Mirando el problema al revés

Vicente Ibañez Orts

Este artículo es continuación del titulado ¿Qué es la inducción matemática? publicado en la revista «Mundo Científico» nº 123 de abril del 92. En él, los mismos personajes O'Maggi, Valdemar y el propio profesor Polya vuelven a recrear una de las clases del ilustre pedagogo. Esta vez trata sobre el método propuesto por Pappus de atacar un problema suponiendo que ya se conoce la solución.

Es la clase. En una esquina hay colgada una litografía de Durero: Melancolía I. En ella, un joven ángel pensativo apoya la cabeza en su mano izquierda mientras mantiene un compás en su regazo. Está sentado frente a una ventana en la que declina el sol y da profundidad al dibujo. Junto a él, en el suelo, hay una esfera y un enorme octaedro de piedra negra bruñida formado por dos triángulos equiláteros y seis pentágonos irregulares, de modo que el espectador del cuadro no puede por menos de preguntarse que hace allí aquel extraño objeto telúrico. Un reloj de arena pende del muro, junto a un cuadrado mágico 4x4 empotrada en la pared que indica la fecha de ejecución del grabado: 1514.

Una tarde clara y fría de otoño. Tras el escritorio y con la pipa en la mano, el profesor Polya (1) exclama:

Señores, son Ustedes afortunados. Les gusta la enseñanza y además poseen una honda afición desinteresada por el canto puro de Pitágoras. Hoy quiero hacer hincapié en una forma particular y quizás algo enrevesada de resolver con carácter general un problema matemático. Pero no adelantemos los acontecimientos y vayamos por partes. Sta. O'Maggi, ¿Quiere salir al encerado?

El problema que les voy a presentar y que O'Maggi va a intentar resolver es este: Dibuje Sta. dos recipientes, uno de 9 litros de cabida y otro de 4, en los que se da la circunstancia de que no hay marca alguna en sus bordes que nos de idea de su capacidad, por lo que tan solo conocemos el volumen total. ¿Sta., los tiene ya dibujados?. Piensen que cada uno de Ustedes dispone en su mesa de estos dos recipientes. ¿Se ha formado todo el

(1) El profesor George Polya nació en Budapest y está afincado en Estados Unidos. Ha sido profesor de las Universidades de Princeton, Brown y Stanford. Del breve curso que dio en esta última, situada en Palo Alto, California, sobre «Docencia y retórica en matemáticas» al que tuvo la oportunidad de asistir su alumno e incondicional admirador Ignacio Valdemar, y a partir de las notas manuscritas que este dejó de su asistencia, -por lo demás única prueba evidente de que se impartió dicho curso - junto con partes del conocido librito de Polya «How to solved it» (¿Cómo resolverlo?) Princeton University Press (1945), especialmente de su capítulo «Trabajando hacia atrás», se han entremezclado para configurar este artículo. Creemos que al eminente pedagogo no le importará este plagio, hecho, al fin y al cabo, en aras de una mayor difusión de sus brillantes ideas y en recuerdo de su malogrado discípulo.

mundo una imagen mental de los mismos?. Bien, la pregunta que hago extensiva al conjunto de la clase es esta: ¿Cómo podemos utilizarlos de forma combinada para tomar exactamente 6 litros de un gran tonel?

Veamos, O'Maggi, a pesar de que este ejercicio tiene un enunciado excesivamente académico con líquidos y volúmenes ficticios, y lo más indicado sería disponer de un vaso convenientemente graduado, ¿Se le ocurre alguna idea?. En ese momento O'Maggi suspiró, y con las manos en la espalda se separó ligeramente de la pizarra como si quisiera observar en perspectiva el dibujo que acababa de hacer. Después de un momento de reflexión, respondió tras un breve carraspeo:

Señor, podríamos llenar el primer recipiente en toda su capacidad, mientras alzaba su mano izquierda como si mantuviese en ella el vaso de cristal lleno de líquido, y vaciar parte de él en el segundo, y realizaba el acto de trasvasar el agua a su mano derecha, con lo que tendríamos 5 y 4 litros respectivamente, y después, bueno,...después...

Efectivamente, apostilló Polya, el método que emplea su compañera es muy gráfico y adecuado. Consiste en probar y tantear. Está actuando como cualquier persona al enfrentarse a un problema. Partimos de dos recipientes vacíos, y el profesor levantaba las manos como si sujetasen también los dos vasos, ensayamos esto y aquello, y aunque fracasemos en el primer intento, seguimos probando. Fíjense Ustedes que siempre se trata de **ir hacia delante**, buscando a tientas la solución que nos permita resolver el rompecabezas. Tal vez con perseverancia, mediante prueba y error, lleguemos a tener éxito... Sin embargo hay personas intuitivas o aquellas que hayan tenido la oportunidad de aprender en sus clases de matemáticas algo más que meras operaciones de rutina, que conocen otra manera muy astuta de enfrentarse a esta cuestión.

En este momento el profesor Polya cortó su discurso, y dirigiéndose a O'Maggi comentó: gracias Señorita, ya puede sentarse, pero antes tenga la amabilidad de dejar los recipientes sobre mi mesa procurando no derramar el líquido. ¿Estaban llenos de agua? ¿No? Seguidamente nos miró con socarronería y comenzó la ardua tarea de limpiar y recargar su cachimba. Era su manera personal de indicarnos que debíamos poner a cavilar nuestros cerebros para buscar alguna respuesta. Cuando finalmente encendió su pipa y expulsó una larga y tranquila bocanada de humo, prosiguió:

Señores, hemos comentado en anteriores ocasiones que resolver un problema, por nimio que sea, es realizar un pequeño descubrimiento, y al hacerlo podemos gozar, a nuestro nivel, de la tensión y zozobra que embargó a su descubridor. Por tanto, veamos, ¿Qué se nos pide? O en términos matemáticos ¿Cuál es la incógnita? Actuemos conscientemente por una vez al revés, y partamos del principio de que ya hemos dado con la solución. Ahora es el momento de que razonemos hacia atrás. Por ejemplo, podríamos llenar el primer recipiente a plena capacidad, 9 litros. Si lográramos verter 3, obtendríamos los 6 que buscamos... Claro que para ello nos bastaría con que en ese momento el recipiente pequeño tuviese justamente 1 solo litro. El problema inicial, por tanto, se ha transformado en encontrar el modo de llegar a esta última situación.

No piensen que es fácil dar con la solución que les sugiero, aunque nunca hay que descartar que se pueda descubrir por azar tras sucesivos intentos. Lo que hemos de hacer es llenar hasta arriba el recipiente de 9 litros, mientras levantaba su mano izquierda, y después vaciarlo dos veces en el de 4, -mientras nosotros nos representábamos mentalmente esta operación- con lo que nos quedará exactamente un litro en él. ¡Justo lo que buscábamos!

Sin darnos cuenta hemos seguido un razonamiento muy antiguo, ya propuesto por el filósofo y matemático griego de Alejandría, Pappus «partamos de lo que se nos pide y razonemos a la inversa» tal como lo describe en su obra «Tesoro del Análisis» en la que iniciaba en el arte de resolver cualquier problema; y, según él, éste fue el método usado con gran profusión por los afamados matemáticos que le precedieron como Platón, Euclides o Apolonio. El tema es trascendente y su riqueza creativa indudable. Espero que se enamoren de él como lo hicieron aquellos grandes personajes, ya que se trata de

una máxima perdurable que sin duda les ayudará a afinar su lógica deductiva. Efectivamente, una vez tengamos un litro en el recipiente pequeño, nos bastará con llenar hasta el tope el de 9 litros y vaciarlo en él hasta el borde, para que queden exactamente en él los 6 litros buscados. Como ven, hemos llegado a algo que ya conocíamos, puesto que habíamos partido de este valor, y **trabajando hacia atrás**, hemos logrado reconstruir la sucesión apropiada de operaciones que nos han llevado a la solución.

Señores, no se necesita ser un genio para resolver un problema mediante el método de análisis expuesto; basta con actuar con un poco de sentido común. Primero nos concentraremos sobre el fin deseado, y acto seguido analizaremos la solución final que deseamos obtener. En este punto nos formularemos la pregunta: ¿A partir de que posición precedente podríamos conseguir esta? Si el análisis nos conduce a un absurdo, el problema será también insoluble, ya que una conclusión falsa implica una premisa equivocada. Espero que anclen con fuerza en su consciencia este valioso instrumento de análisis.

El profesor Polya nos dio un respiro y con parsimonia volvió a encender su pipa. Miró atentamente el cuadro de Durero y siguió los ojos del ángel a través de la ventana. A nosotros, que desde el fondo del aula dominábamos toda la escena, nos producía la sensación irreal de que tanto el rostro del ángel dubitativo como el de nuestro maestro se fundían en la cara pentaédrica del octógono irregular que actuaba como un espejo mágico entre las dos figuras melancólicas.

El tiempo se había detenido. Tras un breve esfuerzo, el profesor se escapó del hechizo de la puesta de sol que veía reflejado en otras pupilas y continuó su discurso:

Estimados alumnos, para finalizar, me van a permitir que en este curso de «Docencia y retórica en matemáticas» en el que como todos saben también interviene la ética, la estética y la historia, me permita una cierta transgresión y les comente un modesto experimento de conducta comparada con animales: disponemos de un lugar cerrado en el que se encuentra un perro. En uno de sus lados hay una puerta abierta. Frente a ella, pero al otro lado del vallado opuesto, hemos colocado un cebo atractivo, como por ejemplo comida suculenta. La dificultad es muy fácil de vencer para el animal. Al principio puede ladrar y corretear nervioso de un lado a otro del recinto, o intentar saltar la valla, pero rápidamente captará la situación, dará media vuelta atravesando la abertura y dando un rodeo alcanzará rápidamente la comida.

El mismo problema es extraordinariamente difícil de resolver para una gallina. La veremos corretear exaltada de un punto a otro de la valla, piando y agitando desacompasadamente las alas, y puede pasar mucho tiempo antes de conseguir la pitanza, si es que la llega a conseguir.

Piensen Ustedes que lo que hacemos al resolver un problema es también sortear un obstáculo. Este experimento tiene por tanto una especie de valor simbólico. La gallina actuó al igual que aquellas personas que resuelven un problema por casualidad, desordenadamente, topando con la solución al volver sobre él machaconamente una y otra vez, mas que por aplicar un plan metódico para alcanzar la meta. Por el contrario, el perro resolvió el problema tan bien como nosotros el de los recipientes: de una manera estructurada. Recuerden que primero intentamos solucionarlo hacia adelante, para después pararnos e imaginar que ya lo teníamos resuelto y desde ese punto final como comienzo, trabajar hacia atrás. El can que tras una breve inspección de la situación y algunos ladridos dio media vuelta y se lanzó fuera, nos da, de alguna manera, la impresión de tener una visión de la situación muy superior a la gallinácea.

Todos tenemos una cierta propensión a ir directamente a lo que creemos esencial en la resolución del problema sin darnos cuenta que es mejor observarlo con perspectiva, y adelantarnos a imaginar que ya tenemos la solución, y desde ese punto, empezar a razonar a la inversa. A veces no hay que seguir la línea recta, ni tan siquiera la transversal, sino la dirección contraria a la habitual, aunque ello conlleva, no cabe duda, un esfuerzo adicional. Por tanto, anadió, mientras

comenzaba a recoger sus útiles de fumador y su manojo de libros, no hay que criticar al ave por su falta de tino al solucionar el problema, sino, lamentablemente, reconocer que hay un cierto paralelismo entre sus dificultades y las nuestras.

Y poniéndose de pie exclamó mientras se dirigía a la puerta: ¡Señores, hasta la próxima clase!

Vicente Ibanez Orts
Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante

Litografía de A. Durero titulada Melancolía. Su fecha de ejecución fue 1514, y aparece en las dos casillas centrales de la parte inferior del cuadrado mágico.