Simetría Plana en la clase: Grupos y Geometría

Juan Bosco Romero Márquez

En este artículo relatamos una experiencia sobre Simetría de las letras del abecedario, vivida con los alumnos de 1º y 3º de BUP, en la clase de Matemáticas.

El problema principal fue el estudiar las diferentes simetrías que presentan las figuras planas: simetrías axiales (respecto de un eje o una recta), y la simetría central u homotecia de razón - 1, o semigiro de 180° (respecto de un punto).

A cada tipo de alumnos se les mandó hacer un trabajo sobre este tema, de acuerdo con su nivel de conocimientos: a los alumnos de 1º de BUP, sobre todo, la manipulación de todo tipo de simetría; a los alumnos de 3º de BUP, aparte de lo anterior se les pidió el estudio geométrico-algebraico de la simetría: el aspecto analítico de coordenadas y la estructura del grupo de simetría de las letras del abecedario, y los diferentes grupos de simetría que aparecen cuando éstas vienen escritas en la tipografía de imprenta (figura 1): grupos de un elemento, de dos y de cuatro elementos.

Conceptos iniciales previos

Sea E el plano euclídeo en el que se ha hecho la identificación de los puntos y de los vectores libres, respecto de un origen de coordenadas.

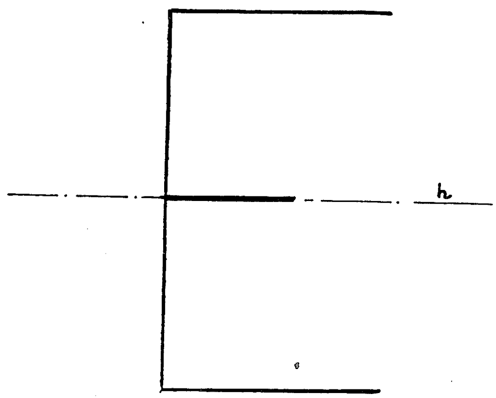
Una figura plana F es cualquier subconjunto no vacío de E.

Una simetría (isometría, movimiento rígido) de una figura F es una aplicación biyectiva s de F sobre F que conserva la distancia euclídea: la distancia d(P,Q) entre dos puntos cualesquiera de F y la distancia entre sus imágenes u homólogos s(P) y s(Q), esto es, que

$$d(P,Q) = d\,(s(P),\ s(Q)).$$

Describamos algunos casos particulares de simetrías: cualquier figura F tiene la simetría trivial, es decir, la aplicación identidad que pasa cada punto de la figura en el mismo. Además, se comprueba de forma inmediata que si s y s' son dos simetrías de F, es claro que la composición como aplicaciones de s, s' es otra simetría. Designamos por S(F) el conjunto de todas las simetrías de la figura F con la estructura interna dada por la composición de aplicaciones se prueba que es un grupo, llamado el grupo de simetría de la figura F. Supuesto, que la figura F, tiene un grupo de simetría, S(F) finito, tendrá una tabla de Cayley que se construye en la forma habitual. Es claro que la simetría trivial o identidad e (giro de 360°) de la figura F es el elemento unidad, ya que si s es cualquier otra simetría de F, entonces $e.s = s.e = s$. La simetría trivial e actúa bajo la composición de aplicaciones de la misma forma que el número 1, y por eso, a veces, ambas se identifican a efectos de cálculos.

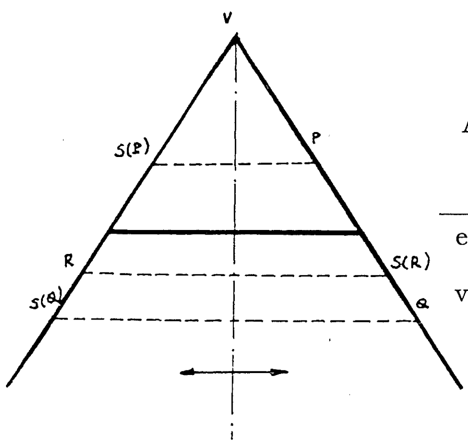
ABCDEFGHIJKLM
NOPQRSTUVWXYZ



B, C, D, E, K

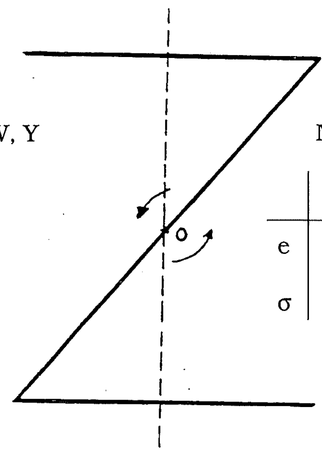
	e	h
e	e	h
h	h	e

Figura 1



A, M, T, U, V, W, Y

	e	v
e	e	v
v	v	e

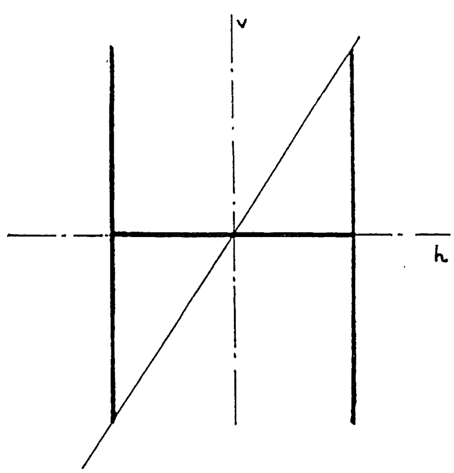


$\sigma = g_{180°}$

N, S, Z

	e	σ
e	e	σ
σ	σ	e

Figura 2



H, I, O, X

	e	v	h	σ
e	e	v	h	σ
v	v	e	σ	h
h	h	σ	e	v
σ	σ	h	v	e

Figura 3

Notas y observaciones.- Una simetría de un objeto F es una transformación o permutación de F que, es una biyección |: F→F, conservando un conjunto de propiedades P, es decir, se mueven todos los puntos individuales de F, pero deja invariante a F como un todo.

Si F es un subconjunto de un espacio métrico, tal como una figura F de un espacio euclídeo $|^n$, y P consiste de las distancias d(P,Q) entre los distintos puntos P y Q de F, por tanto la simetría *s* aplicará estos puntos, respectivamente, en *s*(P), y *s*(Q) verificando:

$$d(s(P),\ s(Q)) = d(P,Q).$$

La simetría desde el punto de vista racional del análisis de la estética significa armonía y proporción en los objetos y en los seres.

Grupos de simetría de las letras del abecedario

Empecemos calculando las simetrías y por tanto, los grupos de simetría de dos letras representativas del abecedario: la letra A y la Z.

Simetrías y grupo de simetrías de la letra A. (figura 2). Si reflejamos la letra A según un eje vertical s= v que pasa por su apex (vértice), entonces cada punto P es transformado o aplicado en su correspondiente punto imagen *v(P)* sobre el semiplano contrario u opuesto al que se encontraba P. Los puntos R sobre el eje (como el vértice, por ejemplo, quedan fijos o invariantes, esto es *v(R)=R)*. La transformación o permutación anterior se ilustra en la figura 2, y deja, la letra A como un todo invariante al no saber distinguir el lado anterior y posterior de la letra antes y después de aplicarle *v*. Más aún, *v* conserva la distancia entre dos puntos cualesquiera de la letra A. Por lo tanto *v* es una isometría de la letra A. Esta isometría también la tienen las letras: A,M,T,H,U,V,W,Y y X, y es llamada simetría bilateral, ya que ella intercambia los dos lados de A. Similarmente, B y E se reflejan sobre un eje horizontal, y H sobre ambos ejes: horizontal y vertical.

Otros tipos de isometría o simetría es la formada por las rotaciones. Por ejemplo, si giramos la letra Z alrededor de su centro por un giro de 180°, como en la figura 3, entonces la letra Z se transforma en sí misma, y la distancias entre pares de puntos originales y transformados se conservan por dicha rotación que es por lo tanto una simetría de la letra Z, mientras que la rotación de 90° no lo es, para dicha letra Z. De la misma forma, las letras H,N, y S tienen la simetría dada por el giro de 180° alrededor del centro de la figura de cada letra. El triángulo equilátero tiene las simetrías dadas por los giros, respectivamente, 120° y 240°; y la letra O identificada, a un círculo tiene cualquier tipo de simetría obtenida por rotación de la misma, cualquier ángulo alrededor de su centro.

Aplicación a la obtención de todas las simetrías y grupos de simetría de las letras del abecedario escritas en la tipografía de imprenta

Se trata de estudiar y obtener las simetrías de cada letra y el grupo de simetría asociada a la misma. Clasificar cada letra por el mismo tipo de simetría cuando tienen el mismo grupo de simetría o uno isomorfo. Dos letras se dirán distintas desde el punto de vista geométrico o algebraico cuando tengan grupos de simetría no isomorfos. De esta forma, obtenemos una relación de equivalencia en el conjunto de las letras del abecedario, a saber:

Dos letras son equivalentes *geométrica-algebraica* cuando sus dos grupos de simetría son el mismo, o siendo distintos son isomorfos.

Finalmente, obtendremos las clases de equivalencia.

Descripción de las simetrías y grupos de simetría:

1.- Las letras A,M,T,U,V,W, y Y admiten el mismo grupo de simetría. Es un grupo con dos elementos: la identidad o trivial *e* y la simetría o reflexión de eje vertical *v*. Su tabla de Cayley es:

S(F)= {e,v}

	e	v
e	e	v
v	v	e

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el mismo grupo de simetría anterior.

2.- Las letras B,C,D,E y K admiten el mismo grupo de simetría (es decir, tienen los mismos tipos de simetría), a saber: es un grupo de dos elementos: la identidad *e* y la reflexión o simetría de eje horizontal *h*. Su tabla de Cayley es: S(F)={e,h}.

	e	h
e	e	h
h	h	e

Los grupos de los epígrafes 1) y 2) tienen elementos distintos, pero, son isomorfos, es decir, existen entre ellos, una aplicación biyectiva que conserva la estructura algebraica de los dos, o que transporta la estructura de grupo cíclico, de uno en el otro.

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el mismo grupo de simetría anterior.

3.- Las letras F,G,J,L,P,Q,R poseen sólo la simetría trivial. Su grupo de simetría es el grupo trivial, con un sólo elemento, S(F)={1=*e*}. Su tabla de multiplicación es:

	1
1	1

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el mismo grupo de simetría anterior.

4.- Las letras N,S y Z admiten como simetría no trivial *g*, un semigiro o rotación de 180°, alrededor del centro de la figura, es decir, de su centro de simetría. El grupo de simetría de tales letras tiene dos elementos y por lo tanto, es isomorfo a los grupos obtenidos en 1) y 2) esto es S(F)= {*e*,*g*}. Su tabla de Cayley es la siguiente:

	1	g
1	1	g
g	g	1

Los grupos de 1), 2) y 4) son isomorfos como grupos abstractos, aunque, obviamente, tienen significados geométricos diferentes.

5.- Las restantes letras con la tipografía en que han sido dibujadas, H,I,O,X, admiten todas las simetrías siguientes *e,v,h,g* consideradas antes, y de hecho no admiten otras. De aquí, si F designa cualquiera de las letras anteriores, su grupo de simetría , S(F)={*e,v,h,g*}, que es isomorfo al grupo de Klein del rectángulo (simetrías del rectángulo). La tabla de Cayley, de este grupo es:

	e	v	h	g
e	e	v	h	g
v	v	e	g	h
h	h	g	e	v
g	g	h	v	e

Para probar, por ejemplo, que *e,v,h,g* son las únicas simetrías de la letra H, basta ver que cada simetría *s* cambiaría de posición las cuatro terminaciones verticales de esta letra.

Ejercicios.- Dibujar otros conjuntos geométricos del plano que tengan el grupo de simetría anterior.

Notas y observaciones.- Si la letra I fuera considerada como una barra vertical delgada, entonces las aplicaciones *e* y *v* coinciden como aplicaciones al restringirlas a dicha letra. Y de la misma forma, las simetrías *h* y *g* coinciden y su grupo de simetría es ahora: S(I)= {*e,h*}.

Usualmente, las simetrías de una figura F no se consideran como isometrías que dejan invariante a F globalmente solo, sino que se consideran como transformaciones (movimientos o isometrías) del plano euclídeo E. Las excepciones a este concepto amplio de simetría se deben, al caso, en que la figura F está contenida en alguna recta de E.

Observemos que si consideramos la letra O como un círculo, admite todas las rotaciones de cualquier ángulo como simetrías alrededor de su centro, como también cualquier reflexión o simetría según un diámetro. Y así, su grupo de simetría sería infinito.

Si consideramos la letra X como una cruz, X como construida con dos segmentos perpendiculares bisecando cada uno al otro, entonces su grupo de simetría, tendría ocho elementos.

Un buen ejercicio, como complemento de todo lo anterior, sería el siguiente: *Hallar las simetrías y el grupo de simetrías de un polígono regular de cualquier número de lados.* Pero, esto será hecho en otra aventura del descubrimiento geométrico-algebraico que en otra ocasión abordaremos.

Bibliografía

* THE OPEN UNIVERSITY.: **Curso básico de matemáticas. Grupos I, II.** México, 1971.

* H. WEYL.: **La Simetría**. Ed. Nueva Visión. Buenos Aires. 1958.

* I. STEWART.: **Conceptos de Matemática Moderna**. Alianza. Madrid, 1971.

* J.A.C. REYNOLDS.: **Colección Principios de Matemática Moderna. Forma, Tamaño y lugar**. Vicens Vives. Barcelona, 1968.

* H. FREUDENTAL.: **Las Matemáticas en la vida cotidiana**. Guadarrama, Madrid, 1967.

* H.S.M. COXETER.: **Fundamentos de geometría**. Limusa Wiley. México, 1971.

* F. PAPY.: **Matemática Moderna, 1, 2, 3, 4, 5**. Eudeba. Buenos Aires. 1970.

* G. MATTHEWS.: **Colección principios de Matemática Moderna. Matrices I, II.** Vicens vives. Barcelona, 1968.

* M. OTTE, H. STEINBRING, P. STOWASSER, A. DRESS.: **Enciclopedia de las ciencias: Matemáticas**. Desclée de Brouwer. Bilbao, 1985.

* T. J. FLETCHER.: **Didáctica de las Matemáticas**. Teide. Barcelona, 1974.

* H. STEINHAUS.: **Instantáneas Matemáticas**. Biblioteca Científica Salvat. Barcelona, 1986.

* M. GARDNER.: **Izquierda y derecha en el cosmos**. Biblioteca Científica Salvat. Barcelona, 1986.

* P. S. STEVENS.: **Patrones y pautas en la naturaleza**. Biblioteca Científica Salvat. Barcelona, 1986.

* E. H. LOCKWOOD y P. H. MACMILLAN.: **Geometry Symmetry**. Cambridqe University Press. Cambridge, 1978.

* J. ROSEN.: **Symmetry discovered: concepts and applications in natura and science**. Cambridge University Press. London, 1971.

Juan Bosco Romero Márquez
I.B. Isabel de Castilla. Ávila