Potenciar el papel de los logaritmos

Jorge Fernández Herce

Lo que pretendemos es destacar cómo se pueden integrar las calculadoras en el tema de los logaritmos, dando a éstas un papel como instrumento importante en su enseñanza y no como el elemento que ha llevado hacia su decadencia.

Introducción

Como tantos otros conceptos, la noción de logaritmo que hoy se recibe en la Educación Secundaria, tiene muy poco que ver con su origen y no revela en absoluto el papel trascendente que ha jugado en la historia del desarrollo científico de la humanidad. La evolución en los medios de cálculo y, más concretamente la proliferación de calculadoras de bolsillo hicieron que, sin darnos cuenta, fuera desapareciendo de nuestra vista. En la parte dedicada al área de Matemáticas en el «Diseño Curricular Base» del M.E.C., tanto en la Enseñanza Primaria como la Secundaria Obligatoria, se puede leer:

"La perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos".

De los muchos ejemplos que ilustran esta afirmación, de los que el texto citado da algunos, los logaritmos son un clarísimo exponente pero que generalmente no se recuerda en momentos como éste.

Origen histórico

John Napier, nació cerca de Edimburgo en 1550 y murió en 1617. Fue un importante matemático de su época que siempre manifestó un profundo

interés por el hecho de que los cálculos numéricos eran largos, difíciles y retrasaban notablemente el progreso de las ciencias. Ya en su libro «Rabdología» describe el funcionamiento de las famosas «Regletas de Neper» cuya virtud consistía en facilitar las multiplicaciones.

Pero todos sus esfuerzos no quedaron en este intento, el cual no era poco para la situación de su época. El mismo afirma que dedicó veinte años de su vida con el fin de buscar métodos de cálculo que abreviasen los penosos esfuerzos que las operaciones requerían. A penas tres años antes de morir, en 1614, se atreve a publicar «Mirifici logarithmorum canonis descriptio» en el que se da luz a los logaritmos y su modo de empleo como instrumento para calcular.

He aquí la causa primera, el motivo, del nacimiento de la noción de logaritmo. La necesidad de aumentar la fluidez en los cálculos era fundamental. En esta época la astronomía era una ciencia en pleno apogeo y se precisaban grandes esfuerzos para que, tanto los datos como las operaciones entre ellos, no llevasen a errores importantes. En el capítulo 16 de la «Nueva Astronomía» escribe Johanes Kepler (1571-1601):

«Si te sientes aburrido con este tedioso método de cálculo ten piedad de mí que tuve que recorrerlo en su totalidad con al menos 70 repeticiones, con una gran pérdida de tiempo,...».

Trataba entonces de determinar la órbita de Marte y, el borrador de los cálculos que se reflejan en el capítulo citado está formado por 900 páginas con letra pequeña.

Hay quien afirma que el nacimiento de los logaritmos multiplicó por 10 la efectividad de los cálculos astronómicos y fue decisivo en numerosos resultados de tipo científico y práctico.

Algunas ideas que encaminaron hacia el nacimiento de los logaritmos, se habían ido apuntando en épocas anteriores: en la «Arithmetica integra» de Michael Stifel (1486-1567) se apuntan comentarios como el hecho de que 729/64 puede dividirse 6 veces por 3/2. Más claramente Nicolás Chuquet (parisino de finales del XV), cita la relación entre los elementos de una progresión aritmética y una geométrica señalando el paralelismo entre suma, resta, multiplicación y división en la primera, con producto, división, potenciación y radicación en la segunda.

Un truco matemático muy utilizado es la llamada prostaféresis, que consistía en transformar una multiplicación en una suma ante la evidente simplicidad y rapidez de ésta con respecto al producto. Un ejemplo llevado a su máxima simplicidad que se explica en el bachillerato sería:

$$\cos (x-y) - \cos (x+y) = 2 \sin (x) \sin (y)$$

 $\cos (x-y) + \cos (x+y) = 2 \cos (x) \cos (y)$

Curiosamente la utilización que en las aulas se hace de estas relaciones suele ser la contraria. La idea que viene reseñada cuando se comentan estas igualdades es, la importancia de la transformación de suma en producto para la simplificación. Ni que decir tiene que si carecemos de una máquina de calcular, entender el proceso a la inversa es de una utilidad manifiesta:

«Si disponemos únicamente de unas tablas trigonométricas, podremos fácilmente buscar

```
\cos(75^{\circ}) = 0.25882; \cos(10^{\circ}) = 0.98481
```

Efectuar ahora $\cos(75^\circ)$ • $\cos(10^\circ)$ no es una tarea amena ni, mucho menos, rápida. (Tiempo aproximado: 100 segundos)

Es mucho más fácil acudir a las tablas y buscar

```
\cos(65^{\circ}) = 0.42262; \cos(85^{\circ}) = 0.08715 haciendo que \cos(75^{\circ})\cos(10^{\circ}) = (0.42262 + 0.08715)/2 = 0.50977/2 = 0.25488».
```

Esta segunda opción es mucho más rápida (Tiempo aproximado: 20 segundos) y la posibilidad de errores es mucho menor debido a la simplicidad de la suma y la división entre 2 frente a la laboriosidad de la multiplicación con números de varias cifras.

Todas estas cuestiones influyeron en las investigaciones de Neper, aunque su definición es puramente cinemática, subyaciendo la continuidad del logaritmo como función. Neper además, dio los logaritmos de los senos de 0° a 90° y no de números.

Sin duda que la preocupación por encontrar un método de simplificación de las operaciones aritméticas explica que los logaritmos fuesen descubiertos casi simultáneamente por dos personas distintas y que su difusión fuese tan rápida y magnificamente aceptada, existiendo ya en 1631, 17 años después de la primera, 20 publicaciones sobre el tema. Y decimos que el descubrimiento fue casi simultáneo pues Jobst Bürgi (1552-1632) elaboró ideas similares a las de Neper aunque tal vez más próximas a nuestro concepto actual. Al parecer Bürgi construye una tabla en la que aparecen números rojos en progresión aritmética, y números negros en progresión geométrica. Perdió sin embargo todos los honores históricos del descubrimiento al publicar su obra «Arithmetische und geometrishe Progress-Tabulen» en 1620, años más tarde que Neper.

De los contactos entre J. Neper y Henry Brigss (1560-1630), nacen nuestros actuales logaritmos de base 10 con la idea de adaptar el concepto al sistema de numeración imperante. Así en 1617, Brigss publica la primera tabla de logaritmos en base 10 de los números 1 a 1000 con una precisión de 14 cifras decimales. En 1624 una nueva publicación recoge ya los números del 1 al 20000 y del 90000 a 100000, apareciendo por primera vez las palabras mantisa y característica.

Como última reseña histórica citaremos que William Oughtred (1574-1660) enuncia las propiedades básicas de los logaritmos fundamentales para su utilización en el cálculo:

$$log(x) + log(y) = log(x.y)$$

$$log(x) - log(y) = log(x / y)$$
 { a }

$$log(x^y) = y log(x)$$

Él es además el inventor de las tan famosas reglas de cálculo. Estos instrumentos que han sido de uso habitual para muchos estudiantes en un pasado muy reciente y que ya hoy a duras penas se consiguen en el mercado, totalmente desfasadas y superadas en rapidez y precisión por las máquinas calculadoras.

Aunque las relaciones $\{a\}$ son válidas para logaritmos en cualquier base, consideraremos a partir de ahora que estamos hablando de logaritmos en base $10\,\mathrm{y}$, por tanto, denotaremos log representando log $_{10}$.

Utilización en los cálculos

En [2], aparece en su prólogo: «Los aspectos numéricos de la trigonometría plana se han tratado ampliamente. Igual atención se ha prestado a las soluciones logarítmicas y no-logarítmicas de los triángulos rectángulos y oblicuángulos...» Además sus capítulos 6 y 7 son respectivamente: 6. Logaritmos y 7. Resolución logarítmica de triángulos rectángulos.

Vamos a hacer un estudio en la resolución de un simple ejercicio sobre triángulos rectángulos. Para que no resulte excesivamente pesado nos centraremos en los pasos I y IV. Sobre ellos estableceremos comparaciones, obviando los demás. Citamos aquí una estimación de tiempos, pero retamos al lector a que efectúe el proceso manualmente para que se observe en toda su dimensión la diferencia. El tema del tiempo no es el fundamental. Hay a quién le puede resultar más largo efectuar el cálculo con logaritmos que sin ellos por falta de práctica. La cuestión más importante es la simplificación del

proceso; la probabilidad de cometer un error al efectuar la división I. es muchísimo mayor que la de errar en la búsqueda en unas buenas tablas y efectuar la resta; el trabajo de multiplicar y elevar al cuadrado en IV es mucho mayor y más tedioso que buscar en unas tablas y sumar. Por último, la facilidad de revisión por posibles errores dista mucho entre el proceso 1 y el 2.

Resolver y comprobar el triángulo rectángulo ABC, dados los lados a=48,620 y b=37,640. (Ángulo $C = 90^{\circ}$. Hipotenusa: c)

- 1.º Mediante cálculo aritmético manual sin logaritmos:
 - I. Tag A = a/b = (48,620/37,640)t=150 segundos
 - II. Obtenemos el sen A
 - III. c=a/senA
 - IV. Comprobación: $a^2 = c^2 b^2 = (c-b)(c+b)$ t= 180 segundos

TIEMPO TOTAL de los procesos I. y IV. t=330 segundos

- 2. Mediante cálculo logarítmico:
- I. a) Buscando en las tablas:

log(a) = log(b) = t=50 segundos

- I. b) log(tagA) = log(a) log(b) = t = 20 segundos
- II. Obtenemos el sen A
- III. c= a/sen A
- IV. $a^2 = c^2 b^2 = (c-b)(c+b)$ $2 \log(a) = \log(c-b) + \log(c+b)$

t= 105 segundos

TIEMPO TOTAL DE LOS PROCESOS I y IV. t= 175 segundos

3. Mediante una calculadora con funciones trigonométricas:

TIEMPO TOTAL DE LOS PROCESOS I y IV. t= 45 segundos Entre los procesos 1 y 2 la diferencia estriba en que las multiplicaciones y divisiones se efectúen por medio del algoritmo tradicional o bien por medio de logaritmos. La diferencia de tiempos en nuestra prueba a favor del método logarítmico es casi de 2 a l. Como es lógico, la calculadora es el método más rápido y, sobre todo, fiable.

Este pequeño ejemplo nos puede dar una idea del protagonismo que los logaritmos adquirieron. Era una cuestión de primer orden contar con unas tablas adecuadas. Precisamente los libros de tablas de logaritmos proliferaron mucho. En las págs. 385-386 de [4], después de tratar el tema de los logaritmos, se menciona: «Ya que nuestros planes de enseñanza faltan cursos especiales sobre cálculo numérico, destinados a astrónomos, físicos, etc.. daremos una breve nota bibliográfica...» A continuación se nombran un total de 8 libros sobre reglas aritméticas y métodos de cálculo y 9 referencias a otras tantas colecciones de tablas de logaritmos con los números que éstas contienen y su precisión en número de decimales. También es una práctica habitual en muchos textos reseñar junto a la resolución de un ejercicio, qué tablas de logaritmos fueron empleadas para su ejecución. Así en [7], pág. 32: «... Utilizamos las Tablas de Logaritmos de L. Schron con 7 cifras decimales (Ed. Victoriano Suárez, Madrid, 1963). Gracias al dispositivo tipográfico empleado [...] se obtienen los logaritmos con un error inferior al cuarto de unidad del séptimo orden. En general, la precisión resulta del orden de las centésimas de segundo de arco».

Reglas de cálculo

«Excepto para sumar y restar, la regla de cálculo constituye una buena herramienta para efectuar las operaciones más corrientes, tales como la multiplicación, división, extracción de raíces, operaciones con funciones trigonométricas, etc...»

El fundamento de este objeto consiste en una serie de regletas, algunas de las cuales se pueden desplazar linealmente con respecto a las otras pero que tienen la peculiaridad de estar marcadas en varios tipos de escalas, bien de tipo lineal o no, por ejemplo logarítmicas. Se lee también en un manual:

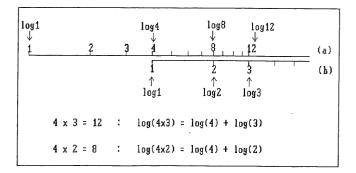
«Las escalas C y D son similares a una regla milimetrada, pero con una diferencia fundamental. Así como en una regla normal milimetrada la distancia entre dos divisiones consecutivas, siempre es la misma, no sucede igual con las escalas de la regla de cálculo. [...]

Las escalas C y D son logaritmos, con lo que queremos significar que la distancia entre dos números consecutivos varía logarítmicamente a medida que el número aumenta. No es necesario entender el significado de una escala logarítmica para aprender a manejar la regla de cálculo, pero si es necesario tener una idea de ella para comprender por qué es posible efectuar una multiplicación con una simple adición de distancias. Ello no sería posible con una escala uniforme».

Conseguir una regla de cálculo resulta ilustrativo, pero una actividad que constituye un bonito recurso didáctico que aumenta la motivación y permite la fijación de conceptos, es la fabricación de nuestras escalas logarítmicas y, así una regla de cálculo propia. El método, a pesar de que para mucha gente que conoce estos objetos de cálculo es desconocido, resulta muy simple. En el artículo «Los cambios de escala y el Cálculo Gráfico» [9] se describe la construcción así como la importancia de los cambios de escalas y algunas aplicaciones. Sin pretender ser repetitivos, vamos a describir el proceso de multiplicación con dos escalas logarítmicas en forma longitudinal pues así es como se manejan en las reglas de cálculo, mientras que el método descrito en el artículo citado está dado en forma gráfica bidimensional:

Consideremos que vamos a multiplicar 2 x 4 :

- i) coloquemos el 1 de la escala (b) sobre el 4 de la otra.
- ii) busquemos el 2 de (b) y veamos sobre que valor de (a) se encuentra y ese es nuestro resultado.



La explicación es evidente pues fijémonos que lo que hemos nombrado con 2 es en realidad $\log(2)$ y lo nombrado con 4, $\log(4)$. De este modo al superponer ambas regletas el llamado resultado es la suma lineal de $\log(2) + \log(4)$ que, aplicando propiedades de $\log(2) + \log(2) + \log(4) = \log(8)$. Y $\log(8)$ lo hemos denotado con 8 en nuestras regletas.

Llegaron las calculadoras

Todavía hoy no se ha introducido sin prejuicios la calculadora en el aula, pero hay momentos. en que no queda más remedio que admitirla. A veces, esta situación es más perjudicial que no permitir su uso pues estamos colaborando a su utilización irracional. ¿Para qué se utiliza la calculadora cuando estamos explicando logaritmos? Únicamente para efectuar el cálculo que antes se realizaba mirando a una tabla. (log(2) = 0,3010...).

Ahora pasamos rápidamente a hablar de función logarítmica sin detenernos en muchos detalles de los que «en otros tiempos» se hablaba y que hoy no se mencionan. Así nos encontramos con la gran contradicción de que las calculadoras, objetos que muchos son contrarios a introducir en el aula, hacen relegar al olvido conceptos que ya no parecen útiles precisamente por la presencia de aquéllas. Como veremos más adelante la introducción racional de una calculadora podría reconvertir esas cuestiones que parecían obsoletas. Además la importancia histórica del logaritmo, su origen y utilización a lo largo del tiempo bien merece la pena ser reseñado. También, como no, el motivo por el que han ido perdiendo interés como concepto aislado.

La misma calculadora puede ser la generadora del concepto tal y como cuenta la experiencia descrita en el artículo «La calculadora generadora de conceptos» de [10].

Mantisa y características, dos conceptos olvidados

Los términos mantisa y característica han desaparecido prácticamente del vocabulario habitual del mundo de los logaritmos. La llegada de las calculadoras fue arrinconando el uso de tablas y, fuera de uso éstas, tenía poco sentido hablar de aquéllas. Ambos conceptos podrían «reconvertirse» adaptándolos a una nueva perspectiva: nuestra calculadora.

Recordemos que característica es la parte entera del logaritmo y mantisa la parte decimal:

log(15) = 1,176091259

caract.:1

mantisa: 0,176091259

Los números muy grandes o muy pequeños, de uso tan frecuente hoy en día, suelen presentarse en un formato estandarizado que llamamos notación científica y que consiste en disponer la cantidad como producto de un número con una sola cifra entera no nula, multiplicado por una potencia de 10. Esta representación tiene la ventaja de darnos una idea de «el orden de magnitud» con el que estamos trabajando, de una forma inmediata. En efecto, entre indicar 2^{37} ó 1,374389534 . 10^{11} , la primera expresión nos da una exactitud total mientras que la segunda es aproximada, pero de nada nos sirve lo primero si no somos capaces de operar con ella y saber ¡qué tamaño tiene!

- Propongamos entonces escribir en notación científica el número 23¹². El desconcierto puede ser general. Pero cualquiera que posea una calculadora científica comprobará que con sólo teclear

aparece en la pantalla el resultado en notación científica:

 $2.191462443.10^{16}$

Analicemos el problema desde el punto de vista de los logaritmos procediendo como sigue:

{b} $\log (23^{12}) = 12 \cdot \log(23) = 12 \cdot 1.361727836 = 16.34073403$

caracteristica: 16 mantisa: 0,34073403.

ant $\log(0.34073403) = 10^{0.34073403} = 2.191462432$

- Así pues:
- a) La característica del logaritmo de un número N es, el exponente de 10 cuando N se representa en notación científica.
- b) El antilogaritmo de la mantisa de un número N, es la parte decimal de su expresión en notación científica.

Las afirmaciones a) y b) resultan evidentes de probar siguiendo los pasos de {b} de forma general:

Si
$$log(N) = c,m$$
 (c = caract.; 0,m= mantisa)

$$N = 10^{\log(N)} = 10^{c,m} = 10^{0,m}$$
 . $10^c = ant \log(0,m)$. 10^c

Al ser 0 < 0, m < 1 se sigue que 0 < ant log(0,m) < 10, lo que demuestra a) y b).

- ¿Por qué en {b} hemos efectuado $\log(23^{12}) = 12$. $\log(23)$?

Nuestra calculadora es tan eficaz que convierte automáticamente en notación científica algunos números. El conocimiento de la máquina o una simple ojeada a su manual de instrucciones nos permitirá averiguar en que rango de valores la conversión es automática. Pero esa misma ojeada nos informará que, con toda probabilidad, el mayor número que puede soportar es 9,9999... 10⁹⁹. Así, qué hacer con una cantidad como 235⁶². Pulsar ahora

no servirá porque el número excede la capacidad de la máquina. El recurso empleado en {b} es necesario:

 $\log(253^{62}) = 62\log(253) = 62 \cdot 2.403120521 = 148.9934723$

$$253^{62} = 10^{0.9934723} \cdot 10^{148} = 9,850818107 \cdot 10^{148}$$

- El comportamiento de este proceso con potencias variadas nos puede llevar a manejar muchos aspectos de los logaritmos. Si enunciamos el ejercicio con 235⁻⁶² y con 1/253⁶² manejamos diversas propiedades. Si es $(-253)^{62}$, $(-253)^{-62}$, -235^{-62} , etc., el resultado será más enriquecedor teniendo en cuenta que no se pueden calcular los logaritmos de números negativos pero que, evidentemente, nuestra transformación es posible. En otro orden de cosas. implícitamente hemos establecido que la función log es creciente y que es inyectiva (al calcular el antilogaritmo). Todo esto en el plano teórico de los logaritmos. En el aspecto práctico habremos conseguido manejar números casi tan grandes como queramos con ayuda de nuestra calculadora pero de una forma constructiva ya que ella, sin nosotros, tampoco hubiese podido operarlos. Si utilizamos estos resultados de una forma lúdicocientífica se pueden obtener cosas como éstas:
- Cuando «se juega» con potencias muy grandes causa un gran impacto dar una idea aproximada del tamaño de un número. Para ello los logaritmos son ideales, como aplicación inmediata de lo que acabamos de ver.

¿Cuál es el número más grande que se puede escribir con sólo tres digitos? ¿Cuál es su tamaño?

La respuesta a la primera cuestión suele ser siempre la misma: 999. Sin embargo pensando un poquito más detenidamente y dando alguna pista se empieza a variar y se presentan dos posibilidades: 999 o bien 999.

Ambos números «caben» en la calculadora y, por tanto al introducirlos pasarán a notación científica automáticamente y será fácil reconocer el mayor. Pero forcemos la imaginación y hagamos una aproximación que en este caso es válida:

$$log (9^{99}) = 99 log (9) lo cual «está próximo» a 99 log (10) = 99.$$

De ello concluimos que 999 ronda las 99 cifras.

$$log (99^9) = 9 log (99) lo cual «está próximo» a $9 log(100) = 9 . 2 = 18$$$

Y por tanto 999 no supera las 18 cifras.

Las aproximaciones son muy burdas pero son suficientes para el caso. Una vez que hemos visto la diferencia tan grande entre ellos, resulta curioso que se dude de cuál es el mayor.

Quizá todos quedemos satisfechos pero aún podemos escribir:

 9^{9}

Resulta que éste no nos «cabe en nuestra calculadora». Parece por tanto el mayor. ¿Pero qué tamaño tiene?:

Tomando su logaritmo: $9^9 \log(9) = 9^9 \cdot 0.9542425094 = 387420489 \cdot 0.9542425094 = 369693099.6$

La expresión en notación científica de nuestro gigante será:

 $10^{0.6} \cdot 10^{369693099} = 3.98107 \cdot 10^{369693099}$

tiene entonces 369693100 cifras, lo que quiere decir que si lo escribiéramos con este mismo tamaño de letra ocuparía una longitud de más de 616 kilómetros de papel.

Bibliografia

* ARENZANA HERNÁNDEZ, Victor, BUERA PÉREZ, Pedro y RODRÍGUEZ SOL, Luisa. Los cambios de escala

y el cálculo gráfico. Revista SUMA n^{o} 5 (págs: 59-64). 1990.

- * BORRAS VESES, Eliseo. **La Calculadora, generadora de conceptos**. APUNTES de Educación nº 32 (Ed. ANAYA.) (págs: 6-8). 1989.
- * COLLETTE, Jean-Paul. **Historia de las Matemáticas**. Ed. Siglo XXI. Madrid, 1985.
- * FRANK AYRES, JR. **Trigonometría plana y esférica**. Colección Schaum. Ed. McGRAW-HILL. México, 1977.
- * REY PASTOR, J. y BABINI, J. **Historia de la Matemática**. Ed. Espasa Calpe Argentina S.A. Buenos Aires, 1951.
- * REY PASTOR, J. **Elementos de Análisis Algebraico**. Ed. Herederos de Julio Rey Pastor. Madrid, 1966.
- * RIBNIKOV, K. **Historia de las Matemáticas**. Ed. Mir Moscú. Moscú, 1987.
- *VÁZQUEZ QUEIPO, Vicente. **Tablas de los Logaritmos Vulgares**. Casa Editorial Hernando S.A. Madrid, 1974.
- * VIVES, Teodoro J. **Astronomía de posición**. Colección EXEDRA. Ed. Alhambra. Bilbao, 1971.
- * DISEÑO CURRICULAR BASE. Enseñanza Secundaria Obligatoria. M.E.C. Madrid, 1989.

Jorge Fernández Herce I. B. José Arencibia Gil (Telde)