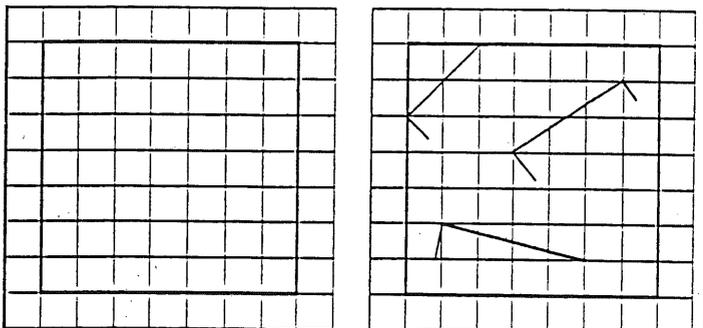
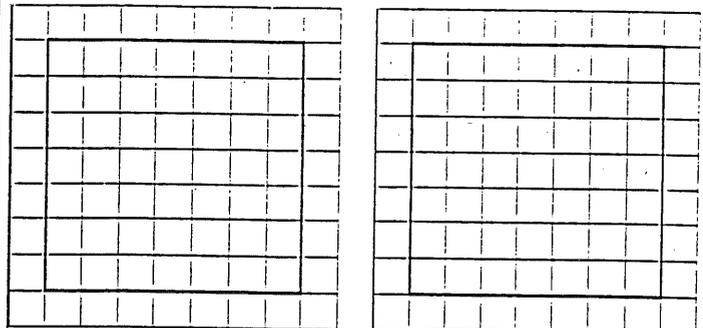
hoja de trabajo nº 1



HOJA DE TRABAJO Nº 2



HOJA DE TRABAJO Nº 3



HOJA DE TRABAJO Nº 4

HOJA DE TRABAJO Nº 5

