

Visión heurística de la clasificación de una cónica mediante calculadora gráfica y ordenador a nivel de 3º de BUP.

Germán Sáez i Moreno

Este escrito es el relato de una experiencia matemática en la que se pretendía hacer un programa que clasificara una cónica dada. Se comenzó con un programa escrito en PASCAL que devolvía el centro y el radio de una circunferencia entrada por sus coeficientes. El trabajo fue realizado por alumnos de 3º de BUP con ordenadores y calculadoras gráficas, bajo unos planteamientos heurísticos. Parte del trabajo se hizo en clase y la mayor parte fuera de la misma con un grupo de alumnos interesados en el tema.

Introducción

El objetivo de este escrito es explicar una experiencia que se llevó a cabo en el Instituto de Bachillerato Menéndez y Pelayo con alumnos de 3º de BUP, tanto en clase como en horas no lectivas. En general se pretendía dar una visión de la matemática más como un experimento-juego que como un compartimento estanco y en el tema de cónicas se quería dar una visión más completa de la que tenían. Además, se trataba de introducir a los alumnos, que quisieran, en unos conocimientos básicos de un lenguaje de programación estructurado. Había unos objetivos mínimos muy claros y otros que estaban en función del entusiasmo de los alumnos, de forma que se llegara hasta donde fuese necesario y no tanto con límites de programa, o metas parecidas. Subrayemos que todo lo que viene a continuación es la descripción de una experiencia matemática real con los defectos que comporta (conjeturas incompletas,...).

Test de la circunferencia y determinación del centro y el radio

Radio y centro de una circunferencia

Cuando se hace el estudio analítico de la circunferencia, más de una vez, se tiene la tentación de decir que las conclusiones a las que se llega son fácilmente programables. El programa es de los más sencillos que se pueden hacer con una máquina (ya sea una calculadora programable o un ordenador): se entran unos datos, se hace un cálculo aritmético trivial, que en esencia es una asignación, y se devuelve una respuesta hacia el exterior. Este algoritmo es uno de los más sencillos que se pueden utilizar para introducir la programación.

Este hecho se hizo notar a los alumnos después de dicho estudio que describe la ecuación de la circunferencia, y se ofreció la posibilidad de hacer este programa en un lenguaje estructurado en

ordenadores y en horas no lectivas. El lenguaje de alto nivel escogido fue el PASCAL. Un grupo de alumnos se puso a trabajar y a estudiar los mínimos conocimientos de PASCAL que se necesitaban para programar una cuestión como ésta, a partir de un manual muy básico.

Comenzaron por hacer un pequeño programa sin ningún formato de escritura ni de lectura, que traducía el algoritmo que definen las fórmulas:

$$C \left(\frac{-m}{2}, \frac{-n}{2} \right)$$

$$r = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 4p}}{2}$$

que nos permiten encontrar el centro C y el radio r de la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$$

Este programa decía más o menos:

```
program circun;
var
    m,n,p,xc,yc,r:real;

begin
    readln(m);
    readln(n);
    readln(p);
    xc:=-m/2;
    yc:=-n/2;
    r:=sqrt(m*m+n*n-4*p)/2;
    writeln(xc);
    writeln(yc);
    writeln(r);

end.
```

Los problemas que surgieron fueron los clásicos: confusión BEGIN/BEGUIN, el carácter fuertemente *tipado* del lenguaje, 4p en lugar de 4 * p, y

sobre todo la utilización del entorno desde el que trabajábamos en PASCAL. Después pasamos a los formatos de entrada/salida:

```
program circun;

var
    m,n,p,xc,yc,r: real;

begin
    clrscr; (*borramos la pantalla*)
    writeln('Dame');
    write('m=');
    readln(m);
    write('n=');
    readln(n);
    write('p=');
    readln(p);

    (* cálculo del centro (xc,yc) y radio r de una
    circunferencia de ecuación:
    x^2+y^2+mx+ny+p=0*)

    xc:=-m/2;
    yc:=-n/2;
    r:=sqrt(m*m+n*n-4*p)/2;
    writeln('El centro es: (',xc:11:11,',',yc:11:11,')');
    writeln(' y el radio vale: r=',r:11:11);

end.
```

Problemas con la raíz cuadrada: caso no circunferencia, como siguiente paso en la programación (instrucción IF)

Después del ensayo con más ecuaciones y reseña en la libreta de clase de los resultados a los que llegábamos, nos encontramos con una ecuación que no representaba una circunferencia:

$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0.$$

De esta manera tan natural surgió la necesidad de distinguir casos. Fue un intento de proteger el programa contra posibles situaciones de error y como análisis más exhaustivo del resultado de clase. Así, llegamos a un paso siguiente en programación: la instrucción IF. Entonces quedó un

programa que ya parecía que cerraba todo el problema planteado:

```

program circun;

var
    m,n,p,xc,yc,r,disc:real;

begin
    clrscr; (*borramos la pantalla*)
    writeln('Dame');
    write('m=');
    readln(m);
    write('n= ');
    readln(n);
    write('p= ');
    readln(p);

    (* cálculo del centro (xc,yc) y radio r de una
    circunferencia de ecuación:
         $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$  *)

    xc:=-m/2;
    yc:=-n/2;
    disc:=m*m+n*n-4*p;
    if disc<0 then writeln('No se trata de una
    circunferencia')
    else begin
        r:=sqrt(disc)/2;
        writeln('El centro es:
        (,xc: ll:ll,',yc:ll:ll,');
        writeln(' y el radio vale:
        r=',r:ll:ll)
        end
    end.
    
```

Representación con calculadora gráfica de cónicas en forma no reducida

Antes de llegar a este programa que resolvía nuestro problema habíamos planteado en clase la utilización de las calculadoras gráficas (en concreto la CASIO FX-7000G) para visualizar cónicas. El estudio hecho en clase de la elipse, la parábola y la hipérbola se había hecho en unas condiciones muy particulares. En concreto, se había propuesto a los alumnos ver qué dibujo formaban los puntos que

verificaban la ecuación (desconocida para ellos):

$$2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2 = 0$$

El punto de vista funcional de este problema venía impuesto por la calculadora gráfica (en concreto la función GRAPH), dado que lo que dibuja es una función que viene definida por una ecuación en forma explícita. Como entrenamiento introdujimos la ecuación de una recta en forma explícita. Justo en este punto teníamos un problema al que no están demasiado acostumbrados: despejar la y de la ecuación implícita de este lugar geométrico que queríamos visualizar. Jugando con la similitud con el caso de la recta que también se había dado inicialmente en forma implícita, llegaron a la sorpresa que estaban delante de dos funciones:

$$2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + (-5x)y + (2x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5x \pm \sqrt{25x^2 - 8(2x^2 + 2)}}{4} =$$

$$= \frac{5x \pm \sqrt{9x^2 - 16}}{4}$$

Después de descubrir que se trataba de una hipérbola que estaba en una posición diferente de la que nosotros habíamos estudiado básicamente en clase, continuaron averiguando qué representaban las ecuaciones:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 10y + 42 = 0$$

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 3x - 3y + 1 = 0$$

$$6x^2 + 6y^2 - 8xy - 1 = 0$$

$$x^2 - y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 3 = 0$$

Así se fue conformando la idea de que toda ecuación de segundo grado del tipo $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ representaba una circunferencia (único caso que teníamos perfectamente estudiado), una elipse, una hipérbola o una parábola.

Clasificación de una cónica

Primera aproximación al problema

Entonces, el siguiente paso natural era intentar ampliar nuestro programa en PASCAL, de forma que clasificara la cónica que definía una ecuación cualquiera: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$. En este punto hubo muchas conjeturas a propósito del criterio que el programa tendría que utilizar para averiguar el tipo de cónica que era. A base de ejemplos y contraejemplos (visualizados con la calculadora gráfica) descartaron conjeturas falsas y llegaron a un camino claro que podía distinguir entre los diferentes tipo de cónicas. El punto clave era un problema que la calculadora tenía continuamente cada vez que dibujaba una cónica: el dominio de las funciones. Haciendo cálculos llegábamos a la conclusión de que las funciones que tenía que dibujar eran:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \Leftrightarrow by^2 + (cx + e)y + (ax^2 + dx + f) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{-cx - e \pm \sqrt{(cx + e)^2 - 4b(ax^2 + dx + f)}}{2b} =$$

$$= \frac{-cx - e \pm \sqrt{(c^2 - 4ab)x^2 + (2ce - 4bd)x + (e^2 - 4bf)}}{2b}$$

por lo que se tenía que ver para qué valores el polinomio que había en el radicando daba resultados negativos o positivos. El estudio se reducía a preguntarse por el signo de una función cuadrática; llamando $r = c^2 - 4ab$, $s = 2ce - 4bd$, $t = e^2 - 4bf$:

$$r \begin{cases} > 0 \rightarrow s^2 - 4rt \begin{cases} > 0: \text{hipérbola (fig. 1)} \\ = 0: \text{parábola o hipérbola (fig. 2)} \\ < 0: \text{parábola o hipérbola (fig. 2)} \end{cases} \\ = 0 \rightarrow s \begin{cases} > 0: \text{parábola (fig. 3)} \\ = 0 \rightarrow t \begin{cases} < 0: \text{no tiene puntos reales (fig. 4)} \\ \geq 0: \text{????? (fig. 5)} \end{cases} \\ < 0: \text{parábola (fig. 6)} \end{cases} \\ < 0 \rightarrow s^2 - 4rt \begin{cases} > 0: \text{elipse o circunferencia (fig. 7)} \\ = 0: \text{un punto o una recta (fig. 8)} \\ < 0: \text{no tiene puntos reales (fig. 9)} \end{cases} \end{cases}$$

Esquema que es un poco pesado de traducir en un programa PASCAL.

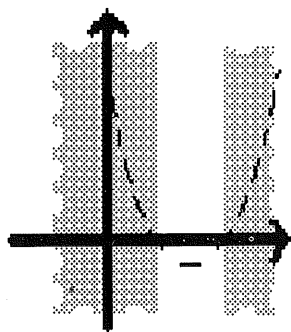


Figura 1

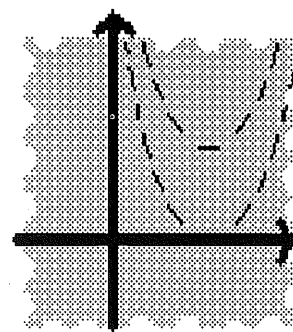


Figura 2

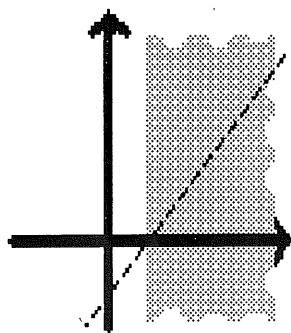


Figura 3

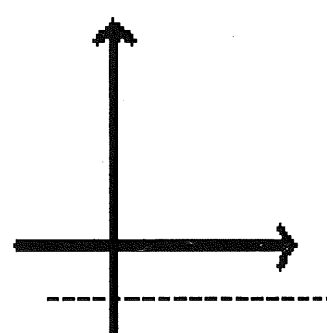


Figura 4

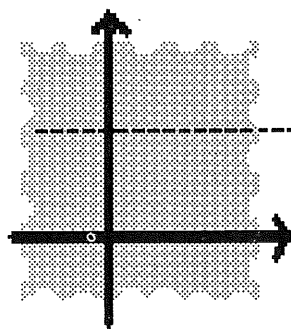


Figura 5

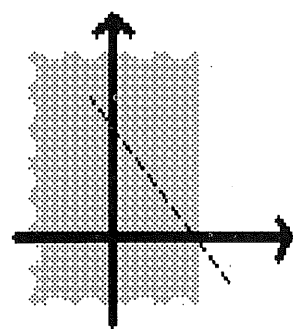


Figura 6

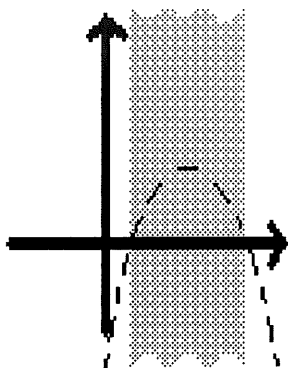


Figura 7

Segunda aproximación: descubrimiento de las dos rectas como cónica «especial»

Conforme van probando el programa con diferentes ecuaciones de segundo grado y comprobando los resultados con la calculadora gráfica se van encontrando sorpresas. En primer lugar aparece una ecuación de segundo grado que representa dos rectas: $3x^2 - y^2 + 2xy + 4x + 1 = 0$, una vez seguido el razonamiento del programa se tiene en cuenta, para completar y corregir el esquema anterior. Fundamentalmente se tiene en cuenta que si $r > 0$ y $s^2 - 4rt = 0$ (fig. 2) el discriminante de la ecuación es un cuadrado perfecto, por lo que salen dos rectas (no una parábola o hipérbola como nos había parecido al comienzo). Si estamos en el caso $r < 0$ y $s^2 - 4rt = 0$ (fig. 8) sólo se podrá dar un valor a la x , por lo que o es una recta vertical o bien un

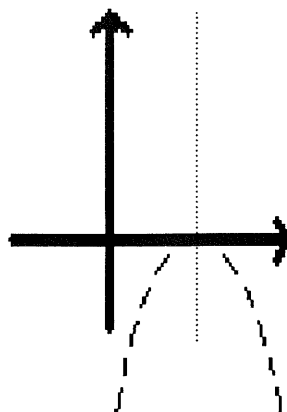


Figura 8

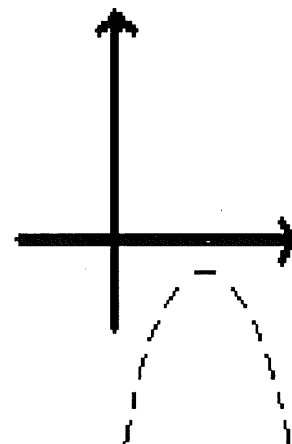


Figura 9

punto. ¿Cómo distinguirlo? Mirando ahora la situación desde el eje OY:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \Leftrightarrow ax^2 + (cy + d)x + (by^2 + ey + f) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-cy - d \pm \sqrt{(cy + d)^2 - 4a(by^2 + ey + f)}}{2a} =$$

$$= \frac{-cy - d \pm \sqrt{(c^2 - 4ab)y^2 + (2cd - 4ae)y + (d^2 - 4af)}}{2a}$$

Se observa como primer detalle que coinciden los coeficientes de grado dos de esta función cuadrática y el de la anterior, por lo que analizando los tres posibles casos de discriminante de esta función cuadrática (fig. 10, 11, 12), nos sale sólo viable el caso *discriminante* = 0, por tanto estamos ante un punto (fig. 11).

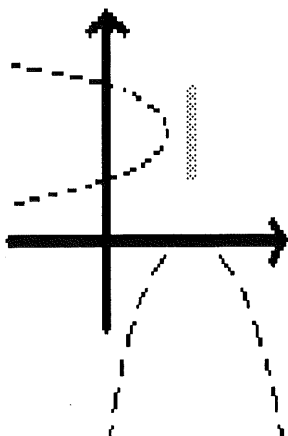


Figura 10

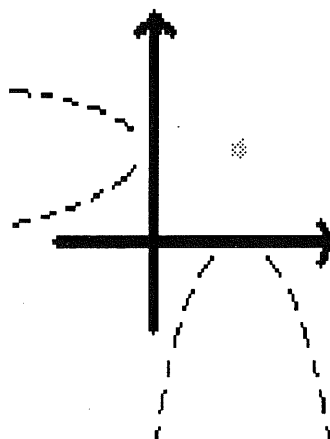


Figura 11

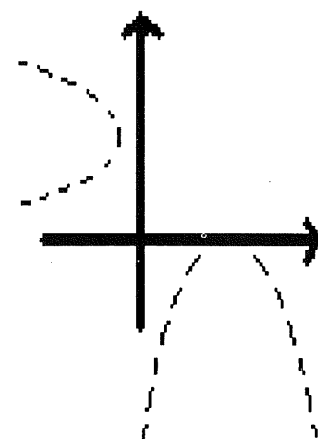


Figura 12

La otra cuestión que nos queda por analizar es la de cómo distinguir entre parábola e hipérbola en el caso $r > 0$, $s^2 - 4rt < 0$ (fig. 2). Mirando las funciones con variable independiente y , al ser el coeficiente de segundo grado del discriminante el mismo r , tenemos sólo tres posibles casos: *discriminante* > 0 (fig. 13) que definiría una hipérbola, *discriminante* $= 0$ (fig. 14) que nos daría un par de rectas (caso imposible porque nos hubiera dado este resultado mirando desde OX) y el *discriminante* < 0 (fig. 15) que nos seguiría dejando en la duda de si es una hipérbola o una parábola. Matemáticamente se puede ver que no puede ser una parábola: si una recta y todas sus paralelas cortan a una parábola, entonces la recta es paralela al eje de la parábola. Si fuera una parábola, el eje OY y sus paralelas cortarían la parábola (fig. 2), de lo que tendríamos que OY es paralelo al eje de la parábola y entonces la función con variable independiente y

tendría como dominio una semirecta, en contradicción con $r > 0$.

Nuestro esquema queda:

$$r \begin{cases} > 0 \rightarrow s^2 - 4rt \begin{cases} \neq 0: \text{hipérbola} \\ = 0: \text{dos rectas} \end{cases} \\ = 0 \rightarrow s \begin{cases} \neq 0: \text{parábola} \\ = 0 \rightarrow t \begin{cases} < 0: \text{no tiene puntos reales} \\ > 0: \text{dos rectas} \end{cases} \end{cases} \\ < 0 \rightarrow s^2 - 4rt \begin{cases} > 0: \text{elipse o circunferencia} \\ = 0: \text{un punto} \\ < 0: \text{no tiene puntos reales} \end{cases} \end{cases}$$

Y el programa que lo describe completado con el nuestro:

```
program clasif;
var
  a,b,c,d,e,f,r,s,t,discrim,m,n,p,disc,xc,yc:real;
begin
  clrscr; (*borramos la pantalla*)
  writeln('De la ecuación
  ax² + by² + cxy + dx + ey + f = 0 dame');
  write('a='); readln(a);
  write('b='); readln(b);
  write('c='); readln(c);
  write('d='); readln(d);
  write('e='); readln(e);
  write('f='); readln(f);
  r:=c*c-4*a*b;
  s:=2*c*e-4*b*d;
  t:=e*e-4*b*f;
  discrimin:=s*s-4*r*t;
  if r>0 then begin
    if discrimin<>0 then writeln('Es una hipérbola.')
    else writeln('Es un par de rectas.')
  end
  else if r=0 then if s<>0 then writeln('Es una
  parábola.')
    else if t<0 then writeln('No
    tiene ningún punto real.')
    else writeln('Son dos rectas
    paralelas.')
```

```
(*caso r<0*)
else if discrimin<0 then writeln('No tiene
ningún punto real.')
  else if discrimin=0 then
    writeln('Es un punto.')
  else begin
    (*caso circunferencia
    o elipse*)

    m:=d/b;
    n:=e/b;
    p:=f/b;
    disc:=m*m+n*n-4*p;
    if (a=b) and (c=0) and (disc>0) then
      begin
        (* cálculo del centro (xc,yc) y radio r de una circunfe-
        rencia de ecuación:
        x² + y² + mx + ny + p = 0*)
        xc:=-m/2;
        yc:=-n/2;
        r:=sqrt(disc)/2;
        writeln('Es una circunferencia de centro:
        ('xc: 11:11,',yc:11:11,')');
        writeln(' y radio: r=',r:11:11)
        end
      else writeln('Es una
      elipse.')
    end
  end
end.
```

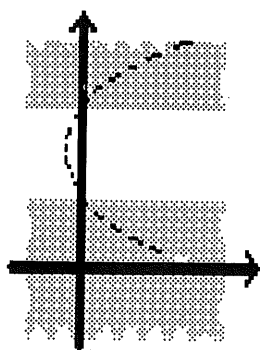


Figura 13

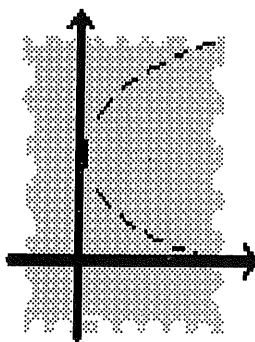


Figura 14

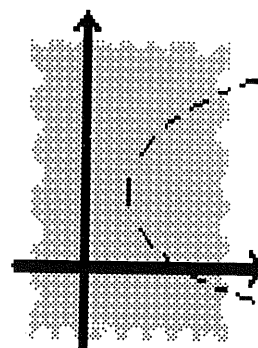


Figura 15

Descubrimientos posteriores, conclusiones, caracterizaciones no heurísticas

Posible continuación

Una posible continuación podría ser intentar reproducir lo que hace la calculadora gráfica para dibujar las cónicas, pero con las posibilidades gráficas del PASCAL.

También, completar el esquema con el caso $b = 0$, caso que no se plantean hasta que no encuentran una ecuación como por ejemplo $x^2 - 3x + 5y - 13 = 0$:

$$b = 0 \rightarrow c \begin{cases} \neq 0: \text{hipérbola} \\ = 0 \rightarrow a \begin{cases} = 0: \text{no es una cónica} \\ \neq 0 \rightarrow e \begin{cases} \neq 0: \text{parábola} \\ = 0 \rightarrow d^2 - 4af \begin{cases} \geq 0: \text{un par de rectas} \\ < 0: \text{no tiene puntos reales} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

y a partir de aquí el programa.

Se podría pensar de la misma manera el intento de calcular los elementos más importantes de la cónica, pero con medios elementales de 3º de BUP.

Conclusiones estrictamente matemáticas del problema planteado

Se pueden intentar deducir teoremas a partir del programa. Por ejemplo, aplicando el algorit-

mo que define el programa a la curva de ecuación $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$ se puede ampliar el teorema que describe la circunferencia con el añadido que en el caso $m^2 + n^2 - 4p = 0$ se trata de un punto, y en el caso $m^2 + n^2 - 4p < 0$ no es ninguna cónica con puntos reales (todos los tiene complejos).

También, se puede plantear el problema de forma diferente intentando caracterizar los diferentes tipos de cónicas:

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ es una circunferencia $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a = b \neq 0 \text{ y } c = 0 \text{ y } d^2 + e^2 - 4bf > 0$$

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ es una parábola $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a = \frac{c^2}{4b} \text{ y } d \neq \frac{ce}{2b} \text{ y } b \neq 0) \text{ o bien } (a, e \neq 0 \text{ y } b = c = 0)$$

o bien estudiar una familia de cónicas, por ejemplo

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + a^2(e^2 - 1) = 0$$

Demostrar que no hay ninguna parábola que pase por los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 0)$, o que las únicas parábolas que no tienen termino en xy son las de eje horizontal o vertical.

Planteamiento pedagógico de la experiencia

Se hizo un planteamiento poco dirigido de la experiencia, por parte del profesor. Por ejemplo, la mejora de los formatos del programa inicial que calculaba el radio y el centro de una circunferencia, se hizo por iniciativa de los propios alumnos, como

un requerimiento completamente normal para ellos, no como algo sugerido por el profesor. Eso no quiere decir que el profesor no estuviese encima de los detalles que posiblemente no tuvieran en cuenta los alumnos (reseña en la libreta de los resultados obtenidos, grabación de los programas intermedios,...).

Es más, el papel del profesor era el de saber reconducir. Por ejemplo, hubo un momento, que de forma muy natural, los alumnos querían acceder a las posibilidades gráficas del PASCAL, para poder hacer los dibujos tal como los hacía la calculadora. Como reacción se hizo una reconducción hacia un planteamiento diferente.

Otro de los puntos que hubo que tener muy presente fue el abstenerse de hacer indicaciones, que podían casi cerrar todo el problema con una solución que a ellos no se les había ocurrido, sobretodo cuando estaba claro que más adelante ellos mismos verían esta cuestión (por ejemplo en los errores del primer esquema de clasificación de una cónica, o bien que no vieran que uno de estos casos era un par de rectas).

Dado que la experiencia se hacía fundamentalmente fuera de clase y con alumnos bastante motivados, se puso como objetivo que ellos encontraran los resultados, aunque no llegaran demasiado lejos. De esta manera los conocimientos los hacen más suyos, si son ellos mismos los que los han encontrado.

Trabajaron con el esquema clásico del método científico: experimentación, conjeturación, demostración (o bien contraejemplificación). Fue un trabajo en un laboratorio matemático con una vertiente muy lúdica: se jugaba a redescubrir y a hacer de sabios,...

En cuanto al rigor matemático se optó por avanzar aunque las afirmaciones no estuvieran suficientemente justificadas. Como siempre no se intentó razonar aquello que para ellos era evidente, ya que el objetivo en este caso no era poner en duda estas cuestiones ni rigorizarlas. Evidentemente se han utilizado afirmaciones bastante fuertes, sin demostrarlas (como por ejemplo que toda ecuación del tipo estudiado representaba una circunferencia, una elipse, una parábola o una hipérbola).

También requería, por parte del profesor, llevar todo el tema de cónicas bien estudiado y prepara-

do, sobretodo de cara a la invención de contraejemplos. Era necesario tener paciencia con los avances y los resultados: estábamos dentro de un estadio de aproximaciones sucesivas (en todos los sentidos: madurez, rigor, resultados,...).

Como siempre en la asignatura de matemáticas, se tenía que reconducir la motivación externa (informática-matemática) hacia a una motivación puramente matemática.

Puesta en práctica real

Esta experiencia se llevó a cabo con dos grupos de tercer curso de BUP al final del estudio de las cónicas. Hay que señalar que no se había hecho la parte de Análisis y que el nivel de cónicas era el habitual; el concepto de tangencia se había trabajado bastante mediante el uso de discriminantes.

Ninguno de ellos había manejado nunca una calculadora gráfica, y sólo una minoría tenía nociones de BASIC. Se trabajó con quince calculadoras gráficas con la totalidad de los 39 alumnos de cada grupo (por separado). La utilización de la calculadora gráfica se impone en el caso que se quiera trabajar con todo el curso a la vez, pero también nos ha sido muy útil a la hora de rebatir instantáneamente conjeturas falsas cuando se trabajaba con los ordenadores (por ejemplo se conjeturó que cuando $a = b$ se trataba de una circunferencia, a lo que se puso como contraejemplo $3x^2 + 3y^2 - 4xy - 1 = 0$).

Los alumnos que estaban interesados en los mínimos conocimientos de PASCAL eran unos 10, aunque en las últimas sesiones el número bajó hasta unos 5 alumnos. No se llegó a acabar de escribir correctamente el último programa. A pesar de todo el resultado fue muy positivo.

Bibliografía

* MANZANO, S., LÓPEZ, A., **Lenguaje Pascal**, Ed. Alhambra (BRED), Barcelona, 1986.

* TRIGO, V., CAMACHO, A., **Manual de TURBO PASCAL para las Enseñanzas Medias**, Ed. Anaya, Madrid, 1988.

Germán Sáez i Moreno
I.B. Bellvitge
Hospitalet de Llobregat