¿Cómo cambiar las concepciones erróneas de los estudiantes? Una experiencia en matemáticas

José del Río Sánchez

Uno de los objetivos más importantes de la enseñanza es conseguir cambiar las ideas previas erróneas de los estudiantes. En este artículo, se diseñan dos metodologías didácticas (resolución de problemas y descubrimiento dirigido) que fueron experimentadas durante veinte clases por dos grupos de alumnos de enseñanza secundaria mientras otro grupo utilizaba una metodología expositiva tradicional. Controladas las principales variables intervinientes, los resultados obtenidos indican que un método basado exclusivamente en la resolución de problemas produce un nivel de cambio conceptual y de rendimiento algo inferior al producido por un método más orientado aunque ambos métodos superan al método expositivo tradicional.

Introducción

El análisis de las concepciones erróneas de los estudiantes está adquiriendo, para investigadores y docentes, una importancia decisiva ya que esas ideas condicionan fuertemente el aprendizaje y, por lo tanto, cualquier desarrollo curricular, como han puesto de relieve numerosas investigaciones tanto teóricas como experimentales. En el campo de las matemáticas, existen muchos estudios que se han ocupado de detectar y analizar estas concepciones erróneas entre las cuales mostramos, a modo de ejemplo, las siguientes:

El numerador y el denominador son números independientes. Según Tatsuoka (1984), esta idea es la responsable de errores como

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \frac{8}{6} \; ; \quad \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$$

No se pueden sumar letras con números.
Esta idea ha sido detectada por Booth (1982) en los primeros cursos de Educación Secundaria.

El signo igual siempre representa una acción que debe llevar a un resultado, no un equilibrio manipulable en dos sentidos (Grupo Azarquiel, 1987; en 1º de BUP).

Un concepto geométrico se identifica con su representación «canónica».
Esta idea, según Hershkowitz (1987) y Medeci y otros (1986), hace que, por ejemplo, muchos estudiantes no reconozcan las figuras 1 como triángulos rectángulos o las figuras 2 como cuadriláteros, debido a que no están dibujados en la posición o en la forma estándar.

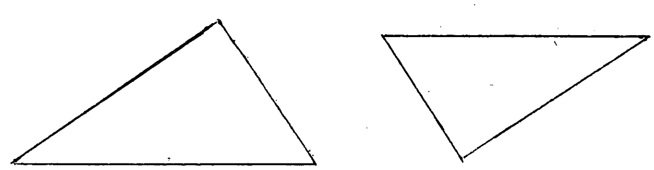


Figura 1

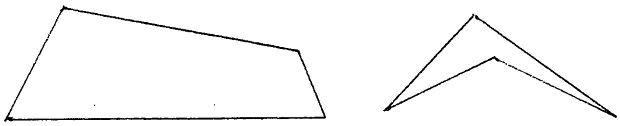


Figura 2

La definición de un objeto geométrico está formada por una lista de propiedades que lo describen, y estas propiedades no tienen por qué ser atributos críticos del concepto ni constituir un conjunto «mínimo» (Vienner y Zur, 1987).

Una gráfica es el dibujo de una situación.

Esta idea fue detectada por Bell y otros (1987) cuando planteaban, a estudiantes de los últimos cursos de primaria, problemas como el de la figura 3. Las respuestas más frecuentes fueron de este tipo: «Han caminado sobre una colina muy empinada y entonces, cuando llegaron a la cima, era muy recta. Entonces, cuando bajaron, fueron otra vez por una colina muy empinada».

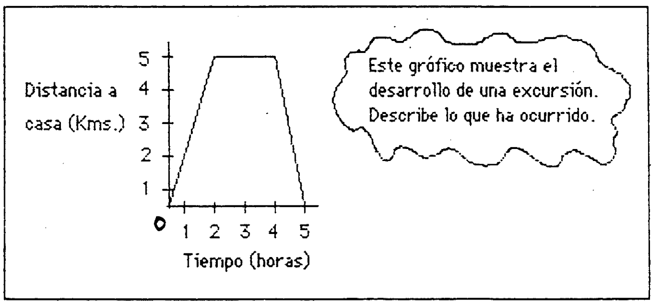


Figura 3

(Una revisión de las principales investigaciones realizadas sobre este tema puede verse en Del Río, 1991).

El origen de las concepciones erróneas es, en algunos casos, preinstruccional (medios de comunicación, familia, ambiente sociocultural, lenguaje coloquial, analogía con otras materias, etc.), pero, en otros casos, se generan durante el proceso instructivo, ya que, con la metodología expositiva habitual:

- no se dan oportunidades a los estudiantes para que pongan en juego lo que ya saben sobre el «tema» antes de su estudio;
- se presentan los conceptos y los procedimientos como algo perfectamente elaborado y rematado donde no es posible ninguna intervención personal;
- se valora más la memorización de los conceptos y, sobre todo de los procedimientos, que su comprensión, con lo cual los alumnos memorizan sin intentar entender;
- no se analizan sistemáticamente los errores más frecuentes de los estudiantes.

¿Es posible diseñar una metodología didáctica que sea capaz de cambiar las concepciones erróneas de los estudiantes?

Entre las pocas «respuestas» suficientemente contrastadas que existen, destaca la enseñanza por diagnóstico, estrategia desarrollada en el Shell Centre for Mathematical Education, cuyas líneas generales pueden verse en Bell (1986, 1987).

En este estudio presentamos, en primer lugar, el diseño de dos metodologías didácticas que, basadas en un modelo constructivista del aprendizaje, aspiran a cambiar las concepciones erróneas de los estudiantes y a incrementar su nivel de aprendizaje conceptual. En segundo lugar, describimos la experimentación de estas metodologías con estudiantes de 3º de BUP. Finalmente, comparamos el nivel de cambio conceptual y de rendimiento obtenido por estos alumnos con el obtenido por quienes siguieron una metodología expositiva habitual. Los resultados y las conclusiones cierran el presente trabajo.

Diseño de las metodologías didácticas

Las dos metodologías que presentamos se fundamentan en los principios teóricos del aprendizaje por descubrimiento, concebido como un proceso cognoscitivo que parte de la identificación de un problema y, mediante un procedimiento resolutivo al que le es consustancial la evaluación de hipótesis, autorregulado por el propio sujeto con la necesaria orientación sociocultural, produce una construcción intrapsíquica novedosa (Barrón, 1991).

La estrategia instructiva es una síntesis de las propuestas por diferentes autores (Joyce y Weil, 1985; Barrón, 1991; Marks, 1980; Guzmán, 1987; Libeskind, 1977; Bautista, 1987; etc.) y se desarrolla en tres fases cuya síntaxis es la siguiente:

Fase 1: Contextualización. El profesor identifica las ideas previas, las concepciones intuitivas, que poseen ya los alumnos sobre el tema de estudio así como su nivel de competencia en las estructuras conceptuales sobre las que se asientan los nuevos conceptos o procedimientos algorítmicos. A partir de estos datos elabora y propone una o varias situaciones problemáticas tras cuya exploración cada alumno formula sus propias conjeturas o propuestas de solución.

Fase 2: Construcción. En esta fase, los alumnos deben demostrar o refutar sus conjeturas. Este proceso puede facilitarse si poseen más información que la suministrada en el enunciado de la situación problemática. La única diferencia entre las dos metodologías es la siguiente: en la primera, los estudiantes adquieren esa información realizando una secuencia de actividades, expertamente planificadas por el profesor, como elaboración de definiciones, razonamientos dirigidos, corrección y/o complementación de cálculos, generalizaciones, etc.; en la segunda metodología, los alumnos han de buscar toda la información necesaria en el propio proceso resolutivo. Al final de este proceso, deben quedar construidos los nuevos conceptos, estructuras conceptuales o procedimientos algorítmicos.

Fase 3: Ampliación. Con el fin de reforzar los conocimientos, habilidades y actitudes que van generándose con este aprendizaje, se proponen una serie de actividades algorítmicas, problemas o investigaciones cuya resolución permita al alumno incrementar la significación y la red de relaciones de los nuevos conceptos o procedimientos algorítmicos al mismo tiempo que ponga en juego su poder de transferencia.

El sistema social de ambos modelos se basa en el trabajo de los alumnos en pequeños grupos y en la puesta en común de los resultados después de cada una de las fases con el fin de asegurar que los resultados correctos son conocidos y compartidos por todos los alumnos, puesto que algunos conducen a estructuras conceptuales que es necesario utilizar en actividades posteriores. Cuando los alumnos están realizando las actividades, el profesor pasa por los distintos grupos de trabajo, no como un inspector, sino como una persona que procura atender y ayudar individualmente a todos los alumnos sin discriminaciones. Un interés sincero y evidente por parte del profesor en lo que piensan sus alumnos ayuda a aumentar su disposición a compartir sus pensamientos. De este modo, genera en ellos la suficiente confianza y admiración como para que surja el diálogo. En ese diálogo personal o de pequeño grupo, el profesor no facilita información a los alumnos, sino que consigue que éstos sientan curiosidad y piensen por sí mismos, pero sin abocarlos al desaliento o a la desesperación porque no encuentren las soluciones; por el contrario, intenta que los alumnos obtengan éxitos (aunque sean parciales) con el fin de aumentarles la confianza y la seguridad en su quehacer matemático. Al mismo tiempo, procura convencer a los alumnos de que, también en matemáticas, el trabajo y el esfuerzo conducen al éxito; para ello, detecta los logros conseguidos de esta forma y los elogia explícitamente.

El principal sistema de apoyo es un guión de actividades o problemas cuidadosamente estructurados de manera que pueda ser utilizado de modo individual por todos los estudiantes. Para la segunda metodología, es conveniente, además, una guía heurística o estrategia directiva parecida a la de Polya (1965) con el fin de facilitar el proceso de resolución de problemas. En resumen, podemos conceptualizar la primera metodología como descubrimiento dirigido y la segunda como resolución de problemas.

Análisis de las ideas previas

La aplicación de estas metodologías exige, en primer lugar, que se conozcan las ideas previas de los estudiantes como punto de partida de todo el proceso instructivo. Escogimos como unidad didáctica objeto de estudio las Cónicas (3º de BUP) y procedimos a realizar una investigación para diagnosticar qué ideas previas poseen los estudiantes de este curso sobre estas curvas antes de comenzar su estudio sistemático.

La investigación se desarrolló en dos fases:

Primera fase: Se pretendía obtener una información aproximada de carácter general sobre las ideas previas que poseían los alumnos. Para ello se elaboró un cuestionario breve y muy abierto en el que, sobre cada una de las curvas, se pedía a los alumnos que la dibujasen, la definieran, enunciaran alguna propiedad y describieran algún objeto o fenómeno real donde se encontrase esta curva. Fue contestado por 76 alumnos de 3º de BUP (17 años) en el mes de noviembre de 1987, cuando todavía no habían comenzado su estudio sistemático. Utilizaron una hoja para cada curva, tenían regla y compás y disponían de una hora, tiempo que fue, en todos los casos, suficiente. Las contestaciones fueron anónimas, lo cual favoreció el alto grado de espontaneidad que necesitaba esta primera aproximación al objetivo de la investigación.

Segunda fase: A partir de los resultados obtenidos en la primera fase se confeccionó un cuestionario de 40 items de verdadero-falso (anexo 1) que fue contestado por 305 estudiantes de tres centros distintos durante el primer trimestre del curso 1988-1989, antes de comenzar el estudio sistemático de estas curvas.

Los resultados obtenidos indican que la mayor parte del conocimiento que poseen los alumnos sobre las cónicas es de tipo físico y social pero no lógico-matemático en el sentido que da Piaget a estos términos, pues solamente han realizado una abstracción empírica (conocimiento físico) y han asignado a esas curvas el nombre convencionalmente aceptado en el entorno socio-cultural (conocimiento social). Las definiciones de elipse, hipérbola y parábola, aceptadas de modo casi unánime, están constituidas por una sucesión de propiedades obtenidas perceptualmente que intentan describir por exhaustión la forma de la curva. Por ejemplo:

- Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro.

- Una parábola se define como una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función.

Como consecuencia, se detectaron las siguientes ideas erróneas:

1. Un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia, como el de la figura 4, es una elipse.

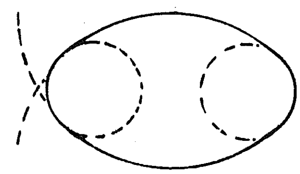


Figura 4

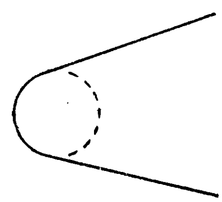


Figura 5

2. Un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes en sus extremos, como muestra la figura 5, forman una parábola.

3. Todas las cónicas pueden dibujarse perfectamente empleando sólo la regla y el compás.

4. Los tres tipos de cónicas (elipse, hipérbola y parábola) son independientes, no guardan ninguna relación estructural entre sí, ni directa ni indirecta (a través de un elemento externo como podría ser una superficie cónica).

5. Una parábola (y, en general, cualquier curva) no es un objeto geométrico independiente del sis-

tema de referencia; por el contrario, primero existe el sistema de referencia como algo dado a priori y después la curva completamente encadenada a él; esto implica que una curva no tiene infinitas ecuaciones dependiendo del sistema escogido, sino una sola.

6. Pueden trazarse dos tangentes distintas en cada punto de una cónica.

7. En general, los estudiantes perciben que las cónicas están poco conectadas con la realidad.

(Puede consultarse una descripción completa de este estudio en Del Río, 1989).

Materiales y recursos didácticos

Procedimos, en primer lugar, a la formulación de los objetivos y a la selección de los contenidos, comunes para todos los grupos, teniendo en cuenta los temarios vigentes y las características de los estudiantes. Después, a partir de las ideas previas que enumeramos en el apartado anterior, elaboramos los materiales didácticos.

Para la primera de las metodologías didácticas (descubrimiento dirigido), diseñamos un guión de actividades instructivas para el alumno entre las cuales se intercalan breves informaciones o comentarios. Las actividades, escritas en letra cursiva, numeradas y con un espacio en blanco para que los estudiantes anoten en él sus resultados, son de distintos tipos: exploraciones y analogías, corrección y/o complementación de cálculos, evaluación de conjeturas, ejercicios algorítmicos, problemas de determinación, problemas de demostración y problemas de descubrimiento de propiedades. Estos tipos de actividades se distribuyen a lo largo de todo el guión ajustándose, en la enseñanza de cada estructura conceptual, a las tres fases instructivas descritas anteriormente. Dado que la extensión de este trabajo no nos permite mostrar el material completo, describimos, a modo de ejemplo, las actividades que se refieren a la enseñanza de la estructura que hace equivalentes los conceptos de elipse como sección cónica y como lugar geométrico basado en la propiedad focal.

En la primera actividad se desarrolla la *fase de contextualización*. En ella, los alumnos analizan nueve curvas distintas relacionadas con las cónicas y van formulando una conjetura sobre el tipo de curva que es cada una de ellas (anexo 2). De este modo, salen a la luz ideas previas que ya poseen sobre las cónicas, el profesor toma conciencia de cuáles son las conjeturas erróneas más frecuentes y en qué grupos se producen con el fin de orientar el cambio conceptual que debe producirse en esos alumnos cuando, en actividades posteriores, deban refutar su conjetura utilizando argumentos basados ya en los conceptos matemáticos. Se utilizan como recursos materiales la regla, el cartabón, la escuadra, el compás, una hoja de papel vegetal y una lámpara con pantalla cilíndrica.

A partir de este momento, comienza la *fase de construcción*. Las actividades siguientes van encaminadas a que el alumno obtenga una información adicional suficiente que le facilite la evaluación matemática de las conjeturas formuladas antes. Mediante los dibujos del guión y cortando superficies cónicas de cartón, los alumnos obtienen las definiciones de los tres tipos afines de secciones cónicas que materializan también iluminando la pared con una lámpara de mesa que tenga una pantalla cilíndrica. A continuación, completan un razonamiento que conduce al descubrimiento de la propiedad focal de la elipse, ayudados por modelos materiales construidos con transparencias y pelotas. Refuerzan este aprendizaje con el trazado de una elipse utilizando un cartón, dos chinchetas y un trozo de hilo. Una vez adquirida toda esta información, se enfrentan, ya, a la refutación o la demostración matemática de las conjeturas que formularon al examinar las curvas de la primera actividad y, en la puesta en común subsiguiente, se resuelven los conflictos cognitivos que hayan surgido.

El guión continúa proponiendo actividades para la *construcción de las estructuras conceptuales* equivalentes de la hipérbola y de la parábola y, finalmente, plantea una serie de situaciones problemáticas que relacionan todas ellas y que constituyen la *fase de ampliación* del proceso instructivo, tal como fue descrita anteriormente: los arcos a través de la historia, las superficies cuádricas en la arquitectura, las cónicas como envolventes, billares circulares y elípticos, antenas y radares, etc. (El material completo, junto con la guía del profesor, puede consultarse en Del Río, 1990,a,b).

Los materiales de la segunda metodología están constituidos por una colección de 18 situaciones problemáticas precedida por una guía heurística que puede ser utilizada por los alumnos de forma sistemática en su tarea resolutiva. De este modo, al mismo tiempo que sistematizan sus procesos de resolución, usan de modo consciente estas estrategias, reconocen su validez en problemas de contenidos diversos y las interiorizan. Para conseguir mayor eficacia en el uso de esta guía, los problemas se han clasificado, por su tarea, en problemas de determinación, problemas de demostración y problemas de descubrimiento de propiedades. Para cada tipo, se relacionan las heurísticas más específicas, estructuradas en las cuatro fases del modelo de Polya (1965): comprender el problema, concebir un plan de resolución, ejecutar el plan y examinar la solución.

La secuencia de contenidos no coincide exactamente con la propuesta en la otra metodología, debido a que, al ser menor la orientación externa, hay que apoyarse exclusivamente en los conocimientos previos del alumno y conseguir en los primeros problemas instrumentos y modelos para los siguientes. Esto nos indujo a empezar con la ecuación de la circunferencia (instrumento y modelo para las demás ecuaciones) y seguir con el concepto de elipse (modelo para los conceptos de las demás cónicas). En el anexo 3 mostramos, a modo de ejemplo, la situación problemática en que se construye la equivalencia de los conceptos de elipse como sección cónica y como lugar geométrico basado en la propiedad focal. Como en la primera metodología, los alumnos, tras el examen de las curvas obtenidas, formulan sus conjeturas; pero, aquí, la evaluación de esas conjeturas se realiza empleando como única información adicional la definición de elipse como lugar geométrico. El proceso, por lo tanto, es mucho más abierto; por ello, el número de curvas propuestas es menor y la formulación de la tercera actividad (sección con plano tangente a las esferas) esconde una valiosa ayuda para el descubrimiento de la estructura conceptual. En esta única situación problemática, se recogen la fase de exploración y la fase de construcción. Tras una puesta en común, donde se resuelven los conflictos cognitivos, en los siguientes problemas se construyen, de modo análogo, las estructuras de hipérbola y parábola y, luego, se proponen las mismas situaciones problemáticas que en la primera metodología para relacionar todas ellas y completar el proceso instructivo (fase de ampliación).

Experimentación

La primera versión provisional de los materiales didácticos se experimentó entre abril y mayo de 1988. Participaron en ella cuatro grupos de alumnos con cuatro profesores distintos. Esta experiencia piloto sirvió para comprobar la adecuación de los materiales diseñados a la situación educativa real.

La experimentación definitiva se realizó entre enero y marzo de 1989 y en ella participaron 230 alumnos de Salamanca y Zamora distribuidos de la siguiente manera:

Grupo 1 (Primera metodología: Descubrimiento dirigido): 90 estudiantes pertenecientes a tres grupos de 3º de BUP.

Grupo 2 (Segunda metodología: Resolución de problemas): 58 estudiantes pertenecientes a dos grupos de 3º de BUP, a cargo de un profesor distinto de los anteriores.

Grupo 3 (Metodología expositiva tradicional): 82 estudiantes pertenecientes a tres grupos de 3º de BUP, a cargo de los tres mismos profesores que utilizaron la primera metodología.

Puesto que la muestra no fue escogida al azar, no teníamos la certeza de que los tres grupos fueran homogéneos y, como consecuencia, evaluamos su grado de homogeneidad respecto de las principales variables que podrían influir en el rendimiento del proceso instructivo: sexo, profesión del padre, estudios del padre, aptitud espacial y numérica, factor «g», estilo cognitivo, actitud hacia las matemáticas y nivel de conocimientos previos. La tabla I muestra los instrumentos elegidos para la obtención de los datos.

Antes de comenzar el periodo instructivo, se pasaron a todos los estudiantes estas pruebas y cuestionarios y se procesaron los datos obtenidos mediante los paquetes estadísticos Statview y Systat. Utilizando las pruebas «ji-cuadrado» y análisis de la varianza, no se apreciaron diferencias significativas al 95% entre los tres grupos salvo en la actitud inicial hacia las matemáticas que, por lo tanto, incorporamos como variable independiente (covariable) en el diseño de la investigación, para que en la comparación de rendimientos, no influyera esta diferencia inicial.

Durante la experiencia en las aulas, cuya duración fue igual para todos los grupos (20 clases), los profesores tuvieron el apoyo del investigador que hizo un seguimiento puntual de la misma velando por la fiel realización de ambas metodologías. A pesar de que ninguno de los grupos de alumnos había trabajado con estrategias instructivas de este tipo, todos, en general, acogieron bien las dos nuevas metodologías a las que se adaptaron perfectamente aunque tardaron algo más en la segunda debido a la mayor exigencia de participación. Trabajaron en grupos de tres, que ellos mismos constituyeron, tal como estaba previsto, y no se observaron conflictos ni enfrentamientos notables. Sobre las puestas en común, puede decirse que se ajustaron al programa previsto aunque algunos de los debates que se suscitaron podrían haberse alargado más si el tiempo no hubiese tenido que ser controlado.

Resultados

Con el fin de evaluar el rendimiento en el aprendizaje conceptual, se elaboró una prueba añadiendo 20 items más al cuestionario que se utilizó en el diagnóstico de las ideas previas (Anexo 1). La validez de la prueba resultante se aseguró por su concomitancia con los objetivos y contenidos seleccionados, y su fiabilidad se midió con la fórmula 20 de Kuder y Richardson obteniéndose un valor más que aceptable: 0,94898. Los alumnos realizaron esta prueba al acabar el periodo instructivo. Procesamos los datos obtenidos utilizando los paquetes estadísticos Statview y Systat y las medias encontradas fueron las siguientes:

Grupo 1= 16,88 ; Grupo 2= 12,617 ; Grupo 3= 9,132

Mediante análisis de la covarianza, tomando como factores las metodologías (grupos), como covariable la actitud inicial y como variable dependiente la puntuación de la prueba, constatamos que las diferencias entre las medias de los tres grupos eran significativas al 99%, es decir:

Grupo 1> Grupo 2> Grupo 3

Este resultado muestra que, frente al método expositivo tradicional, las metodologías didácticas para el aprendizaje por descubrimiento, tal como se han descrito aquí, mejoran el aprendizaje significativo de los conceptos pues emplean como punto de partida los conocimientos previos de los estudiantes y permiten la superación de los conflictos cognitivos mediante un procedimiento resolutivo de problemas que incluye la evaluación de las conjeturas. Además, apreciamos que la mayor orientación usada en la primera metodología, sin anular este proceso resolutivo autorregulado por el propio sujeto, garantiza que la construcción de los conceptos es realizada por un número mayor de estudiantes y, como consecuencia, produce un rendimiento medio más alto.

Para comparar el nivel de cambio conceptual entre los tres grupos, calculamos el porcentaje de respuestas correctas en los items de la prueba que contenían las ideas previas erróneas detectadas en el diagnóstico inicial. Estos fueron los items escogidos (Anexo1): 2, 9, 12, 13, 16, 17, 19, 20, 23, 24, 25, 27, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 39 y 40. Utilizando la prueba «ji-cuadrado», encontramos las diferencias significativas que se muestran en la Tabla II donde se aprecia que el porcentaje de respuestas correctas de los Grupos 1 y 2 es significativamente superior al del Grupo 3 en doce y siete items respectivamente. Resumiendo, podemos decir que se produce un nivel de cambio conceptual análogo con las dos metodologías experimentales, que es superior al producido por la metodología expositiva tradicional.

Un análisis minucioso de esta tabla todavía permite extraer algunos otros resultados interesantes. Por ejemplo, se observa que las dos metodologías experimentales, aunque consiguen cambiar casi todas las ideas previas erróneas, todavía son incapaces de conseguir que la mayoría de los alumnos superen estas tres:

- Una parábola puede construirse perfectamente empleando sólo la regla, el compás y el lápiz (item 20).

- Una parábola no tiene infinitas ecuaciones no equivalentes entre sí (item 32),

- Una parábola se define así: es una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la eráfica de una función (item 35).

Por su parte, la mayoría de los alumnos del grupo de control mantiene estas tres ideas previas erróneas y además las siguientes:

- Un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia (figura 4) es una elipse (item 2).

- Una elipse o una hipérbola pueden dibujarse perfectamente empleando sólo la regla, el compás y el lápiz (items 9 y 29).

- Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro (item 19).

- Los huevos de gallina tienen forma de elipsoide (item 24).

- Una horquilla de pelo como la de la figura 6. tiene forma de parábola (item 25).

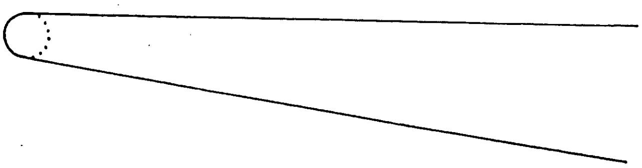


Figura 6

- Si cortamos una superficie cónica con un plano paralelo a una generatriz, obtenemos una curva que no es del mismo tipo que la obtenida iluminando una hoja de papel con una linterna inclinada según muestra la figura 7 (item 39).

Ésto demuestra, una vez más, la resistencia al cambio que ofrecen este tipo de ideas y la necesidad de contar con ellas para que la enseñanza sea realmente eficaz.

Conclusión general

Como conclusión, se deduce de los resultados anteriores que, tanto en la superación de concepciones erróneas como en el aprendizaje de nuevos conceptos, las metodologías expositivas tradicionales son menos eficaces que las metodologías que favorecen el aprendizaje por descubrimiento, entendiendo éste como un proceso cognoscitivo que parte de la identificación de un problema y, mediante un procedimiento resolutivo al que le es consustancial la evaluación de hipótesis, autorregulado por el propio sujeto con la necesaria orientación sociocultural, produce una construcción intrapsíquica novedosa. Además, hemos constatado que esta orientación sociocultural, en el aprendizaje por descubrimiento, es uno de los factores determinantes de la eficacia instructiva, alcanzando su grado óptimo en un punto intermedio que, sin anular la autorregulación interna que debe ejercer el propio sujeto sobre su proceso de aprendizaje, utilice un rico contexto de orientaciones externas expertamente estructuradas y organizadas que faciliten la comprobación de las conjeturas. Ésta es la característica diferenciadora de la primera metodología y de ahí su eficacia al no discriminar a estudiantes que, por sus rasgos personales, podrían sentirse poco motivados, desbordados o inseguros ante estas metodologías.

Creemos que, con esta investigación educativa, hemos contribuido a esclarecer qué modelos de enseñanza pueden suponer una respuesta a la desesperación confesada por los profesores de matemáticas cuando, un año tras otro, constatan que sus alumnos siguen cometiendo los mismos errores.

Bibliografía

* BARRON, A. (1991). **Aprendizaje por descubrimiento. Análisis crítico y reconstrucción teórica**. Ed. Universidad de Salamanca, Salamanca.

* BAUTISTA, A. (1987): **Fundamentación de un método de enseñanza basado en la resolución de problemas**. Revista de Educación, 282, 151-160.

* BELL, A. (1986a): **Shell Center for Mathematical Education: Estudios de enseñanza por diagnóstico**. Enseñanza de las Ciencias, 4 (1), pp. 86-89.

* BELL, A. (1986b): **Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros**. Enseñanza de las Ciencias, 4 (3), pp. 199-208 .

* BELL. A. (1986c): **Diagnostic Teaching: Report of an ESRC projet**. University of Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education.

* BELL, A. (1987): **Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas**, en A. Álvarez (Comp.): Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica, VISOR-MEC, Madrid.

* BELL, A. y otros. (1987). **Diagnostic Teaching**. Mathematics Teaching, 119, 56-59.

* BENNETT, G.K.; SEASHORE, H.G. y WESMAN, A.G. (1972): **DAT. Test de Aptitudes Diferenciales**. T. E. A., Madrid.

* BOOTH, L. R. (1982): **Developing a teaching module in beginning Algebra**, en A. Vermandel (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Universitaire Instelling, Antwerp, Bélgica.

* CATTELL, R.B. y CATTELL, A.K.S. (1977): **Tests de factor «g», escalas 2 y 3**. T. E. A., Madrid.

- DEL RÍO SÁNCHEZ, J. (1989): **Ideas previas en matemáticas. Una investigación sobre las cónicas**, Studia Paedagogica, 21, 59-96.

* DEL RÍO SÁNCHEZ, J. (1990a): **Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de las cónicas. Libro del alumno**. I. U. C. E., Salamanca.

* DEL RÍO SÁNCHEZ, J. (1990b): **Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de las cónicas. Guía del profesor**. I. U. C. E.

* DEL RÍO SÁNCHEZ, J. (1991): **Concepciones erróneas en matemáticas. Revisión y evaluación de las investigaciones**, Educar (en prensa).

* GAIRIN, J. (1987): **Las actitudes en Educación**, PPU, Barcelona.

* GRUPO AZARQUIEL (1987): **Análisis de los errores en la adquisición de los conceptos matemáticos** en A. Álvarez (Comp.): Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica, Visor-MEC, Madrid.

* GUZMÁN, M. de (1987): **Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas**, en Aspectos didácticos de Matemáticas 2, I.C.E., Zaragoza.

* HERSHKOWITZ, R. (1987): **The acquisition of concepts and misconceptions in basic Geometry or when «a little learning is dangerous thing»**, en Novak, J. (Ed.): Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Seminar (2nd), Cornell Univ., Ithaca, NY, v. I I I, pp. 238-251.

* JOYCE, B. y WELL, M. (1985): **Modelos de enseñanza**. Anaya, Madrid.

* LIBESKING, S. (1977): **A problem Solving Approach to Teaching Mathematics**. Educational Studies in Mathematics, 8 (2) 168-179 .

* MARKS, L. K. (1980): **Meeting the Challenge: Successfully Teaching the Student of the 80s at the Conceptual Level**. Mentor Consulting, Philippi, WV.

* McLEOD, D. y ADAMS, V. M. (1977): **Relating Field Independence and a Discovery Approach to Learning Mathematics: A Trait-treatment Interaction Study**. Anual Meetin of the American Educational Research Association. New York.

* MEDECI, D., y Otros. (1986): **Sobre la formación de los conceptos geométricos y sobre el léxico geométrico**. Enseñanza de las Ciencias, 4 (1), 16-22.

* POLYA, G. (1965): **Cómo plantear y resolver problemas**. Trillas, México.

* TATSUOKA, K. K. (1984): **Analysis of Errors in Fraction Addition and Subraction Problems. Final Report**. National Inst. of Education, Washington, D. C.

* VINNER, S. y ZUR, Ch (1987): **Some Aspects of Geometry as a Deductive System in High School Students**, en

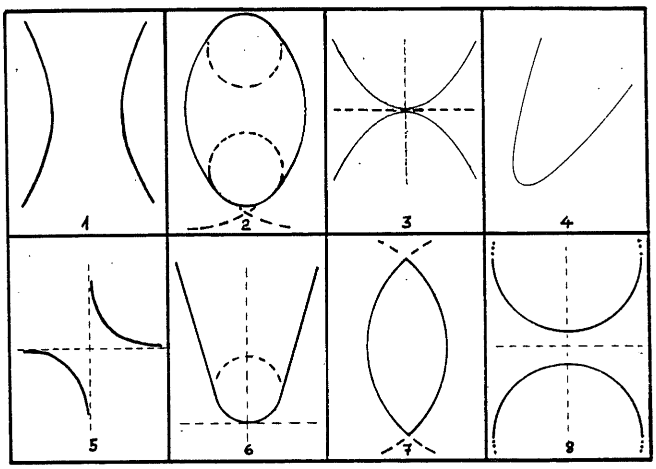
Novak, J. (Ed.): Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. Proceedings of the International Sminar (2nd). Cornell Univ., Ithaca, NY, v.III, pp. 551-563.

* WITKIN, H.A., OLTMAN, P.K.; RASKIN, E. y KARP, S.A. (1987): **Tests de Figuras Enmascaradas**. T. E. A., Madrid.

Anexo 1

Análisis de las ideas previas sobre las cónicas. Cuestionario definitivo

Las primeras 8 frases hacen referencia a las curvas de las siguientes figuras en las cuales las líneas de puntos no forman parte de las curvas, sólo sirven para indicar cómo se trazaron:



1. La curva 1 podría ser una hipérbola.

2. La curva 2 podría ser una elipse.

3. La curva 3 podría ser una hipérbola.

4. La curva 4 podría ser una parábola.

5. La curva 5 podría ser una hipérbola.

6. La curva 6 podría ser una parábola.

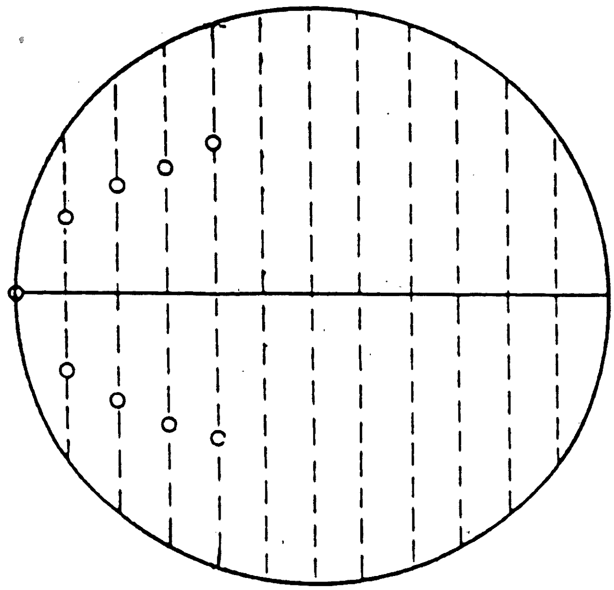
7. La curva 7 podría ser una elipse.

8. La curva 8 podría ser una hipérbola.

9. Una elipse puede dibujarse perfectarnente utilizando sólo el compás, la regla y el lápiz.

10. Si representamos la función $y = 3x^2$, obtenemos una parábola.

11. Si señalamos los puntos medios de todas las semicuerdas verticales de una circunferencia (como en la figura siguiente) y los unimos, entonces se obtiene una elipse.

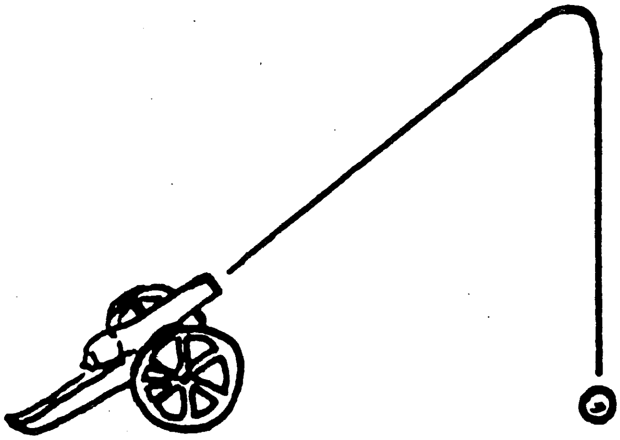


12. Una hipérbola se define así: es la curva obtenida al seccionar una superficie cónica completa mediante un plano que no pasa por el vértice y corta a sus dos hojas.

13. Las únicas elipses que existen en la realidad son las órbitas de los planetas alrededor del sol y las de algunas partículas atómicas alrededor del núcleo.

14. La longitud de una parábola es infinita.

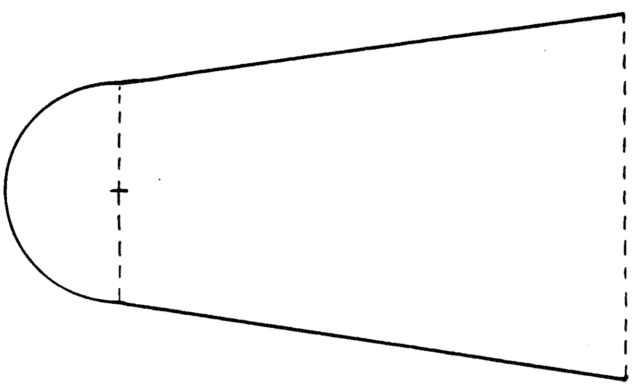
15. Si disparamos un cañón antiguo con una inclinación de 45° y suponemos que el rozamiento del aire no existe, la trayectoria completa de la bala es una curva como la de la siguiente figura:



16. Una hipérbola no puede formarse con las dos mitades de una elipse enfrentadas entre sí.

17. Fijado un punto de una hipérbola, siempre es posible trazar dos tangentes a dicha hipérbola pasando por ese punto.

18. La zona de una cancha de baloncesto que se muestra en la figura siguiente tiene forma de parábola.



19. Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro.

20. Una parábola puede dibujarse perfectamente empleando sólo una regla, un compás y un lápiz.

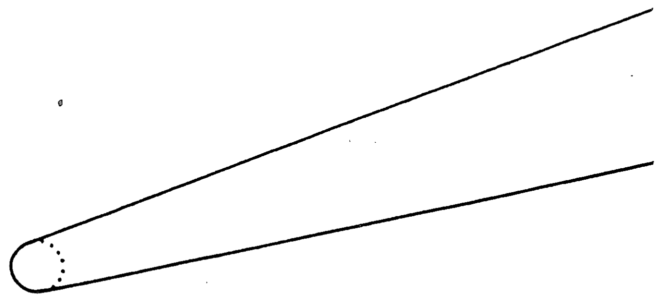
21. Las hipérbolas no aparecen en objetos o fenómenos reales.

22. $y^2 = 2x$ es la ecuación de una parábola cuyo eje coincide con el eje de abscisas.

23. Por cualquier punto de una elipse pasan dos tangentes distantas.

24. Los huevos de gallina tienen forma de elipsoide.

25. Una horquilla de pelo, como la de la siguiente figura, tiene forma de parábola.



26. Si un jugador de baloncesto lanza el balón desde el centro del campo y consigue una canasta, entonces el camino recorrido por el balón tiene forma de parábola.

27. Una parábola se define así: es la curva obtenida al cortar una superficie cónica por un plano paralelo a la generatriz.

28. Las parábolas no tienen centro de simetría.

29. Una hipérbola no puede dibujarse perfectamente empleando sólo el compás, la regla y el lápiz.

30. Una elipse se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre la misma.

31. La gráfica de la función $y = 1/x$ es una parábola.

32. Cualquier parábola tiene infinitas ecuaciones no equivalentes entre sí.

33. Un melón perfectamente simétrico tiene forma de elipse.

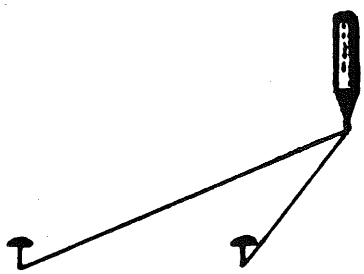
34. La ecuación $x^2 = 2y$ es una parábola cuyo eje coincide con el eje de ordenadas.

35. Una parábola se define así: es una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función.

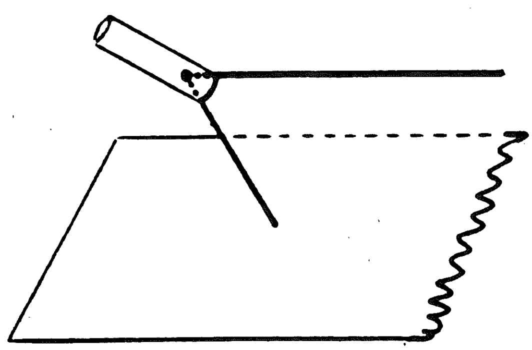
Las próximas cinco frases hacen referencia a las siguientes actividades:

A. Tomamos una superficie cónica (completa) en la cual las generatrices forman con el eje un ángulo de 30°. La cortamos con un plano que no pasa por el vértice y que forma con el eje un ángulo ß. Consideramos la curva obtenida en esta sección.

B. Clavamos dos chinchetas sobre una hoja de papel y trazamos la curva que resulta al desplazar un lápiz manteniendo tenso un hilo cuyos extremos se han unido a las chinchetas como muestra la figura siguiente:



C. Con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminamos una hoja de papel con la inclinación que muestra la figura siguiente; consideramos la curva formada por el borde del recinto iluminado.



36. Si, ß = 30°, la curva obtenida en A es una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en C.

37. Si, ß es menor que 30°, la curva obtenida en A es siempre una sección cónica del mismo tipo que la obtenida en B.

38. Si, ß es mayor que 30°, la curva obtenida en A, en algunos casos, es del mismo tipo que la obtenida en C.

39. Si cortamos la superficie cónica de la actividad A con un plano paralelo a una generatriz, obtenemos una curva del mismo tipo que la obtenida en la actividad C.

40. Si seccionamos la superficie cónica de la actividad A con los planos que cortan a todas las generatrices, podría obtenerse, en algún caso, una curva del mismo tipo que la obtenida en la actividad B.

Anexo 2

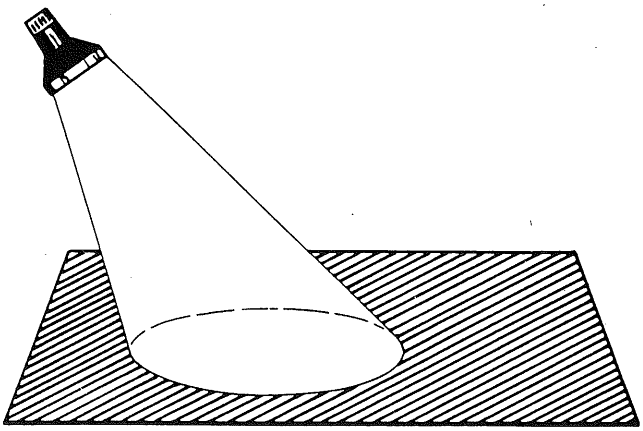
Materiales de la primera metodología

Entre las primeras curvas descubiertas y analizadas por los griegos figuran las elipses, las hipérbolas y las parábolas. Como tú ya tienes una cierta idea intuitiva sobre la forma de estas curvas, a continuación aparecerán 9 curvas y tú vas a decidir, apoyándote en esa idea, qué tipo de curva es cada una:

Curva I

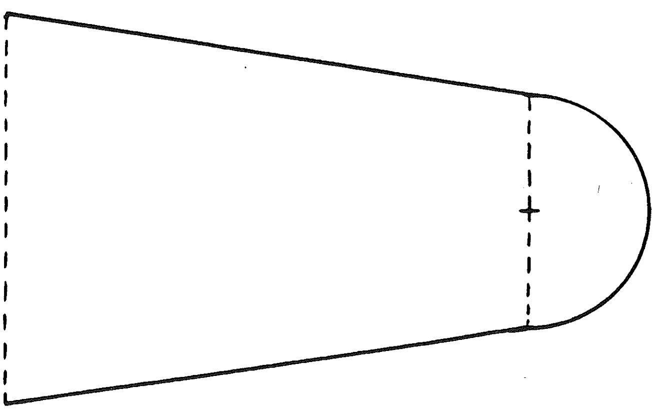
Imagina que, con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminas una hoja de papel con una inclinación parecida a la que indica la siguiente figura:

Considera la curva que delimita el recinto iluminado. ¿Qué tipo de curva es?



Curva II

La zona de una cancha de baloncesto tiene aproximadamente la siguiente forma:

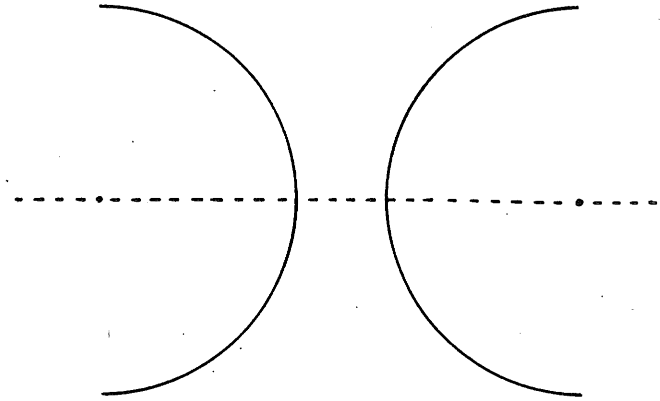


¿Qué tipo de curva es?

Curva III

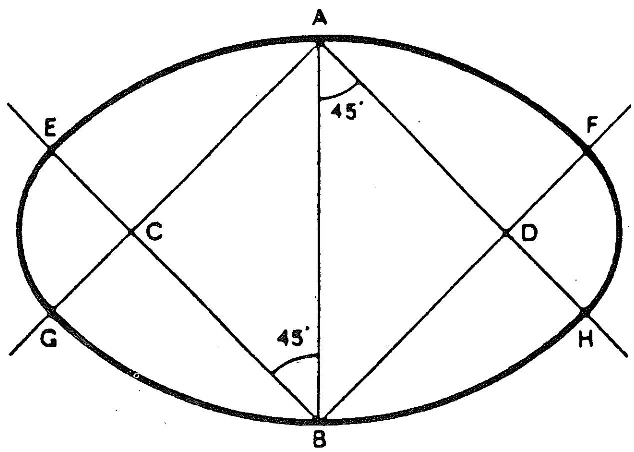
El siguiente dibujo muestra dos semicircunferencias enfrentadas y separadas:

¿Qué tipo de curva es?



Curva IV

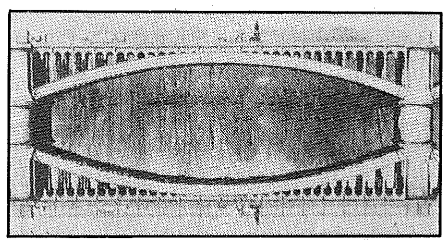
Descubre cómo se trazó la siguiente curva:



¿Qué tipo de curva es?

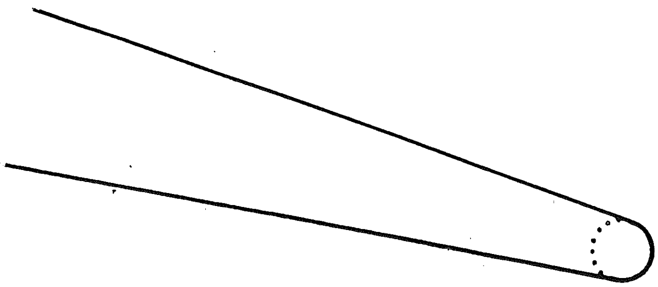
Curva V

¿Qué tipo de curva es la formada por el arco del puente y su reflejo, en la siguiente fotografía? (Puedes utilizar papel vegetal para calcar esta curva y hacer luego su estudio).



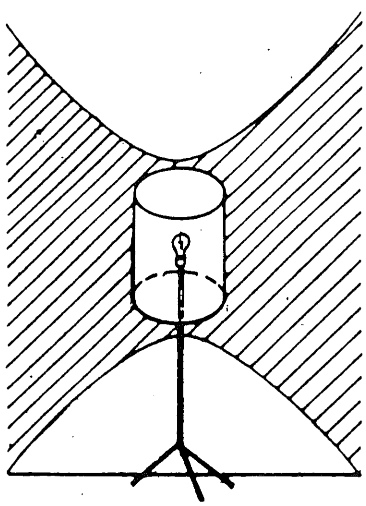
Curva VI

¿Qué tipo de curva es la formada por una horquilla del pelo como la siguiente?



Curva VII

Ilumina la pared con una lámpara de mesa que tenga una pantalla cilíndrica manteniendo el eje de la lámpara paralelo a la pared como muestra el suguiente dibujo:



¿Qué tipo de curva forma el borde del recinto iluminado?

Curva VIII

Considera una circunferencia de 4 cm. de radio. Vamos a «achatarla». Para ello, escogemos un diámetro y trazamos varias cuerdas perpendiculares a él (fig. 1). A continuación, «bajamos», cada punto P de la circunferencia al punto P' que está en la mitad de RP, y «subimos» cada punto Q al punto Q' que está en la mitad de RQ (fig. 2). Unimos todos los puntos P' y Q' así obtenidos. ¿Qué tipo de curva obtenemos?

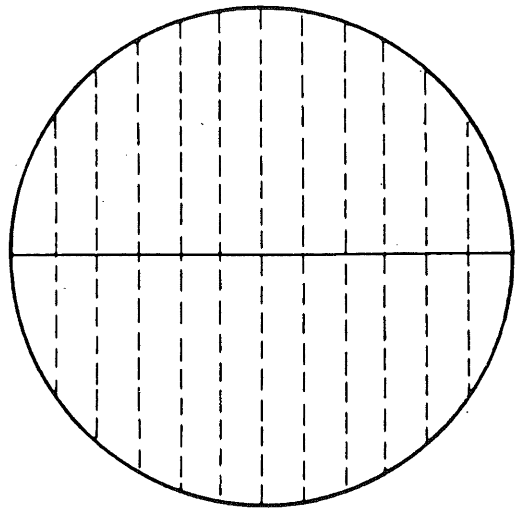


Figura 1

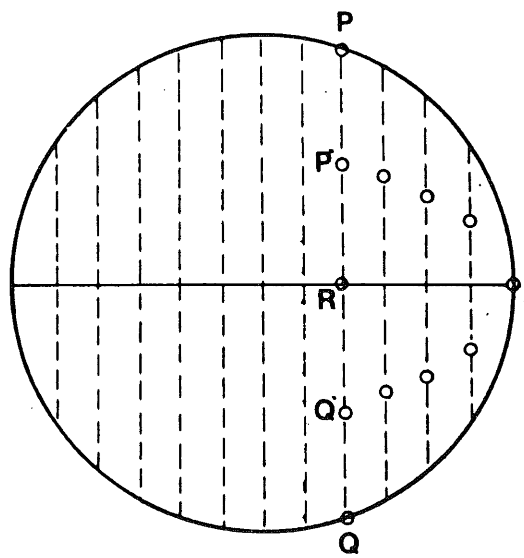
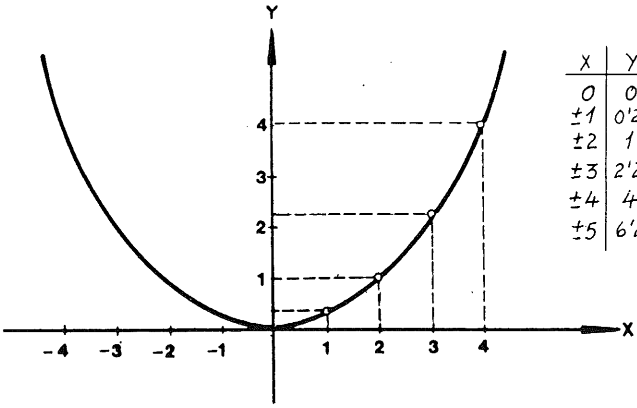


Figura 2

Curva IX

Aquí tienes la gráfica de la función $y = 0'25x^2$ obtenida a partir de su tabla de valores:

¿Qué tipo de curva es?



X	Y
0	0
±1	0'25
±2	1
±3	2'25
±4	4
±5	6'25

Anexo 3

Materiales de la segunda metodología

Las aparencias pueden o no engañar.

Actividades:

Realiza las siguientes actividades:

1. Sobre un cartón coloca una hoja de papel y clava en ella dos chinchetas. Manteniendo tenso un hilo unido a ellas, ve trazando con un lápiz una curva como indica la figura 3.1:

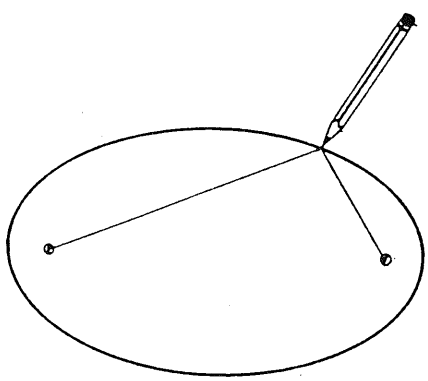


Figura 3.1

2. Descubre el trazado de la curva siguiente (figura 3.2) y reprodúcela en tu cuaderno:

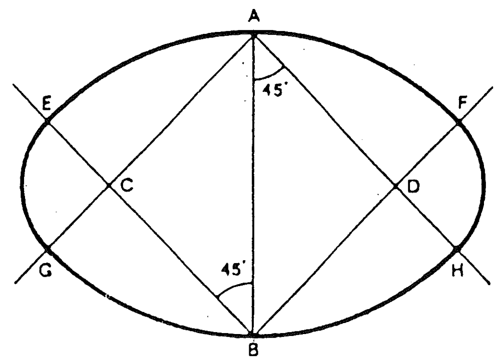


Figura 3.2

3. Considera un cono en el que se han introducido dos esferas de distintos radios, no tangentes entre sí (como muestra la figura 3.3). Secciona el cono con un plano tangente interiormente a las dos esferas (como indica esquemáticamente la fig. 3.4) y dibuja aproximadamente la curva que resulta de dicha sección.

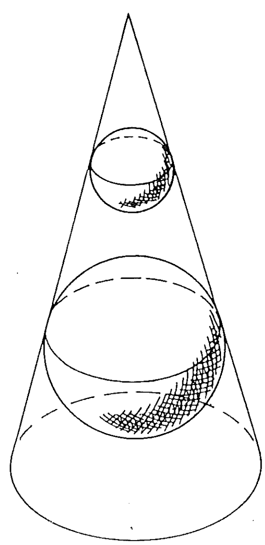


Figura 3.3

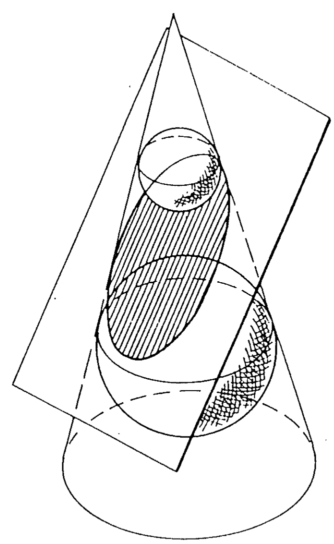


Figura 3.4

4. Imagina que, con una linterna cuyo haz luminoso forma un cono perfecto, iluminas una hoja de papel con una inclinación parecida a la que aparece en la siguiente figura 3.5:

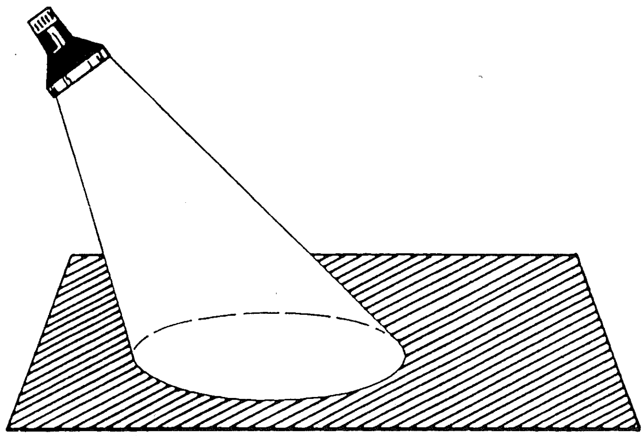


Figura 3.5

Dibuja aproximadamente la curva formada por el borde del recinto iluminado.

5. Considera una circunferencia de 4 cm de radio. Vas a "achatarla". Para ello, escoge un diámetro y traza varias cuerdas perpendiculares a él (fig.3.6). A continuación, "baja" cada punto P de la circunferencia al punto P' que está en la mitad de RP, y "sube" cada punto Q al punto Q' que está en la mitad de RQ (fig. 3.7). Une todos los puntos P' y Q' así obtenidos y resultará una "circunferencia achatada".

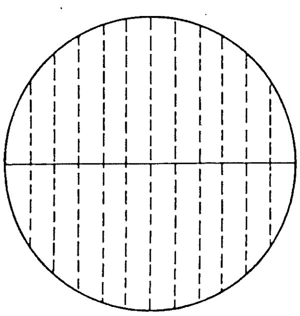


Figura 3.6

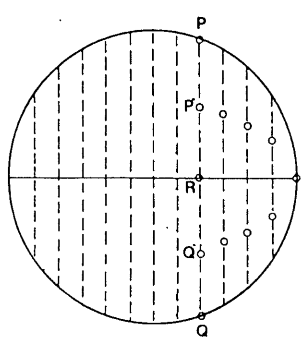


Figura 3.7

Cuestiones

a) En las actividades anteriores, han aparecido curvas que parecen elipses. Como tú ya tienes una idea intuitiva de lo que es una elipse, después de analizarlas y compararlas detenidamente, indica cuáles crees que son elipses y cuáles no, según esa idea.

b) Es lógico que tu respuesta a la pregunta del apartado anterior difiera de la de algunos de tus compañeros, porque el criterio para decidir qué es una elipse ha sido subjetivo y, por lo tanto, distinto en cada uno. ¿Quién tiene razón? Para decidirlo, nos hace falta un criterio único, objetivo, que sirva para que todas las personas se entiendan sin ambigüedades cuando hablan de elipses. Este criterio consiste en establecer una definición precisa nte aceptada de lo que es una elipse. Los libros de texto de matemáticas suelen definirla así:

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es siempre la misma, es decir, es constante.

Tal vez te resulte extraña esta definición e incluso creas que está mal, que ese lugar geométrico no tiene nada que ver con un elipse. Acéptala por un momento y realiza la siguiente investigación:

¿Cuáles de las curvas que has obtenido antes son elipses y cuáles no de acuerdo con esa definición? ¡Ojo, ahora ya no te fíes sólo de tus ideas intuitivas: razona lo mejor que puedas!

c) Compara estas últimas respuestas con las primeras. ¿Las apariencias engañan?

José del Río Sánchez
Grupo Gauss
Instituto Universitario de Ciencias de la Educación
Universidad de Salamanca