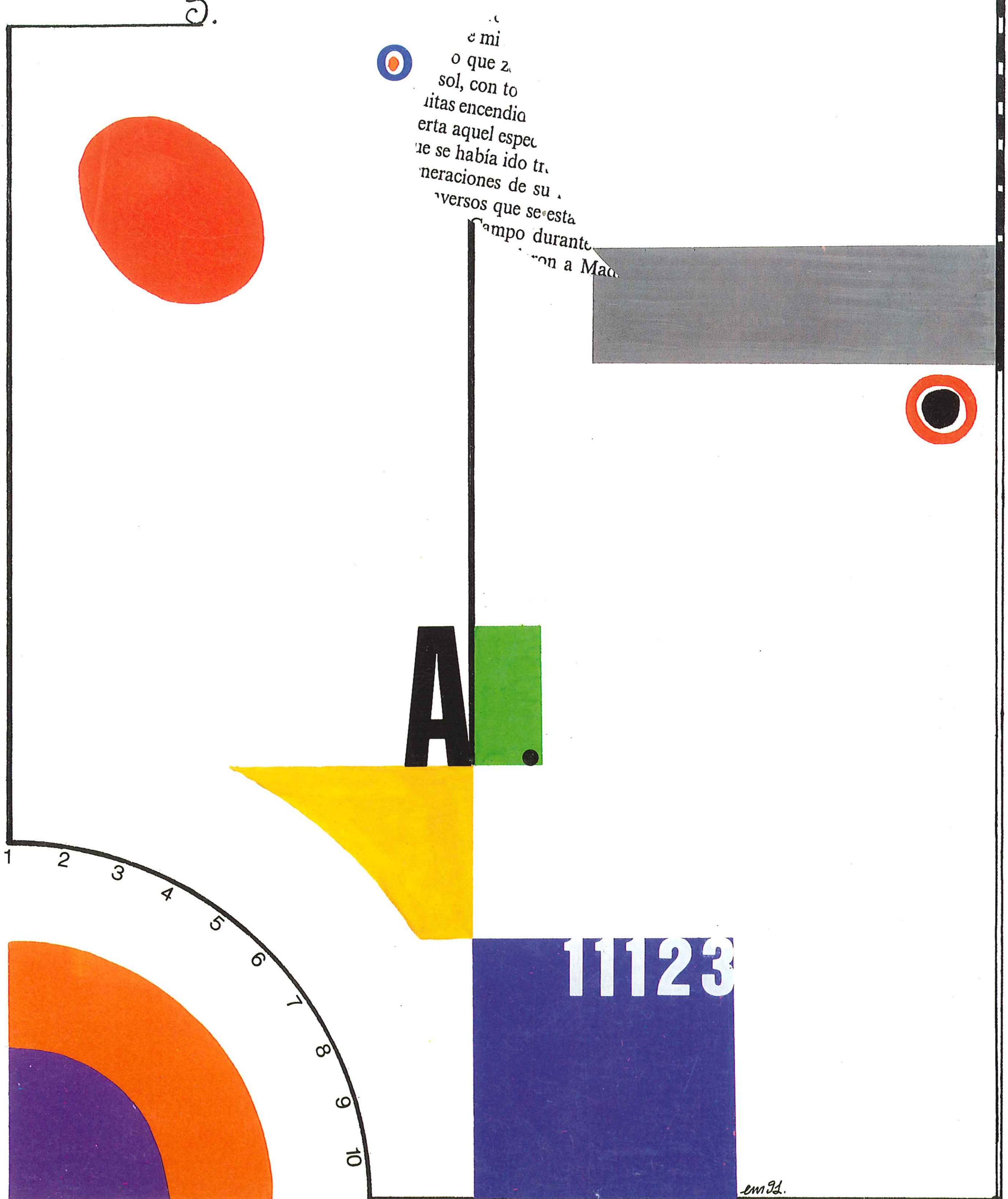
SUMA

Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

3.

Número 10 Invierno 1992



EDITA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Manuel Fernádez Reyes
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellonenca de Matemáticas
Presidente: Timoteo Briet Blanes
C/ Mayor, 89. 12001-Castellón

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira"
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante
Presidente: Teresa Vázquez
Apartado 1009. 03080-Alicante

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-Mérida

Depósito legal: Gr. 752 - 1988
I.S.S.N.: 1130 - 488X
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Armilla (Granada)

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1304. 21080 (Huelva)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envió)

SUMA

ARTÍCULOS

RIO

IDEAS PARA LA CLASE

RECURSOS PARA EL AULA

INFORMACIÓN

RESEÑAS

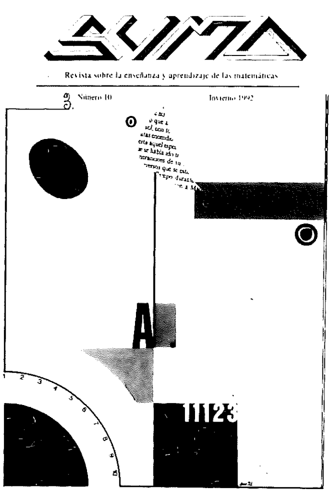
MISCELÁNEA

EDITORIAL

Hemos intentado ganar tiempo al tiempo -no sabemos si lo habremos conseguido- y cumpliendo, en la medida de lo posible, los plazos previstos para la publicación de nuestro medio de enlace ya está en vuestras manos el número 10, primero de 1992.

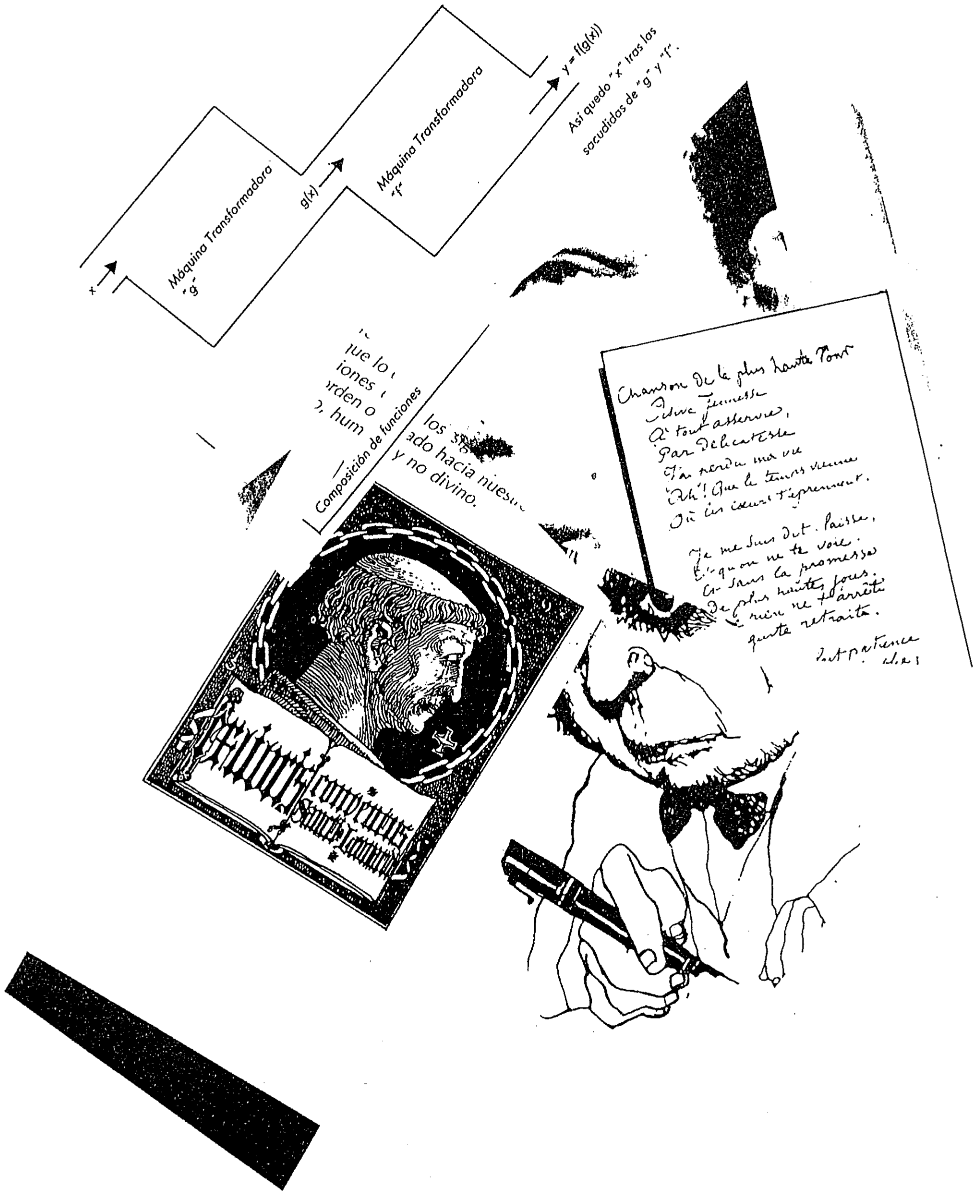
Las matemáticas están participando, junto a las demás áreas curriculares, de los cambios que se están viviendo a nivel educativo con la Reforma de las Enseñanzas. Son momentos agitados y no faltan opiniones acerca del curriculum, -tanto como objetivo de estudio en sus bases y niveles de concreción como en el desarrollo de contenidos en las diferentes áreas-. En este contexto aparece este ejemplar de la revista SUMA.

Estamos seguros de que este número no pasará desapercibido pues el contenido, en cierta medida, gira en torno a temas tan interesantes como el lugar que debe ocupar la matemática en el curriculum general y las características de esta asignatura, cómo se pueden estructurar y secuenciar secciones de contenido como la Geometría en la Educación Secundaria, cómo es la Evaluación en Matemáticas en España, qué atención debemos prestar a la resolución de problemas y que nivel de preparación ofrecen los estudiantes, futuros profesionales de la Educación Infantil y Primaria, en Matemáticas.



Todos estos temas se ven acompañados de un buen número de recursos e ideas que giran al mismo compás que los temas de la sección de artículos. En estos tiempos en que se habla tanto de interdisciplinariedad y recursos que nos hagan más fácil el camino en nuestra tarea docente, bien viene una experiencia a medias con la prensa y la reseña de libros que tratan de temas relativos a la utilización de los medios de comunicación en las Matemáticas o los que hablan desde una perspectiva constructivista de los problemas en el aprendizaje matemático básico.

Por último recordar las palabras que aparecían en el número anterior de SUMA, donde se animaba a la participación de los socios en el ICME´7 a celebrar en Quebec. En la sección de información encontraréis, junto a otras informaciones, más palabras de ánimo y cómo poder participar en este importante encuentro matemático, ¿¡vamos preparando las maletas!?


Máquina Transformadora "g"
g(x)
Máquina Transformadora "f"
y = f(g(x))
Así quedo "x" tras las sacudidas de "g" y "f".
Composición de funciones
y no divino.
Chanson de la plus haute Tour
Oisive Jeunesse
À tout asservie,
Par délicatesse
J'ai perdu ma vie
Ah! Que le temps vienne
Où les cœurs s'éprennent.

ARTÍCULOS

MATEMÁTICA Y CULTURA GENERAL

Luis A. Santaló

La importante revista inglesa Nature, en su volumen 340 del mes de Julio de 1989, publica interesantes resultados referentes a una encuesta realizada simultáneamente en los Estados Unidos de Norteamérica y en Inglaterra, para averiguar el concepto que el hombre común tiene de la ciencia y de sus métodos, así como del interés por la misma y del grado de conocimientos referentes a algunas de sus realizaciones. La encuesta se hizo sobre una muestra de unos dos mil norteamericanos y otros tantos ingleses, tomados al azar entre mayores de 18 años.

Muchas de las preguntas se refieren a la biología o a la química y no nos vamos a ocupar de ellas. Tan solo, a manera de ejemplo, podemos mencionar algunas como las siguientes: a) ¿Tienen todos los insectos 8 patas?, respuestas afirmativas 7,9%, negativas 83,7%, sin opinión 8,3%. b) ¿Es el hígado el órgano productor de la orina?, respuestas afirmativas 25,4%, negativas 53,1%, sin opinión 21,4%. c) ¿Son los electrones más pequeños que los átomos?, respuestas afirmativas 30,9%, negativas 23,5%, sin opinión 45,3%. d) Los diamantes ¿están hechos de carbón?, respuestas afirmativas 58,9%, negativas 15,5%, sin opinión 25,3%. e) La sal común, ¿está formada por carbonato de calcio?, respuestas afirmativas 36,5%, negativas 31,2%, sin opinión 32,3%. f) Los primeros hombres ¿convivieron con los dinosaurios?, respuestas afirmativas 31,6%, negativas 46,2%, sin opinión 22,1%.

Todas estas cuestiones son ajenas a la matemática. Relacionados con la misma hay algunos resultados bastante satisfactorios, posiblemente por tratarse de temas puntuales de uso frecuente. Por ejemplo: un doctor, basándose en estudios genéticos, dice a una pareja que el hijo que está por venir tiene una probabilidad de uno sobre cuatro de heredar cierta enfermedad. Sentado esto, se plantean las siguientes preguntas: i) Si la pareja tiene solamente 3 hijos, ¿es cierto que ninguno va a heredar la enfermedad? respuestas afirmativas 4,9%, negativas 84,2%, sin opinión 10,7%: ii) Si el primer hijo tiene la enfermedad, ¿es cierto que los tres restantes no la tendrán? respuestas afirmativas 9,3%, negativas 80,3%, sin opinión 10,3%. iii) ¿Todos los hijos de la pareja tienen el mismo peligro de heredar la enfermedad? respuestas afirmativas 82,1%, negativas 9,6%, sin opinión 8,0%. iv) Si los tres primeros hijos nacen sanos, es cierto que el cuarto heredará la enfermedad? respuestas afirmativas 8,6%, negativas 80,3%, sin opinión 10,9%.

Los resultados son , hasta aquí, bastante razonables. Hay, sin embargo, otras preguntas de la encuesta cuyas respuestas llaman la atención. Nos referimos a las tres siguientes:

1. ¿Cuál es mayor, la velocidad de la luz o la del sonido? Respuestas: la luz 74,7%, el sonido 18,5%, sin opinión 6,6%.

2. ¿Es la Tierra que gira alrededor del Sol o es el Sol que gira alrededor de la Tierra? Respuestas: la Tierra alrededor del Sol 62,8%, el Sol alrededor de la Tierra 30,1%, sin opinión 7,1%.

3. A los que opinan que la Tierra gira alrededor del Sol se les preguntó ¿cuánto tiempo tarda en dar la vuelta completa? Respuestas: 1 día el 16,2%, 1 mes el 2,2%, 1 año el 34,1%, no opinan el 10,0%.

Estas tres últimas preguntas y sus resultados, aunque se refieren a cuestiones de fisica y astronomía, no hay duda de que cierta responsabilidad en ellos tienen los cursos de matemática. Se refieren a cuestiones sin trascendencia para la vida práctica de todos los días y de aquí, posiblemente, el alto porcentaje de respuestas erróneas o sin opinión. Pero, en cambio, son hechos que forman parte de la llamada "cultura general" de nuestra civilización. Es asombroso que 400 años después de Copérnico, con todos los debates que ello dio lugar a lo largo de la historia, todavía haya un 30% de adultos que opinen que la Tierra es inmóvil y que es el Sol el que gira. Y aún, dentro de los 62,8% que conocen la respuesta correcta, solamente un 34,1% saben que el período de revolución es el año. La encuesta ha sido hecha en Inglaterra y los Estados Unidos. Sería interesante conocer los resultados en nuestros países.

De todas maneras, como los problemas educacionales son análogos en todas partes, la encuesta puede servir como toque de atención para los responsables de los contenidos de matemática de la enseñanza obligatoria, que se impone a todos los ciudadanos. Aunque son temas que no pertenecen exactamente a la matemática en el sentido tradicional, por su estrecha relación con ella, no hay duda de que los profesores de matemática no pueden desentenderse de la responsabilidad de formar ciudadanos con una cultura general acorde con el estado de la civilización actual. Cada maestro o profesor debe procurar impartir los conocimientos básicos de esta civilización, sin preocuparse de si los mismos son repetidos en otras materias y bajo otros puntos de vista, pues las cosas que se repiten son siempre, en general, las que son importantes y conviene queden grabadas en el alumno. Preferible una repetición que un olvido general. La moraleja de la encuesta anterior es que durante los años de la enseñanza obligatoria, el alumno debe ser instruido, junto con las técnicas corrientes específicas de cada materia y que son de utilidad inmediata para la vida laboral, en la "cultura general" que está en las raíces y constituye la base de nuestro concepto actual del mundo.

Pondremos algunos ejemplos. Desde los primeros años del ciclo intermedio o secundario, es importante que el alumno se familiarice con las cónicas. La elipse, la parábola y la hipérbola, a partir de sus definiciones como lugar geométrico, deben saberse dibujar por puntos o por trazo continuo y ser vistas como secciones planas de un cono de revolución. Son curvas demasiado frecuentes en el mundo de hoy para que queden olvidadas en la enseñanza obligatoria.

La elipse puede dibujarse por el método usual de un hilo sujeto por los extremos y mantenido tirante por un lápiz que la describe (elipse del jardinero), observando que su forma puede variar desde una circunferencia hasta un segmento recorrido dos veces (elipse aplastada), como resulta muy intuitivamente al considerarla como una circunferencia vista de costado. Conocida la elipse, se aprovecha la oportunidad para recordar que la Tierra describe una elipse alrededor del Sol y enunciar las leyes de Kepler, con un poco de historia sobre Copérnico, Tycho Brahe, Kepler y Galileo. Como la elipse descrita por la Tierra es muy cercana a una circunferencia, conviene conocer su radio y para ello se necesita la velocidad de la luz (300.000 Km/seg) y la información de que ella tarde 8 minutos en llegar del Sol a la Tierra (aproximadamente). Con esto caben problemas sobre la longitud de la trayectoria y la velocidad de la Tierra en su movimiento de traslación, sabiendo que el tiempo de revolución es un año. Para practicar el cálculo con números grandes aproximados (notación científica) y para los alumnos que muestren afición para ello, pueden plantearse problemas referentes a las distancias, velocidades y tiempos entre los planetas del Sistema Solar y de las sondas enviadas por el hombre para su exploración.

Es también oportuno hablar de los satélites artificiales, en particular de los satélites de comunicaciones, que permanecen inmóviles respecto de un punto de la Tierra (buscar su altura y velocidad en algun texto o revista) haciendo así que se comprenda el significado de las frases "televisión satelital" o "comunicación via satélite", que se usan con tanta frecuencia, al mismo tiempo que se adquieren ideas acerca de las dimensiones de nuestro universo.

El cálculo del radio de la Tierra por el método de Eratóstenes, midiendo los ángulos de la vertical con los rayos solares el día del solsticio de verano en las ciudades de Siena y Alejandría, situadas sobre un mismo meridiano, se presta a practicar geometría elemental y a hacer consideraciones sobre la época de Eratóstenes (el mismo año de la "criba" para la obtención de números primos) y de la biblioteca de Alejandría que dirigió (siglo III).

Hay que proponer la búsqueda de elipses en la arquitectura y en la naturaleza, así como elipsoides de revolución, alargados o aplastados. Un ejemplo aparece al observar la media luna, o sea, la Luna en sus períodos de creciente o menguante, cuya parte exterior es una media circunferencia, pero la interior es un arco de elipse, por proceder de la circunferencia que separa la parte iluminada de la obscura, vista de costado.

La parábola es también interesante y su conocimiento y trazado cabe darlos desde la escuela elemental o intermedia. Por revolución alrededor del eje se obtienen los paraboloides, actualmente muy citados como forma de las antenas parabólicas de la televisión o de los radares. Un estudio detallado puede exigir conocimientos superiores, pero una idea debe incluirse en el ciclo de enseñanza obligatoria, pues su frecuente uso la hace integrante de la "cultura general".

Finalmente, la hipérbola, dibujada por puntos a partir de la fórmula $y = k / x$, es básica como representativa de la proporcionalidad inversa, que los alumnos practican desde la escuela primaria en los problemas de regla de tres simple. La idea de proporcionalidad, directa o inversa, forma parte también de los conocimientos básicos de nuestra cultura, desde Thales, cuya historia conviene recordar, hasta las continuas aplicaciones actuales para la interpretación de mapas, escalas e imágenes de objetos o figuras.

Sin salir de la astronomía o de la geografía, forma también parte de la cultura general y está vinculada con la matemática, la explicación de las estaciones y la inversión de las mismas entre el hemisferio norte y el sur. Entre las consecuencias que pueden buscarse de la esfericidad de la Tierra, se puede hacer notar como las formas de la parte iluminada de la Luna en sus cuartos menguante y creciente, aparecen invertidas en los dos hemisferios terrestres: mientras que en el Norte el cuarto menguante tiene forma de C (inicial de "creciente" y por eso se habla de la Luna mentirosa), en el Sur es el cuarto creciente que tiene forma de C y, por tanto la Luna deja en él de ser mentirosa. ¿Cómo se ve desde los puntos del ecuador?

Habría que pensar en otras cuestiones, ya no de tipo astronómico, que forman parte de la cultura deseable para todos quienes hayan cursado el ciclo de enseñanza obligatoria y que, a veces por su carácter interdisciplinario y a veces por la costumbre de considerarlas de un nivel superior, escapan a su tratamiento en dicha etapa de la enseñanza. En un folleto publicado por la UNESCO titulado *Science and Technology in School Curricula, Case Study 1,* People's Republic of China (1988) se menciona que para averiguar los contenidos indispensables de matemática para la escuela elemental se hizo una estadística de los temas que aparecían como necesarios para comprender los contenidos de las publicaciones periódicas no especializadas (diarios y revistas) de mayor circulación en China. Si se siguiera este método en muchos países es posible que, aparte de los conceptos clásicos (sistema métrico decimal, porcentajes, áreas, volúmenes, escalas) aparecieran cuestiones de uso generalizado y que, sin embargo, no suelen aparecer en los programas de la escuela obligatoria. Por ejemplo, algunas cuestiones referentes a la teoría de muestras: sondeos de opinión para adelantar los posibles resultados de unas elecciones, análisis de mercados, impacto de la propaganda en los distintos medios de difusión como la radio, la televisión o los diarios, el "rating" de algunos espectáculos o programas de televisión, etc.

Sin pretender, naturalmente, formar especialistas en muestreo, no hay duda de que algunos ejemplos simples para hacer comprender sus fundamentos, serían de interés para todo el mundo. Lo mismo podríamos decir de la teoría de colas o filas de espera, fenómeno que atañe a todos y que sería muy útil que también todos estuvieran informados de un mínimo de investigación operativa para comprender su posible tratamiento basado en estadística y algunos casos simples concretos.

Otro ejemplo es la interpretación de los gráficos y datos metereológicos que suelen figurar en todos los periódicos y es posible que no todos los ciudadanos "cultos" conozcan el significado de la presión o de la humedad o de los milímetros de lluvia caída. Todo ello, sin embargo, cabe ser considerado en los cursos elementales de matemática, como ejemplos de gráficos, correlaciones y de áreas y volúmenes, calculando, por ejemplo, para un determinado número de milímetros de lluvia caída, la altura del agua recolectada en un recipiente conocida su forma y el área de la boca de recepción.

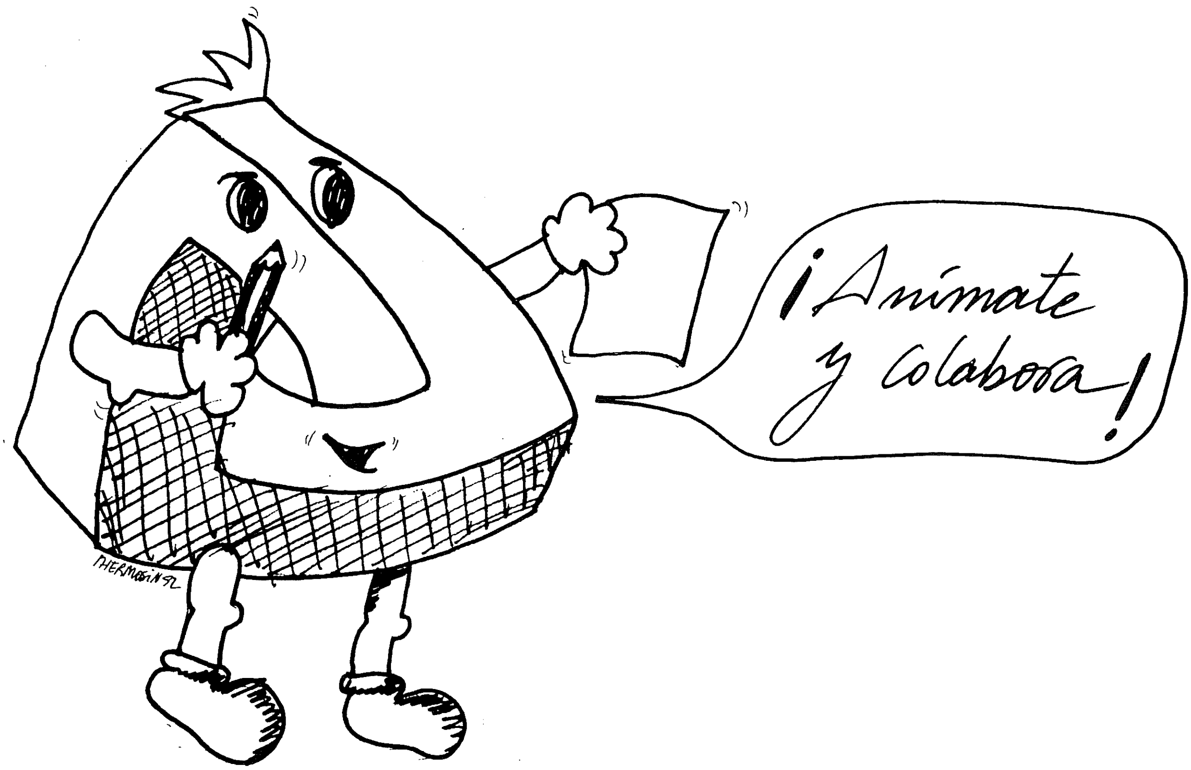
Como ejemplos de aplicaciones de la función exponencial son interesantes algunos problemas de crecimiento de poblaciones biológicas, que los hay muy simples y que se pueden ir graduando hasta otros más difíciles suponiendo la presencia de especies depredadoras o parásitas. La clásica teoría de la lucha por la vida de Volterra o la más simple de Malthus sobre las relaciones entre el crecimiento o desaparición de las poblaciones y la cantidad de alimentos disponibles, necesitan cierto nivel matemático para su estudio completo, pero una idea de las mismas, junto con ejemplos de propagación de epidemias o de rumores, cabe bien en el nivel de la enseñanza obligatoria. El profesor de matemáticas de enseñanza media debe esforzarse para que este tipo de ideas, consideradas de nivel superior, quepan dentro de sus cursos, naturalmente con las simplificaciones necesarias, siempre que ellas dejen suficientemente claros los fundamentos y el tipo de resultados que cabe esperar...

Una técnica que es conveniente fomentar, por sus muchas aplicaciones, es la recolección de estadísticas. Como ejemplos fáciles y atractivos figuran las estadísticas sobre el idioma. Se pide a cada alumno que elija unas 10 líneas de cualquier obra literaria y de cualquier página del mismo y que cuente el número de letras "a" en las mismas. Ello será una muestra del idioma. Dividiendo por el número total de letras (o, mejor, de espacios de la composición, incluyendo signos de puntuación y los espacios entre palabras) se tiene la frecuencia de la letra "a" en las líneas elegidas. Se observa que cualquiera que sea el párrafo elegido (uno distinto para cada alumno) la frecuencia es "casi seguro" que no difiere demasiado de 0,11 que es la frecuencia de la letra a en el idioma castellano. Tomando la media aritmética entre las frecuencias obtenidas para cada alumno, lo que equivale a haber tomado una muestra mucho mayor, es muy probable que el resultado se acerque bastante al real. Es un ejemplo de que las muestras muchas veces no necesitan ser muy grandes para obtener resultados suficientemente aproximados para las necesidades prácticas. Lo mismo se puede hacer para las otras vocales y para otras letras. Los resultados son frecuencias características del idioma. En cambio, si se hacen estadísticas sobre la frecuencia de la longitud de las frases o de las palabras empleadas (tomando en este caso algunas páginas al azar), los resultados dependen del autor, lo que se ha usado para comparar estilos literarios. Ordenando la frecuencia de cada palabra de un texto y graficando la frecuencia respecto de este orden, es curioso que se obtienen siempre curvas de forma parecida (ley de Zipf). Se puede ver, al respecto, el libro de Evyatar-Rosenbloom *Motivated Mathematics*, Cambridge University Press, 1981. La importancia de estas cosas desde el punto de vista educativo es que pueden interesar a algunos alumnos (no debe ser obligatorio para todos), a leer obras de distintos autores y hacer comparaciones sobre la mayor o menor riqueza del lenguaje empleado para cada uno. Desde el punto de vista matemático, enseña a diagramar, calcular y comparar.

Habría que buscar otros ejemplos simples de teorías, actualmente de nivel universitario, pero cuyos resultados van siendo de uso cada vez más extendido y por tanto que deben, poco a poco, irse incorporando a la cultura general de todo ciudadano. Nos referimos, por ejemplo, a los elementos de la teoría de la información (concepto de medida de la información de un mensaje, número de "bits" necesarios para adivinar cierto dato), teoría de la decisión y teoría de los juegos de estrategia.

Todo ello se podría considerar como una traslación, al nivel elemental, de las ideas de Ortega y Gasset respecto de la necesidad de "fomentar un género de labor intelectual, dedicada no tanto a aumentar la ciencia en el sentido habitual de la investigación, cuanto a simplificarla y producir en ella síntesis quintaesenciadas, sin pérdida de substancia y calidad", todo ello para introducir en la cultura o "sistema de ideas vivas que cada tiempo posee, ideas determinadas que constituyen el suelo en que el hombre apoya su existencia" (*Misión de la Universidad*, Cap.IV, 1930).

Luis A. Santaló



BASES PARA UN PLANTEAMIENO ACTUAL DE LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA (12 - 16)

Modesto Arrieta Illarramendi

Propuesta para un planteamiento de la Geometría en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16), siguiendo las directrices del Diseño Curricular Base.

La propuesta consta de tres partes:

1.- Justificación y finalidad de la Matemática en general y de la Geometría en particular en dicho nivel obligatorio.

2.- Listado de temas desglosados en conceptos y procedimientos propios de la geometría elemental atendiendo a los objetivos propuestos.

3.- Enfoque a dar a cada tema o concepto geométrico para tratar de conseguir un correcto aprendizaje.

Con este trabajo se pretende, siguiendo las directrices del DCB (12-16) para el área de la Matemática, sentar las bases para un planteamiento general del Bloque Temático de Geometría que sirva como punto de partida para el diseño de unidades didácticas.

Para ello iremos un poco más lejos que el DCB especificando o fijando, aunque sólo sea de forma provisional la justificación de su inclusión, los temas de trabajo apropiados y el enfoque general a dar en la práctica a dichos temas pues pensamos que una concreción de dichos aspectos curriculares o mejor una propuesta sistemática sobre esos tres aspectos permitirán dedicar nuestro tiempo a la manera más adecuada de impartir las clases.

Ocurre a menudo que aunque estemos de acuerdo en muchos aspectos de la programación, el no hacerlo explícito, nos obliga a pensar en todo, nos quita seguridad y evita centrar el tema en los aspectos prioritarios.

Partiendo de una justificación de la Matemática en la enseñanza obligatoria en general y de la Geometría en particular propondremos un listado de temas de trabajo-contenidos y un tratamiento de los mismos.

Como tal propuesta puede estar sujeta a todo tipo de críticas, pero de lo que se trata es de fijar un listado de temas mínimos para que la experiencia decida sobre el futuro de cada tema en cuestión. Además creemos que lo importante es que haya una propuesta concreta para que la experiencia permita ir puliéndola y mejorándola.

En cuanto al enfoque a dar al tema pensamos que hay cierta unanimidad en ciertos principios generales de búsqueda, participación, actividad, pero que haría falta también sistematizarlos para ir fijando y centrando cada vez más esa práctica diaria en la que ya existen grandes diferencias entre unos profesores y otros.

De acuerdo con estas ideas la propuesta constará de tres apartados:

1.- Justificación-finalidad.
2.- Temas de trabajo.
3.- Enfoque-tratamiento temas.

Con todo esto se pretende sentar las bases para una propuesta sistemática que sirva como punto de partida para una puesta en práctica razonada y que sobre todo permita dedicar nuestro tiempo a pensar en cómo daremos nuestras clases, cosa que lo agradecerán nuestros alumnos pues es entonces cuando incidiremos de verdad en el problema clave de la enseñanza como es la mejora de su calidad.

Personalmente me hubiera gustado que en el DCB se recogiera una propuesta unitaria que abarcara esos tres aspectos (por qué-para qué, qué, cómo) de una forma concreta, abierta y con margen suficiente para un tratamiento activo, de tal manera que una comisión Nacional (?) de seguimiento fuera recogiendo todas las propuestas y sugerencias, replanteara anual o bianualmente el tema en su triple vertiente y dejara en cambio el tema de la práctica del trabajo diario de clase en manos de los centros.

También se echa en falta una vez más la evaluación de la reforma que debería, primero, definir qué porcentaje de fracaso es asumible por el plan para en el caso de que sea inferior proponer recuperaciones individuales para los alumnos afectados, pero si fuera superior, alterar el propio plan. Lo que ocurre es que por la propia estructura de éste, al no hacer propuestas concretas de temas de trabajo ni ajustar metodologías todo queda en el aire de tal manera que después es prácticamente imposible incidir sobre dichos temas.

Es como si cada vez partiéramos de cero. Evidentemente los nuevos planes mejoran actuaciones precedentes e incluso el espíritu de la Reforma es positivo y progresista pero es preciso concretar para decidir si se actua positivamente o no y obrar en consecuencia. Es importante hacer propuestas abiertas pero tan importante es concretarlas para alterarlas en el caso que sea necesario.

1. Justificación y finalidad

Se trata de fijar y en lo posible clasificar las razones por las que se imparte Matemáticas y en especial la Geometría y para qué se imparte, es decir, qué es lo que se pretende conseguir.

Si en los aspectos más generales estamos básicamente de acuerdo, no lo estamos en los diferentes matices como en el papel que juegan en el desarrollo global de los alumnos ya que dependen más de cómo se enseñan y se aprenden que en el hecho de impartir simplemente.

A pesar de esa aparente unanimidad sería importante sistematizar pues hay razones de tipo social, de tipo cultural, de tipo psicológico de capacidades que merece la pena clasificar y exponer abiertamente a una continua revisión.

Esto nos dará seguridad y confianza para saber lo que se pretende conseguir, cuál es la meta de nuestro trabajo o los objetivos que nos marcamos al impartir clases de matemáticas.

Tampoco se trata de ser exhaustivo sino de proponer las líneas maestras que permitan establecer un marco de referencia abierto y ágil en nuestro trabajo.

La matemática siempre ha ocupado un lugar importante en las propuestas curriculares ya que:

* Es importante para cualquier situación de la vida y en particular la geometría para el estudio de la naturaleza, como componente esencial del arte, para orientarse en el espacio o hacer estimaciones.
* Es componente básico para el avance tecnológico y el desarrollo de la Ciencia y en particular la geometría para el diseño, en arquitectura y en topografía.
* Como lenguaje (gráfico y simbólico) preciso, conciso y riguroso es un poderoso instrumento de comunicación.
* Desarrolla diferentes capacidades: lógica, numérica, espacial...
* Importante instrumento para otras áreas curriculares.

Esta justificación implica unas finalidades que una vez agrupadas se plantean como desarrollo de las capacidades siguientes:

* Identificar formas, relaciones espaciales, otros elementos matemáticos y cuantificar diferentes aspectos de la realidad, actuando sobre situaciones cotidianas con modos propios de la actividad matemática.
* Incorporar al lenguaje las distintas formas de expresión matemática.
* Utilizar las formas de pensamiento lógico y elaborar estrategias personales de análisis.

Además estas finalidades se pueden concretar en objetivos específicos del bloque temático que en el Real Decreto de desarrollo de la LOGSE adoptan la forma de criterios de evaluación:

* Utilizar los conceptos de incidencia, ángulos, movimiento, semejanza y medida...
* Interpretar y obtener información de representaciones planas...
* Identificar y utilizar relaciones de proporcionalidad.
* Estimar y calcular la medida de superficies y volúmenes...

Estas consideraciones nos llevan a proponer una Geometría que, atendiendo la edad de los alumnos (12-16), les inicie en el razonamiento deductivo, que partiendo de situaciones reales, las matematice y generalizándose sirva para resolver nuevas situaciones reales y que como instrumento de comunicación que es, al trabajar los diferentes lenguajes nos sirva como pauta de trabajo para otras áreas curriculares.

Se puede pensar que con estas conclusiones se podrían proponer diferentes temas de trabajo y más si se considerara prioritaria la metodología a utilizar ya que ello nos podría llevar a pensar que no es necesario fijar temas de trabajo pero la experiencia enseña que ello conlleva una dispersión y una falta de consistencia del aprendizaje en un campo de conocimiento ya sistematizado como es la Matemática.

No se trata de entrar en discusión de si el qué precede al cómo o si lo importante es el cómo sin importar el qué. Pensamos que es un problema ya superado y que ambos van de la mano y que lo importante de verdad es fijar ambos y revisarlos periódicamente dejando para el trabajo de Centro la metodología y la búsqueda de actividades apropiadas.

2. Temas de trabajo

Se pretende fijar los temas de trabajo para cuatro cursos. Deben ser temas mínimos de tal forma que haya un margen para un tratamiento activo, participativo, de relación con el entorno, de uso de material, etc.

La propuesta deber ser también abierta, concreta y revisable al igual que la anterior, con la idea de que sirva de punto de partida para una puesta en práctica crítica.

El bloque dedicado a la Geometría (Representación y organización en el espacio) lo dividimos en 6 grandes temas o unidades temáticas:

1.- Elementos en el plano.
2.- Figuras planas.
3.- Transformaciones.
4.- Elementos en el espacio.
5.- Cuerpos geométricos.
6.- Semejanza.

Estando los tres primeros temas dedicados a la geometría plana, los dos siguientes a la geometría del espacio y el último a ambos.

Cada unidad temática se desglosa en 6 apartados respondiendo a los diferentes conceptos y procedimientos propios de la geometría elemental así como a los diferentes objetivos perseguidos:

Situación de entorno

Sirve de punto de partida para trabajar el tema. Para lo cual nos basamos en un tema de nuestro entorno justificando así el trabajar una Geometría real que nos sirve asimismo de motivación.

Conceptos

Por un posible uso excesivo de la memoria, a veces se tiende a rechazar un tratamiento sistemático de las definiciones pero conviene hacer un listado de los mismos. El problema reside en trabajarlas adecuadamente y siempre que lleve implícita la comprensíon del concepto definido. También hay que hacer un esfuerzo de memoria, ¿por qué no?

Razonamiento

Si a los 12 años los alumnos inician el pensamiento formal, hay que darles la oportunidad de iniciarse aunque al principio sea más intuitivo e inductivo que propiamente deductivo. Para ello conviene hacer un listado de propiedades, relaciones y teoremas con demostraciones sencillas aunque hay que completarlas con diferentes actividades de tipo deductivo. También se presta para un uso adecuado del lenguaje oral, gráfico, simbólico, etc.

Construcciones

Importancia del uso de diferentes técnicas como construcciones con regla y compás, doblado de papel o construcciones con diferentes materiales como cartulina, plastilina, alambre, etc.

Aritmetización

Punto de encuentro de la Geometría con los números y la medida. Habitualmente convertida en recetario para una aplicación exclusivamente mecánica de la que hay que alejarse e incidir en una justificación inductiva-deductiva para un uso mínimamente razonado y justificado del tema.

Aplicaciones-problemas

Partiendo de una situación práctica, la matemática después de teorizar o de modelizar vuelve para, generalizando resolver otros problemas prácticos. Situaciones que nos van a permitir, además de adentrarnos en el tema de la resolución de problemas, comprobar el nivel de comprensión-adaptación adquirido por los alumnos.

De todas formas esta propuesta había que concretarla más, en el sentido de proponer los temas de trabajo detallados y secuencializados por cursos pero eso ya se escapa del objetivo más general de esta propuesta.

TEMAS TRABAJO	SITUACIÓN	CONCEPTO	RAZONAMIENTO	CONSTRUCCIÓN	ARITMETIZACIÓN	APLICACIÓN
ELEMENTOS EN EL PLANO	• Laberintos • Itinerarios • Puntos cardinales	• Punto. Recta. Plano • Semirrec. Segmento • Ángulos: Tipos • Paralelas. Perpend. • Mediatriz. Bisec.	• Relación ángulos correspon. opuestos y alternos	• Repesentación • Esquemas	• Distancias entre puntos y rectas	• Distancias largas, inaccesible
FIGURAS PLANAS	• Mosaicos • Azulejos • Puzzles • Sección aurea	• Triángulos. Clasif. • Cuadrilát. Clasif. • Polígonos. Elemen. • Circunferencia. Tangente. Central e inscrito	• Ángulos tr. • Pitágoras • Ángulos pol • Prop. tg. • Relación ins-central	• Mediatriz. (C) • Bisectriz. (I) • Mediana. (B) • Altura. (O)	• Justificación y uso de las fórmulas de perímetro y área.	• Superficies grandes. • Teselar
TRANSFORMACIONES	• Puertas • Plantas • Espejos • Máquinas	• Traslaciones • Giros • Simetrías	• Propiedades • Composición	• Representación • Esquemas • Diagramas	• Relación entre áreas	• Diseño de mosaicos
ELEMENTOS EN EL ESPACIO	• Laberintos • Itinerarios • Puntos cardinales	• Pto. Rec. Plan. Esp. • Ángulos diedros. • Rectas y planos: incidencia, paral. perpendicularidad	• Propiedades	• Representación • Esquemas	• Distancias entre puntos, rectas y	• Distancias largas inaccesible
CUERPOS GEOMÉTRICOS	• Globoterráqueo • Cristales • Pirámides • Planetarium	• Poliedros • Prismas • Pirámides • Cuerpos redondos • Elementos. Clasif.	• Fórmula Euler • 5 poliedros regulares.	• Elaboración • Desarrollos • Representación plano • Perspectiva • Comp. Descomp.	• Justificación y uso fórmula volumen. • Altura pirámide • Diagonal prisma	• Distancias mínimas. • Volumen mínimo.
SEMEJANZA	• Escalas • Plano. Mapa • Maquetas • Curvasnivel • Fotografía	• Característica. • Proporcionalidad	• Thales • Propiedades	• Dibujo escala • Plano-espacio	• Relación entre área y volumen de figuras semejantes	• Escalas • Planos • Mapas • Maquetas • Topografía

3. Enfoque-tratamiento temas

Conviene tener presente a la hora de dar nuestras clases aspectos pedagógicos ya propuestos en la Reforma de los años 70, confirmados en los Programas Renovados y puestos al día en los DCB últimos como son:

* Metodología lo más activa y participativa posible.
* De acuerdo con los intereses de los alumnos.
* Lo más individualizada posible.
* Relacionada con su entorno.
* Importancia del uso del material.
* Lo más interdisciplinar posible.

La propia historia de la Matemática nos ha enseñado que a pesar de ser una ciencia deductiva, el propio entorno, los problemas reales, la intuición, la inducción han sido el motor o las actitudes que han impulsado y hecho avanzar a la matemática; lo que ocurre es que no se hace ciencia hasta que todas las consecuencias se pueden deducir según un determinado sistema riguroso de leyes, aunque no es menos cierto que esta fase de rigor deductivo es el final de ese largo proceso.

Esta dicotomía ha provocado muchas veces un debate a la hora de enseñar Matemáticas entre matemáticas hechas y por hacer, entre una matemática más o menos activa y más o menos constructiva e inductiva o una matemática más deductiva, de comprobación y comprensión de lo ya conocido, cosa que actualmente pensamos ya superado.

Por otro lado conviene tener presente los principios de Dienes: dinámico -de constructividad-de variabilidad matemática-de variabilidad perceptiva, que siempre ayudan a un tratamiento sistemático, sobre todo a la hora de encarar un nuevo concepto.

También interesa proponer actividades adecuadas a la edad de los alumnos y ordenadas en orden creciente de dificultad; y en el caso concreto de la Geometría interesa recordar los niveles ya conocidos de Van Hiele, para saber en cada momento el lugar que ocupa el alumno posibilitando así un correcto aprendizaje:

1º Reconocimiento global de las figuras.
2º Análisis de las componentes de las figuras, de sus propiedades pero relacionándolas de forma intuitiva y experimental.
3º Relación y clasificación de figuras de modo lógica mediante razonamientos sencillos pero sin organización deductiva.
4º Comprensión de la organización deductiva pero con falta de rigor.
5º Capacidad de razonamiento deductivo sin necesidad de ayuda de la intuición.

Pero sobre todo para llegar a un nivel de comprensión o aprendizaje significativo propondremos tres fases básicas en el tratamiento de un tema o concepto.

Partiendo de una situación real de nuestro entorno:

1.- Experimentación.

2.- Comprensión (Representación-Reflexión-Comunicación).

3.- Aplicación.

Y que aunque se pueden desglosar en más pasos preferimos mantenerlos así por una mayor coherencia e incluso para un más fácil y fluida puesta en práctica.

Todo ello se completa con una propuesta concreta, abierta y revisable en la que dichas fases didácticas se complementan con un desglose de los procedimientos y actitudes propuestos por el DCB. Y aunque a cada fase del tratamiento del tema se le asigne un determinado aspecto de los procedimientos o de las actitudes esto no quiere decir que el único que se trabaja sino que es el más apropiado en cada caso y el que más se puede y debe potenciar.

		TRABAJANDO PROCEDIMIENTOS	ATENDIENDO ACTITUDES
FASES TRATAMIENTO CONCEPTO	Experimentación: - Ensayos. - Pruebas. - Simulaciones - Juegos. - Materiales.	Estrategias	Curiosidad Reconocimiento y valoración
	Comprensión: - Representación gráfica y simbólica. - Reflexión - Comunicación oral y escrita	Lenguajes	Interés y gusto Apreciación belleza
	Aplicación	Algoritmos destrezas	Flexibilidad Tenacidad

Modesto Arrieta Illarramendi
E.U. Profesorado de E.G.B.
San Sebastián - U.P.V.

Bibliografía

* Informe Cockcroft (1982). M.E.C. Madrid.

* ICMI (1987). **Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90** (Kuwait-86). Mestral. Valencia.

* DISEÑO CURRICULAR BASE. ESO (12-16). M.E.C. Madrid.

* FREUDENTHAL, H. (1983). **Didactical phenomenology of mathematical Structures**. D. Reidel Publishing Company.

* GRUPO CERO (1984). De 12 a 16. **Un proyecto de curriculum de Matemáticas**. Mestral. Valencia.

* ALSINA Y OTROS. (1987). **Invitación a la didáctica de la Geometría**. Síntesis. Madrid.

* ALSINA Y OTROS. (1988). **Materiales para construir la Geometría**. Síntesis. Madrid.

* MARTÍNEZ RECIO Y OTROS. (1989). **Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría**. Síntesis. Madrid.

* GRUPO BETA (1990). **Proporcionalidad geométrica y semejanza**. Síntesis. Madrid.

* DEL OLMO, M.A. Y OTROS (1989). **Superficie y volumen.** Síntesis.

* CASTELNUOVO, E. (1981). **La Geometría**. Ketres. Barcelona.

* JACOBS, H.R. (1987). **Geometry**. Freeman and Company. New York.

* MOISE, E. Y DOWNS, F. (1982). **Geometry**. Addison-Wesley. U.S.A.

* CARWELL, R. (1979). **Geometry problems**. National Council. U.S.A.

EVALUACIÓN EN EL SISTEMA EDUCATIVO ESPAÑOL: EL CASO DE LAS MATEMÁTICAS*

Luis Rico

Introducción

Los términos claves sobre valoración y enjuiciamiento de los niños y adolescentes del sistema escolar no son equivalentes en el Sistema Educativo Español con los que se utilizan en la Comunidad internacional de Educadores Matemáticos.

En la literatura usual en inglés hay dos términos claves: *Evaluation* y *Assesment.*

Evaluation significa "juzgar o determinar el valor o la calidad de algo" y "ha evolucionado de un interés inicial único sobre la medida del rendimiento para realizar juicios sobre los estudiantes al interés creciente actual en obtener información para mantener la gestión y tomar decisiónes sobre programas" (Romberg, 1988).

Assesment viene a significar la consideración de todos los datos relativos a una situación o un problema y emitir un juicio u opinión de su totalidad y de lo que es probable que ocurra. Un "assesment" de alguien o de algo es una estimación de su calidad o valor (Collins, 1988).

El significado usual de estos dos términos es que "evaluation" se refiere a los aspectos más formales de control dentro del Sistema Escolar, mientras que "assesment" se refiere a las oportunidades cotidianas que tienen -o deben tener- los profesores para valorar y orientar el trabajo de sus alumnos.

En castellano no se utilizan estos términos con el mismo significado. Para referirnos a los aspectos formales se emplean los términos "examen" o "prueba" y a la acción de emitir un juicio con validez administrativa se le denomina "calificar", donde el dato o categoría resultante para el alumno es su "calificación".

Cuando queremos referirnos a la complejidad y variedad de situaciones en las que están implicados los profesores a la hora de valorar, enjuiciar, controlar y dirigir el trabajo de sus alumnos se emplea el término "evaluación"; la actividad de evaluar se considera más compleja y variada que la de emitir una calificación, aún cuando a veces se puedan identificar ambos términos.

En la cultura del profesor medio en España los términos equivalentes son:

Evaluation = calificación / examen / prueba.
Assesment = evaluación / valoración / orientación.

Este trabajo ha sido realizado por encargo de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, de cuya Junta Directiva forma parte el autor, a propuesta de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".

Es conveniente hacer estas precisiones porque la interpretación que se haga de los términos puede inducir a confusión.

En este texto emplearemos los términos calificación/examen/prueba terminal para referirnos a aquellos actos de enjuiciamiento del rendimiento de los alumnos que van a tener repercusión administrativa y que van a determinar su promoción dentro del Sistema Escolar. En este sentido son equivalentes de manera estricta al inglés "evaluation".

Con el término castellano "evaluación" nos referimos al modo genérico en el que el profesor realiza un enjuiciamiento sistemático de las actividades escolares de sus alumnos, tal y como se contempla en la literatura usual en castellano, tanto si tiene repercusión posterior en su promoción como si no. En unos casos será equivalente al término inglés "evaluation", pero la mayor parte de las veces puede entenderse como "assesment".

Cuando queramos destacar los aspectos estimativos y orientativos de los juicios del profesor, equivalentes al "assesment", emplearemos los términos genéricos "valorar" y "orientar".

La cultura española sobre evaluación es, inevitablemente, fruto de la evolución de la propia sociedad española, en la que muchos de los hábitos y costumbres han experimentado un fuerte cambio en los últimos años. Para entender la situación actual conviene conocer algunos de los antecedentes inmediatos.

Antecedentes

El Sistema Educativo Español que ha funcionado en los últimos años es resultado de la Ley General de Educación del año 70 que en su momento, supuso un esfuerzo de racionalidad y modernización para las estructuras educativas que se habían formado durante la dictadura.

A finales de los 60 el cambio social y económico necesitaba apoyo y complemento en el terreno educativo. Con la ayuda y asesoramiento de la UNESCO y la OCDE se diseñó el actual Sistema Educativo que estableció un periodo único de Enseñanza Obligatoria, desde los 6 a los 14 años, común para toda la población, denominado Educación General Básica.

El Sistema se bifurcaba en una enseñanza secundaria no obligatoria, de orientación academicista y dirigida hacia los niveles universitarios, denominada Bachillerato, y una segunda vía de orientación práctica, orientada hacia el mercado de trabajo y la formación técnica, denominada Formación Profesional. Formalmente se supone que ambas vías son parte de un único Sistema de Enseñanza Secundaria.

Entre las modificaciones que estableció la Ley General de Educación se encuentran las relativas a la valoración del rendimiento educativo, de las que conviene destacar:

* la valoración del rendimiento se refiere tanto al aprovechamiento de los alumnos como a la acción de los centros;
* la valoración del rendimiento de los alumnos tendrá en cuenta el nivel formativo e instructivo de cada curso junto con la apreciación de todos los aspectos de la formación del alumno y su capacidad para el aprendizaje posterior;
* la valoración se realizará mediante el sistema de evaluación continua;
* se establece la obligatoriedad de un registro reservado con los datos y observaciones relativos a los resultados alcanzados en la evaluación continua y en las pruebas de conjunto, así como cualquier otra información necesaria para una adecuada orientación y formación del alumno;
* la calificación final de cada curso comprenderá una apreciación cualitativa, positiva o negativa, y una valoración ponderada en el supuesto de que sea positiva;
* se suprimen las calificaciones cuantitativas y aparecen valoraciones cualitativas dentro de un sistema de categorías;
* se establece la promoción continua dentro del período obligatorio, con matices sobre la permanencia del alumno un año más por ciclo, cuando no ha logrado un dominio suficiente;

* la valoración de los alumnos en los cursos de Bachillerato se realizará mediante una calificación conjunta, efectuada por todos los profesores en actuación colegiada y siguiendo criterios de programación y evaluación establecidos en los seminarios didácticos.

La adaptación del Sistema Escolar a la metodología de evaluación implantada por la Ley General de Educación del año 70 ha sido lenta y costosa, especialmente en tres puntos:

* la desaparición de la calificación cuantitativa y sus sustitución por un sistema de categorías;
* la promoción continua dentro del período obligatorio;
* la necesidad de nuevos métodos e instrumentos para llevar a efecto una evaluación continua más fina y ajustada al aprendizaje de los alumnos.

En la década de los 70 el modelo que se impuso en evaluación fue el denominado "evaluación con relación a criterio", basado en la determinación más o menos precisa de los objetivos a lograr por parte de los alumnos, la elaboración de bancos de items ajustados a los objetivos y la realización de pruebas de papel y lápiz que pusiesen de manifiesto el logro alcanzado en los objetivos por los alumnos.

El desarrollo de la Ley General de Educación supuso en España la puesta en práctica de un currículo de matemáticas fundamentado en las "Matemáticas modernas". Puede afirmarse que la conjunción del modelo de objetivos operativos con un énfasis en los aspectos formales y estructurales en la organización y desarrollo de los contenidos derivó hacia un planteamiento fuertemente conductista en el aprendizaje de las matemáticas, incluyendo en esta orientación el diseño y desarrollo de los instrumentos de evaluación.

El énfasis se situó en el conocimiento de hechos y definiciones, en la ejecución de destrezas operatorias de las que se destacaba el control de las propiedades empleadas en cada uno de los pasos, en la insistencia de explicitar formalmente cada uno de los componentes utilizados en los razonamientos deductivos.

El olvido de la utilidad y aplicación práctica de los conocimientos matemáticos se llevó a extremos preocupantes; también cabe destacar el abandono total de la geometría del plano y del espacio.

A mediados de los 70 el modelo estaba agotado pero debido a la coyuntura política del país, con el proceso de reforma política y la instauración de la democracia, los esfuerzos en materia de educación son escasos; sólo a comienzos de los 80 se emprende una revisión en profundidad del Sistema Educativo.

El gobierno socialista, surgido de las elecciones del 82, tras una primera etapa en la que se limita a considerar la necesidad de renovar los cuestionarios y programas, emprende un proyecto mucho más ambicioso. La incorporación a las Comunidades Europeas plantea la necesidad de extender el Sistema de Educación Obligatoria hasta los 16 años, lo que lleva a un cambio en profundidad de la estructura educativa vigente hasta el momento. Se abre así un periodo en el año 86, denominado comúnmente la Reforma, en el que se someten a debate social y técnicamente las características relevantes del Sistema Educativo para el futuro.

Situación actual

En el año 91, con la promulgación de la nueva Ley de Ordenación del Sistema Educativo se consolidan las bases y los principios a los que va a ajustar la Educación en España durante los próximos años.

La Educación Obligatoria se extiende desde los 6 a los 16 años, con dos etapas distintas: Educación Primaria de los 6 a los 11 años y Educación Secundaria de los 12 a los 16 años. Este período viene precedido por una oferta escolar desde los 3 años a los 5 años, que se pretende hacer extensiva a toda la población, para irla ampliando progresivamente hasta los 0 años.

La articulación del nuevo Sistema ha estado precedida por un amplio debate y consulta con los diversos sectores sociales, quedando finalmente explicitada en una serie de documentos programáticos, editados por el Ministerio de Educación y por las Consejerías de Educación de las Comunidades Autónomas con competencias en materia educativa, conocidos genéricamente con el nombre de Diseños Curriculares Básicos.

En el Diseño Curricular Base, editado por la Administración del Estado, se presentan las ideas claves que dirigen la Reforma, entre ellas las relativas a los nuevos principios sobre evaluación y valoración. Este documento se articula en cuatro apartados.

En el primer apartado se establecen las bases teóricas y conceptuales que inspiran la Reforma. Para ello, se describe la situación de partida del Sistema Educativo, la necesidad de un nuevo marco de referencia y las características generales de la nueva orientación; se establece la noción de currículo, sus funciones y las cuestiones a las que debe dar respuesta, entre las que aparece: "¿Qué, cómo y cuándo evaluar?". Establece también la distinción entre Diseño del Currículo y Desarrollo del Currículo.

El segundo apartado se dedica a presentar el Diseño Curricular Base indicando las funciones que desempeña y los niveles de responsabilidad y aplicación. En este apartado se explicitan con detalle las ideas constructivas en las que se pretende fundamentar el Diseño, destacando la necesidad de partir del nivel de desarrollo del alumno, la necesidad de asegurar la construcción de aprendizajes significativos, con autonomía, modificando los esquemas de conocimiento del alumno y mediante una intensa actividad.

Estos supuestos tienen las siguientes implicaciones para la evaluación:

* la evaluación permite recoger información, realizar juicios de valor, orientar y tomar decisiones en el proceso de enseñanza/aprendizaje;
* la evaluación tiene por objeto valorar capacidades;
* las capacidades se expresan en los objetivos generales de etapa y área;
* las capacidades no se evalúan directamente, pero sí indirectamente, a través de los indicadores necesarios;
* la evaluación no tiene por objeto ni las conductas ni los rendimientos;
* la evaluación debe ser continua e individualizada, debe tener carácter formativo y orientación criterial;
* la evaluación tiene como finalidad orientar al alumno y guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje;
* también se contempla la necesidad de realizar evaluaciones finales de etapa o ciclo.

Conviene hacer algunas consideraciones. Los apartados anteriores tienen un carácter principalmente programático y no responden a la realidad de lo que ocurre en la mayor parte de las aulas; conforme se avanza en los niveles del Sistema Escolar la realidad de la evaluación es muy distinta de lo que pretende el documento que comentamos.

Por lo que se refiere a las matemáticas está claro que el predominio de las conductas que expresan un alto rendimiento en el conocimiento de hechos, definiciones y conceptos así como el dominio en las destrezas de cálculo, razonamiento y representación, constituyen la práctica totalidad de las actividades de evaluación.

Las disparidades anteriores se hacen especialmente acusadas en los cursos finales que van a configurar la Enseñanza Secundaria, en donde la tradición de identificar evaluación con examen, valoración con calificación y orientación con promoción está fuertemente arraigada, y difícilmente se da entrada a otras alternativas.

En el tercer apartado se describen los componentes del Diseño Curricular Base en los niveles de Etapa y de Área. El diseño curricular de cada una de las áreas que constituyen el currículo de la Enseñanza Obligatoria, también el área de Matemáticas, debe contemplar cuatro componentes fundamentales:

* objetivos
* contenidos
* metodología y
* evaluación.

Estas cuatro componentes constituyen un sistema, en el que las componentes no pueden considerarse aisladas sino que presentan interrelaciones que hay que enfatizar y desarrollar.

Los objetivos establecen las capacidades que se deben tener adquiridas al finalizar los periodos educativos. Se refieren a cinco tipos de capacidades humanas: cognitivas, motrices, afectivas, de relación interpersonal y de inserción social.

Los contenidos se clasifican en: conceptos, hechos y principios; procedimientos; valores, normas y actitudes.

En este tercer apartado se establece también el campo de competencias que se asignan a los Centros, y que debe concentrarse en un documento denominado Proyecto y Programación Curricular. En este documento hay que explicitar el conjunto de decisiones que se toman respecto al qué, cómo y cuándo enseñar y evaluar. Ha de servir para compartir las ideas y dotar de coherencia y personalidad a los Centros.

Finalmente, un cuarto apartado está dedicado a marcar líneas de actuación prioritaria a la Administración, indicando las medidas que deben tomarse y los campos sobre los que conviene actuar.

Seis son las líneas que se presentan: Formación del profesorado, Materiales Curriculares, Servicio de apoyo a la escuela, Organización de los centros, Investigación Educativa y Evaluación.

Por lo que se refiere a Evaluación se establecen tres niveles: alumnos, centros y Sistema Educativo. En relación con los alumnos se reconoce expresamente el principio de promoción continua, se señalan las condiciones para el paso de Ciclo y las titulaciones que se obtendrán en cada caso.

La Evaluación de los Centros se encomienda a un servicio de Inspección, con funciones específicas. Se reconoce que el Proyecto Curricular del Centro sirve para su evaluación.

La evaluación del Sistema Educativo se conecta con la creación de un futuro Instituto Nacional de Investigación y Evaluación.

Este documento, válido para todo el Sistema de Enseñanza Obligatoria, en el que hemos visto que se desarrollan los principios generales que marcan el camino a seguir para la Educación en España, se continúa con un desarrollo más particularizado en el que se hace una presentación de cada una de las etapas, Primaria y Secundaria, del Sistema.

En la presentación de cada etapa se describen sus características generales, se enuncian sus objetivos, se describe la estructura curricular y se presentan las orientaciones didácticas correspondientes.

Se continúa con la presentación diferenciada de cada una de las áreas de conocimiento que constituyen el currículo de cada etapa. En cada área se hace una introducción que presenta los principios sobre los que se va a articular su desarrollo. A continuación se enuncian los objetivos específicos del área, los bloques de contenidos y las orientaciones didácticas y para la evaluación.

Marco teórico de la evaluación en Matemáticas

Las ideas fundamentales que aparecen en las Orientaciones para la Evaluación en el área de Matemáticas son las siguientes:

1. Para qué evaluar

A) Hay que realizar observaciones sistemáticas para que el profesor emita juicios valorativos sobre la marcha del proceso de aprendizaje.

B) La Evaluación es parte integrante y fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje. Evaluar la propia actuación permite al profesor su control y mejora. La reflexión que hace el alumno sobre sus logros y problemas le ayuda a controlar e implicarse en el proceso de aprendizaje.

C) La evaluación tiene que considerar los aspectos actitudinales y los procedimientos de tipo general; para ello hay que modificar las técnicas e instrumentos usuales.

D) La evaluación no es un fin en sí misma; por ello es necesario que sea continua y diferenciada para cada uno de los alumnos.

2. Autoevaluación de alumnos y profesores

A) La autoevaluación necesita de la reflexión crítica del alumno sobre su proceso de aprendizaje y permite que se corresponsabilice de su educación; también fundamenta la propia estima e independencia.

B) La observación, evaluación y ajuste de la actuación del profesor es un factor clave en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

3. Instrumentos de observación y evaluación

A) El procedimiento de registro debe ser sencillo y no necesitar de mucho tiempo para su mantenimiento. Se aconseja una ficha por alumno para anotar las observaciones sobre cómo se manifiestan los objetivos de aprendizaje; también deben figurar las valoraciones de pruebas específicas.

B) La observación de cada alumno debe realizarse con regularidad, estableciendo criterios que los garanticen. Las discusiones son un momento adecuado para apreciar la corrección en la argumentación, el dominio en el vocabulario y el respeto a los demás.

C) El cuaderno de clase es otra fuente de información; deben quedar recogidas en él las actividades que realiza el alumno: ejercicios y problemas, resúmenes y esquemas, etc.

Los datos que proporciona el cuaderno son: nivel de expresión escrita y gráfica, hábitos de trabajo, etc.

D) También se puede recoger información realizando actividades específicas de evaluación. Hay una extensa variedad de tipos de pruebas, con sus ventajas e inconvenientes. Conviene seleccionar aquéllas que proporcionen un abanico amplio de posibilidades para demostrar la iniciativa y capacidad de los alumnos.

E) Para cumplir la finalidad orientadora hay que comunicar a los alumnos las sucesivas valoraciones que se realicen sobre su proceso de aprendizaje, indicando alternativas para su reconducción -si es necesario- y destacando los logros y avances.

Pero el marco teórico, por si sólo, no nos describe la situación real de la evaluación en el momento actual en España. Son necesarias otras consideraciones que nos permitan captar en su totalidad el status de la evaluación en matemáticas, dentro del Sistema Escolar.

Condiciones que afectan a la evaluación en Matemáticas

La situación actual relativa a la Evaluación en Matemáticas en España tiene los siguientes referentes:

1.- En el marco de renovación y cambio que aparece con la Reforma actual del Sistema Educativo han triunfado los planteamientos más innovadores, que mejor conectan con las corrientes más avanzadas dentro de la Educación Matemática. El marco evolutivo de la construcción del conocimiento matemático, el reconocimiento de la importancia de los razonamientos inductivos y los procedimientos intuitivos en el trabajo de los matemáticos, la potencialidad de las matemáticas como instrumento de comunicación, el aspecto esencialmente constructivo de la elaboración y adquisición del conocimiento matemático, son algunas de las ideas más destacables que han contribuido a delimitar el diseño curricular para las matemáticas.

También se ha destacado que, además de la finalidad formativa que se consigue mediante el aprendizaje de las matemáticas, al favorecer éstas el desarrollo y adquisición de capacidades cognitivas muy generales, se debe poner énfasis en la finalidad utilitaria y pragmática, con un referente claro: las necesidades matemáticas de la vida adulta. Igualmente se reivindica de un modo especial la participación de las alumnas.

El peso de la psicología cognitiva se aprecia también en el modo de clasificar y organizar los contenidos y las diferentes competencias que se marcan en los objetivos.

Podemos decir que el Diseño Curricular de Matemáticas está inspirado en las corrientes más conocidas y respetadas en las comunidades de Educadores Matemáticos anglosajones, con una fuerte tendencia a valorar las competencias cognitivas que se derivan de los procedimientos y estrategias necesarios para la resolución de problemas.

El currículo tradicional de matemáticas español, usualmente influenciado por las corrientes racionalistas y estructuralistas francesas y centroeuropeas, queda fuertemente modificado por un planteamiento empirista, pragmático y procesual de procedencia anglosajona y, parcialmente, holandesa.

2.- Conviene tener en cuenta que la gran mayoría del profesorado actualmente en ejercicio se ha formado durante la década de los 70, y por tanto su formación responde a planteamientos estructuralistas, con gran énfasis en el formalismo, en la corrección de los procedimientos y en el control conceptual mediante definiciones y notaciones simbólicas.

Cosa inusual, la mayoría del Profesorado de Secundaria -más del 80%- son titulados superiores en Matemáticas (licenciados con una formación de 5 años), cuya preparación psicopedagógica es inexistente o muy deficiente, elaborada principalmente sobre la práctica.

Sólo algunos grupos reducidos y minoritarios han trabajado de forma sistemática los problemas didácticos, complementando su formación psicopedagógica a unos niveles muy dignos, pero sin alcanzar apenas difusión.

Sin embargo, en los últimos cinco años se ha empezado a notar cierta escasez de licenciados en Matemáticas para ocupar los puestos de Profesorado en la Enseñanza Secundaria; empieza a no ser extraño que un licenciado en Química o en Biología enseñe matemáticas en estos niveles.

Por otra parte el profesorado de Primaria tiene una formación matemática suficiente para impartir enseñanza en los niveles correspondientes, pero globalmente desconectada de los conocimientos que tiene un licenciado y con poca consciencia de la especificidad y utilidad de su propio campo de trabajo. Aún cuando la formación psicopedagógica que ha recibido el profesor de Primaria es considerable, no suele establecerse conexión entre esta formación y el papel que deben ejercer como profesores de matemáticas, salvo las generalidades que pueden afectar a cualquier disciplina.

Tenemos así que el profesorado actualmente en ejercicio proviene de dos formaciones muy dispares, cada una de las cuales lleva una componente bien desarrollada y otra muy débil o inexistente. Ambas formaciones son, en cierto modo, complementarias; sin embargo, no se ha favorecido una colaboración sistemática entre ellas, que hubiese resultado fructífera para ambas partes.

Aunque los planteamientos de la Reforma son avanzados y conectan con las corrientes más actuales de la Educación Matemática, sin embargo el cuerpo de profesores encargado de llevarlo a la práctica no está colectivamente preparado para hacerse cargo de esta tarea.

Las perspectivas de futuro son aún menos halagüeñas ya que la disminución de los titulados en matemáticas para los puestos de profesor en Secundaria es una tendencia creciente. Por otra parte, la formación matemática de los futuros profesores de Primaria no va a mejorar de inmediato.

El plan actual de la Administración no contempla una formación inicial para el profesorado de Matemáticas con lo cual, y debido a la oferta del mercado de trabajo, los puestos de profesores de Matemáticas van a ser cubiertos cada vez más en el futuro por titulados que no sólo no tienen formación adecuada como profesores, sino que tampoco la van a tener como matemáticos.

3.- El modelo actual de evaluación está básicamente centrado en las pruebas de papel y lápiz en las que los alumnos deben mostrar su dominio sobre los hechos, destrezas y definiciones que constituyen los aspectos más elementales y simples del conocimiento matemático.

Muy raras veces se proponen a los alumnos actividades creativas o se evalúa su competencia para enfrentarse a tareas no ensayadas previamente y en las que tengan que poner a prueba la totalidad de sus conocimentos en un campo determinado.

Aún cuando hay grupos y equipos que han trabajado seriamente sobre la innovación en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, la mayoría de los esfuerzos se han centrado sobre determinación y clarificación de los objetivos, organización de los contenidos o incorporación de nuevos tópicos a los niveles de enseñanza correspondiente y, sobre todo, a elaborar una amplia variedad de tratamientos, adaptaciones, búsqueda de recursos y planificación de actividades que, conjuntamente, prescriben el tratamiento y metodología con los que desarrollar los contenidos, de forma que se facilite y logre su aprendizaje.

Sin embargo son muy escasos los trabajos sistemáticos realizados sobre innovación en evaluación, y aún es más escasa su difusión fuera de los equipos que las desarrollan.

Las innovaciones relativas a las demás componentes del Currículo de Matemáticas: objetivos, contenidos y metodología, no han incidido de modo destacable sobre nuevos planteamientos respecto a la evaluación.

4.- El término Evaluación está fuertemente contaminado en el Sistema Educativo Español y se suele identificar con examen, prueba terminal y calificación. Conforme se avanza a lo largo del Sistema el peso que va tomando el acto administrativo de la calificación terminal y su repercusión para continuar progresando en el propio Sistema es cada vez mayor, de modo que los alumnos de cualquier nivel identifican de inmediato los términos evaluación y examen, evaluación y promoción, evaluación y control.

En una encuesta realizada recientemente por nosotros con alumnos de los diferentes niveles del Sistema Educativo se ponía de inmediato en evidencia la identidad entre evaluación y prueba terminal, y se criticaba fuertemente por su carácter limitado y deficiente.

Los alumnos no perciben que el sistema institucional de evaluación tenga ninguna otra finalidad que la puramente fiscalizadora, la cual rechazan. Incluso en aquel sector minoritario de alumnos que se sienten gratificados en sus evaluaciones, por los buenos resultados que obtienen, no se pone en tela de juicio que la finalidad principal de la evaluación sea el control del conocimiento de los alumnos.

5.- En las Jornadas sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, celebradas en Marzo de 1991 en Castellón, se denunciaban las siguientes características del actual sistema de evaluación para las matemáticas en la Enseñanza Secundaria:

A) la temporalización estricta del sistema, centrado en una o dos pruebas escritas cada trimestre, con semanas dedicadas en exclusiva a realizar exámenes o recuperaciones;

B) la finalidad explícita de las pruebas orientadas a la entrega de una calificación;

C) el carácter global de la calificación que se da al alumno, en la que se resumen una serie de aspectos distintos e información obtenida con ejercicios diferentes; las valoraciones enmascaran en un solo dato de complejidad de aprendizajes logrados por los alumnos;

D) el nivel de dominio aceptable se sitúa en una línea arbitraria, a la que se denomina "nivel de aprobado" o "tener un 5";

E) no se valoran, en ningún sentido, ni los errores ni las preguntas no contestadas;

F) se hacen pruebas de suficiencia por partes, considerándose en muchas ocasiones que el contenido de las pruebas superadas alguna vez no debe volver a controlarse;

G) se obliga a una recuperación en el mes de septiembre; hay un número considerable de alumnos que no superan las pruebas y deben repetir curso.

En esas mismas Jornadas, el profesorado asistente, tras un amplio debate sobre las características necesarias para la Evaluación en la Enseñanza Obligatoria en España, señalaba las siguientes ideas, como metas a conseguir:

A) La Evaluación debe considerar las capacidades del alumno, tanto con carácter final como inicial;

B) La Evaluación deber ser un proceso continuo, proporcionando información verídica sobre los progresos o deficiencias de los alumnos; debe servir como retroalimentación para alumnos y profesores;

C) La Evaluación debe ser una actividad constante en el proceso de enseñanza/aprendizaje; hay que abandonar el ritual de actos aislados y singulares ligados a la evaluación;

D) Hay que destacar y desarrollar el carácter formativo del proceso de evaluación, quitándole la connotación sancionadora; no puede identificarse evaluación con calificación final;

E) La Evaluación no debe afectar sólo al alumno sino también al profesor y a aquellos otros elementos del Sistema Educativo que contribuyen al logro del aprendizaje;

F) La Evaluación de cada alumno se debe realizar de forma personal e individualizada, teniendo en cuenta que no siempre es posible valorar todo el aprendizaje y, por otra parte, no sólo hay que valorar el dominio conceptual sino también las actitudes y los procedimientos.

Conclusión

La inquietud del profesorado español en la Enseñanza Obligatoria en relación con la Evaluación es un indicador del grado de consciencia actualmente existente sobre la necesidad de orientar las valoraciones y enjuiciamientos del profesor en una dirección que contribuya fuertemente a lograr un aprendizaje efectivo de los alumnos y un desarrollo de sus capacidades personales de autoestima, comunicación e integración social.

Se percibe con claridad que se trata de un campo de trabajo prioritario, y en este sentido la comunidad de Educadores Matemáticos en España está comenzando a trabajar sistemática y coordinamente, favoreciendo las iniciativas individuales y de grupo, y contribuyendo a su difusión.

Esto se ha puesto de manifiesto en el Grupo de Trabajo sobre Evaluación de Matemáticas, que se ha reunido recientemente en Castellón, y en los trabajos ya en curso en Barcelona, Valencia, Salamanca, Madrid, Zaragoza, Tenerife, Sevilla, Málaga, Granada y muchos otros pueblos y ciudades del Estado Español.

Aunque es mucha la tarea por desarrollar si hay algunas ideas claves que deben orientar el trabajo inmediato.

Por una parte, considerar la Evaluación como un proceso continuo e interdependiente con las otras componentes del Currículo; no pueden tratarse los contenidos, objetivos y metodología como cuestiones aisladas del proceso de evaluación, sino que hay que contemplar estas componentes conectadas entre sí. La evaluación no es un elemento aislado y singular sino que debe impregnar todas las etapas que conforman la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El carácter formativo y orientador de la evaluación es otra idea que es necesario desarrollar; contemplar la evaluación como un enjuiciamiento crítico que estimula, orienta y promueve una mejor comprensión y un mayor control del conocimiento por parte de los alumnos, que les muestra los errores y deficiencias cometidos, que les marque vías de superación y que les haga sentirse satisfechos del esfuerzo realizado, debe ser un estilo de trabajo que el profesor estimule y desarrolle de modo regular.

Finalmente, la necesidad de emplear una variedad de métodos e instrumentos, unos de carácter sistemático y otros que favorezcan los aspectos creativos de las matemáticas, la capacidad para poner de manifiesto las múltiples facetas conectadas con la organización racional del conocimiento y también el estímulo a la invención, junto con la capacidad para tomar decisiones, servirán no sólo a favorecer la promoción de las potencialidades del alumno sino a que esto se haga como consecuencia del esfuerzo, ayuda y valoración del profesorado.

Luis Rico
Departamento Didáctica de la Matemática.
Universidad de Granada.

Bibliografía

COLLINS (1988). **English Language Dictionary**. Collins Publisher, Birminghan.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1972). **Ley General de Educación**. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia y Boletín Oficial del Estado, Madrid.

MINISTERIO DE EDUACIÓN Y CIENCIA (1989). **Diseño Curricular Base**. Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria. Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

RICO, L. (1990) **Diseño curricular en Educación Matemática: elementos y evaluación, en Teoría y Práctica en Educación Matemática**, Llinares y Sánchez edts. Editorial Alfar. Sevilla.

ROMBERG, T. (1989) **Evaluation: a coat of many colors**, en **Evaluation and Assesment in Mathematics Education**, D. Robitaille edts. Unesco. París.

CURRICULUM DE MATEMÁTICAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS[1]

María Luz Callejo de la Vega

En este artículo tratamos algunos aspectos del enfoque del curriculum de matemáticas desde la resolución de problemas. En primer lugar, para saber de qué y desde dónde hablamos al referirnos a la "resolución de problemas" como un enfoque de la matemática, plantearemos una serie de premisas sobre la concepción de esta disciplina y de su enseñanza/aprendizaje. A continuación propondremos una estrategia didáctica coherente con las premisas anteriores y extraeremos algunas consecuencias acerca de sus implicaciones en el curriculum. Finalmente propondremos dos estrategias de formación permanente de profesores, en el sentido más amplio del término, para hacer posible su preparación para este enfoque.

Introducción

En los últimos años han aparecido diversos informes, recomendando la incorporación de la resolución de problemas en el curriculum de matemáticas. Por ejemplo, "*An Agenda for Action*" (N.C.T.M., 1980) Y "*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*" (N.C.T.M., 1989) en los Estados Unidos y el "*Informe Cockcroft*" (Cockcroft, 1982) en Gran Bretaña. En nuestro país, la resolución de problemas aparece como una orientación en los Diseños Curriculares Base (D.C.B.) de esta materia (M.E.C., 1989).

El documento que ha ejercido mayor influencia ha sido "*An Agenda for Action*" de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (N.C.T.M., 1980. Contiene ocho consejos para la enseñanza de las matemáticas. El primero dice así:

"El N.C.T.M. recomienda que la resolución de problemas sea el objetivo principal de la enseñanza de las matemáticas en la década de los 80". (p.1)

J. Kilpatrick (1981) señala que el documento no especifica lo que entiende por "resolución de problemas" y que una buena parte del mismo podría haberse extraído con pocos cambios del informe "*Mathematics in General Education*" que publicó en 1940 la Progressive Education Association. C. Gaulin (1982) considera que esta recomendación "ha sido formulada en términos vagos y muy generales". Esto ha dado lugar a "interpretaciones muy diferentes -a veces incluso divergentes" (p.47). Ante esto nos preguntamos:

- ¿Se trata entonces de continuar haciendo lo mismo de siempre, pero llamándole de otra manera?

1. Este artículo corresponde a la conferencia "Curriculum y resolución de problemas", pronunciada en los "Encuentros del profesorado de matemáticas de Madrid" de Junio de 1991, organizado por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas. La autora agradece a los organizadores su autorización para la publicación.

- ¿O se trata quizá de una moda pasajera que a España nos llega con un poco de retraso y por ello aparece en los DCB de matemáticas de la Reforma actual?
- ¿O por el contrario, se trata verdaderamente de una renovación importante de la educación matemática que supondrá cambios sustanciales en el curriculum y en el papel que el profesor debe jugar en la formación matemática de sus alumnos?

Estas son las cuestiones que abordaremos a continuación.

En este artículo sólo tocaremos algunos aspectos del enfoque de la matemática desde la resolución de problemas que deberían incidir en el Diseño Curricular. No vamos por tanto a tratar sobre el Diseño Curricular propiamente dicho, sino de las estrategias que se pueden poner en práctica para introducir este enfoque. Partimos también de una perspectiva constructivista[2] del aprendizaje. Dentro de esta perspectiva se plantean dos modelos de instrucción; unos orientados al cambio conceptual y otros a la resolución de problemas. Dejamos en esta ocasión el primer grupo y nos situamos en el segundo (Wheatley, 1991).

Pero antes de empezar a desarrollar el tema invitamos al lector a hacer un poco de gimnasia mental a partir de la situación siguiente:

El juego del 7: Es un juego para dos jugadores. El primero dice un uno o un dos. El segundo le suma uno o dos al número que dijo su compañero y dice el resultado. Así sucesivamente, por turnos. El que diga siete gana.
¿Lleva ventaja alguno de los jugadores? ¿Cómo tiene que jugar para ganar siempre? [3]

Presupuestos básicos del enfoque heurístico de la matemática

Entre las distintas aproximaciones a la didáctica de la matemática, el enfoque heurístico es el que mejor se adapta a nuestro planteamiento. A continuación exponemos de forma breve los presupuestos de este enfoque.

Qué es la matemática

Aristóteles describió la matemática como "el estudio de la cantidad"; R. Descartes como "la ciencia del orden y de la medida"; F. Klein la definió como la "ciencia de las cosas que son evidentes por sí mismas"; B. Russel la identificó con "la lógica"; D. Hilbert la describió como un "juego formal sin significación"[4]; I. Lakatos como "una actividad humana que encierra en sí misma una dialéctica de conjeturas, refutaciones y demostraciones, hasta llegar al establecimiento de la teoría o resultado final"; y G. Polya decía que la matemática es "«saber-hacer»" más que "«saber»". Cada una de estas afirmaciones supone adoptar un punto de vista sobre las matemáticas. Aquí nos situaremos del lado Lakatos y de Polya que conciben esta disciplina y su enseñanza desde un "enfoque heurístico". Esto implica:

- Por una parte, introducir los conceptos a partir de la situación problemática que ha dado origen a su aparición e introducir los teoremas de modo que no se oculte la sucesión de tentativas que precedieron al establecimiento de éstos (Lakatos, 1974);
- Por otra parte, considerar el proceso de búsqueda, de creación, de tanteos, de inferencias, de comprobaciones, propio de la resolución de problemas, como el corazón de la actividad matemática (Polya, 1945).

Aquí sólo desarrollaremos el segundo apartado.

2. Una exposición sintética sobre el constructivismo puede verse en: ¿Qué es una enseñanza constructivista? T. SERRANO. Documentos IEPS. Monografía nº9. IEPS. Madrid, 1989.
3. Además de dar la solución sería interesante repasar el proceso seguido hasta encontrarla e intentar relacionar los datos (1,2 y 7) con los números que permiten ganar, que son 1,4 y 7. Por tanto lleva ventaja el primer jugador.
4. Nota previa de J.R. Newman al artículo de H. Weyl, El modo matemático de pensar. En: La forma del pensamiento matemático, J.J. Sylvester y otros, Grijalbo, Barcelona, 1974.

Cuál es el objetivo fundamental de la educación matemática

En las etapas iniciales de la educación (Primaria y Secundaria) el objetivo básico de la educación matemática, es facilitar a los alumnos el camino para "la consideración de las matemáticas como un poderoso instrumento que permite representar, analizar, explicar y predecir hechos y situaciones de una forma rigurosa, concisa y sin ambigüedades" (M.E.C., 1989, p. 486). Pero ante todo la educación matemática debería enseñar a pensar: "El profesor de matemáticas no debería contentarse con dispensar el saber, sino que también debería intentar desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar ese saber; debería insistir en el saber-hacer, en las actitudes adecuadas, en los hábitos intelectuales deseables" (Polya, 1967, p. 281). La enseñanza matemática tradicional desarrolla, en el mejor de los casos, la memoria, el sentido práctico, las facultades de abstracción, el razonamiento lógico, el rigor, etc. Pero lo más importante es cultivar la inteligencia, que es la aptitud para hacer frente a situaciones nuevas y para establecer relaciones. Desde este punto de vista la resolución de problemas es la actividad matemática más importante.

Cómo se aprende la matemática

El conocimiento matemático no se recibe pasivamente, como si la mente fuese un libro en blanco en el que se van escribiendo los nuevos contenidos, en el sentido más amplio de este término, sino que el sujeto construye activamente el conocimiento, incorporando los nuevos contenidos a las estructuras mentales que se experiencia ha ido forjando. Esto significa que la matemática no se aprende por transmisión directa de lo que se explica en clase o de lo que se lee en los libros de texto, sino que la matemática se aprende en interacción con situaciones problemáticas y con otros sujetos, que obligan al alumno a ir modificando su estructura cognitiva mediante una serie de acciones: experimentando, haciéndose preguntas, particuarizando situaciones, generalizando resultados, encontrando contraejemplos, etc. En una palabra, las matemáticas "se aprenden en gerundio". Estos procesos requieren un cierto nivel de intencionalidad y de predisposición por parte del sujeto que aprende. La reflexión sobre la experiencia, sobre la propia actividad matemática y la de otros, está también en la base de su aprendizaje. Como señala el D.C.B. de Matemáticas de la E.S.O., "la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas impuestas por la realización de tareas y la resolución de problemas particulares" (M.E.C., 1989, p. 481).

Esto mismo lo decía, hace ya algunas décadas, G. Polya (1967) con otras palabras. Este autor se refería entonces a tres "principios para aprender", sacados de la experiencia y sugeridos por la psicología:

- *el principio de actividad*, un viejo principio fundado en el método socrático;
- *el principio de motivación*: "para aprender eficazmente, el estudiante debe encontrar interés en la materia que estudia y placer en la actividad que resulta";
- *el principio de las fases consecutivas*: "para aprender eficazmente, una fase exploratoria debería preceder a la de formalización de los conceptos. El contenido de lo que se aprende debería ser asimilado en la mente de quien aprende y contribuir a formarla".

Cómo se enseña la matemática

La educación matemática debe por tanto proporcionar a los alumnos: a) contextos de aprendizaje adecuados para que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos en interacción con sus compañeros y con el profesor y b) situaciones problemáticas que les den la oportunidad de experimentar, conjeturar, refutar, comprobar, generalizar resultados, inventar nuevos problemas.

A continuación vamos a tratar de esbozar los rasgos más destacados de estos contextos de aprendizaje y de estas situaciones problemáticas a las que nos referimos.

Estrategia didáctica para desarrollar este enfoque

El contexto de aprendizaje

El aprendizaje centrado en la resolución de problemas requiere que el profesor seleccione situaciones problemáticas y trate de crear un clima de libertad para que los alumnos puedan expresarse con espontaneidad. La dinámica de la clase se desarrolla según un ciclo que comporta varias etapas:

- **Orientación del trabajo:** el profesor puede comenzar presentando la situación problemática a todos los alumnos o entregarla por escrito a cada estudiante. Es importante que se asegure de que todos los estudiantes la han comprendido.

- **Trabajo exploratorio en grupo:** los estudiantes pueden comenzar abordando la tarea individualmente y luego en grupo o directamente en pequeños grupos de cinco o seis alumnos como máximo. Para que el trabajo en grupo sea eficaz, un estudiante hace de moderador y otro de secretario[5], anotando el proceso de resolución. De esta forma se promueve la comunicación y la discusión entre los miembros del grupo que tratarán de encontrar juntos la solución.

- **Confrontación de ideas:** mientras los alumnos trabajan en grupo, el profesor sirve de guía a los estudiantes, animándoles a comprobar los resultados, ofreciéndoles contraejemplos que les ayuden a profundizar en sus ideas, abriéndoles nuevas pistas, desbloqueando situaciones, sugiriendo generalizaciones. Si los alumnos siguen una línea de razonamiento que al profesor no le resulta familiar o que aparentemente es infructuosa, el profesor deberá seguirla atentamente hasta verificar si es buena o no (¡puede llevarse una sopresa!).

- **Revisión:** al final de la sesión se dedica un tiempo a discutir en clase: los grupos presentan a toda la clase, (no sólo al profesor), sus soluciones y cómo llegaron a ellas, para discutirlas. En el proceso de decir a otros cómo se ha pensado en un problema, se elabora, se perfila y se profundiza el propio pensamiento. El profesor debe facilitar la libre expresión de los alumnos y no enjuiciar las soluciones, ya sean buenas o malas pues ésto bloquea el diálogo, impide una discusión fluída y presdispone a los estudiantes a buscar "la" respuesta esperada por el profesor (cfr. Adda, 1985), más que a exponer sus propios razonamientos. Por el contrario, el profesor tratará de "negociar" con los alumnos las soluciones propuestas y trabajará con ellos para llegar a un consenso. Debe intentar comprender las diferentes aproximaciones de los estudiantes a la situación, sean adecuadas o no; en este último caso tratará de ver en qué medida pueden serlo.

- **Aplicación:** se debe dar a los alumnos la oportunidad de aplicar sus nuevos conocimientos a *situaciones análogas* para reforzar los contenidos claves que deben construir.

Este ciclo se puede desarrollar en una o varias sesiones de una hora aproximadamente. El momento de la revisión lo deberá decidir el profesor de acuerdo con el trabajo de los alumnos, para que esta fase resulte provechosa. En cualquier caso, todos los alumnos han debido disponer de tiempo suficiente para llegar a alguna conclusión. Si se hace en una sola sesión, no se da espacio al fenómeno de la incubación de ideas que, por otra parte, es un aspecto decisivo en la resolución de un problema (Poincaré, 1932; Hadamard, 1934).

Las situaciones problemáticas

El corazón de este tipo de aprendizaje es un conjunto de *situaciones problemáticas* que encierran los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales claves de la matemática y que guiarán a los estudiantes en la construcción de los mismos.

5. La descripcipon del trabajo del moderador y del secretario en la resolución de problemas en grupo puede verse en : El pensamiento lateral; Manual de creatividad. E. DE BONO. Paidos Barcelona, 1986.

Es obvio que todos los alumnos de una clase no tienen la misma capacidad para las matemáticas, ni el mismo nivel de desarrollo psicoevolutivo, por lo tanto hay que procurar que estas situaciones problemáticas sean: *fáciles de abordar por toda la clase*, que se puedan hacer observaciones y constataciones, que inviten a conjeturar, a preguntarse "que pasaría si...". Pero al mismo tiempo, que sean situaciones *que se presten a la generalización*, de modo que los alumnos puedan trabajar en ellas con todo el grado de profundización de que sean capaces. En este sentido podemos considerar la actividad matemática como una espiral (Mason, Burton y Stacey, 1988): la primera vuelta de este espiral representará el proceso de resolución de un problema hasta llegar a la solución justificada de la cuestión planteada; la vuelta siguiente será el proceso de resolución de un problema más general que el problema planteado, y así sucesivamente. Por tanto la resolución de un problema es un proceso que no se puede acotar de antemano porque siempre da lugar a la resolución de nuevos problemas. Y, por último, que sean problemas que motiven a los estudiantes, por ejemplo que les planteen retos, que les inciten a hacerse preguntas, por ejemplo, "¿qué pasaría si en El juego del 7, en lugar de llegar a 7 debemos llegar a 31 y, si en vez de añadir hasta 2 añadimos hasta 5?".

Ejemplos de situaciones problemáticas

A continuación sugerimos algunas actividades que reúnen las características antes expuestas:

El juego del 31: Es un juego para dos jugadores. El que juega primero dice un número cualquiera del 1 al 5. El que juega segundo le suma al número que dijo el primer jugador un número del 1 al 5 y dice el resultado. A continuación el primer jugador hace lo mismo, es decir, suma al número que dijo el otro jugador un número del 1 al 5 y dice el resultado. Así sucesivamente. Gana el que primero diga 31.
¿Tiene ventaja alguno de los jugadores? ¿Por qué? Si alguno de los dos lleva ventaja, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?[6]

Este problema sirve para ilustrar el procedimiento heurístico "suponer el problema resuelto" o "empezar por el final". Todos los estudiantes pueden jugar al azar o sistemáticamente, con tal de tener conocimientos mínimos de cálculo. Al proponerlo en clases del Ciclo Medio (7 u 8 años) hemos podido comprobar que muchos alumnos, son capaces de descubrir que 25 es un número clave porque "el que diga 25 gana". De entre ellos, algunos se quedan ahí, creyendo haber hallado la solución. Otros continúan profundizando y llegan a obtener casi todos o todos los números claves que debe decir el primer jugador para asegurarse el éxito (1, 7, 13, 19, 25 y 31). Cuando el profesor invita a alumnos del Ciclo Superior a resolver un problema más general, algunos cambian el número que hay que decir para ganar o las cantidades que se pueden añadir, llegando incluso a descubrir la secuencia ganadora en forma de variables, es decir, escribiendo estos números en función del número ganador "n" y de las cantidades que se pueden añadir, un número entre "1" y "p". Unos pocos llegan a las siguientes conclusiones: el primer número que debe decir el primer jugador es el resto de la división del número "n" entre "p+1"; si "p+1" es divisor de "n" entonces lleva ventaja el segundo jugador porque según el argumento anterior el primer jugador debería decir "O" para ganar y eso no está permitido; si se pudiese añadir solamente un número entre "q" y "p", siendo "q<p", entonces ese primer número sería el resto de la división de "n" entre "p+p".

Otra presentación del Juego del siete es la siguiente:

Fichas sobre la mesa. Se trata de un juego para dos jugadores. Hay 7 fichas sobre una mesa y cada jugador, por turno, puede coger una o dos fichas. El que coja la última pierde. ¿Lleva ventaja alguno de los jugadores? ¿Cómo debe jugar para ganar siempre?

En este caso las fichas que debe dejar el segundo jugador para ganar son 7, 4 y 1 sucesivamente, es decir, los mismos números que eran claves en El

6. Lleva ventaja el primer jugador pues la secuencia ganadora es 1, 7, 13, 19, 25 y 31.

juego del 7. Nos preguntamos ¿Qué pasaría si el que cogiese la última ficha en lugar de perder ganase? ¿Y si las fichas estuviesen distribuidas en que cogiese la última ficha en lugar de perder ganase? ¿Y si las fichas estuviesen distribuidas en varios montones, por ejemplo dos, y se pudiese coger como mínimo una ficha de un montón y como máximo una de cada montón? Tendríamos un nuevo problema, bastante conocido, en el que se suelen emplear cerillas:

Jugando con cerillas. Es un juego para dos jugadores. Sobre una mesa hay distribuidas 7 cerillas en dos montones. Cada jugador, por turno, puede coger una cerilla de un montón o una cerilla de cada montón. Gana el que coja la última cerilla. ¿Lleva ventaja alguno de los jugadores? ¿Cómo debe jugar para ganar siempre?[7]

Este problema, plantea una situación parecida a la del anterior, sin embargo, el tratamiento más adecuado para llegar a la solución es diferente porque las cerillas están distribuidas en dos montones. Las "posiciones" claves son ahora distintas, dependiendo del número de cerillas que haya en cada montón. Si se representa las "posiciones" del problema en un diagrama cartesiano se obtienen fácilmente las que son ganadoras y perdedoras. Por ejemplo, si en un montón hay 4 cerillas y en otro 3, los "movimientos" permitidos desde cada casilla son: una casilla a la izquierda (quitar una cerilla del montón de 4) o una casilla hacia abajo (quitar una cerilla del montón de 3) o una casilla en diagonal (quitar una cerilla de cada montón). Quien llegue primero a la posición (0,0), ha cogido la o las últimas cerillas y gana. Retrociendo desde esta posición a las tres que permiten acceder a ella, tenemos tres posiciones ganadoras que designamos con la letra "G" y que son las tres casillas del diagrama que limitan con la (0,0) (figura 1). Retrocediendo de nuevo desde estas posiciones se tienen como posiciones perdedoras, designadas en el diagrama por la letra "P", aquéllas desde las que sólo se puede acceder a posiciones ganadoras y como posiciones ganadoras aquellas desde las que se puede acceder a alguna posición perdedora. Así, retrocediendo, se van obteniendo las posiciones perdedoras y ganadoras.

3	G	G	G	G	G
2	P	G	P	G	P
1	G	G	G	G	G
0		G	P	G	P
	0	1	2	3	4

Figura 1

Son muchas las posibilidades didácticas de este juego modificando los datos y generalizando el procedimiento de solución a otros problemas. Por ejemplo, a partir de la representación anterior se puede plantear un juego moviendo fichas sobre un tablero cuadriculado desde unas posiciones iniciales y dirigiéndose hacia una meta, según ciertas normas.

Una generalización clásica de "Jugando con cerillas" es el conocido "Juego de Nim" en el que los objetos se distribuyen en varios montones (Ball y Coxeter, 1974).

Algunas implicaciones en la concepción del curriculum

Este modo de aprender y de enseñar matemáticas se traduce en una serie de consecuencias que afectan a la concepción del curriculum de matemáticas. Entre ellas podríamos destacar las siguientes:

* Privilegiar las *actitudes* adecuadas para la actividad matemática (confianza en las propias capacidades de aprendizaje, gusto por afrontar retos y desafíos, originalidad, fluidez de ideas, flexibilidad de pensamiento, espíritu reflexivo y crítico, perseverancia en la búsqueda de soluciones) y los

7. La solución depende del número de cerillas que haya en cada montón. En cualquier caso uno de los jugadores lleva ventaja. Si las cerillas estuviesen distribuidas en dos montones de 4 y 3 cerillas, que notamos (4,3), el primer jugador lleva ventaja si deja siempre a su oponente en una de las posiciones siguientes: (4,2), (4,0), (2,2), (2,0) y (0,2).

procedimientos heurísticos sobre los contenidos conceptuales. Como afirma M. de Guzmán, "el saber matemático resulta ser esencialmente saber de método mucho más que saber de contenido. En matemáticas es mucho más importante familiarizarse con métodos de trabajo, con métodos de abordar diferentes problemas, que conocer muchos resultados dispersos. Existe, en realidad, una íntima conexión entre los resultados importantes y los métodos esenciales de una teoría hasta tal punto que los resultados no suelen ser sino hitos del camino que constituye el desarrollo de los métodos propios. No en vano método, *meta odon*, significó para los griegos "*según el camino*" (Guzmán, 1985. p. 32).

* **Evaluar** a los alumnos de modo distinto al habitual por dos razones importantes: la naturaleza de la tarea y el modo en que aquí la hemos planteado.

- En primer lugar *el éxito en la resolución de un problema nunca está garantizado de antemano* porque los conocimientos que hay que aplicar no son rutinarios: si los fuesen no se trataría de un problema. Sabemos por experiencia que se puede tener un día malo en el que no se llegue a ningún resultado interesante a priori, que ayude a encontrar la solución, y eso no quiere decir que hayamos perdido el tiempo o que no seamos capaces de llegar a la solución. Se trata simplemente de que *la inspiración* se puede favorecer con un trabajo consciente de familiarización con el problema activando nuestros conocimientos, poniendo en juego nuestra experiencia resolviendo otros problemas, intentando tomar consciencia de los bloqueos de todo tipo que pueden obstaculizar el camino para encontrar la solución (cfr. Guzmán, 1991); sin embargo, dar con la "idea feliz" que ilumine el problema y la vía para llegar a la solución es algo que escapa muchas veces al esfuerzo anterior (cfr. Poincaré, 1932). Además hay que contar con otro fenómeno importante en el proceso de resolución de un verdadero problema, la *incubación*: es necesario dejar un cierto tiempo para que tras el trabajo consciente de familiarización con el problema, el semiconsciente y el inconsciente puedan combinar libremente las ideas dando lugar en algunos casos a combinaciones útiles y provechosas para la resolución del problema (cfr. Poincaré, 1932 y Hadamard, 1934).

- En segundo lugar, en la resolución de un problema intervienen conocimientos de orden superior que llevan el control del proceso de resolución, denominados *metaconocimientos*, a los que resulta difícil acceder. Sus funciones son, entre otras, las siguientes: elegir los conocimientos que se van a utilizar, decidir qué estrategia seguir, así como el momento de abandonar un camino emprendido, etc (Schoenfelf, 1985). Para acceder a ellos es necesario emplear métodos refinados como la obtención y análisis de protocolos escritos o audiovisuales.

- En tercer lugar en el proceso de resolución de problemas, además de los aspectos cognitivos y metacognitivos, hay otros elementos importantes a valorar: las *actitudes* de los alumnos ante la tarea (espíritu reflexivo y crítico, fluidez de ideas, flexibilidad de pensamiento, perseverancia); los *hábitos* y la *capacidad para el trabajo en equipo*; la *capacidad de expresión, de argumentación, de comunicación oral y escrita.*

Podemos resumir dos cosas importantes de la evaluación de esta habilidad: primera, que tiene que ser **cualitativa y multidimensional**: resulta ridículo asignar un número de uno a diez a una habilidad que encierra distintas capacidades; segunda, que tiene que ser una medida **procesual**: no se puede evaluar a un alumno proponiéndole un problema en tiempo acotado o a partir de un solo problema, sino que es necesario observarle durante un tiempo más menos prolongado, para poder constatar si ha habido un progreso, esto es, si resuelve más problemas y los resuelve mejor.

Formación del profesorado para este enfoque

Este tipo de enseñanza exige una **preparación del profesor** diferente de la que se necesita para el método expositivo clásico. Requiere, como ha indicado M. de Guzmán (1985) "tratar de acercarse al desarrollo genético de las ideas matemáticas, preocuparse por la historia, por la motivación intrínseca, por los desarrollos y aplicaciones posteriores, preparar la estrategia de comunicación y participación, tratar de prever cómo se desarrolla esta participación y tener dispuestas alternativas adecuadas. Exige una preocupación individual por los alumnos para evitar que muchos queden descolgados del proceso". (p.42).

Esta imagen del profesor parece poco realista. El profesor tiene unas ideas previas sobre las matemáticas, sobre su enseñanza/aprendizaje, sobre los alumnos, sobre el curriculum, sobre la programación, que son difíciles de cambiar, y necesita ayuda para reflexionar sobre su propia práctica docente, para cambiar sus ideas sobre la educación matemática y para modificar sus modos de intervención en el aula. En algunos países se han diseñado estrategias de formación permanente de profesores de matemáticas en ejercicio a fin de prepararles para este enfoque (Simon y Schifter, 1991). Aquí sólo nos referiremos a un aspecto, la necesidad de trabajar en grupo para llevar estas ideas a la práctica, ya sea creando un seminario permanente con este objetivo u organizando clubs matemáticos con alumnos que se presten voluntariamente a esta actividad.

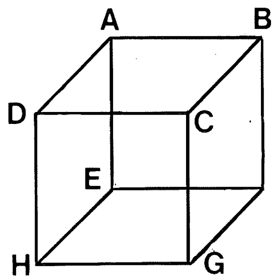
Los **grupos de trabajo** de profesores, centrados en la resolución de problemas (cfr. Guzmán, 1987) pueden organizarse del siguiente modo: se proponen problemas que no exijan conocimientos superiores, pero que demanden un cierto grado de concentración y de trabajo creador y de forma que los participantes puedan utilizar en sus clases la mayor parte de las actividades propuestas, sin que haga falta modificarlas sustancialmente. Se resuelve el problema individualmente o en grupo realizando un protocolo, esto es, registrando todo aquello que se va pensando y sintiendo a lo largo del proceso de resolución, por ejemplo, las ideas que se consideran importantes, lo que intenta hacer, el parecer sobre todo ello, los sentimientos de frustación, de entusiasmo, etc. Una vez resuelto el problema, se hace una exposición sobre este proceso, con ayuda del protocolo, y se discute sobre las implicaciones didácticas: ¿este problema se puede utilizar en clase? ¿en qué momento del programa se puede proponer? ¿qué puntos necesitan más atención? ¿cómo se puede intentar abordarlos? ¿qué generalizaciones se pueden hacer? Estas sesiones de trabajo se pueden tener también con alumnos, fuera del horario escolar, en el marco de un Club matemático, en cuyo caso cambian algunos de los objetivos anteriores.

Los **Clubs matemáticos** con alumnos son actividades fuera del aula que pueden plantearse con distintas finalidades, entre ellas brindar a los estudiantes la educación matemática que no les proporciona la enseñanza formal de esta disciplina, por ejemplo, tener la experiencia de resolver verdaderos problemas: dar vueltas a una cuestión durante varias semanas o durantes meses, tomar consciencia lentamente de la naturaleza de las dificultades de resolución, llegar a un resultado después de un largo proceso gracias a una iluminación que desvela la solución. Se trata de una aventura que queda en la memoria de todos los que la han vivido, y del profesor que la da a gustar a sus alumnos.

Pero otra finalidad de los Clubs matemáticos es que el profesor se forme en el enfoque de la matemática a través de la resolución de problemas, ejerciendo su actividad con un grupo de alumnos que se prestan a ello voluntariamente, sin las limitaciones que impone el sistema escolar. De esta forma el profesor planteará sesiones que se desarrollarán según la dinámica antes expuesta y aprenderá el difícil papel de moderador y guía de la actividad de los alumnos. En una experiencia de este tipo que yo misma conduje durante varios años y que he descrito en otros lugares (Callejo, 1988, 1990, 1991), tuve la oportunidad de disfrutar, junto con estudiantes de Bachillerato de diversos Institutos y Colegios de Madrid, de momentos especialmente interesantes propiciados por el esfuerzo constante, el azar o el trabajo en grupo. Uno de los momentos estelares fue la resolución del siguiente problema, propuesto en una edición de la "*Olimpiada Matemática Belga*", que lo conocíamos como "*El problema de la mosca*".

El problema de la mosca. Una mosca se pasea por las aristas de un cubo ABCDEFGH. Cuando se encuentra en un vértice prosigue su camino hasta el vértice de una cualquiera de las aristas que parten del vértice en que está. Por tanto la proba-

bilidad de que elija una arista determinada es 1/3. Los vértices F y G están fumigados de un insecticida mortal. Si la mosca parte del vértice A, cuál es la probabilidad.
- de que llegue al vértice F
- de que llegue al vértice G
- de que no pase nunca ni por F ni por G.



El proceso de investigación duró un año (Callejo, 1988). Las conjeturas acerca de la posibilidad de que la mosca muriese eran diversas: algunos estudiantes decían que seguro que la mosca moriría; otros mantenían que no, porque la mosca se puede pasear indefinidamente por vértices que no están envenenados; un último grupo creía que la probabilidad de que la mosca muriera era un número próximo a 1 porque era casi seguro que moriría. En el proceso de comunicación y discusión de estas ideas algunos estudiantes cambiaron de postura y aceptaron los argumentos de sus compañeros como más fiables. Para justificar las conjeturas vislumbraron tres vías: resolver primero un problema más sencillo, considerar por ejemplo un tetraedro con un solo vértice envenenado y luego generalizar el resultado como si la probabilidad de llegar a F y a G fuese la misma, idea que posteriormente se reveló falsa; plantear un sistema de ecuaciones, estrategia que abandonaron pronto y, por último, sumar la serie de término general:

a_n-" probabilidad de que la mosca no llegue ni a F ni a G después de n aristas recorridas".

Esta última idea fue la que más prosperó. Los estudiantes utilizaron diversas astucias para calcular esta suma. La más ingeniosa estaba inspirada en "El juego de la vida" de Martin Gardner. Al final la solución se reveló más fácil de lo que los participantes habían pensado: bastaba con plantear un sistema de ecuaciones lineales que consideraba la simetría de los vértices no envenenados en relación a F y a G y que relacionaba la probabilidad de ir de un vértice a otro en un número indeterminado de aristas recorridas. La probabilidad de llegar a F es 4/7, de llegar a G 3/7, y de no pasar nunca ni por F ni por G es cero.

Conclusión

Comenzamos esta exposición haciéndonos tres preguntas acerca del enfoque de las matemáticas desde la corriente denominada "resolución de problemas": *¿Se trata de continuar haciendo lo mismo de siempre pero llamándole de otra manera?; ¿O se trata quizá de una moda pasajera que a España nos llega con un poco de retraso y por ello aparace en los DCB de matemáticas de la Reforma actual?; ¿O, por el contrario, se trata verdaderamente de una renovación importante de la educación matemática que supondrá cambios sustanciales en curriculum y en el papel que el profesor debe jugar en la formación matemática de sus alumnos?* Tal como la hemos descrito, esta forma de concebir la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, supone un cambio importante respecto a una práctica educativa basada en el "saber" más que en el "saber-hacer". No estamos pues ante una moda pasajera sino ante una corriente que pone el acento en un aspecto nuclear de la matemática, la resolución de verdaderos problemas. Esto puede significar una renovación importante de la educación matemática en lo que concierne a los tipos de contenidos a privilegiar, a la metodología a adoptar, al modo de evaluar y a la elección de materiales curriculares a utilizar tal como ha quedado expuesto. Pero este enfoque va más allá del curriculum de matemáticas, se trata de un modo de entender la educación en las etapas iniciales, (Primaria y Secundaria), que supera la disciplina concreta, las matemáticas. Un tipo de educación basada en el trabajo en equipo, en la comunicación, en la libertad para expresar ideas y defenderlas en el respeto hacia las ideas de los otros, en el interés por la materia y en la motivación intrínseca. **Ponerlo en práctica no es fácil, pero merece la pena intentarlo**.

El testimonio escrito de un profesora con quien he compartido un grupo de trabajo centrado en la resolución de problemas durante el curso 90-91 es bastante expresivo de lo que puede significar este planteamiento en la renovación del profesor y de su práctica docente.

"Realizar este tipo de trabajo me ha servido para reflexionar sobre mi propia práctica y sistematizarla. (...). He aprendido a observar y a tomar nota de lo que sucedía en clase, igual que mis alumnos han aprendio a anotar lo que pasaba en la resolución de problemas. También he aprendido a ser un mero conductor de la actividad del alumno, una vez que le ponía en situación de conflicto. He podido comprobar que alumnos que tienen una dificultad enorme en clase se integran y trabajan buscando soluciones, lo cual no suelen hacer en una clase tradicional. En definitiva, creo que los alumnos y yo nos hemos vuelto un poco más reflexivos".

María Luz Callejo de la Vega
Dep. de Didáctica de las Matemáticas
I.E.P.S. - Madrid

Bibliografía

ADDA, J. (1985). Pragmatique et questionnements scolaires en mathématiques, **Discours, Essays in Educational Pragmatics-1**, M. Spoeldes, F. Van Beisen, F. Lowenthal y F. Vandamme (Eds.), ACCO, Lovaina, 223-230.

BALL, W.W. y COXETER, H.S. (1874). **Mathematical Recreations and Essays**. Univ. de Toronto Press, Toronto.

BONO, E. de (1986). **El pensamiento lateral: Manual de creatividad**. Paidós, Barcelona.

CALLEJO, M.L. (1988). Un club matemático. **Cuadernos de Pedagogía** nº 159, 50-52.

CALLEJO, M.L. (1990). **La resolución de problemas en un Club matemático**. Apuntes IEPS nº 53, Narcea, Madrid.

CALLEJO, M.L. (1991). **Les représentations graphiques dans la résolution de problémes de type olympiades: Une expérience de Club mathématique**. Tesis doctoral. Universidad París-VII.

COCKCROFT, W.H. (1982). **Mathematics Counts**. HMSO, Londres.

GAULIN, C. (1982). La résolution de problémes: le mot d´ordre pour les annèes 1980-1990. Quoi en penser?, **Actes du Colloque Mathématique: La didactique au primaire**, Dep. des Sciences de l´education. Universidad del Quebec en Chicontimi.

GUZMÁN, M. de (1985). Enfoque heurístico de la enseñanza matemática. **Aspectos didácticos de matemáticas-1**, Bachillerato. Aula Abierta nº 57. ICE de la Universidad de Zaragoza, 31-46.

GUZMÁN, M. de (1987). Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. **Educación abierta** nº 71. ICE de la Universidad de Zaragoza.

GUZMÁN, M. de (1991). **Para pensar mejor**. Labor. Barcelona.

HADAMARD, J. (1934). **The Psychology of Invention in the Mathematical Field**. Dover, Nueva York.

KILPATRICK, J. (1981). Stop the Bandwagon, I Want off. **Arithmetic Teacher**, vol. 28, p. 2.

LAKATOS, I. (1978). **Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático**. Alianza, Madrid.

MASON, J. BURTON, L. y STACEY, K. (1988). **Pensar matemáticamente**. Labor, Barcelona.

MEC, (1989). **Diseño Curricular Base, Educación Secundaria Obligatoria**, MEC, Madrid.

NCTM (1980). **An Agenda for Action**. NCTM. Reston, Virginia.

NCTM (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. NCTM. Reston, Virginia.

POINCARE, H. (1932). **La Science et l'Hypothèse**. Flammarion, París.

POLYA, G. (1945). **How to Solve It**. Princenton University Press. Princenton.

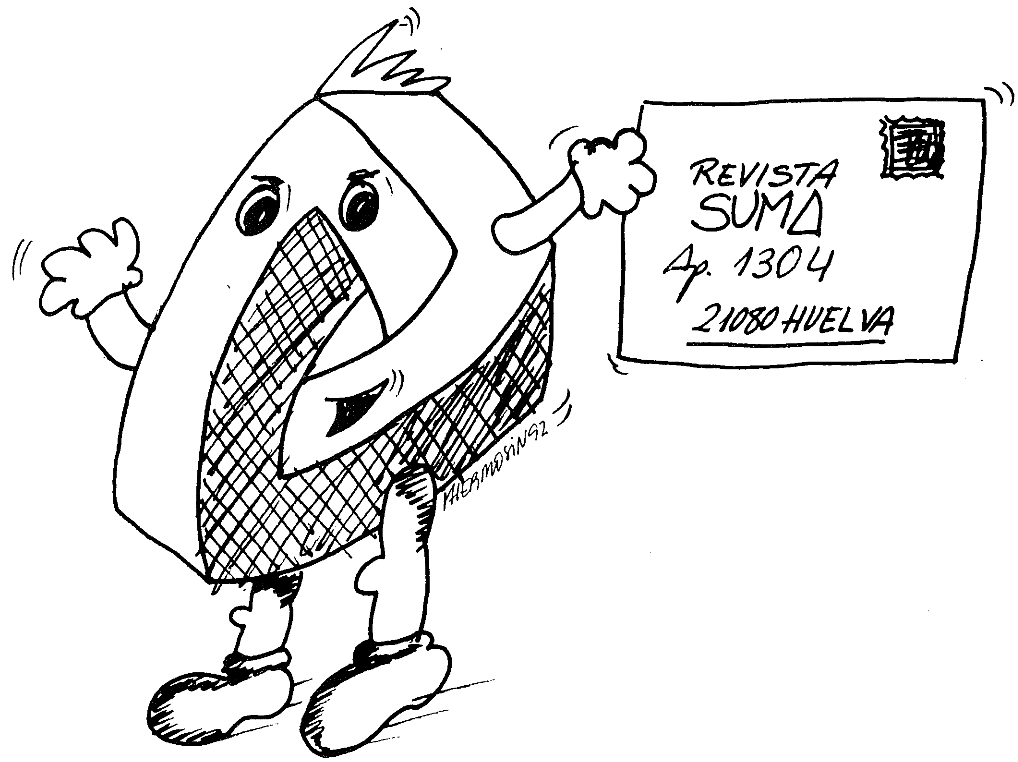
POLYA, G. (1967). **La découverte des mathématiques**. Dunod. París.

SCHOENFELD, A. (1985). **Mathematical Problem Solving**. Academic Press. Orlando.

SERRANO, T. (1989). **¿Qué es una enseñanza constructivista?** Documentos IEPS. Monografías nº 9, IEPS, Madrid.

SIMON, M.A. y SCHIFTER, D. (1991). Towards a constructivist Perspective: An Intervention Study of Mathematics Teacher Development. **Educational Studies in Mathematics**, 22: 309-331.

WHEATLEY, G.H. (1991). Constructivist Perspectives on Science and Mathematics Learning. **Science education**, 75 (1), 9-21.



ACTITUD, APTITUD Y RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO EN PRIMERO DE MAGISTERIO

Andrés Nortes Checa
Rosa Martínez Artero

Este trabajo de investigación ha sido realizado en la Escuela Universitaria de Magisterio de Murcia, en la asignatura de Matemáticas 1º. A los alumnos de tres grupos de diferentes características -uno de la especialidad de Filología, otro del resto de especialidades y un tercero de todas las especialidades- se les aplicaron una serie de pruebas con la finalidad de medir variables aptitudinales, actitudinales y de rendimiento en Matemáticas.

Mediante tests estandarizados se obtuvo la Aptitud Verbal, Numérica, Razonamiento y Factor de Inteligencia de los alumnos, así como su Actitud, su Preferencia e Importancia por las Matemáticas. El rendimiento en Matemáticas se obtuvo a través de las calificaciones de Junio.

En este trabajo se analizan si existen diferencias significativas por sexo, edad, comarca de residencia, tipo de estudios cursados y centro donde lo cursaron.

Para la obtención de los resultados se ha utilizado el paquete estadístico Systat, un procesador de textos y un ordenador compatible.

Los resultados obtenidos demuestran en general que no existen diferencias significativas por edad ni por tipo de centro y que si existen diferencias significativas en Aptitud Numérica a favor de hombres y en estudios cursados a favor de los que hicieron Ciencias.

Método

1. Sujetos

Alumnos de Primero de Magisterio de la Escuela Universitaria de Murcia en la asignatura de Matemáticas en un total de 150 pertenecientes a tres grupos de alumnos de características distintas, dos de ellos de la Escuela de Murcia y otro al Aula de Cartagena.

2. Procedimiento

A los alumnos se les pasó una encuesta solicitándoles respuestas a cuestiones generales que sirvieran posteriormente como variables de corte, tales como: sexo, edad, comarca de residencia, estudios realizados y centro en donde los cursaron.

Se les aplicó una serie de pruebas para cuantificar su Aptitud Numérica, su Aptitud Verbal, su Razonamiento y su Inteligencia; en concreto se aplicó el factor "G" de Cattell (Escala 3A), el Test TEA y el Test de Monedas de Seisdedos. También se les aplicó la prueba de Actitud hacia las Matemáticas de Gairín y su Preferencia e Importancia dada a las Matemáticas puntuadas por los alumnos estas últimas de 1 a 5. Completó el conjunto de variables la calificación otorgada en Matemáticas en la convocatoria ordinaria de Junio.

Una vez clasificados los datos por las variables de corte, se determinan las medias aritméticas en cada caso, ofreciendo los siguientes resultados

3. Resultados

Tabla 1. MEDIAS

		SEXO		EDAD		RESIDENCIA		ESTUDIOS		CENTRO	
		Hombre (24%)	Mujer (76%)	< 20 años (60.67%)	≥ 20 años (39.33%)	Murcia (34.29%)	Resto (67.51%)	Ciencias (38.13%)	No Ciencias (61.87%)	Público (74.26%)	Privado (20.74%)
V.APTITUDINALES (P.D.)	Factor G	23.600	21.284	22.070	21.549	21.111	22.232	22.960	20.974	21.639	22.962
	Monedas	22.167	17.229	18.841	17.906	15.979	19.905	22.094	16.104	18.119	20.731
	Tea Verbal	25.667	23.588	24.069	24.235	24.186	24.482	24.434	24.297	24.630	23.304
	Tea Razon.	18.028	17.794	18.069	17.490	16.744	18.424	18.962	17.122	17.510	19.348
	Tea Numér.	17.250	13.363	13.862	15.255	13.558	14.647	15.585	13.297	14.360	13.739
	Tea Total	61.222	54.549	55.655	57.373	54.488	57.435	58.981	54.581	56.200	56.826
V. APTITUDINALES (C.I.)	Factor G	102.400	93.137	96.279	94.196	92.444	96.927	99.840	91.895	94.557	99.846
	Monedas	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Tea Verbal	104.861	100.020	100.621	102.412	101.535	102.071	101.340	102.176	102.000	99.435
	Tea Razon.	102.889	102.010	103.023	100.902	98.279	104.294	106.321	99.568	101.010	107.652
	Tea Numér.	108.333	93.010	95.230	100.667	94.023	98.318	101.906	93.081	97.190	94.696
	Tea Total	107.139	98.333	100.000	101.706	97.698	102.424	104.019	98.500	100.590	101.130
V. ACTITUDIN.	Actitud	8.448	5.327	6.439	5.314	4.615	6.697	11.000	3.114	6.515	4.815
	Preferencia	3.833	2.917	3.200	2.981	2.745	3.308	4.135	2.494	3.190	2.964
	Importancia	4.133	3.533	3.714	3.585	3.542	3.730	4.137	3.365	3.705	3.667
V. REN	Calif. Junio	4.750	4.477	4.966	3.886	4.811	4.467	6.075	3.646	4.948	3.389

Tabla 2. ANÁLISIS ESTADÍSTICO

		SEXO		EDAD		RESIDENCIA		ESTUDIOS		CENTRO	
		Probabilidad	Diferencia	Probabilidad	Diferencia	Probabilidad	Diferencia	Probabilidad	Diferencia	Probabilidad	Diferencia
V. APTITUDINALES (C.I.)	Factor G	0.226	No Sig.	0.758	No Sig.	0.210	No Sig.	0.185	No Sig.	0.291	No Sig.
	Monedas	0.003	Muy Sig.(+H)	0.447	No Sig.	0.002	Muy Sig.(+R)	0.000	Muy Sig.(+C)	0.337	No Sig.
	Tea Verbal	0.037	Sig. (+H)	0.605	No Sig.	0.798	No Sig.	0.919	No Sig.	0.327	No Sig.
	Tea Razon.	0.944	No Sig.	0.979	No Sig.	0.031	Sig.(+R)	0.043	Sig.(+C)	0.274	No Sig.
	Tea Numér.	0.000	Muy Sig.(+H)	0.204	No Sig.	0.053	No Sig.	0.002	Muy Sig.(+C)	0.274	No Sig.
	Tea Total	0.011	Sig. (+H)	0.569	No Sig.	0.162	No Sig.	0.054	No Sig.	0.917	No Sig.
V. ACTITUDIN.	Actitud	0.116	No Sig.	0.719	No Sig.	0.020	Sig.(+R)	0.000	Muy Sig.(+C)	0.215	No Sig.
	Preferencia	0.009	Muy Sig.(+H)	0.908	No Sig.	0.015	Sig.(+R)	0.000	Muy Sig.(+C)	0.336	No Sig.
	Importancia	0.168	No Sig.	0.882	No Sig.	0.135	No Sig.	0.007	Muy Sig.(+C)	0.886	No Sig.
V. REN	Calif. Junio	0.300	No Sig.	0.148	No Sig.	0.799	No Sig.	0.000	Muy Sig.(+C)	0.007	Muy Sig.(+Pú)

4. Análisis de los resultados

4.1. Porcentajes y medias

Por **sexo**, las mujeres triplican el número de hombres. Por **edad**, se han clasificado en dos grupos, los de menos de 20 años y los de 20 o más años, representando el 60.67% los de 18-19 años. Por **comarca** de residencia se han clasificado a los sujetos encuestados teniendo en cuenta la división de la Región de Murcia en siete comarcas para agruparlos posteriormente en la Comarca Vega Media (Murcia) y Resto, significando que sólo el 34,29% pertenecen a la Vega Media (incluye Murcia capital). Por **estudios** realizados, se clasificaron en Ciencias y No Ciencias (Letra, Mixto, F.P. y Mayores de 25 años), siendo el 38,13% alumnos de Ciencias. Por **centro**, tan solo el 20,74% han realizado la totalidad o la mayor parte de sus estudios de BUP/COU en Centro Privado.

Por **sexo**, observamos tanto en las puntuaciones directas como en el C.I. que en todas las variables aptitudinales obtienen mejores resultados los hombres, alcanzando la mayor diferencia en Aptitud Numérica 108.333 (Hombres) por 93.010 (Mujeres), seguida de Factor G con una diferencia de 9 puntos, estando prácticamente igualadas las correspondientes a Razonamiento. En cuanto al grupo de variables actitudinales se observa una actitud, preferencia e importancia superior en hombres que en mujeres. Las calificaciones obtenidas en Junio tanto por hombres como por mujeres son bajas, situándose sus medias en 4.750 y 4.477 respectivamente.

Por **edad**, se observan menores diferencias que en el caso anterior, siendo unas veces favorables a los más jóvenes (Factor G, Monedas y Razonamiento) y otras favorables a los mayores (Verbal, Numérico y Total). Las variables actitudinales de los menores de 20 años alcanzan mejores medias que las de 20 años o más aunque estas diferencias son exiguas. Sin embargo, la calificación en Matemáticas en Junio de los menores de 20 años roza la media de cinco (4.966), mientras que la de los de 20 años o más no llega a cuatro (3.886).

Por **comarca** de residencia, en todas las variables aptitudinales se obtienen medias superiores para los residentes en comarca distinta a la Vega Media de Murcia, así como en las variables actitudinales. Sin embargo, la media de las calificaciones de Junio de los residentes en Murcia (Vega Media) es superior a los que residen en el resto de comarcas.

Por **estudios** cursados, se ha clasificado a los alumnos en dos bloques, los que han cursado Ciencias y los que han cursado No Ciencias (Letras, Mixto, F.P. o Mayores de 25 años). Al tratarse de una asignatura básica de Ciencias como son las Matemáticas, se comprueba que en todas las variables tanto aptitudinales como actitudinales y de rendimiento la media obtenida por los alumnos de Ciencias es superior a la de aquellos que no estudiaron Ciencias.

Por tipo de **centro**, se observan unos resultados medios en variables aptitudinales que en unos casos favorece a los que estudiaron en Centros Públicos (Verbal, Numérico) y en otros a los que estudiaron en Centros Privados (Factor G, Razonamiento, Total).

4.2. Análisis estadístico

Consideradas las variables de corte (sexo, edad, comarca, estudios y centro) y aplicando una "t" de Student para ver si existen diferencias significativas entre las medias, se observa que en **sexo** hay una diferencia significativa favorable a Hombres en Monedas y Numérico, es decir en Aptitud Numérica así como en Preferencia por las Matemáticas, no denotándose diferencias en el resto de las variables o siendo estas diferencias poco notables.

Por **edad**, no encontramos ninguna diferencia significativa en las diez variables estudiadas en los bloques aptitudinal, actitudinal y de rendimiento.

Por **comarca**, encontramos una diferencia muy significativa en Monedas y sólo significativa en Razonamiento favorable a los alumnos residentes en comarcas distintas a la Vega Media de Murcia así como en Actitud y Preferencia en Matemáticas.

Por **estudios**, aparecen diferencias significativas o muy significativas en Aptitud Numérica y Razonamiento favorable a los que cursaron Ciencias así como en todas las variables actitudinales y en la variable de rendimiento en Matemáticas.

Por último, en tipo de **centro** donde cursaron los estudios, tan solo hay diferencias muy significativas en el rendimiento en Matemáticas favorable a los que estudiaron en Centros Públicos.

5. Conclusiones

- De cada cuatro alumnos encuestados tres son mujeres.
- Sólo el 60,67% de los alumnos encuestados ajustan su edad al curso que estudian.
- Más del 65% de alumnos encuestados residen en comarca distinta a la de Murcia capital.
- De cada cinco alumnos cuatro estudiaron en centro público.
- Los hombres obtienen mejores resultados que las mujeres.
- Los hombres otienen un C.I. superior a 100 en todas las variables aptitudinales.
- Por **edad** los menores de 20 años tienen una Actitud y Preferencia más alta, dando más importancia a las Matemáticas.
- Los menores de 20 años tienen un Razonamiento superior .
- Los de 20 años o más tienen mayor Aptitud Verbal.
- Los menores de 20 años, que corresponden estar por edad en 1º, obtienen mejores resultados en Matemáticas.
- Los residentes en comarcas distintas a la de Murcia obtienen mejores resultados en todas las variables aptitudinales.
- Los residentes fuera de Murcia capital prefieren más las Matemáticas que los de la comarca Vega Media.
- La Actitud hacia las Matemáticas de los alumnos residentes en la Vega Media (incluye Murcia capital) es inferior que en el resto de la Región Murciana.
- Las calificaciones en Matemáticas son superiores en los alumnos de la Vega Media que los que residen en el resto.
- Los alumnos que estudiaron Ciencias tienen mayores puntuaciones en Aptitud Numérica, Razonamiento y Factor G.
- Los alumnos de No Ciencias obtienen mejores resultados en Aptitud Verbal.
- La actitud hacia las matemáticas en los que estudiaron Ciencias supera en 9 puntos a los que estudiaron No Ciencias.
- Los de Ciencias en Preferencia e Importancia

obtienen medias de 4.135 y 4.137 (puntuaciones de 1 a 5).
- La media de las calificaciones en Matemáticas de los de Ciencias es de 6.075 y de los de No Ciencias de 3.646.
- La Aptitud Verbal y Numérica de los alumnos que estudiaron en centro público es superior a la de los que estudiaron en centro privado.
- Los alumnos que estudiaron en centro privado tienen un C.I. más alto que los que estudiaron en centro público.
- El Razonamiento de los alumnos que estudiaron en centro privado es superior al de los alumnos que lo hicieron en centro público.
- Hay diferencias muy significativas a favor de hombres en Aptitud Numérica y Preferencia por las Matemáticas.
- No hay diferencias significativas por Edad en ninguna variable estudiada.
- Hay diferencias significativas por Comarcas en Actitud y Preferencia a favor de Resto de comarcas.
- Hay diferencias significativas en Razonamiento a favor de los residentes en comarcas distintas a la Vega Media.
- No hay diferencias significativas entre alumnos que cursaron Ciencias/No Ciencias en Inteligencia y en Aptitud Verbal pero sí las hay en Aptitud Numérica y Razonamiento a favor de los primeros.
- Hay diferencias muy significativas en Actitud, Preferencia, Importancia y Calificación de Junio favorable a los alumnos de Ciencias.
- No son significativas las diferencias entre alumnos que estudiaron en centros públicos y privados en ninguna variable aptitudinal y actitudinal.
- Son muy significativas las diferencias de los resultados en Matemáticas a favor de los alumnos de centro público.

En definitiva, podemos resumir diciendo que considerando dos bloques de Edad las diferencias entre ellos no son significativas en ninguna de las diez variables estudiadas y tampoco afecta el tipo de centro donde estudiaron, fuera público o privado. Sin embargo existen diferencias significativas por sexo, estudios y comarca en alguna de las variables a favor de hombres, estudios de ciencias y comarcas que no incluyen a Murcia capital, respectivamente.

Andrés Nortes Checa
Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Escuela Universitaria de Magisterio de Murcia.
Rosa Martínez Artero
Departamento de Teoría de la Educación de la Escuela Universitaria de Magisterio de Murcia.

Bibliografía

ARNAL, J. y ARNAL, N. (1987): **Estudio de los resultados cuantitativos de una encuesta**. (Barcelona: PPU)

ATO, M., LOPEZ PINA, J.A. y SERRANO, J.M. (1981): **Fundamentos de Estadística Inferencial**. (Murcia: Yerba)

CATTELL, R. y CATTELL, A. (1986): **Test de factor g**. Escalas 2 y 3. (Madrid: TEA)

GARRET, H. (1974): **Estadística en Psicología y Educación**. (Argentina: Paidós)

MORRISON, D.F. (1984): **Multivariante Statistical Methods**. (Singapore: Mc Graw-Hill)

NORTES CHECA, A. (1983): **Matemáticas para Magisterio**. (Murcia: Tema)

NORTES CHECA, A. (1987): **Encuestas y precios**. (Madrid: Síntesis)

NORTES CHECA, A. (1991): **Estadística teórica y aplicada**. (Barcelona: PPU-DM)

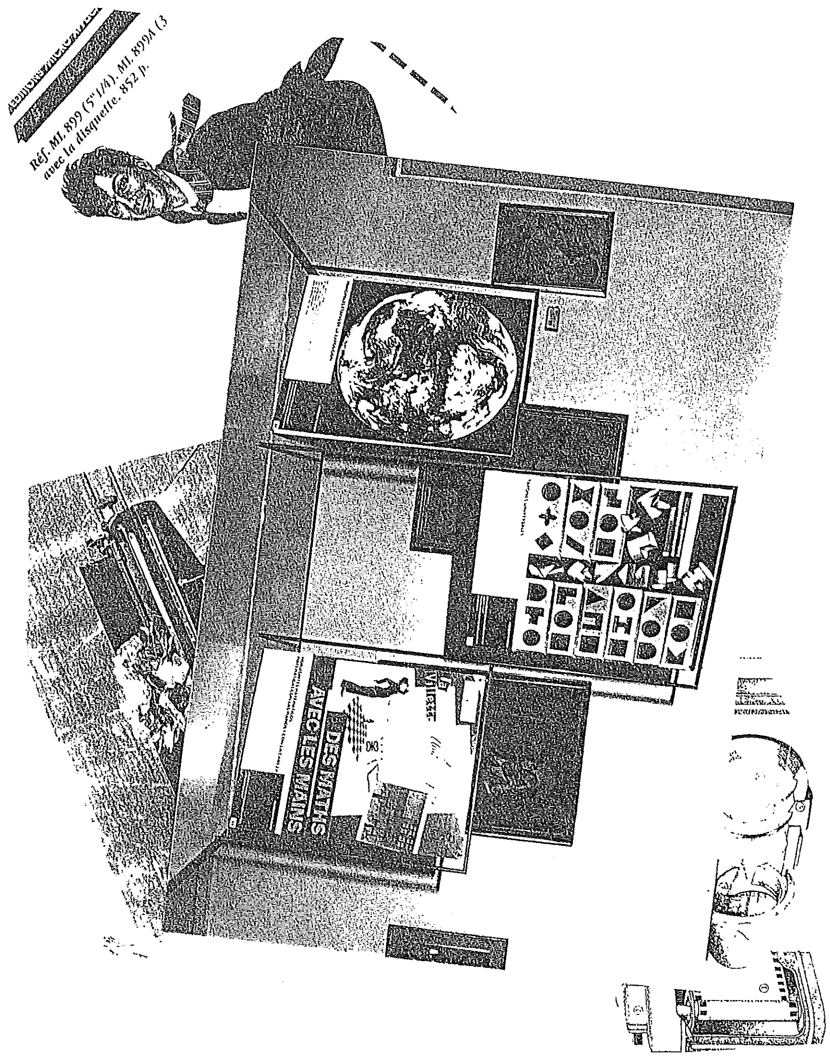
PEÑA, D. (1987): **Estadística: Modelos y Métodos. 2 Modelos Lineales y Series Temporales**. (Madrid: Alianza Universidad)

SEISDEDOS, N. (1980): **Monedas. Aptitudes Numéricas**. (Madrid: TEA)

TEA (1975): **Tests de Aptitudes Escolares**. Nivel 3. (Madrid: TEA)

TUKEY, J.W. (1987): **Exploratory Data Analysis**. (Reading, MA: Addison-Wesley)

WILKINSON, L. (1987): **SYSTAT: The System for Statistics** (Vers. 4.0.). (Evanston, IL: SYSTAT, Inc.).



IDEAS PARA LA CLASE

DIAGNÓSTICO: LAS ESTRUCTURAS CONCEPTUALES

José Antonio Mora y José Ángel Bolea

Cuando se trabaja en clase un tema matemático, aparecen conexiones con otros conocimientos, cuyo dominio es necesario para continuar el avance en la programación prevista por el profesor. En este artículo, relatamos una experiencia de clase que nos llevó a reflexionar sobre el estado de las estructuras conceptuales de los estudiantes.

Antecedentes

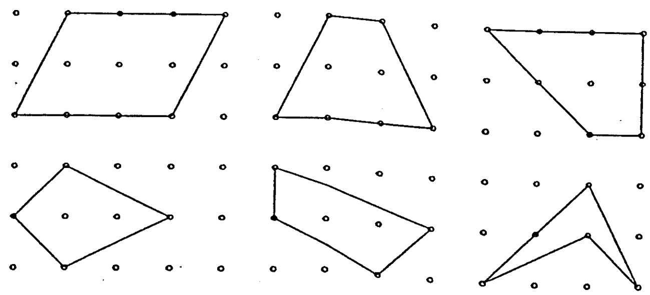
Curso de 1º en un Instituto de Bachillerato. Los alumnos trabajan habitualmente en grupos de cuatro-cinco.

Están estudiando la Geometría a través de un tema globalizador como el de los mosaicos. El proceso seguido hasta ahora es:

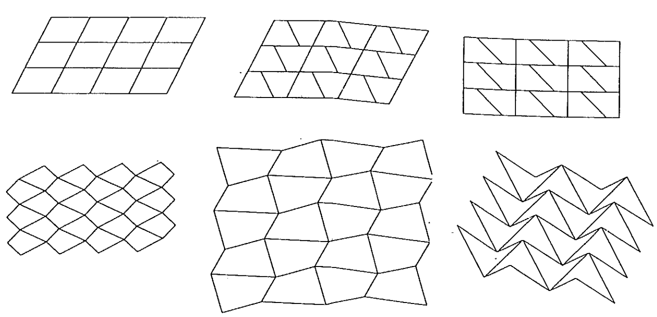
Construir mosaicos con baldosas cuyas formas resulten "familiares" a los estudiantes (ladrillos, letras del abecedario, cuadrados de dos tamaños distintos).

Han estudiado con qué triangulos pueden formar un mosaico y han llegado a la conclusión de que con cualquier triángulo se puede conseguir.

La clase anterior se dedicó a la construcción de mosaicos con una serie de cuadriláteros propuestos para iniciar la tarea:



Que llevó a soluciones como las siguientes:



Esta sesión se dedica a la puesta en común del trabajo realizado en la clase anterior, en la que ya se avanzó la cuestión de averiguar qué cuadriláteros servirán como baldosa para formar mosaico.

Está previsto continuar el trabajo con la obtención de los mosaicos regulares, los semirregulares y algunos uniformes e introducir durante el proceso conceptos geométricos (ángulos, polígonos, movimientos, etc.), a la vez que aparecen otros numéricos, y algebráicos.

A la clase asiste una vez por semana un observador. Su trabajo consiste en ir tomando nota del trabajo de los estudiantes para comentarlo después con el profesor. Como hoy se va a realizar una puesta en común, se limitará a tomar nota de las intervenciones de los estudiantes y del profesor.

En el siguiente relato, ***reproducimos en negrita*** los diálogos que han tenido lugar. En texto normal, se intercalan las reflexiones del profesor y los comentarios sobre el ambiente de la clase.

La clase

Profesor: Ya obtuvimos mosaicos con algunos cuadriláteros, ahora se plantea una cuestión más general: ¿Con qué cuadriláteros podremos formar mosaico?

El profesor ha preparado previamente la clase, ha previsto varias posibles respuestas y ha diseñado su trabajo en función de ellas. Sin embargo, un alumno:

Estudiante: Se puede formar mosaico con los que tengan al menos dos lados iguales.

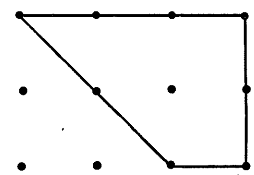
Esto no estaba en el guión pero podemos entrar a ver por dónde salimos.

P: ¿Todos los cuadriláteros del dibujo tienen dos lados iguales?

E: En el primero, los lados opuestos son iguales. En el segundo los dos lados inclinados son iguales. En el tercero el lado de arriba y el inclinado...

Podríamos aprovechar para revisar el teorema de Pitágoras. Es un buen momento para sacarlo a relucir, seguro que no nos llevará demasiado tiempo.

P: ¿Seguro? ¿Cuánto miden los lados?

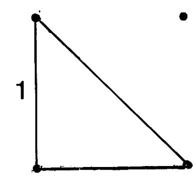


E: 1, 2, 3 y .... (silencio)

P: ¿Cómo podemos saber lo que mide el que falta?

(Más silencio). Esto no sólo se sale del guión de la clase, sino del plan de trabajo marcado con anterioridad.

Parece que Pitágoras sólo está en la mente del profesor. Habría que proporcionarles una pequeña ayuda. Dibuja en la trama el triángulo:



P: ¿Cuánto mide el lado que falta?

E: 1.5, 1.25, 2, otras

¿Qué se puede hacer en un caso como éste, para que entre Pitágoras en la escena de la clase sin que sea el profesor el que lo traiga a empujones? Volvemos a empezar desde más atrás.

P: ¿Cómo es el triángulo dibujado?

E: Es un triángulo rectángulo.

P: ¿Hay alguna relación entre sus lados?

E: Es la mitad de un rectángulo.

E': No digas tonterías... (risas)

E'': Los lados se llaman catetos y hipotenusa.

P: ¿Hay alguna relación entre los catetos y la hipotenusa?

E: (después de una pausa) El teorema de Pitágoras.

P: ¿A cuántos les suena eso del "Teorema de Pitágoras"?

(Todos los estudiantes, sin excepción, levantan la mano)

Aquí está pasando algo, el problema inicial con cuadriláteros y mosaicos se ha arrinconado. Lo que importa es ahondar en las ideas de los estudiantes: en las matemáticas que recuerdan y en cómo hacen un uso efectivo de ellas.

P: Rubén (es el alumno que ha mencionado a Pitágoras), ¿te acuerdas de lo que dice el teorema de Pitágoras?

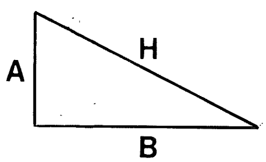
Rubén: Si, era algo de matemáticas..., pero nada.

P: ¿Alguien se acuerda?

E: Algo de "a" elevado al cuadrado y "c" elevado al cuadrado.

E': La hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

El profesor dibuja en la pizarra



e incluye algún elemento más de confusión:

P: Con lo que has dicho, ¿cómo lo puedo escribir, $h = a^2 + b^2$ ó $h = (a+b)^2$?

Varios alumnos: Es lo mismo.

P: ¿Son iguales $3^2 + 4^2$ y $(3+4)^2$?

E: (Realizan cálculos y obtienen 25 y 49). No son iguales. (Se quedan con la primera).

Se podría entrar en este momento en la justificación geométrica de que $a^2 + b^2$ no es igual que $(a+b)^2$ pero por ahora ya hay demasiadas puertas abiertas y ninguna cerrada.

E': Yo creo que es $h = \sqrt{a+b}$

Durante este tiempo, un alumno ha sacado un material de Lengua que contiene muestras de textos e incluye un ejemplo de texto matemático en el que se habla de Pitágoras y de su teorema. Hasta ahora le había hecho guardarlo, cree que éste puede ser el momento apropiado, le pide que lo lea al resto de la clase.

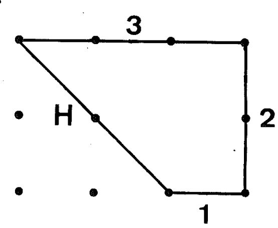
E: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

A la luz del texto se corrigen los errores en las expresiones y quedan $h^2 = a + b$ y $h = \sqrt{a^2 + b^2}$

P: ¿Cuánto medirá el lado desconocido?

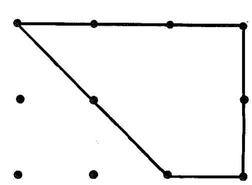
Los alumnos trabajan en grupo, el profesor pasea por la clase para ver lo que hacen y responder a sus preguntas (en la mayoría de los casos con nuevas preguntas). Está confiado en que esta tarea será sencilla, no hay más que aplicar el resultado obtenido. Dos de los grupos obtienen el resultado con facilidad. Lo que hacen otros tres grupos es revelador:

GR 1:



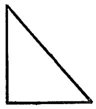
$h = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}$

GR 2:



$h = \sqrt{3^2 + 2^2}$

GR 3:



$$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 2} \qquad \sqrt{4}$$

Estudiante del grupo 3: (llama la atención del profesor) ¿Cómo se hace la raíz cuadrada?

Con lo que han hecho los estudiantes de este grupo habría para discutir durante dos semanas.

P: ¿No tenéis calculadora? Por cierto, ¿cuánto es 1^2?

E: 2

P: ¡Eso es nuevo!

E: No, no, 1

El error $1^2 = 2$ puede venir originado por dos causas: en algunos casos es un fallo de percepción, el alumno percibe la potencia como un producto. En otros, se debe a problemas de comprensión, no ha adquirido correctamente la operación de potenciación. Da la impresión de que en este caso, el error se ha debido a la primera.

También hay que resaltar que, en el momento en que han llegado a $\sqrt{4}$, han plantado la raíz y han llamado al profesor porque no se acuerdan del algoritmo para obtener ¡la raíz cuadrada de 4!

Una alumna sale a la pizarra, obtiene la medida que faltaba al cuadrilátero, toca el timbre, la clase ha terminado. Los mosaicos tendrán que esperar a la próxima clase.

Impresiones y reflexiones

El desarrollo de la clase no ha servido para avanzar el trabajo con mosaicos. En cambio, hemos sobrevolado varios temas aunque no se ha profundizado en ninguno. El torbellino de ideas surgidas y los cambios de dirección realizados en el transcurso de la sesión, dificultan la estructura de contenidos a la que estamos acostumbrados como profesores.

La actitud del profesor tampoco ha sido la usual, normalmente capta el error cometido por el primer alumno y lo resuelve con rapidez y elegancia: "*No hombre, ese lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2. Puedes calcular su longitud mediante el teorema de Pitágoras y verás que no tiene dos lados iguales, en cambio, ha sido posible formar mosaico con lo que tu conjetura ha sido refutada. A ver, que responda otro, ¿qué cuadriláteros formarán mosaico?*". De esta forma se asegura el avance en el programa pero, ¿a qué precio?

Muchas veces se tiende a pensar que la no afloración de los conflictos es señal de que no existen. Podemos tener la completa seguridad de que si esta clase no se hubiese desarrollado de la forma descrita, el conflicto seguiría latente, y es difícil que alguien haga algo por remediarlo mientras mantenga una actitud que podríamos calificar de "*supremo otorgador de respuestas*". Por otra parte, aunque tampoco estamos en condiciones de afirmar que todos los estudiantes salieron de clase dominando las ideas que allí se barajaron, sí avanzaron en su comprensión de ciertos conocimientos matemáticos y los aplicaron en contexto.

La clase ha sido muy útil para el profesor que ha podido diagnosticar qué es lo que saben esos alumnos y para qué les sirve. Y lo que saben tiene poco que ver con lo que aparecía en los listados de contenidos de matemáticas de los cursos anteriores. Los estudiantes no pueden hacer un uso efectivo del teorema de Pitágoras, de 1^2, de la raíz cuadrada de 4, del cuadrado de una suma o tantos otros conocimientos a los que en su día se prestó gran atención y, ahora que se necesitan, no hay otra forma de encontrarlos.

No basta con lamentarse de lo poco o lo mal que han aprendido las matemáticas. Si queremos que nuestros estudiantes aprendan matemáticas, es necesario profundizar en cuestiones del tipo: ¿Cómo hacer efectivos unos conocimientos que están perdidos en algún lugar de la memoria para resolver una situación concreta? ¿Cómo almacenar esos conocimientos en la memoria para que sea fácil extraerlos cuando los necesitamos? O esta pregunta más general: ¿Cómo diseñar los aprendizajes para que una persona esté capacitada para utilizar las matemáticas que aprende en la escuela?

Es muy probable que aún estemos lejos de disponer de las respuestas precisas a estas cuestiones, pero ya conocemos lo que ocurre cuando el libro o el profesor enuncian el teorema de Pitágoras, se explica en la pizarra y los estudiantes realizan unos cuantos ejercicios de práctica: no se crean las suficientes conexiones entre las ideas para que unas puedan tirar de otras, se complementen y enriquezcan su significado mutuamente. Una construcción (de conocimiento o de cualquier otro tipo) ha de tener sólidos cimientos para que no se derrumbe.

Hemos presentado estas notas a algunos compañeros (tanto de E.G.B. como de EE.MM). La reacción más común ha sido la de sorpresa. "*¡Qué nivel tan bajo tienen esos alumnos!*", "*¿De verdad son de B.U.P.?*", "*Si el teorema de Pitágoras es una de esas cosas que se trabajan bien en E.G.B.*", "*¿No será que los buenos estudiantes estaban cohibidos y no se atrevían a dar las soluciones por temor a ser calificados de empollones?*". Hemos estado en pocas clases en que los alumnos se pudieran expresar con mayor libertad, es más, se podría calificar de excelente el grado de participación de los alumnos. Por lo que se refiere a su rendimiento académico, es un grupo normal.

Estamos convencidos de que no ha sido una casualidad, ni se trata de un caso de amnesia colectiva, aunque, de haber tenido más suerte, podríamos encontrar a dos o tres estudiantes en condiciones de responder a las preguntas planteadas y quizás habrían salvado la situación. Aún así sería indicativo de un nivel de productividad tan bajo, que en cualquier empresa sería causa de un profundo replanteamiento.

José Antonio Mora y José Ángel Bolea
CEP d' Alacant
Col.lectiu Mosàic

POSIBILIDADES DIDÁCTICAS DE ... CUADRAR SIN MULTIPLICAR POR SÍ MISMO

Manolo Fernández Reyes
Ana Negrín Hernández

Aprender sin pensar es inútil.
Pensar sin aprender es peligroso.
(Coriat y otros autores)

Aburrirse y aprender es un mal mayor.
No aprender aburriéndose constituye una tragedia.
(Ana y Manolo)

Introducción

Este trabajo -tercero de una serie (1)- pretende ser una muestra de cómo, partiendo de lo puramente intuitivo, podemos abrir la puerta de la Matemática deductiva y formalizada a los alumnos de la E.S.O.

El punto de partida es una de las estrategias generales que señala el D.C.B.: la "Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjuntos de números". O, como indica el apartado dedicado al desarrollo de actitudes: "Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números o códigos numéricos".

La experiencia fue realizada con alumnos del 8º nivel de E.G.B. de los colegios "Punta del Hidalgo" y "Marina Cebrián" del municipio de La Laguna (Tenerife) y, posteriormente y con mayor amplitud de miras, con un grupo reducido de estudiantes de 1º de B.U.P.

El Problema propuesto y lo que pretendíamos

Escribimos en la pizarra la tabla que sigue y les aseguramos que podíamos continuarla hasta dónde quisieran, sin necesidad de multiplicar los números por sí mismos. Y añadimos: "No sabemos de memoria los cuadrados; empleamos una regla. ¿Quieren intentar descubrirla?"

$$
\begin{aligned}
15^2 &= 225\\
25^2 &= 625\\
35^2 &= 1225\\
45^2 &= 2025\\
55^2 &= 3025
\end{aligned}
$$

No consideramos aportuno adelantarles que nuestro objetivo era más ambicioso. Nos proponíamos:

- Que descubrieran nuestra regla u otra similar.
- Que, con poca ayuda, demostraran su validez general (para todo entero terminado en 5).
- Analizar otras posibilidades del problema (sólo con el grupo de B.U.P.).

Dos días investigando

Rápidamente se dieron cuenta de que el cuadrado de cualquier número entero que acabe en 5, termina en 25, aunque no supieron explicar bien el por qué.

Se les pidió entonces que vieran si en las otras cifras de los cuadrados de la tabla existe alguna regularidad. Trabajaron en grupos y, poco a poco, fueron surgiendo las siguientes respuestas:

A) El 6 de 625 se obtiene sumando 4 al primer 2 de 225; el 12 de 1225, añadiendo 6 al 6 de 625; el 20 es 12 + 8; ...

B) Otros lo vieron así:

$$\begin{array}{r} 25 = 5^2 \\ +\ 200 \\ \hline 225 = 15^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 = 15^2 \\ +\ 400 \\ \hline 625 = 25^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 625 = 25^2 \\ +\ 600 \\ \hline 1225 = 35^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1225 = 35^2 \\ +\ 800 \\ \hline 2025 = 45^2 \end{array}$$

C) Algunos llegaron a esto:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 15^2 & = & 225 & \text{y} & 2 & = & 1 \bullet 2 \\ 25^2 & = & 625 & \text{y} & 6 & = & 2 \bullet 3 \\ 35^2 & = & 1225 & \text{y} & 12 & = & 3 \bullet 4 \\ \dots \end{array}$$

D) Y, por último, unos pocos presentaron esta conclusión:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 15^2 & = & 225 & \text{y} & 2 & = & 1^2 + 1 \\ 25^2 & = & 625 & \text{y} & 6 & = & 2^2 + 2 \\ 35^2 & = & 1225 & \text{y} & 12 & = & 3^2 + 3 \\ \dots \end{array}$$

Les felicitamos por sus hallazgos, comentamos cada uno de ellos y pedimos que los aplicaran para ampliar la tabla dada y que verificaran los resultados multiplicando. Conseguimos así que ganaran en seguridad respecto a la bondad de las reglas descubiertas y que toda la clase se familiarizara con las cuatro.

Como trabajo para casa les propusimos que averiguaran si sus algoritmos son válidos para números de tres cifras.

Al día siguiente

Iniciamos la clase reproduciendo una de las tablas "domésticas" más larga (hasta 195^2) y, refiriéndonos a ella, dedicamos el tiempo necesario a:

- Que cayeran en la cuenta de la equivalencia de las reglas A y B, lo que nos permitió prescindir de la primera (esto, de común acuerdo y con la mayor delicadeza, para que los autores no se sintieran dolidos).

- Expresaran en palabras las otras tres. (2)

Para esto último, fuimos escribiendo las redacciones iniciales, haciendo las correcciones o mejoras sugeridas por los descubridores u otros compañeros, retocando aquí y allá y aportando consideraciones respecto a la necesidad de precisión de lenguaje, no ambigüedad, etc. Finalmente quedaron así:

Regla B.- *Partiendo del cuadrado de 5, ir sumando sucesivamente 200, 400, 600,...*

Regla C.- *El número de centenas de cualquier cuadrado (3) es igual al número de decenas de la base multiplicado por su consecutivo posterior.*

Regla D.- *El número de centenas de un cuadrado cualquiera es igual al cuadrado del número de decenas de la base, aumentado en este número.*

A estas alturas, el alumnado había advertido ya el inconveniente de la regla B, esto es, que para calcular el cuadrado de un determinado número hay que calcular previamente el de los anteriores. No creímos bueno distraer su atención haciéndoles ver que hay una manera de evitarlo (4); preferimos aconsejarles que emplearan en adelante una de las otras dos. Y así, sin herir susceptibilidades, decidimos entre todos quedarnos con las C y D. (Nos valimos de un pequeño embuste. Les dijimos que nosotros también habíamos renunciado a la "nuestra", por la que, por cierto, no habían preguntado... ¡y que era la C!)

A continuación, propusimos cuadrar números de cuatro o más cifras, terminados en 5, advirtiéndoles que debían verificar resultados y disponer el proceso de cálculo como en el siguiente ejemplo:

Según C:

$201\,5^2 = (201 \,.\, 202) \,.100 + 25 = 4060225$

Nº de decs. Nº de cents.

Aplicando D:

$201\,5^2 = (201^2 + 201) \,.100 + 25 = 4060225$

Con alumnos de 8º de E.G.B. (2º de la ESO futura), lo hecho hasta ahora puede considerarse más que suficiente. No obstante, dado que los nuestros están acostumbrados a oírnos decir que los matemáticos son desconfiados, que no quedan satisfechos hasta que una conjetura es deductivamente razonada, es decir, hasta que se demuestra su generalidad (en nuestro caso, "para todo entero acabado en 5"), algunos preguntaron que cómo podía hacerse la demostración. Respondimos que ellos mismos podían hacerla; que sólo tenían que: Escribir la forma polinómica de un número terminado en 5 ($N = d \bullet 10 + 5$) y multiplicarlo por sí mismo.

Con alguna indicación nuestra, y corregidos que fueron algunos fallos de expresión, la demostración quedó escrita en la pizarra y comentada para toda la clase así:

$$\begin{aligned} N^2 = {} & (d \,.\, 10 + 5)^2 = (d \,.\, 10 + 5) \,.\, (d \,.\, 10 + 5) = \\ & d^2 \,.\, 100 + 5 \,.\, d \,.\, 10 + d \,.\, 10 \,.\, 5 + 25 = \\ & d^2 \,.\, 100 + d \,.\, 100 + 25 = (d^2 + d) \,.\, 100 + 25 = \\ & \qquad\qquad \text{(Regla D)} \\ & d \,.\, (d + 1) \,.\, 100 + 25 \\ & \qquad\qquad \text{(Regla C)} \end{aligned}$$

Y aprovechamos para hacerles observar que, de paso, y simplemente habiendo sacado factor común "d" en el último paso, habíamos probado la equivalencia de los algoritmos C y D, esto es, que ambos son las dos caras de una regla única. En consecuencia, decidimos llamarla, después de un debate seguido de votación, *Regla de las decenas* o, en honor de nuestros colegios, y para uso exclusivamente casero, GRAN REGLA CUADRÁTICA DE PUNTA MARINA.

La broma nos permitió interesar a la mayoría en el proceso de demostración.

Ampliación de la experiencia con los chicos de B.U.P.

En líneas generales, lo anterior se desarrolló en la forma descrita, pero dada la mayor preparación del grupo (tercer trimestre del curso), añadimos las cuestiones que a continuación comentamos someramente. Es de advertir que trabajaron casi sin ayuda por nuestra parte.

A) Otra demostración de la regla de las decenas

1. Verificación de igualdades del tipo

$$25^2 = (25 + 5) \,.\, (25 - 5) + 5^2$$

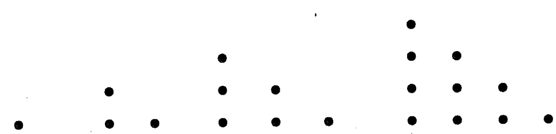
2. Demostración de que la regla anterior es válida para cualquier entero que termine en 5.

3. Demostración de la regla de las decenas por aplicación de la de "sumar o restar 5":

$$\begin{aligned} N^2 = {} & (N + 5) \,.\, (N - 5) + 5^2 = \\ & [(d \,.\, 10 + 5) + 5] \,.\, [(d \,.\, 10 + 5) - 5] + 5^2 = \\ & \ldots = d \,.\, (d + 1) \,.\, 100 + 25 \end{aligned}$$

B) Cuadrar con números triangulares

Después de jugar un rato con los números triangulares, que la mayoría de los integrantes del grupo desconocía, presentamos la fórmula que permite calcular el n-simo números de este tipo:



$$T_n = n \,.\, (n + 1) /2$$

El parecido de esta fórmula con la de la regla de las decenas en su versión C, les dió la pista.

En efecto, tomando desde n = 1, resultan los triangulares

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad \ldots$$

Y, duplicándolos, obtenemos las sucesivas cantidades de centenas de los cuadrados de los enteros terminados en 5, a partir del 15. Así:

$T_1 = 1 > 15^2 = (2\ .\ 1)\ .\ 100 + 25 = 225$
$T_2 = 3 > 25^2 = (2\ .\ 3)\ .\ 100 + 25 = 625$
$T_3 = 6 > 35^2 = (2\ .\ 6)\ .\ 100 + 25 = 1225$
...

¿Qué dificultad tiene esta regla? ¿Puede superarse?

C) Demostrar que el cuadrado de un entero acabado en 2 (N = d . 10 + 2) puede calcularse mediante la fórmula

$$N^2 = (d\ .\ 10 + 2)^2 = 10d\ .\ (10d + 4) + 4$$

Por ejemplo:

$$1562^2 = 10\ .\ 156\ (10\ .\ 156 + 4) + 4 = 2439844$$

D) Deducir una regla general para cuadrar cualquier entero, sin tener que multiplicarlo por sí mismo.

Acertijo para el lector: EEMREEDDLE

Una pista: Tiene relación con este trabajo
El premio: Tiene que ver con QUEBEC.

Notas:

(1) El primero publicado en el nº 1 de esta revista bajo el título de, "Posibilidades didácticas... del cubo de las caras negras". El segundo, "Posibilidades didácticas... de un puzzle de estrella y navetas", en el nº 19 de NÚMEROS, que edita la Sociedad Canaria de Profs. de Matemáticas. "Isaac Newton".

(2) Es de destacar la conveniencia de este tipo de ejercicios. Sorprende la disparatada manera en que, a veces, los alumnos expresan conceptos que nos consta han asimilado perfectamente. ¿No obedecerá esto, en parte, al excesivo tiempo dedicado en las clases de Lengua Española a cuestiones puramente gramaticales, en detrimento del debido cultivo del "arte de hablar y escribir correctamente"? Y en mucho, claro, se debe a la prematura y excesiva formalización a que solemos someter a los alumnos, olvidando que se piensa en palabras, no en símbolos.

(3) La expresión "número de centenas" suele tener un significado único para los alumnos. Influenciados quizás por la llamada descomposición polinómica de un número, parecen creer que, por ejemplo, 3245 sólo puede expresarse como 3 . 1000 + 2 . 100 + 4 . 10 + 5. No se les ocurre que también podemos escribir, entre otras, esta igualdad: 3245 = 32 . 100 + 4 . 10 + 5. Y, análogamente, respecto al "número de decenas", es tan válido escribir: 3245 = 3 . 1000 + 2 . 100 + 4 . 10 + 5 como 3245 = 324 . 10 + 5.

Para aclarar esta cuestión acudimos a ejemplos con cantidades concretas. Por ejemplo, expresar una cantidad de dinero empleando todas o sólo algunas de las unidades decimales de nuestro sistema monetario. Después de esta ejercitación, todos entendieron que para representar un número entero cualquiera acabado en 5 podemos escribir N = d . 10 + 5, es decir, expresar todo lo que no sean unidades simples en decenas, y que, si "c" es la cantidad de centenas (número formado por todas las cifras que no representen decenas y unidades simples), podemos decir que N = c . 100 + d . 10 + 5.

Fue esta una buena ocasión, que aprovechamos al máximo, para profundizar en el sistema decimal de numeración y medida, una estructura conceptual fundamental y que, sin embargo, hay todavía quien la "enseña" ligeramente y desde un punto de vista mecánico.

(4) Trabajando con los ordinales.

Manolo Fernández Reyes
Ana Negrín Hernández
Soc. Canaria de Profs. de Matemáticas. "Isaac Newton"

ÁNGULOS IGUALES AL CORTAR RECTAS PARALELAS

Adela Jaime Pastor

Este texto es una reflexión sobre la forma en la que se pide a los estudiantes que aprendan y memoricen qué ángulos son iguales cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal.

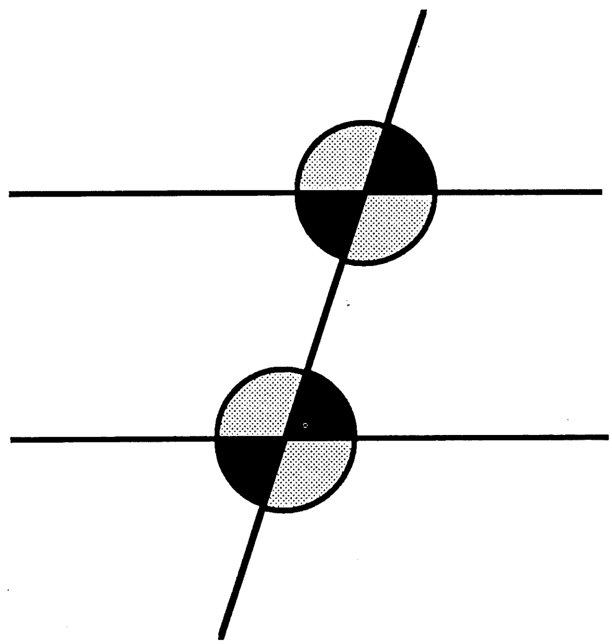
Durante los últimos años he tenido ocasión de analizar las respuestas de estudiantes de secundaria de diversos entornos, ciudades y países (en concreto EE.UU. y España) a ciertos problemas de geometría.

Una de las relaciones que se manejaban era la de los ángulos formados cuando dos rectas paralelas están cortadas por una transversal. Parece ser que, invariablemente, el sistema escolar fomenta la distinción entre ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes, o al menos se centra en algunos de ellos. Los alumnos tienen que aprender qué nombre recibe cada par y, posteriormente, indicar su nombre concreto en las demostraciones correspondientes para justificar la igualdad requerida, lo cual genera numerosos olvidos y equivocaciones.

Mi comentario es el siguiente: Probablemente sería más fácil plantear la propiedad (o, al menos, subrayar como resultado para recordar) de la siguiente forma:

"Cuando dos rectas están cortadas por una transversal no perpendicular, **Todos los ángulos agudos son iguales entre sí** y **Todos los ángulos obtusos son iguales entre sí**".

(Si la recta transversal es perpendicular, evidentemente todos los ángulos son iguales, por ser rectos).

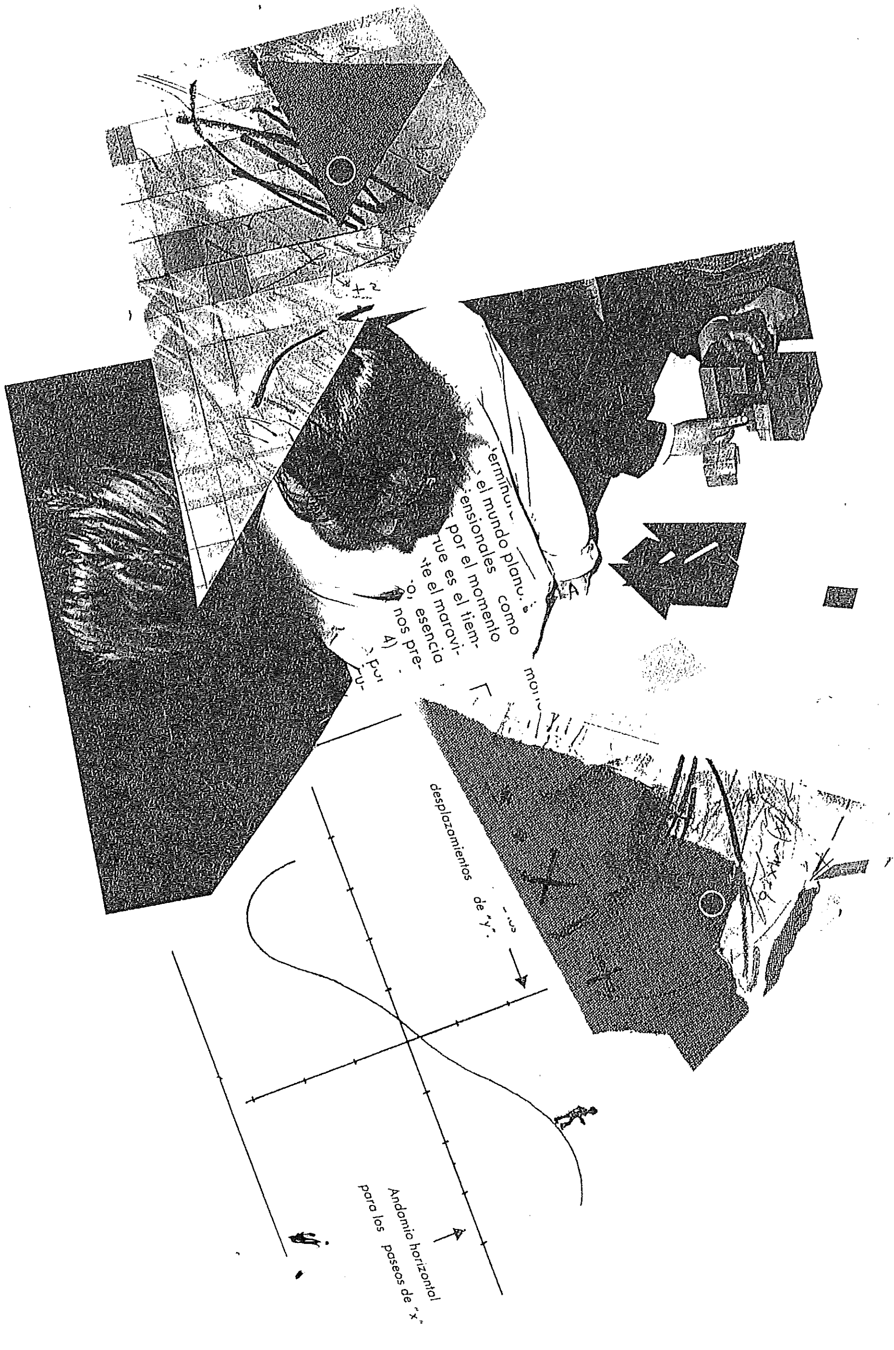


Ese enunciado es mucho más fácil de descubrir informalmente, de memorizar y de recordar. Además, no reduce el nivel de razonamiento en las justificaciones o demostraciones, simplemente las facilita.

No niego que los alumnos sean capaces de aprender las diversas relaciones y sus nombres, y seguramente es adecuado que los alumnos que con posterioridad se van a centrar en estudios de ciencias conozcan los nombres de los diversos pares de ángulos (porque es probable que los encuentren en algún libro en sus estudios posteriores). También puede ser interesante deducir formalmente la igualdad de todos los ángulos a partir de algunas de las relaciones.

Pero el punto central de mi comentario es que, una vez conocida la propiedad, no creo que se deba poner el énfasis en la distinción de si la igualdad de dos ángulos es cierta porque los ángulos son alternos internos, alternos externos o correspondientes. Esta propiedad es una herramienta y debemos enseñarla de manera que sea lo más fácil de usar posible.

Adela Jaime Pastor.
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Universitat de Valencia.



RECURSOS PARA EL AULA

SECRETOS GEOMÉTRICOS EN UN DIARIO ARAGONÉS

Manuel Fandos

Introducción

Es bien claro que, paulatinamente, la prensa se está afianzando como instrumento didáctico, que su uso está abriendo posibilidades educativas muy dignas de ser consideradas. Pero no es menos cierto que la misma está infrautilizada. En todo caso, no es este el momento de analizar los distintos modelos y propuestas a las que nos podríamos referir.

Aún más, todos sabemos que la prensa no está pensada como instrumento educativo en sí mismo. Sin embargo, la gran versatilidad de este medio facilita su uso en cualquier área, nivel y materia.

También, cómo no, puede introducirse en las "áridas matemáticas". No sería nada original si me remitiera a los múltiples *cálculos aritméticos* que se pueden hacer con sus innumerables datos numéricos (baste pensar en las páginas de bolsa, economía, resultados deportivos, ...), lo mismo, si propusiera *análisis porcentuales* comparativos entre varias publicaciones de un mismo día, por ejemplo; *tratamientos estadísticos*, y un considerable número de posibilidades más.

Todavía hay grandes recelos a la introducción de los "mass media" escritos en nuestras aulas. No sé si porque se piensa que es un "sarampión pasajero", porque no se sabe cómo, o porque no se ve una utilidad real.

Sería parte de otro capítulo el tratar de la defensa o reprobación de estos temas. Yo aquí, hoy, lo que pretendo es ofrecer una actividad concreta, de carácter interdisciplinar, con el deseo de que pueda presentar otro posible horizonte en el tratamiento lúdico de las matemáticas a través de la excusa de un simple diario.

Entiéndase que esta actividad se inscribe en un organigrama que supera el "simple activismo" y que pretende, entre otras cosas, desdramatizar la "seriedad" de lo "impreso", dado que entiendo además, que, en aras de un mayor aprovechamiento del rendimiento -lectores críticos, compromiso social, ...- en la Enseñanza Secundaria (Obligatoria y Postobligatoria), COU, o incluso más adelante, tendremos que empezar "perdiendo el respeto" a los periódicos; éstos pueden ser un juguete ya desde los cursos más pequeños, para facilitar el necesario proceso de "desenmascaramiento" al que un lector adulto debe someterlos.

Hay quienes aspiran a una asignatura aparte y quienes recomiendan al profesor de cada área hacer un uso práctico y sectorial de lo más afín a su programa.

No obstante, y para sacarle jugo a un texto, a través de seguimientos de noticias, comentarios, etc., para distinguir géneros periodísticos, analizar el lenguaje, para ser crítico con una noticia, creo que hay que empezar jugando con el periódico.

Desde la papiroflexia hasta el conocimiento de lo que son las secciones, la mancheta, el pie de foto, etc., podemos crear actividades pluridisciplinares y factibles para los pequeños con cualquier periódico.

Yo me encuentro en la línea de estos últimos, y de quienes pretendemos un estudio interdisciplinar, aprovechándonos, entre otros, de la prensa como un auxiliar didáctico.

Amparado en esta breve reflexión presento unas actividades, con un marcado talante lúdico-dramático que, en mi experiencia de docente, me han ayudado a introducir el periódico en el aula como un elemento más de estudio, de acercamiento a la realidad y de fomento de un espíritu crítico..., por cierto, *jugando también con las matemáticas.*

El primer contacto con el periódico a través de actividades lúdicas

Aunque sabedor de que el epígrafe "Prensa", dentro del Plan General de la Reforma de EGB, debe afrontarse con profundidad en séptimo, y con intención de hacerlo durante ese curso, redescubriendo la prensa, si se quiere, de un modo más academicista, me planteé introducir a mis alumnos de sexto en este mundo, intentando ser coherente con la idea que he esbozado en la introducción, según la cual, y didácticamente hablando, habría que presentar el periódico -en primer instancia- con un carácter más lúdico e informal, que permitiera perderle un posible respeto.

Así surgió el Taller de Prensa, y lo que empezó con ciertos recelos -los chavales nunca antes habían trabajado un periódico- a estas alturas de curso es ya un éxito a tenor de los resultados, de las "ganas" que ha despertado.

Citemos algunas posibilidades de la prensa en la escuela y que yo mismo he ido trabajando antes de llegar al juego que presento:

- Papiroflexia.
- Bailes de títulos y noticias.
- Fugas de palabras de un texto.
- Transformación de noticias.
- Dramatización de noticias.
- Invención de historias.
- Juegos de investigación. "Agentes secretos", como el que a continuación expongo en este trabajo y con un sinfín de posibilidades y variantes.

Algunos de los objetivos pretendidos

- Hacerles ver la interrelación existente entre las diversas disciplinas escolares.
- Acercarse a un medio de comunicación (prensa) a través del juego.
- Motivar para la tarea escolar.

No cabe duda de que la actividad ha de entenderse como interdisciplinar y, por razones de espacio, voy a omitir los objetivos pormenorizados de lenguaje que, sin duda, también se desarrollan. Se reflejan, a continuación, sólo los más destacados de entre los elaborados en el área de matemáticas.

- Resaltar el sentido práctico de las matemáticas.

  • Formular problemas, extraer y ordenar los datos y examinar la solución obtenida.
  • Utilizar el sentido acumulativo que tienen las matemáticas, como medio de acceder a otros conocimientos de la misma área.
  • Utilizar las propias matemáticas como lenguaje operativo para otras áreas: naturaleza, sociedad, etc.

- Valerse adecuadamente del lenguaje para entender y expresar mensajes matemáticos.

  • Transcribir de un lenguaje matemático a otro, del manipulativo al verbal, del verbal al gráfico, de éste al simbólico y recíprocamente, para entender y expresar mensajes matemáticos.

- Desarrollar la manipulación y la creatividad a través de construcciones matemáticas.

- Emplear el sistema de numeración decimal.

- Aplicar correctamente las operaciones con números naturales, suma, resta, multiplicación y división, a la resolución de situaciones referidas a la vida real.

- Aplicar correctamente las operaciones con números decimales.

- Aplicar las medidas usuales de unidades de longitud, superficies y amplitud de ángulos.

- Utilizar instrumentos de medida (regla, compás, semicírculo graduado) para realizar mediciones de magnitudes en situaciones de la vida real.

- Realizar construcciones geométricas en el plano, por medio del dibujo, y en el espacio, de forma manipulativa, relativas a ángulos, paralelas, perpendiculares, polígonos y círculos.

- Construir e interpretar planos utilizando escalas.

- Aplicar el cálculo de perímetros y áreas de figuras regulares a la resolución de situaciones problemáticas.

El juego

- Primera parte. Consiste en la realización del retrato robot de un teórico espía infiltrado. Este retrato está compuesto por distintas figuras geométricas cuyas medidas y ensamblaje hay que descubrir. Para ello habrá que usar el periódico: "El Día", de 4 de noviembre de 1987 [1].

- Segunda parte. Consiste en averiguar la nacionalidad del teórico espía, cuyo retrato robot hemos descubierto en la primera parte. Para averiguar la mencionada nacionalidad, primero, dado un alfabeto clave, descubrir la cadencia de su codificación; en caso, sumarle quince al número anterior (anexo 1). Segundo, basándome en el periódico antes mencionado ocultar un mensaje en clave matemática. Una vez descifrada, operar e interpretar y comprender la orden dada.

a) Motivación

"Pepe Berenjenas, Director de la JOTA (Jóvenes Tozudos de Aragón), acaba de hacer públicas las pruebas de acceso al CIP (Centro de Investigación para la Prensa), de esta prestigiosa entidad...".

Alcanzar el final del juego será premiado con un aumento de los puntos en el juego, institucionalizado anteriormente en clase, para el desarrollo de la agilidad y el cálculo mental: "el pichichi de las matemáticas".

b) El retrato robot

Compuesto por distintas figuras geométrica cuyas medidas en centímetros y ensamblaje hay que descubrir. Pistas para ello:

- *La cabeza*

Tapada por un gorro rectangular. Lados de este gorro: *altura*: extrae de la primera página del periódico todos los números -en cifras- que aparezcan. Comprobarás que dos números se repiten hasta un total de siete veces. De estas dos cifras, la menor coincide con la altura del rectángulo que forma el gorro. *Base*: la desconocemos; no obstante, podrás averiguarla sabiendo que el área del mencionado rectángulo coincide con la hora a la que emiten por TVE, según el periódico, el programa "Buenos días".

- *La cara*

Dibujada con un triángulo equilátero. La medida de los lados debes saberla, puesto que uno de ellos es igual a la base del gorro de la cabeza. No obstante, su perímetro coincide con el número de la página del periódico donde está la sección "Aragón" y que continúa una noticia de la portada que habla de Mariano Hormigón. Uno de los lados del triángulo estará adosado a la base del gorro. En el vértice inferior de este triángulo dibujaremos una barba, en forma de rombo.

1 Por dificultades de diferente índole resulta imposible reproducir el ejemplar del periódico en este trabajo.

- La barba

Como antes mencionaba, forma de rombo. La *diagonal menor* tiene la medida siguiente: la décima parte de la cantidad de letras que tiene el apellido del director de la obra de teatro "¡Ay Carmela!" -tal y como aparece en el periódico en la sección correspondiente-. Tu vas a tener que averiguar la *diagonal mayor*, sólo puedo decirte que es el triple de la diagonal menor y que la superficie del rombo que conforma la barba es de 0,375.

Para dibujarla correctamente deberás separar el vértice superior del rombo de la mitad de la base mayor del trapecio isósceles que conformará la boca, la misma medida que tiene la diagonal menor.

- La boca

Como mencionaba, forma de trapecio isósceles. *Base menor*: de la misma medida que la base del triángulo isósceles que conforma la nariz. *Altura*: la puedes averiguar calculando la décima parte de la mitad de letras que tiene la asignatura (su nombre) que, de momento, no se imparte en Ateca por falta de profesores especialistas. *Base mayor*: coincide con la cifra resultante de la suma de las medidas de la altura y de la base menor del mencionado traprecio.

No te habrás equivocado si compruebas que la superficie de este trapecio es de 0,195.

Para dibujarlo: establece entre la base menor del trapecio y la base del triángulo de la nariz, la mitad de la separación que guarden los vértices de los ojos entre sí.

- La nariz

Es un triángulo isósceles. El vértice superior es coincidente con el ortocentro del triángulo que conforma la cara. *Altura*: coincide con la décima parte de la cifra de las decenas de la década en la que estamos viviendo. La *base*: coincide con el diámetro de los botones del blusón que lleva nuestro personaje.

- Los ojos

Son dos ángulos opuestos por el vértice. De una cantidad de grados equivalente a las dos primeras cifras que marcaríamos en el teléfono si llamáramos directamente a los servicios de oxigenoterapia de Zaragoza.

Para dibujarlos: a 0,5 de la base del gorro de la cabeza. Sepáralos entre sí, por el vértice, 1/3 de la medida de la diagonal mayor del rombo que conforma la barba.

- Las orejas

Son dos triángulos obtusángulos -uno para cada oreja y ambos iguales-. Las medidas de los catetos coinciden respectivamente con la mitad de las medidas de las diagonales mayor y menor del rombo de la barba.

Para dibujarlo: el cateto menor, a la altura del ortocentro, y paralelo a la línea de los hombros. La hipotenusa adosada al lado que forma parte del triángulo equilátero de la cara.

- Tronco-blusón

Es un rectángulo. La *base*: la mitad de los puntos que anotaron entre Pagés y Sabater en el partido de baloncesto celebrado entre el Magia de Huesca y el Caja Bilbao, según aparece en la sección correspondiente del periódico con el que estamos trabajando. La *altura*: podrás averiguarla sabiendo la superficie. *Superficie*: quinientas cuarenta y siete mil setecientas veinticinco diezmilésimas. Pero *ten en cuenta* que a la cifra que te doy, deberás sumar el área de los botones y del bolsillo que tiene el blusón, para obtener la superficie total.

Los botones: son seis. De forma circular. Cada uno de ellos tiene de diámetro la misma medida que la diagonal menor del rombo de la barba.

El bolsillo: de forma hexagonal. De lado 1. La medida de la *diagonal* mayor de cada uno de los tres posibles rombos que se generarían descomponiendo el hexágono, es la décima parte de la cifra compuesta por las unidades de millar y las centenas del número que tiene este periódico y que pueden encontrar en la cabecera de la portada.

Sabido esto, podrás averiguar la altura del blusón que tapa el cuerpo.

Para dibujarlo:

- El blusón:

- El lado paralelo a la base -la línea de los hombros- queda a la altura de la base menor del trapecio de la boca.
- Para que te quede centrado, procura que exista la misma medida de hombro por cada lado.

- Los botones:

- El primero guardará una separación -igual a su diámetro-, del vértice del rombo más alejado de la boca.
- Están situados a partir del vértice más alejado que la barba tiene de la boca.
- Entre los botones -medido desde la circunferencia, no desde el centro del botón-, media una separación igual a la del diámetro del botón.
- El centro de cada uno de ellos estará localizado en una hipotética prolongación de la diagonal mayor del rombo de la barba.

- El bolsillo:

- En el lado derecho, según miramos a la figura.
- A la misma medida de la base de la línea lateral (altura) y de la línea de los botones.

- Los brazos

Son iguales. Cada uno de ellos está compuesto por un triángulo isósceles adosado en su base, al lado del rectángulo que conforma el blusón. La medida de la *base*: coincide con la cantidad de letras que tiene el nombre -no apellidos-, del director del periódico. La *altura*: coincide con el mismo número que multiplicando por 16 da la cantidad de años que la abuela Rosa lleva en Uruguay, tal y como se desprende del pie de foto de la noticia titulada "Siéntate aquí como uno más".

Para dibujarlos: un vértice de la base lo colocaremos a la altura de la línea de los hombros del blusón.

- Las piernas

Son dos rectángulos iguales, uno para cada pierna. Su *altura* es igual a la de los lados del triángulo de la cara. Su *superficie* coincide con el perímetro del triángulo de la cara.

Para dibujarlas: uno de los lados de cada una de las perneras del pantalón es prolongación de la altura del rectángulo del blusón.

- Los pies

Dos trapecios isósceles iguales. Uno para cada pie. *Medidas*: según la proporción 1:4 del trapecio de la boca.

Para dibujarlos: La base menor estará adosada a la base del rectángulo de la pernera.

c) La nacionalidad

Consta de tres enigmas.

- Primer enigma

Descodifica el secreto de este alfabeto y pon debajo de cada letra el número que creas que le corresponde:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
28			73			118		
J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q
								283
R	S	T	U	V	X	Y	Z	
				373	388	403		

- *Segundo enigma*

Tienes que averiguar cuatro letras secretas, siguiendo las orientaciones y pistas que tienes a continuación:

• Primera letra

Se corresponde en el alfabeto codificado con el número que te resulte de realizar las siguientes operaciones:

Averigua la suma de las cifras que aparecen en la primera página -te recuerdo que las has entresacado en la primera parte-. Indaga, a continuación, la tercera parte de esta cifra. El resultado es un número de cuatro cifras. Efectúa el producto de las dos primeras por las dos segundas. A este producto réstale el precio de la entrada -por sesión- a la filmoteca de Zaragoza, aumentado en dos pesetas. El resultado tiene que coincidir con el valor de una letra en el alfabeto codificado.

• Segunda letra

Se corresponde en el alfabeto codificado con el número que te resulte de realizar las siguientes operaciones:

- Localiza la noticia "El temporal atemoriza Valencia". Léelo atentamente. Cuenta las comas que hay. Multiplica esta cifra por la cantidad de años que hace que la intensidad de las lluvias y la ruptura del pantano de Tous provocan importantes inundaciones.

- Al resultado de este producto, súmale el número de la página en la que aparece la noticia. A este nuevo resultado, quítale la cantidad de palabras que tiene el pie de foto de la mencionada noticia.

- A este nuevo resultado, quítale el número que ocupa el lugar de las decenas de la cifra que tendríamos si averiguáramos la mitad de los puntos -aparte y seguidos-, que tiene esta noticia.

El resultado tiene que coincidir con el valor de una letra en el alfabeto codificado.

• Tercera letra

Se corresponde en el alfabeto codificado con el número que te resulte de realizar las siguientes operaciones:

- Averigua la cantidad de cuadrículas blancas que tiene el crucigrama. A esta cantidad réstale la cantidad de mayúsculas que aparece en el artículo escrito, justo debajo de la fotografía de Txiki Benegas, en la sección de política nacional.

- Al resultado anterior quítale, de nuevo, la cantidad resultante de la suma de las diferencias de temperaturas del día 3 de noviembre, que aparecen en la sección de agenda. Multiplica este resultado por 2 y réstaselo al total de la suma de las temperaturas máximas. A este nuevo resultado, súmale la cantidad de letras que tiene el signo del horóscopo que te recomienda no renunciar a tus íntimos anhelos y mucho menos a cambio de nada.

• Cuarta letra

Se corresponde en el alfabeto codificado con el número que resulta de realizar las siguientes operaciones:

- Si lees con atención el artículo titulado "Las mil y una tentaciones del rastrillo aragonés", encontrarás dos errores. El primero es un artículo delante de un nombre propio. El segundo, un verbo que está incorrectamente escrito.

Por ahora sólo nos vamos a fijar en el segundo error. Cuenta las letras que tiene esta palabra erróneamente escrita, multiplica la cifra que te haya dado por la cantidad de palabras -incluida la cifra-, que tiene el pie de foto del artículo.

- Ahora resta entre sí los valores correspondientes en tu alfabeto secreto a las letras que componen el artículo que aparece delante del nombre propio al que antes me refería.

Suma los resultados totales de los dos apartados anteriores. A este nuevo resultado, quítale la cantidad de veces que se repite la letra "e" en el título y en el subtítulo del artículo que estamos trabajando. Si lo has hecho bien, ya lo tienes resuelto.

- Tercer enigma

Con la combinación de las cuatro letras del enigma anterior pueden salirte hasta siete palabras distintas. ¿Cuáles son?

1. ______________: Es plural y te pude mojar.
2. ______________: Lo hago cuando cocino.
3. ______________: En verano lo está nuestra clase.
4. ______________: Significa que estoy falto de fuerzas o flojo.
5. ______________: Es plural y son alabanzas.
6. ______________: Normalmente son muy pesadas.
7. ______________: Es la nación de nuestro teórico espía. Datos: Estado de la Península de Indochina, sin salida al mar. Atravesado por el río Mekong.

Duración del trabajo

Para la realización del trabajo, sin agobios, lo dividí en dos partes bien diferenciadas.

En primer lugar "la nacionalidad". La motivación alrededor de media hora, junto con la explicación del juego -la mecánica era conocida, la habíamos utilizado en otras ocasiones-. Como una hora y media el desarrollo de la actividad por parte de los chavales.

La segunda parte, el "retrato robot", fue una tarea a realizar por los mismos grupos que la primera, pero por espacio de un fin de semana y en sus propias casas. El proceso fue bastante largo e implicaron a casi todos los miembros adultos de la familia que se brindaron a ello, tal y como manifestaron ellos mismos en la evaluación.

Material

- El periódico "El Día" (4-XI-87). Uno para cada uno de ellos. (El periódico lo habíamos comprado anteriormente todos).
- Unas fotocopias con el alfabeto codificado, las pistas y enigmas (un ejemplar para cada uno).
- Lápices de colores.
- Hojas en blanco.
- Cartulinas de colores.
- Tijeras.
- Pegamento.
- Reglas, compases, semicírculos graduados.
- Diccionario.

Agrupamientos

Pequeños grupos -de cuatro personas- lo más homogéneas posibles.

Evaluación

- *De los chavales*: la primera parte "la nacionalidad", no les planteó ningún problema. Fue el "retrato robot" lo que les pareció un "trabajo de chinos". Reconocieron que era más complicado al leerlo que una vez metidos en el mismo. Les resultó llamativo. Hubo dos grupos que no se juntaron, por razones de lo más pintoresco y que no lo hicieron. En el fondo creo que fue porque cuando lo leyeron y lo expliqué les pareció demasiado complicado.

El sentimiento general fue "¡jo, se ha pasado!". No obstante, se plantearon hacerme uno parecido a mí, a ver si era capaz de resolverlo; así fue, y descubrieron que era más complicado prepararlo que realizarlo, a pesar de lo que pudiera parecer.

Al final, y a pesar de las "pegas", balance positivo.

- *De algunos padres*: en algunas entrevistas de tutoría salió a colación "el chino", como le llamaban los chavales y los padres. Muy contentos por cómo trabajaban, pero como ellos decían: "vaya imaginación". Pero con una impresión general muy positiva.

- *Del profesor*: no hubo dificultades de explicación y motivación. No era el primero. Alcanzados los objetivos previstos. Excesiva excitación y prisas. Algunos enfados entre ellos -los líderes se enfrentaban-. Bastantes errores de atención. En el mismo artículo dos personas contaban cantidades distintas. Era difícil llegar a un acuerdo entre los chavales cuando estaban tan tensos. Dudas sobre aquellas cosas que ya se daban por sabidas. Balance final positivo. Se pueden plantear un montón de variaciones.

Anexo

Solucionario

Nacionalidad

A	B	C	D	E	F	G	H
28	43	58	73	88	103	118	133
I	J	K	L	M	N	Ñ	O
148	163	178	193	208	223	238	253
P	Q	R	S	T	U	V	X
268	283	298	313	328	343	358	373
Y	Z						
388	403	(Sumarle 15 al número anterior)					

Letras

Primera letra: 313 (S)
Suma de todas las cifras de la 1ª pág.: 4.593.
1/3 de 4.593 = 1.531.
15x31 = 465; 150 + 2 = 152;
465 - 152 = 313; 313 = S.

Segunda letra: 193 (L)
Comas = 47; 47 x 4 (años) = 188; 188 + pág. 19 = = 207.
207 - 13 (palabras del pie de foto) = 194.
Puntos = 20; decenas = 2; 1/2 de 2 = 1.
194 - 1 = 193 = L.

Tercera letra: 28 (A)
Cuadrículas blancas = 145; 145 - 65 (mayúsculas) = 80.
80 - 36 (suma de la diferencia de temperaturas) = 44; 44 x 2 = 88.
(Total de la suma de temperaturas máximas) = 111 - 88 = 23.
23 + (letras de "libra") 5 = 28; 28 = A.

Cuarta letra: 253 (O)
Errores de imprenta en "las mil y una tentaciones del rastrillo aragonés": "La Preysler". "vendeemos".

A) Letras del verbo mal escrito = 9; 9 x 11 (pal. del pie de foto) = 99.

B) L = 193; A = 28; 193 - 28 = 165.
165 + 99 = 264; 264 - 11 (repeticiones de la "e") = 253 = O.

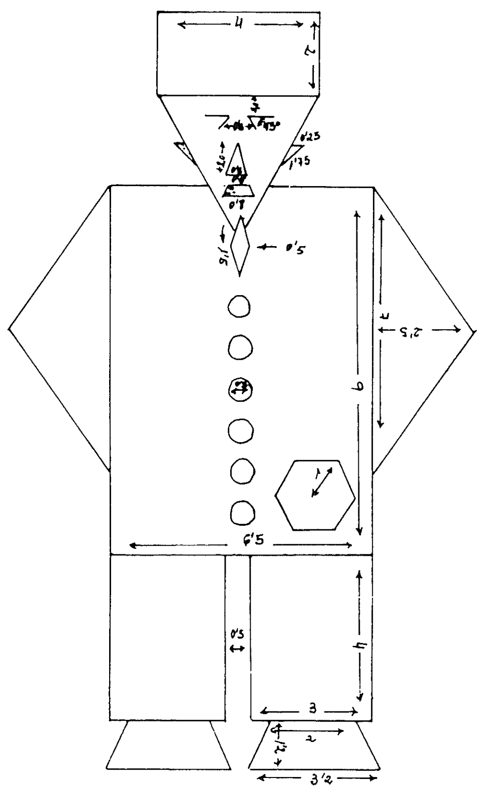
Vocabulario

Las cuatro letras: S / L / A / O.

Posibles combinaciones, según el orden propuesto en el trabajo:

1. OLAS.
2. SALO.
3. SOLA.
4. LASO (LAXO)
5. LOAS.
6. LOSA.
7. LAOS.

Retrato robot



Manuel Fandos
Asesor del CEP.
Ejea de los Caballeros. Zaragoza.

TALLER DE "MATEMÁGICAS"

Escudero, Isabel
Martín, María Luisa
Reyes, Pedro
Rodríguez, Cristóbal
Sanz, Angel
Alumnos de Primero y de COU

Presentamos una experiencia desarrollada durante la celebración de la Semana Cultural del I.B. "Virgen de Valme" de Dos Hermanas (Sevilla), bajo el nombre de "TALLER DE MATEMÁGICAS", en el curso 89/90. Con ello no sólo buscamos que otros compañeros se animen a la realización de actividades de este tipo, sino fundamentalmente que estas vayan ganado cada vez más terreno en su introducción en las programaciones de la asignatura de Matemáticas.

Origen del taller. Idea general

Varios factores dieron lugar al planteamiento y desarrollo del taller:

- El trabajo que hemos llevado a cabo desde años anteriores en Geometría, Probabilidad, Resolución de problemas y otros temas, con una metodología activa y con carácter manipulativo en alguno de ellos.

- El hecho de haber dedicado una hora de las cuatro semanales a resolución de problemas de tipo recreativo, de razonamiento... etc., durante el primer trimestre en un curso de primero con la característica de tener un número elevado de alumnos repetidores, que se aburrían mucho con los temas de polinomios y radicales, dio lugar a que los alumnos se interesaran por resolver y aportar ellos mismos problemas de estos tipos. El tiempo dedicado llegó a resultar escaso, lo que dio origen a la idea de un concurso de problemas para todo el centro, aprovechando para ello el marco de la semana cultural.

- La visita del curso anterior a la exposición de Horizontes Matemáticos nos proporcionó la idea de que es una exposición activa de matemáticas.

- La preocupación por introducir aspectos de las matemáticas que no están en los programas y que son lo suficientemente atractivos para captar el interés de los alumnos.

Las consideraciones anteriores nos llevaron a la realización del Taller de matemáticas, como uno de los talleres que se ofertaron durante la semana cultural.

La organización del taller estuvo a cargo de un grupo de alumnos del citado primero y de otros cursos que, coordinados por varios profesores, se ocuparon de realiar una serie de trabajos previos a la celebración de la semana cultural, entre los cuales podemos citar: elaboración de material, resolución de problemas, realizando además una buena labor de difusión entre los compañeros. Y durante la semana cultural se ocuparon del mantenimiento de los quioscos, actuando algunos de ellos como monitores.

Quioscos-organización: física-humana

El taller estuvo ubicado en dos aulas comunicadas entre sí, con las mesas de alumnos agrupadas de forma que creaban un espacio separado para cada quiosco, con la siguiente estructura:

- Sobre la pared varios carteles con algunos problemas de presentación al tema del quiosco.

- En las mesas:

1) Carpetas conteniendo fotocopia de todos los problemas disponibles sobre el tema.
2) Propuestas concretas para iniciar el desarrollo del quiosco. (Problemas. Juegos, etc.)
3) El material manipulable necesario para cada quiosco.
4) Folios en blanco para la recogida de datos por los monitores.

Además se disponía de unas urnas y las mesas para el concurso de problemas.

En el pasillo de entrada al aula se colocó el video.

Es de destacar en la organización de los quioscos, la labor diaria realizada por los monitores que consistió en:

- Recogida de soluciones encontradas a cada problema y clasificación de los mismos según el orden de dificultad experimentada por los participantes.
- Aportación de aclaraciones sobre algunos problemas.
- Recogida de nuevas propuestas hechas por los participantes.
- Cuantificación de participantes en cada problema del quiosco.
- Preparación del espacio del taller de un día para el siguiente.
- Cuidado del material del quiosco.

Contenido de algunos quioscos

ROMPECABEZAS EN EL ESPACIO

Podemos distinguir en este quiosco varios apartados:

A) *Los cubos: Cubo SOMA; Cubo DIABÓLICO; Cubo MIKUSINSKI.*

El punto de partida era una bolsa con unos 500 cubitos de madera de 2 cm de arista que se podían pegar con un pegamento adecuado.

La idea era empezar por elaborar las piezas necesarias (Policubos) de cada rompecabeza, pasando posteriormente a los ensayos de construcción de cada cubo.

Niveles de trabajo en este quiosco:

a.- Manipulación de los policubos para resolver los distintos rompecabezas.
b.- Una vez encontrada una solución plausible a un cubo-problema, el monitor mostraba al participante la forma de comunicar su solución a otras personas mediante una sencilla codificación.
c.- Construcción de los cubos con ayuda de la codificación escrita por otros participantes.
(Algunos no encontraban solución por sí solos).

B) *Secciones en un cubo.*

Se trataba de imaginar los cortes producidos en un cubo al cortar con un plano, para posteriormente comprobarlo mediante cortes realizados en cubos de porespan.

C) *Poliedros.*

Planteando la pregunta:
"¿Cuántos poliedros regulares hay?"
se pretendía interesar a los participantes en la construcción de los poliedros y el estudio de los mismos. (Comprobación de la fórmula de Euler, "dualidad" de algunos poliedros, etc.).

Para ello disponíamos de plantillas con polígonos en cartón y de piezas poligonales de plástico duro.

Con el trabajo desarrollado en este quiosco se cubrían entre otros los siguientes objetivos:

Desarrollo de la visión espacial.
Comunicación de una solución mediante la codificación.

Comentarios sobre la incidencia de este quiosco:

Nos parece interesante hacer un comentario más minucioso del apartado de los cubos dentro de este quiosco, debido a que fue el sitio más visitado de los talleres de la Semana Cultural.

El cubo SOMA tiene 240 soluciones de las cuales se recogieron en el taller 6 soluciones.

De las soluciones del cubo DIABÓLICO los participantes dan 9 de ellas.

Del cubo de MIKUSINSKI que sólo tiene dos soluciones tenemos datos recogidos de 5 participantes pero la solución es siempre la misma, no se ha logrado montar la segunda solución.

Hay que destacar dos datos interesantes:

Por un lado decir que aunque parecen pocas las soluciones aportadas, si tenemos en cuenta la masiva afluencia de alumnos y profesores a este quiosco, ello es debido a lo difícil que resultaba el montaje de cualquiera de los cubos y en particular el de MIKUSINSKI lo que no era óbice para muchos que se llevaron allí las horas perdidas.

Por otro lado cabe señalar la actuación de dos alumnos que construyeron en un tiempo record los tres cubos, dejando anonadados a los "sufrientes" compañeros de mesa.

AJEDREZ Y MATEMÁTICAS

Se presentan aquí una amplia colección de problemas matemáticos "relacionados" con este juego universal:

- Unos son problemas que utilizan las reglas de movimiento de una o varias piezas en el tablero, que conllevan particularizaciones en tableros más pequeños (4x4; 6x6 ... casillas), búsqueda de estrategias y posterior generalización.

- Otros son problemas geométricos sobre el tablero de ajedrez que requieren cortar tableros (análogos a rompecabezas) y que normalmente presentan varias soluciones.

PROBLEMA DE LOS CUATRO COLORES

Se propone en este quiosco el Teorema de los cuatro colores, en forma de juego, bajo la siguiente pregunta planteada en un cartel:

"¿Cuál es el mínimo número de colores que nos permiten colorear cada mapa, de forma que dos países cualesquiera con frontera común tengan distinto color?"

Se dispone de varios "mapas" trazados sobre cartulinas y de fichas de colores con las que mediante pruebas los asistentes trataban de resolver el problema.

JUEGOS CON PALILLOS

La propuesta de este quiosco consiste en:

- Una colección de problemas para resolver manipulando palillos de igual o diferentes tamaños.

- Propuestas para pavimentar el plano formando polígonos con palillos.

- Varios tipos de juegos con palillos para dos jugadores (juego del Nim; juego de 7-5-3...).

GRAFOS

Se utilizó el conocido problema de los puentes de Königsberg, de recorrer todos los puentes del parque de la ciudad, con la condición de pasar una sola vez por cada uno de los siete que hay.

El juego se hizo sobre un esquema del plano del parque trazado en el suelo, y otro en la pizarra.

La idea era introducir con este juego, los problemas sobre grafos y caminos, ya que es el antecedente histórico de la Topología y de una rama de las matemáticas, la "Matemática Discreta", cuyo peso en el desarrollo de las ciencias Bioquímicas, Electrónicas e Informática entre otras, es cada vez mayor.

Presentamos también en el quiosco una serie de dibujos en los que se puede ver si se pueden o no trazar los caminos sin pasar dos veces por la misma línea.

PUZZLES Y PITÁGORAS

Se exponen aquí diversos carteles, elaborados por los alumnos en cursos anteriores, con distintas demostraciones del Teorema de Pitágoras y varios puzzles con los que se comprueba el teorema.

Se completa el quiosco con varios TANGRAM: tangram chino, tangram pitagórico, tangram triangular, etc.

Parte de este material fue elaborado por los alumnos y profesores siguiendo las plantillas sacadas de libros.

PAVIMENTACIONES

A partir de diversos polígonos de cartulina se hacen distintas propuestas para pavimentar el plano:

"¿Podemos pavimentar usando triángulos?"
"¿Y con pentágonos?
...

PROBLEMAS DE JUEGOS

Incluímos en este apartado una serie de problemas sobre juegos que se plantean invitando al participante a jugar contra el monitor correspondiente, que conllevan búsqueda de estrategias. Para ello se instruyó previamente al monitor en el juego en cuestión, lo que supuso la elaboración de una documentación minuciosa de cada juego. Entre los juegos podemos citar:

- "El juego del 15"
- "Un juego de palabras" (relacionados ambos con el "tres en raya")
- "El salto de la rana" (plantea problemas de intercambio de posiciones de fichas)
- Juegos con palillos
- "El juego del GO" (conlleva búsqueda de estrategias para colocar unas fichas numeradas)

Estos juegos se realizaron sobre cartulinas preparadas por los alumnos.

PARADOJAS Y OTRAS CUESTIONES LÓGICAS

La presentación de este quiosco era totalmente diferente a la de los demás, se trataba de una serie de problemas de razonamiento y de paradojas lógicas, dispuestos en carteles sobre las paredes y en otros lugares del aula.

Estos problemas causaron gran sensación entre los asistentes. Algunas de las paradojas traspasaron las fronteras del taller para convertirse en tema de discusión por pasillos, bar...

Para el montaje y desarrollo de este quiosco contamos con la colaboración especial de una profesora de Filosofía y de algunos de sus alumnos de COU, que se entusiasmaron con este proyecto.

ESCHER

Este quiosco estuvo dispuesto en forma de exposición y de taller de manipulación. En él tratamos de ayudar a conocer algo de la obra de M. Escher, este artista que se sentia "más cercano a los matemáticos que a sus colegas los artistas".

Sobre unas mesas se dispusieron plantillas de "Calidociclos" (anillos tridimensionales compuestos de tetraedros), con dibujos de Escher que permitían su construcción. Sobre las paredes láminas de sus grabados más difundidos y algunas fotocopias de determinados grabados, que ponían de manifiesto la relación de los mismos con algunos conceptos matemáticos:

Recursividad:
("Galería de grabados"; Litografía 1956)

Bucles en el lenguaje: Paradojas
(Bucles en la pintura: "Ascendiendo y descendiendo"; Litografía 1960)

Otras actividades

A) Concurso de resolución de problemas

Se realizó un concurso de resolución de problemas. Estos estaban clasificados en tres niveles de dificultad, dispuestos en tres urnas, con el objetivo de que todos los alumnos pudieran resolver algún problema según su habilidad. Se procuró que en los tres niveles apareciesen problemas de: Ingenio, Lógica, Razonamiento...

Debido a la gran cantidad de soluciones aportadas al concurso, este se falló eligiendo al azar una respuesta de cada nivel y verificando si era acertada, de lo contrario se elegía otra.

Es de destacar la participación de los alumnos de diferentes cursos en la labor de selección, clasificación y escritura de los problemas.

B) Exposición de libros y carpetas con problemas

Se presentó una pequeña colección de libros de "Matemáticas Recreativas" y de "Lógica", aportados por los seminarios de Matemáticas y de Filosofía.

También, unas carpetas con documentación sobre problemas recreativos, curiosidades numéricas ...

Búsqueda de material y comentarios

Es de destacar que una parte fue elaborada por los alumnos y otra intentamos conseguirlo en las tiendas de material didáctico.

Algunos de estos materiales no llegaron a tiempo y de otros no pudimos disponer debido a resultarnos algo caros para el presupuesto disponible, lo que impidió la realización de algunas actividades, como: geometría de los espejos, experiencias con el azar y soluciones experimentales de problemas de máximos y mínimos.

Para la elección de los temas claves de los quioscos hubo que tener en cuenta por una parte el material disponible y la posibilidad real de conseguir nuevos materiales teóricos y manipulables. Por otra, que el problema "emblema" de cada quiosco estuviera debidamente documentado, asequible a los alumnos monitores y además fuesen problemas lúdicos "matemágicos", que dan origen a ramas interesantes de las matemáticas y poco conocidas por no figurar en los programas actuales.

Hay que destacar que la afluencia de alumnos y profesores al Taller desbordó las previsiones debido al especial interés despertado por algunos de los quioscos.

Hubo dos tipos de participantes, los adscritos al taller y los que pasaban a visitar la exposición, muchos de los cuales se quedaban interesados en el concurso, en algún juego, con las paradojas o en algún quiosco de manipulación.

Por los comentarios oídos a los alumnos, podemos afirmar que lo que más contribuyó al entusiasmo suscitado en ellos por el taller, fue la forma en que podían acercarse a los distintos temas, estudiándolos a su manera, ensayando soluciones y solicitando la ayuda del monitor si les era necesario, sin sentirse coaccionados a dar una respuesta obligadamente satisfactoria.

Conclusiones

Básicamente creemos que hemos conseguido los objetivos fundamentales de tocar aspectos de las matemáticas, muchos de los cuales no aparecen todavía recogidos en los temarios oficiales, que sirven para desarrollar el ingenio, elaborar estrategias de resolución de problemas, lo suficientemente atractivos y sorprendentes como para suscitar el interés de cualquier persona no especialista en el tema.

Entendemos que algunos de los diferentes tipos de problemas tratados, con la metodología activa y de búsqueda de estrategias empleada, son suceptibles de utilizarse en las clases ordinarias (los cortes de cubos por planos, realizados por los propios alumnos, facilitan la comprensión de diversos aspectos de la geometría, los problemas de grafos, ...), otros pueden ser tratados no solamente en semanas culturales, sino en actividades que completen la formación matemática del alumno.

La proyección de algunos videos matemáticos en el pasillo de entrada a las aulas, no tuvo mucha incidencia, debido quizás a la ubicación del mismo.

Nos parece interesante el estudio de las soluciones aportadas por los alumnos a los problemas propuestos, que es un trabajo que nos queda pendiente para el futuro.

Escudero, Isabel
Martín, María Luisa
Reyes, Pedro
Rodríguez, Cristóbal
Sanz, Angel
Alumnos de Primero y de COU
I.B. Virgen de Valme del curso 1989-90.
Dos Hermanas, Sevilla.

Bibliografía

ALSINA, C. Y OTROS. **Construir la Geometría**. Síntesis.

ALSINA, C., BURQUÉS, FORTUNY J.M. **Invitación a la didáctica de la Geometría**. Síntesis.

GARDNER, M. **Carnaval matemático**. Alianza Editorial.

GARDNER, M. **Inspiración ¡Ajá!**. Labor.

GARDNER, M. **Paradojas ¡Ajá!**. Labor.

GARDNER, M. **Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas**. Labor.

GARDNER, M. **Ruedas, vida y otros divertimentos matemáticos**. Labor.

DE GUZMÁN, M. **Cuentos con cuentas**. Labor.

HOFSTADTER, D.R., GÖDEL, ESCHER. **Bach un eterno y Grácil Bucle**. Tusquets.

KANTOR, J.M., DARCHE, M. **Mosaico matemático**.

MANSON, J., BURTON, M. **Pensar matemáticamente**. Labor.

MATAIX, M. **Cajón de sastre matemático**. Marcombo.

PERELMAN, Y. **Matemáticas recreativas**. Mir.

RADEMACHER-TOEPLITZ. **Números y figuras**. Alianza Editorial.

SMULLYAN, R. **¿Cómo se llama este libro?** Catedra.

SPEINHAUSS. **Instantáneas matemáticas**. Salvat.

Revistas "Algo".

Revista "Cuadernos de Pedagogía nº 166".

Revista "Muy interesante".

Revistas "Suma nº 2 y 4".

JUEGOS Y ACTITUD CRÍTICA

Antonio Moreno Galindo

Introducción

Hoy día, qué duda cabe, estamos inmersos en un proceso de reforma de la enseñanza que nos lleva a pensar que debe ser continuo y secuenciado. En este contexto cambian los objetivos que pedimos a nuestros alumnos. Cada vez más se tiende a potenciar los aspectos lúdicos y las capacidades de los mismos. El "recorrido por la actividad matemática debe ser en la medida de lo posible, *lúdico* y estar exento de frustraciones. Que contribuya a despertar la curiosidad, la confianza en sí mismo y la *actitud crítica*, como elementos transformadores de la dimensión individual y social de los alumnos"[3].

En este proceso, la formación, y yo añadiría la actitud del profesorado, es imprescindible. ¿Cuál es nuestra formación en matemáticas recreativas? ¿Tenemos nosotros esa actitud crítica que exigimos a nuestros alumnos?

Expongo aquí una experiencia en un curso de formación del profesorado de matemáticas. En él se habló de juegos y, entre otras cuestiones, de tres juegos, que según autores tan reconocidos como Martin Gadner y Brian Bolt, son isomorfos o equivalentes. Pocos pondrán en duda la capacidad y el rigor de ambos autores. Sin embargo, en esta ocasión, una circunstancia ajena a ellos y seguramente desconocida por los mismos hace que tal isomorfismo no sea cierto tal como aparece en la bibliografía en español[1, 2].

Juegos

En el curso 90/91 los CEPs de Almería y El Ejido organizaron un curso titulado "Matemáticas recreativas: su aplicación en el aula", dirigido a profesores de EGB y EEMM.

Uno de sus módulos trataba sobre los juegos. Parece que estos nos incitarán a todos a la búsqueda de estrategias. Son un desafío para medir nuestra habilidad contra el adversario o contra el "solitario". Nos permiten particularizar en muchos casos, hacer nuestras propias conjeturas, ponerlas a prueba llevándolas a la práctica, etc. En resumen nos incitan a pensar matemáticamente.

Juegos isomorfos

En ocasiones nuestra experiencia en juegos anteriores nos puede ayudar en otros nuevos. Concretamente hay juegos que a primera vista parecen distintos, pero que estructuralmente son idénticos. Son juegos equivalentes o isomorfos.

Seleccioné, en mi condición de profesor de dichos cursos, varios juegos que según la bibliografía consultada eran isomorfos y que agrupé bajo el título "Juegos del tipo tres en raya o tatetí".

El Tatetí o tres en raya

Es un popular y antiquísimo juego. Sobre un tablero de 3x3, dos jugadores alternativamente van marcando una casilla. Por tanto el primero en jugar realizará como máximo cinco movimientos; el segundo sólo cuatro. El primero en marcar tres casillas alineadas, horizontal, vertical o diagonalmente, gana. Veamos un ejemplo en el que el primer jugador marca sus casillas con una "X" y el segundo con una "O":

Nº jugada — Primer jugador — Segundo jugador

1ª

X		

X		
		O

2ª

X		
X		
O		

X		
X		
O		O

3ª

X		
X		
O	X	O

X		O
X		
O	X	O

4ª

X		O
X	X	
O	X	O

X		O
X	X	O
O	X	O

Figura 1.

Gana el segundo jugador que juega con círculos.

En el tres en raya, si se juega correctamente, se tiene asegurado al menos quedar en tablas.

El quince gana (Gadner, 1987, pag. 116 y Bolt, 1989, pag. 54)

Este año con la feria ha llegado un nuevo juego. El sr. Loreto desde su caseta vocifera: "¡Acérquense señoras y señores! Las reglas son sencillas. Iremos tomando cartas de este grupo de 9, numeradas del 1 al 9, cuyos números están a la vista de todos. No importa quién salga primero. ¡Pero vds. apuestan 100 pts. y yo 1.000 pts. El primero que con tres de sus cartas logra sumar 15 gana la partida".

He aquí un ejemplo:

	Jugada 1ª	2ª	3ª	4ª	
Contrincante:	7	2	1	5	
Sr. Loreto:	8	6	4	3	Gana: 8+4+3=15

Para la explicación del isomorfismo entre este juego y el tatetí cito textualmente a M. Gadner, 1987, pág.118):

"...este juego es matemáticamente equivalente al tatetí, es decir, al tres en raya. Y lo más sorprendente es que tal equivalencia se establece mediante el lo-shu, el conocidísmo cuadrado mágico de 3 por 3, descubierto en la antigua China.

Para apreciar mejor la belleza del cuadrado mágico, enumeremos primero todas las combinaciones de tres dígitos (distintos entre sí y distintos de cero) que dan suma 15. Existen exactamente ocho de tales ternas:

1+5+9=15 1+6+8=15 2+4+9=15 2+5+8=15
2+6+7=15 3+4+8=15 3+5+7=15 4+5+6=15

Ahora fijémonos bien en el único (sobre la unicidad véase el anexo II) cuadrado mágico de orden 3:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 2.

Observamos que hay ocho grupos de tres casillas que están alineados: las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales principales. Cada una de estas líneas rectas puede identificarse como uno de los conjuntos de tres dígitos que suman 15. Por consiguiente cada uno de los conjuntos de tres números que nos haría ganar la partida en la feria queda representado en el cuadrado mágico por una fila, una columna o una diagonal.

Es ahora sencillo ver que toda partida de "Quince" equivale a otra de tres en raya sobre el cuadrado mágico."

Brian Bolt (1989, pág. 164) hace el mismo razonamiento y propone adaptar el juego a otros conjuntos de números:

10	2	9
6	7	8
5	12	4

suma 21

9	2	7
4	6	8
5	10	3

suma 18

6	-1	1
-3	2	7
3	5	-2

suma 6

Figura 3.

Después de ver el isomorfismo entre estos dos juegos, M. Gadner dice:

"Para reforzar la comprensión de tan fundamental concepto (el isomorfismo), fijémomos en el siguiente juego, que se desarrolla con estas nueve palabras: ..."

Nueve palabras

Este juego es una variante de otro ideado por el matemático canadiense Leo Moser, al que llamó HOT a causa de una de las palabras utilizadas. Rotula las siguientes nueve palabras en una tarjeta cada una, como se muestra y colócalas a la vista sobre la mesa.

AMOR	RISA	SIMA
MERO	ROMA	TOSE
PITO	SETA	EROS

Figura 4.

Dos jugadores van por turno tomando una tarjeta. Quien primero logre disponer de tres tarjetas que contengan la misma letra gana.

Brian Bolt (1989, pág. 54), propone el mismo juego con el siguiente conjunto de palabras: ARAS, TEMA, TUBO, LEES, LIBAR, TIOS, MORO, MIL y ORBE. El juego con este conjunto de palabras se estudia en el anexo I.

Para ambos autores este juego es isomorfo a los anteriores: *"¡Sin duda, tendríamos que jugar mucho rato para darnos cuenta de que no estamos más que jugando al tres en raya! Es fácil ver el isomorfismo de ambos juegos escribiendo las palabras en un cuadrado de tatetí, tal como vemos en la figura. Una rápida inspección muestra que cada terna de palabras con una letra en común ocupa una linea recta, en horizontal, vertical, o diagonal. El juego de palabras, es por tanto, equivalente al tatetí y al juego de «quince»"*, (Gadner, 1987, pág. 119).

O	AMOR	ROMA	TOSE	
I	RISA	SIMA	PITO	
E	EROS	MERO	SETA	
S	R	M	T	A

Figura 5.

Brian Bolt dice (1989, pág. 164): *"...las palabras han sido elegidas cuidadosamente para que encajen como se muestra en la tabla 3x3, de modo tal que las palabras de una fila, columna o diagonal dada tengan cada una, una letra en común que ya no aparece en las demás. Así pues, las series de palabras que dan la victoria son las correspondientes a las líneas de victoria en el tres en raya"*[1].

Actitud crítica

Cuando leí las dos versiones de este juego, asumí como correcto el razonamiento por el cual este es isomorfo al tatetí. Lo mismo ocurrió en el curso en los CEPs dirigidos a enseñantes. Pocos dudaron de aquello que afirmaba "el profesor". Sólo una profesora de dibujo, en contra de la opinión del profesor, vio claramente que el jugador que comenzaba a jugar era el ganador. Un análisis elemental nos hace pensar que este juego con los conjuntos de palabras escogidas no es isomorfo al tatetí. Veámoslo.

Trabajaremos ahora con el conjunto de palabras elegido por M. Gadner: AMOR, RISA, SIMA, MERO, ROMA, TOSE, PITO, SETA y EROS (Ver el anexo I para el otro conjunto).

Podemos disponer una tabla de doble entrada con las palabras en la primera columna y las letras que aparecen en tres o más palabras en la primera fila:

	A	M	O	R	I	S	E	T
AMOR	X	X	X	X				
RISA	X			X	X	X		
SIMA	X	X			X	X		
MERO		X	X	X			X	
ROMA	X	X	X	X				
TOSE			X			X	X	X
PITO			X		X			X
SETA	X					X	X	X
EROS			X	X		X	X	
Nº palabras	5	4	6	5	3	5	4	3
Nº ternas	10	4	20	10	1	10	4	1 TOTAL:60

Tabla 1.

En la penúltima fila aparecen el número de palabras que contienen cada una de las letras. En la última el número de ternas que podemos formar con estas palabras: 10 (combinaciones de 5 elementos tomando 3), 4 (combinaciones de 4 sobre 3), etc. Vemos que hay 60 ternas de palabras con una letra en común. Con esto es suficiente para demostrar que el juego no es isomorfo al tatetí o tres en raya, en el que sólo hay 8 ternas ganadoras. Además de las 8 filas, columnas o diagonales de la figura 5 existen otras 52 ternas ganadoras. No se cumple el razonamiento de Brian Bolt[1] cuando dice que *"las palabras han sido elegidas cuidadosamente ... de modo tal que las palabras de una fila, columna o diagonal dada tengan cada una, una letra en común que ya no aparece en las demás".*

Por otro lado la estrategia ganadora es simple. Obsérvese que las letras A, O, R y S aparecen en cinco o más palabras. La estrategia ganadora del jugador que comienza la partida consiste en ir cogiendo palabras de uno cualquiera de estos cuatro grupos:

A:	Amor,	risA,	simA,	romA,	setA	
O:	amOr,	merO,	rOma,	tOse,	pitO,	erOs
R:	amoR,	Risa,	meRo,	Roma,	eRos	
S:	riSa,	Sima,	toSe,	Seta,	eroS	

Al tener cada uno de estos grupos 5 o más palabras, el jugador que sale puede tomar tres de ellas. Por tanto el jugador que sale gana siempre.

Rectificando

Mientras la elección del conjunto de nueve palabras no es correcta, los dos autores citados comentan a continuación que no es necesario limitarse a palabras y sorprendentemente proponen ejemplos válidos utilizándo símbolos, no letras. *"Lo que verdaderamente se requiere son ocho símbolos distinguibles, uno que corresponda a cada fila, uno a cada columna y uno a cada diagonal"*[1], símbolos que no aparecen en las demás líneas. Esto me hace sospechar que, en realidad, la elección de las palabras anteriores ha sido un problema en la traducción al español del original en inglés. Los dos libros son de la misma editorial y tienen el mismo traductor. He aquí un ejemplo con símbolos:

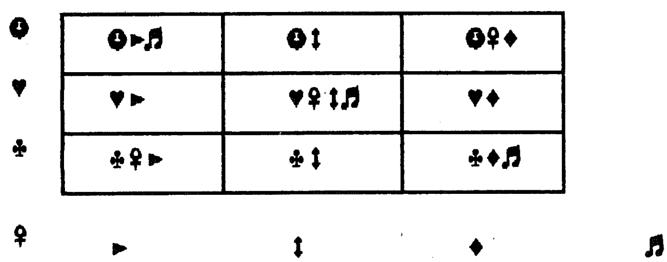


Figura 6.

Esta elección sí es correcta. El hecho de que la carta central tenga más símbolos que las restantes y las de las esquinas más que las de los centros de los lados hace que cualquier jugador las prefiera en este orden, aunque las cartas se dispongan sobre la mesa al azar, sin formar el cuadrado.

Por último propongo un conjunto de 9 palabras, en nuestro idioma, correctamente elegido. Pongo en mayúsculas las letras que están en común en tres palabras. Añado otras letras, en minúsculas, para que no se vea tan claramente qué carta o cartas son mejores. Estas nueve palabras sí que cumplen la condición de que las palabras de una fila, columna o diagonal dada tienen cada una, una letra en común (figura alrededor del cuadro) que ya no aparece en las demás. Así las palabras de la primera fila, SUB, HUMOR y PULIR, tienen en común la letra U que no está en las seis palabras restantes. Las palabras de una diagonal tienen en común la letra L; las de la otra la letra B. Sólo las palabras de la primera columna tienen en común la letra S, etc.

U	SUB	hUmOr	pULIr	
A	mASa	BOLA	hAcIa	
E	LES	fEO	tIBEt	
L	S	O	I	B

Figura 7.

Para jugar se escribirá cada palabra en una tarjeta, todas con el mismo tipo de letra y se dispondrán al azar y a la vista sobre la mesa, para que el jugador inexperto no pueda identificar el juego con el tatetí.

Anexo I

Se estudia aquí sucintamente y en forma análoga a como se ha hecho en el artículo el juego de las nueve palabras con el conjunto elegido por Brian Bolt: ARAS, TEMA, TUBO, LEES, LIBAR, TIOS, MORO, MIL y ORBE. Podemos disponerlas así:

R	ARAS	MORO	ORBE	
T	TIOS	TEMA	TUBO	
L	LEES	MIL	LIBAR	
E	S	M	B	A

Figura 8.

Está mejor elegido este conjunto de palabras. Procedamos igual que antes:

	A	R	S	M	O	B	E	T	I	L
ARAS	X	X	X							
MORO		X		X	X					
ORBE		X			X	X	X			
TIOS			X		X			X	X	
TEMA	X			X			X	X		
TUBO					X	X		X		
LEES			X				X		X	
MIL				X					X	X
LIBAR	X	X				X			X	X
Nº palab.	3	4	3	3	4	3	3	3	3	3
Nº ternas	1	4	1	1	4	1	1	1	1	1
TOTAL TERNAS GANADORAS: 16.										

Tabla 2.

Al haber 16 ternas de palabras con una letra en común no es isomorfo al tatetí, en el que sólo hay 8 ternas ganadoras.

La estrategia ganadora no es en este caso tan obvia. Aún así el jugador que sale jugando gana siempre. La mejor estrategia no es escoger la palabra central (el 5 del tatetí) de la figura 8. Una estrategia ganadora sencilla es la siguiente: el primer jugador toma la palabra ORBE, palabra que forma parte de 10 ternas ganadoras (4 con la O en común, 4 con la R, 1 con la B y 1 con la E). Distingo ahora dos casos:

Caso A. El segundo jugador toma la palabra MORO.

	Primer jugador	Segundo jugador
1ª Jugada	ORBE	MORO
2ª Jugada	LIBAR	Cualquiera
3ª Jugada	TUBO/ARAS	

El primer jugador gana tomando en la 2ª jugada la palabra LIBAR y en la 3ª jugada una de estas dos: TUBO (tienen en común la B) o ARAS (tienen en común la R).

Caso B. El segundo jugador no toma la palabra MORO.

	Primer jugador	Segundo jugador
1ª Jugada	ORBE	Otra que no sea MORO.
2ª Jugada	MORO	Cualquiera
3ª Jugada	ARAS/LIBAR/TIOS/TUBO	

El primer jugador gana tomando en la 2ª jugada la palabra MORO y en la 3ª jugada una de estas cuatro palabras: ARAS (en común la R), LIBAR (R), TIOS (O) o TUBO (O).

Puede ayudarnos a jugar la figura 6 modificada:

R	aras	<u>moro</u>	<u>orbe</u>	
T	<u>TIOS*</u>	TEMA	<u>TUBO</u>	
L	LEES	MIL*	libar*	
E	S	M	B	A

Figura 9.

Las 16 ternas ganadoras son las filas, columnas y diagonales del cuadrado más la toma de tres cualesquiera de entre las cuatro subrayadas o de entre las cuatro en minúscula o las tres que tienen un *.

Anexo II

Sobre la unicidad en el cuadrado mágico de orden 3, con los números del 1 al 9, salvo simetrías o permutaciones de filas

La suma de las 3 filas (o de las tres columnas) será la suma de los 9 números, o sea 45. Por tanto cada fila, columna o diagonal deberá sumar 45/3=15.

Observando las 8 ternas que suman 15:

1+5+9=15 1+6+8=15 2+4+9=15 2+5+8=15
2+6+7=15 3+4+8=15 3+5+7=15 4+5+6=15

tenemos que:

el número 5 forma parte de 4 ternas
los números 2,4,6 y 8 forman parte de 3 ternas
los números 1,3,7 y 9 forman parte de 2 ternas.

Observando las lineas del cuadrado:

E	L	E
L	C	L
E	L	E

Figura 10.

tenemos que:

la casilla central C forma parte de 4 líneas
las casillas E de las esquinas forman parte de 3 líneas
las casillas L de los lados forman parte de 2 líneas.

Identificando las ternas con las líneas llegamos a que:

a) el 5 debe ocupar la casilla central C. Esto puede demostrarse también planteando un sistema de 8 ecuaciones con 9 incógnitas obteniendo que C=S/3. En nuestro caso S=15.
b) los números 2,4,6 y 8 se colocarán en las esquinas E
c) los números 1,3,7 y 9 deben colocarse en los lados L.

Obsérvese también que tras la conclusión a) vemos que los otros dos números de una línea pasando por el centro deben tener la misma paridad, para que la suma dé 15, impar.

Tras esto y haciendo un pequeño ejercicio de combinatoria se obtienen 8 cuadrados mágicos con los números del 1 al 9:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Figura 11.

Resultan ocho casos reducibles todos ellos al primero por una o varias simetrías o permutaciones de filas y columnas.

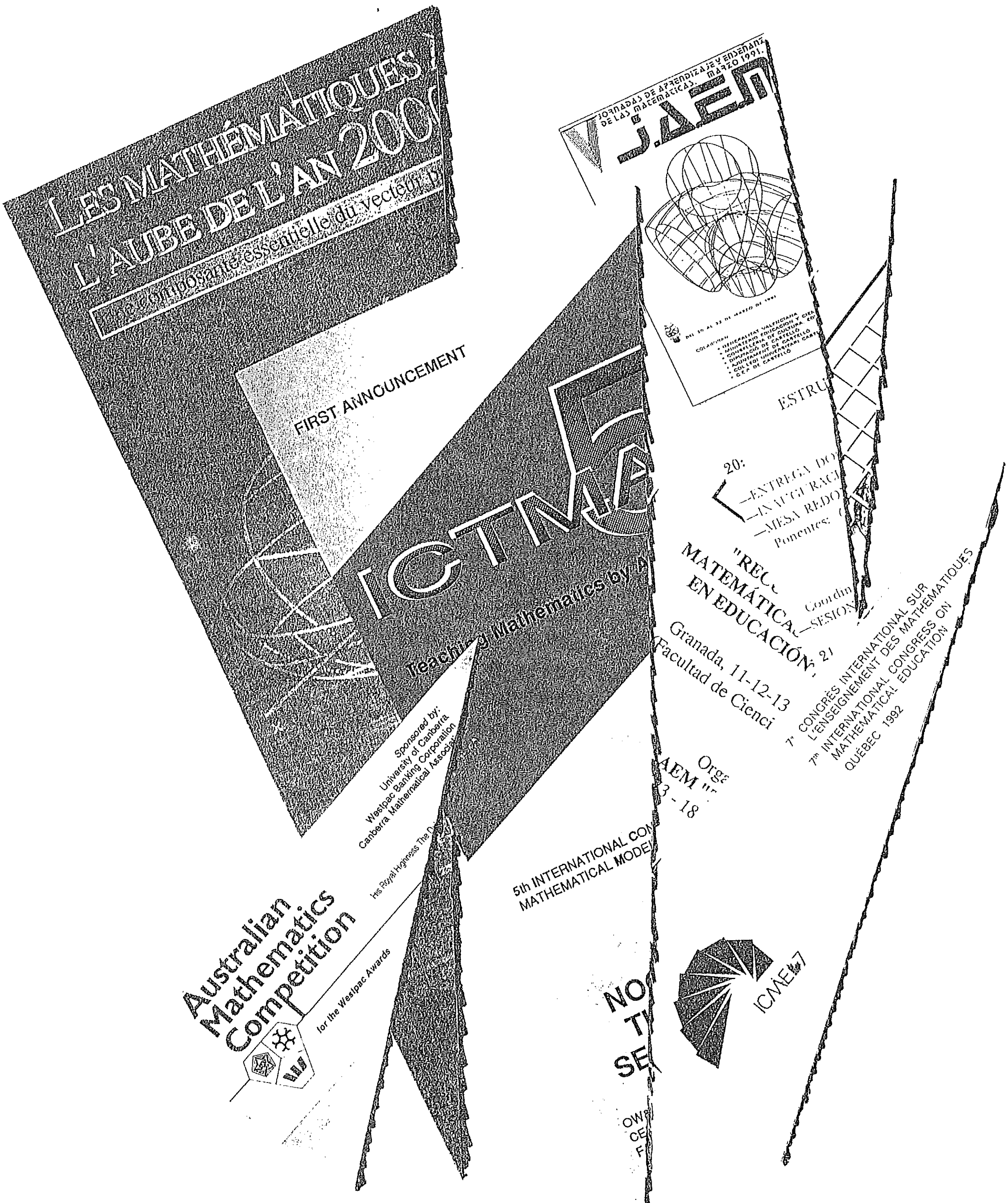
Antonio Moreno Galindo
I.B. Santo Domingo, El Ejido (Almería)

Bibliográfia

[1] BOLT, BRIAN. **Aún más actividades matemáticas**. Lábor. Barcelona. 1989.

[2] GADNER, MARTIN. **Inspiración ¡ajá!**. Lábor. Barcelona. 1987.

[3] VARIOS. **Proyecto curricular de Matemática para el primer ciclo de la R.E.M. elaborado en Andalucía durante el curso 85/65**.



INFORMACIÓN

ORGANIZACIÓN ESPAÑOLA PARA LA COEDUCACIÓN MATEMÁTICA "ADA BYRON"

La Organización Española para la Coeducación Matemática ADA BYRON se constituye en la primavera de 1991, a iniciativa de un grupo de profesoras y profesores de todos los niveles educativos del Estado español, durante las Vª Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Está integrada, a nivel internacional, en la IOWME (International Organisation of Women and Mathematics Education), grupo de trabajo del ICMI.

Su objetivo fundamental es fomentar una coeducación real en los Centros de enseñanza, que ofrezca iguales oportunidades a chicas y chicos tanto para el aprendizaje de las Matemáticas como para sus perspectivas profesionales en ámbitos científicos y tecnológicos. Para ello, la Organización ADA BYRON promueve y difunde estudios en torno al tema, participa en actividades de sensibilización y formación del profesorado y potencia la creación de materiales de aula coeducativos.

Para conectar o asociarse a la O.E.C.O.M. "ADA BYRON"

O.E.C.O.M. "ADA BYRON".
Aptdo. 4051, 28080-Madrid
Cuota anual: 2.000 ptas.

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

III Jornadas Internacionales de Coeducación

Se ha celebrado en Valencia, a finales de Octubre de 1991, la tercera edición de las Jornadas Internacionales de Coeducación, dedicada este año a las Matemáticas, la Ciencia y la Tecnología. Han sido organizadas por el Institut Valenciá de la Dona junto con la Consellería de Educación de la Generalitat y la Universidad de Valencia.

Las sesiones de la mañana se dedicaron a conferencias plenarias, entre las que destacamos las pronunciadas por Leone Burton sobre "Impacto de la igualdad de oportunidades en el pensamiento sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas", Bárbara Smail sobre "Género en la ciencia y tecnología escolares" y Mary Alvarez sobre "Ciencias experimentales: ¿carencias de las chicas?".

Por la tarde las actividades se diversificaron en talleres y actividades más prácticas, y allí se presentaron y analizaron experiencias dedicadas a investigar los problemas de género en las asignaturas científicas y a dar alternativas prácticas para acercarse a una coeducación real en las aulas.

Se cerraron estas Jornadas con una mesa redonda sobre "Diseño Curricular y Coeducación", en la que participaron representantes de la Administración educativa junto con personas que colaboraron en la redacción y revisión de los distintos currículos.

Mª Jesús Luelmo Verdú
S.M.P.M.
I.B. San Mateo. Madrid.

SEGUNDOS ENCUENTROS EXTREMEÑOS DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Los días 19, 20 y 21 de Noviembre de 1991 se han celebrado en Cáceres los II Encuentros de matemáticas para profesores de todos los niveles de enseñanza que ejerzan en Extremadura. Han sido convocados por la S.E.E.M. "Ventura Reyes Prósper" y organizados por la A.P.M. "Halley" de Cáceres con la participación de 140 profesores de los diferentes niveles: desde la Primaria hasta la Universidad.

Durante las tres jornadas de tarde se han desarrollado tres tipos de actividades:

a) Exposición de materiales didácticos relacionados con la enseñanza de las matemáticas.
b) Conferencias plenarias de personas de reconocido prestigio.
c) Comunicaciones de experiencias didácticas.

Exposición

Hemos tenido ocasión de observar y manipular diversos materiales de ayuda para el estudio de algunas de las partes que componen los futuros currícula de matemáticas en la E.S.O. y en el bachillerato:

- Materiales para trabajar en geometría.
- Materiales para realizar actividades que conectan el álgebra con la geometría.
- Materiales para reforzar el cálculo mental de una forma lúdica y atractiva.
- Materiales para medir, realizados por los propios alumnos.
- Materiales para estudiar temas relacionados con el azar y el cálculo de probabilidades.
- Materiales para trabajar algunos aspectos de Astronomía, destacando un hermoso planisferio en el que se podían ver las distintas constelaciones y su composición.
- Materiales para estudiar volúmenes y secciones de sólidos, unos más convencionales y otros menos. Una de las secciones de esta exposición lo ha ocupado el material cedido por la casa Distesa del grupo Anaya.

Conferencias

Un total de cuatro se han dictado durante los Encuentros. La primera a cargo de la experta profesora italiana Emma Castellnuovo que trató los programas de matemáticas del pasado y del futuro. La segunda a cargo del catedrático de Álgebra de la UNEX Juan Antonio Navarro que trató sobre la gravitación newtoniana desde el punto de vista matemático. La tercera a cargo del miembro de la S.A.E.M. "Thales" Antonio Pérez Jiménez que trató sobre matemáticas desde un punto de vista experimental, dando interesantes ideas para trabajar en el aula con materiales y del apoyo que la informática supone para la metodología empleada en la enseñanza de las matemáticas. La cuarta y última a cargo del catedrático de Análisis de la UNEX Carlos Benítez que nos habló del concepto de número.

Comunicaciones

Se han presentado un total de doce. La mayoría se han referido a experiencias concretas y puntuales sobre temas situados en los diferentes niveles en lo que actualmente se encuentra dividido nuestro sistema educativo y algunos enfocados a la futura enseñanza obligatoria (ciclo 12-16), que han tenido enfoques más globalizados y tratando de acercarse al aprendizaje significativo que se recomienda en las directrices señaladas para el desarrollo de esta etapa.

Ha habido dos comunicaciones que han tratado el discutido y polémico tema de la Evaluación en Matemáticas que han representado la aportación de los encuentros a un tema tan delicado y de tanta actualidad en congresos nacionales e internacionales de Matemáticas.

Para terminar, es pretensión de la Sociedad Extremeña organizar estos Encuentros con carácter bienal tratando de recorrer las distintas zonas geográficas de nuestra región.

Antonio Molano Romero
A.P.M. "Halley"

ICSIMT 44

La Comisión Internacional para el estudio y mejora de la Enseñanza de las Matemáticas anuncia su 44º Encuentro Internacional que tendrá lugar en la Universidad de Illinois en Chicago del 3 de Agosto al 8 de Agosto de 1992.

CIEAEM — Commission internationale pour l' tude et l'am lioration de l'enseignment des math matiques — ICSIMT

International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Teaching

Honorary President: A.Z. Krygowska† (Poland)
Honorary Members: W. Servais† and R. Servais (Belgium), L. Felix (France)

President: A.I. Weinzweig (USA)
Vice Presidents: J. Szendrei (Hungary), L. Gugretti (Italy)
Secretary: R. Dekker (The Netherlands)
Treasurer: A. Bartoletti (Switzerland)

ICSIMT 44

44th International Meeting of the ICSIMT

Chicago, USA: Aug. 3 - Aug. 8, 1992

Meeting theme:

The Student Confronted by Mathematics

Second announcement: March 1992

Program committee:
A. I. Weinzweig (USA)
Catherine Inchley (Great Britain)
Bernard Heraud (Canad)
Paolo Boero (Italy)
Francis Michel (Belgium)

ICSIMT 44
c/o Dr. A.I. Weinzweig
University of Illinois at Chicago
Department of Mathematics, Statistics and Computer Science m/c 249
Box 4348
Chicago, IL 60680, USA

Telephone (312) 996-8612/996-2439 Fax: (312) 996-1491 E-mail: U14818 @ UICVM

The meeting will focus on the following questions:

1 (a) What is the neture of the knowledge and understanding of mathematics that students have?
1 (b) What mathematics do we want students to develop?

2 (a) What out-of-school mathematics do students bring to the classroom?
2 (b) How can we exploit this?

3 (a) What are the obstacles to developing and learning mathematics (language, symbolism, abstraction, formalism, students' and teachers' conception of mathematics)?
3 (b) How do students develop mathematical conepts and how can this be stimulated?

4 (a) How can students be involved in doing matematics?
4 (b) How can this involvement lead to the development of mathematical knowledge?

Working languages: English and French

Activities

Plenary sessions will set the theme of the conference. The main activity of the conference will take place in small working groups where the above questions will be discussed. Wording groups will include presentations directly related to the topics under discussion.

Participants are encouraged to bring materials representative of their activities and sample textbooks from their countries.
Free time is scheduled for participants to organize their own activities: poster sessions, visits, etc.

Participants will be free for dinner to sample the varied cuisine offered by Chicago. There will be free time for sightseeing and shopping. Activities for accompanying persons can be arranged.

Practical information
Location: The 44th meeting will take place on the campus of the University of Illinois at Chicago in Chicago, Illinois, U.S.A. Participants will be accommodated in the new, air-conditioned, University housing on campus.

The UIC campus is just one mile from Chicago's downtown with its world class museums, beautiful lakefront, famous architecture, skyscrapers, and free outdoor concerts. Access to downtown and the airport by public transportation is easy and inexpensive.

ICSIMT 44

CONTRIBUTION FORM

Please complete this form and return it before April 15, 1992.
Name: ____________________ First name: ____________________
Country: ____________________ Working language: ______________

I plan to bring the following materials/textbooks for display:

____

Type of contribution (presentation of 15 minutes, poster session, workshop, etc.) ____

Telephone #: ____________ Fax #: __________ E-mail #: __________

Title and summary of presentation (not more than 20 lines, please type or print clearly):

Date: ________________ Signature: ______________________

Forms and payments should be mailed to: ICSMIT 44 (address on first page)

FULL CONFERENCE COSTS

Full payment by:	June 1	June 1 to July 1
Participant	$325US	$350US
Accompanying persons	$275US	$300US
Participant without University housing (includes proceedings, lunch only, and excursion)	$175US	$200US

Accomodations are double occupancy. Some single rooms are available at an additional cost of $120US.

A deposit of $50US for each participant and accompanying person must be sent with registration form by June 1, 1992. The full balance is due no later than July 1, 1992.

All payments must be in US dollars. Any service fees will be billed to registrant.

ICSIMT 44

REGISTRATION FORM

Please complete this form. Registration and deposit must be received by June 1, 1992.

Last Name: ______________ First name: ______________ female/male ________

Address: ____
____
____

Telephone #: ____________ Fax #: __________ E-mail #: ____________

Accompanying persons: ______________________________________
____
____

I would like to share a room with: __________________________________

I would like a single room for which I will pay an additional fee of $120US ________

Payment may be by check (in US dollars) made payable to the **University of Illinois at Chicago** or by Visa or Mastercad.
☐☐☐☐ ☐☐☐☐ ☐☐☐☐ ☐☐☐☐ Visa ☐ Matercard ☐

Expiration ______________ Amount __________ Signature __________

Para mayor información dirigir la correspondencia a:

A. I. Weinzweig
Department MSCS m/c 249
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO
Box 4348
CHICAGO, IL 60680 USA

Asímismo, podemos avanzar que el 45º Encuentro de la CIEAM se celebrará en Cerdeña del 5 al 10 de Julio de 1993 cuyo Comité de Programa estará formado por: Paolo Abrantes, Gérard Audibert, Lucía Grugnetti, André Hardy y Juliana Szendrei.

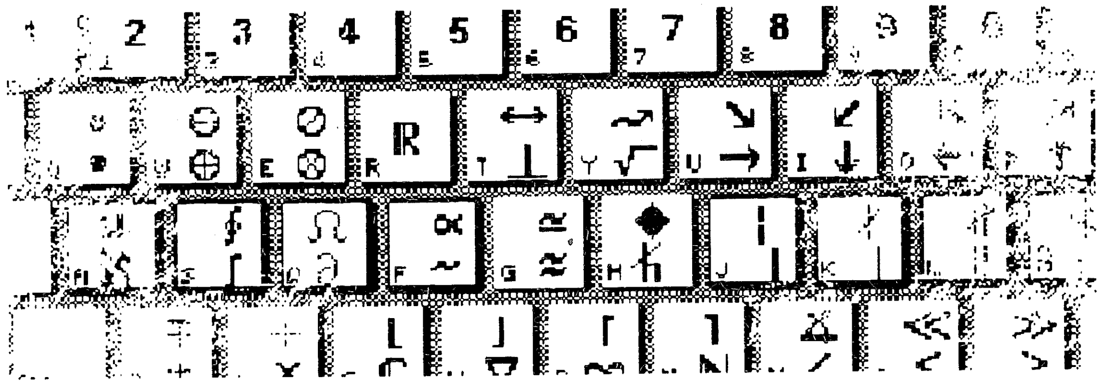
Consejo de Redacción

JORNADAS SOBRE

ENSEÑANZA EXPERIMENTAL DE LA MATEMATICA EN LA UNIVERSIDAD

Madrid, 10, 11 y 12 de Diciembre de 1991

Rectorado de la Universidad Politécnica de Madrid. *Avda. Ramiro de Maeztu, 7. 28040 Madrid*



UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

En el pasado mes de diciembre, los días 10, 11 y 12, organizadas por la Universidad Politécnica de Madrid tuvieron lugar unas Jornadas sobre "Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad", que contaron con la participación de casi 200 profesores universitarios (además de algunos alumnos de postgrado).

El objeto de estas Jornadas era el de fomentar intercambios de ideas y opiniones entre personas interesadas en el planteamiento de nuevas formas, más experimentales, de enseñar Matemáticas, contemplando el uso de nuevas tecnologías, particularmente herramientas informáticas.

A estas alturas de siglo ya nadie discute la utilidad del ordenador como herramienta de trabajo matemático. El espectacular avance de la Informática en las últimas décadas ha permitido el desarrollo de potentes sistemas de Cálculo Científico accesibles desde pequeños ordenadores, que han revolucionado la forma de "calcular" de científicos e ingenieros.

La docencia de las Matemáticas en la Universidad no debe ignorar esta realidad. Pero toda innovación educativa debe ser rigurosamente estudiada y aplicarse con las debidas garantías.

A lo largo de la celebración de las Jornadas se han presentado experiencias, se han contrastado opiniones y se han dado a conocer estudios acerca de los siguientes temas:

- Nuevas tecnologías en Educación.
- El laboratorio de Matemáticas.
- El Álgebra Computacional y el Cálculo Simbólico como herramientas de enseñanza.
- Utilización en la Universidad de software científico elaborado, programas de tratamiento estadístico de datos, etc.

Se han impartido los siguientes conferencias invitadas:

R. VALLE (U. Politécnica de Madrid): "Nuevas tecnologías en educación: aspectos educativos y técnicos".

M. DE GUZMÁN (U. Complutense de Madrid): "Usos y abusos del ordenador en la enseñanza".

D. PEÑA (U. Carlos III de Madrid): "Algunas reflexiones sobre la enseñanza experimental de la Estadística en Universidad".

R. DE LA LLAVE (U. de Texas): "Informatización de un Departamento de Matemáticas".

E. TORRANO (U. Politécnica de Madrid): "Prácticas de Matemáticas en la Facultad de Informática de Universidad Politécnica de Madrid".

J. VILLEN (U. Politécnica de Madrid): "Prácticas de Matemáticas en la Escuela Universitaria de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid".

R. MORIYON (U. Autónoma de Madrid): "Los conocimientos del estudiante de Cálculo desde la perspectiva de la demostración automática".

J. CABRERA (U. de Rutgers): "Evaluación de software para la enseñanza de la Estadística".

A. PÉREZ DE VARGAS (U. Complutense de Madrid): "Matemática experimental en Biología y ciencias afines".

No se pudo impartir la conferencia prevista "Utilización del Cálculo Simbólico en la enseñanza de la Matemática" por enfermedad del conferenciante invitado F. EYSSETTE (U. de Niza).

Por otra parte se han presentado unas 20 ponencias sobre experiencias, trabajos y estudios llevados a cabo por profesores de distintas Universidades Españolas.

Asimismo se celebró una mesa redonda sobre utilización de técnicas experimentales en la enseñanza de la Matemática.

Tanto las conferencias, como las comunicaciones aparecerán proximamente publicados en las actas de las Jornadas.

Cabe señalar el alto grado de interés con el que todos los participantes siguieron el desarrollo de estas Jornadas, a la vista del cual es previsible la celebración de una segunda edición de las mismas.

Alfonsa García Mazarío
E. U. Informática.
Universidad Complutense de Madrid.

ICME 7

VII CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Hasta nuestra redacción ha llegado una carta-invitación de nuestro Presidente D. Gonzalo Sánchez Vázquez, animándonos a participar en el VII Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME´7).

Transcribimos la citada carta así como el programa de la Agencia Oficial.

Desde esta redacción compartimos las inquietudes de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y por tanto os animamos para que la presencia española en Quebec sirva de aliciente al gran encuentro que se nos avecina en 1996.

Consejo de Redacción

CARTA-INVITACIÓN DEL PRESIDENTE

Queridos compañeros y compañeras:

En nombre de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" invita a los profesores españoles a participar en el VII Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-7), que se celebrará en la Universidad Laval de Quebec (Canadá) del 17 al 23 de agosto de 1992.

La importancia de este Congreso Mundial, que orientará la enseñanza de las Matemáticas en los próximos años, está acrecentada para España por el hecho del que el siguiente, el ICME-8, tendrá lugar en Sevilla en 1996, por acuerdo unánime de la Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática (ICMI). Por ello, es fundamental que haya en Quebec una fuerte presencia española, que se unirá a la presentación de un quiosco publicitario del ICME-8, y de un servicio informativo y auxiliar para los participantes de nuestro país.

La SAEM "Thales", entre varias ofertas recibidas, ha encomendado como más ventajosa la organización técnica de este viaje a la agencia "Viajes El Corte Inglés", según las condiciones del folleto adjunto.

Existe además una información exhaustiva en el nº 8 de la revista SUMA de la Federación, con los formularios de inscripción, que es independiente de las tarifas del viaje, pero se puede contactar con la Agencia y con las Sedes Regionales de las Sociedades Federadas para más detalles.

Aunque la inscripción puede hacerse incluso después del 15 de Julio de 1992, es económicamente conveniente formalizarla cuanto antes (os recordamos que el plazo más favorable termina el 15 de Junio).

Recibe un cordial saludo,

Gonzalo Sánchez Vázquez

PROGRAMA AGENCIA OFICIAL

ICME-7

VI' CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE EDUCACION MATEMATICA

QUEBEC 16-23 AGOSTO 1992

FEDERACION ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMATICAS

THALES
Sociedad Andaluza de Educación Matemática

PROGRAMA DEFINITIVO AGENCIA OFICIAL

PROGRAMA DEFINITIVO AGENCIA OFICIAL

PROGRAMAS DE VIAJE

PROGRAMA BASE

16 agosto 1992 - ESPAÑA-MONTREAL
Presentación en el aeropuerto de Madrid Barajas a la hora que sea indicada en su momento. Facturación y embarque por personal de nuestra Organización y entrega de documentaciones. Salida en avión de línea regular con destino MONTREAL. Llegada y traslado (unas 2.30 horas aprox.) en autocar privado de lujo con destino QUEBEC. Llegada al hotel y alojamiento.

17-23 agosto 1992 - QUEBEC
Estancia en el hotel en régimen de alojamiento y desayuno. Días destinados a la participación en las sesiones del VII CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE EDUCACION MATEMATICA.
Posibilidad de realizar diversas excursiones facultativas.

23 agosto 1992 - QUEBEC-ESPAÑA
Desayuno en el hotel. Traslado en autocar privado, con destino Aeropuerto Internacional de Montreal. Facturación y embarque, para salir con destino.

ESPAÑA. FIN DEL VIAJE Y DE NUESTROS SERVICIOS

EXTENSION A NUEVA YORK

23 agosto 1992 QUEBEC-NUEVA YORK
Desayuno en el hotel. Traslado en autocar privado hasta el Aeropuerto de Montreal. Facturación y embarque, para salir con destino.

NUEVA YORK
Llegada. Traslado en autocar privado hasta el hotel. Alojamiento.

24 agosto 1992 NUEVA YORK
Por la mañana, realizaremos la excursión del Bajo Manhatan, con un recorrido por las calles y zonas más representativas: el Madison Square Garden, el bohemio Grenwich Village, el Barrio Chino (China Town), las Torres Gemelas (World Trade Center), la Estatua de la Libertad, etc. Regreso al hotel. Resto del día libre. Alojamiento.

25 agosto - NUEVA YORK
Día libre para poder disfrutar de la ciudad, realizar compras o excursiones facultativas. Hoy les recomendamos la excursión de día completo a Washington. Alojamiento.

26 agosto 1992 - NUEVA YORK
Por la mañana, se realizará la visita del Alto Manhatan recorriendo: el Time Square, el Centro Roquefeller, Central Park, Centro Lincoln y Harlem. Regreso al hotel. Resto del día libre. Alojamiento.

27 agosto 1992 - NUEVA YORK
Día libre hasta la hora de salida hacia el aeropuerto. Facturación del equipaje, trámite de aduana para proceder al embarque en vuelo regular, con destino (noche a bordo).

ESPAÑA. FIN DEL VIAJE Y DE NUESTROS SERVICIOS.

INSCRIPCIONES AL CONGRESO

	PAGO ANTES DEL 15 DE JUNIO 1992	*PAGO DESPUES DEL 15 DE JUNIO 1992*
PARTICIPANTE	295 USD.	345 USD.
ACOMPAÑANTE	90 USD.	110 USD.

NOTA IMPORTANTE
La anulación de inscripciones deberá efectuarse por fax, correo electrónico o télex. Reembolso del 90% si se recibe la anulación antes del 15 de febrero de 1992. Reembolso del 80% si se recibe la anulación antes del 15 de junio de 1992. Reembolso del 5% si se recibe la anulación antes del 15 de julio de 1992.
No se reembolsará ningún pago posterior al 15 de julio de 1992.
Viajes El Corte Inglés a través de su oficina del Centro Comercial de Sevilla, Plaza del Duque, 10, podrá gestionar su inscripción.

PRECIOS POR PERSONA EN HABITACION DOBLE

	PROGRAMA BASE	*EXTENSION NUEVA YORK*
Hoteles de 1ª categoría	177.195 ptas.	59.970 ptas.
Suplemento individual	33.110 ptas.	21.260 ptas.
Hoteles clase turista (superior)	159.450 ptas.	
Suplemento individual	8.000 ptas.	
Hotel clase turista	155.720 ptas.	
Suplemento individual	8.000 ptas.	

Sólo avión + traslado aeropuerto hotel aeropuerto 110.000 ptas.

CONSULTE NUESTRO SISTEMA DE PAGO APLAZADO

PROGRAMA AGENCIA OFICIAL

PROGRAMA DEFINITIVO AGENCIA OFICIAL

CONDICIONES GENERALES

NUESTRO PRECIO INCLUYE

–Billete de avión de línea regular, clase turista, para el trayecto indicado.
–Franquicia de equipaje de 20 kgs. por persona.
–Estancia en los hoteles indicados (en régimen de alojamiento y desayuno en Canadá).
–Asistencia y traslado en autocar privado desde el aeropuerto al hotel y viceversa.
–Visitas y excursiones que se indican en el itinerario.
–Guías locales de habla hispana en todas las excursiones.
–Guía-acompañante de nuestra Organización durante todo el recorrido.
–Seguro de accidentes, enfermedad y equipaje.
- •Seguro de accidentes por capital de diez millones de pesetas y para caso de muerte mientras se utilizan los medios de transporte programados (con un límite de quinientos millones de pesetas).
- •Atenciones médicas (asistencia, medicación, hospitalización, etcétera), por un importe de hasta doscientos mil pesetas por persona.
- •Gastos de repatriación en caso de enfermedad y/o accidente, totalmente cubiertos.
- •Pérdida de equipaje por valor máximo de cincuenta mil pesetas por bulto.

–Bolsa de equipaje.
–Documentación detallada de las ciudades a visitar.

NUESTRO PRECIO NO INCLUYE

–Toda clase de extras, tales como, comidas, cenas, bebidas, lavado y planchado de ropa, teléfono, etc.
–Tasas de aeropuerto, si las hubiera.
–En general, cualquier otro servicio no especificado en este itinerario ni en nuestro apartado «NUESTRO PRECIO INCLUYE».

LEGISLACION APLICABLE

Las siguientes Condiciones Generales están sujetas a lo que se estipula en la Orden del 14 de abril de 1988 (Ministerio de Transportes, Turismo y Comunicaciones) por la que se aprueban las Normas reguladoras de las Agencias de Viajes y específicas de cada Comunidad Autónoma, y en particular por las que se establecen a continuación.

ORGANIZACION
La Organización técnica de estos viajes ha sido realizada por Viajes El Corte Inglés S.A. - C.I.C. - MA59, con domicilio en la Plaza del Duque de la Victoria, nº 1. 41002 SEVILLA.

FECHA DE ELABORACION DEL PRESUPUESTO
El presente presupuesto realizado para agosto de 1992 está confeccionado en base a las cotizaciones vigentes al 19 de noviembre de 1991, y esta sujeto a posibles variaciones, tales como aumento en los costos de combustibles, cambio de moneda, aumentos de tarifas aéreas y demás servicios.
En este caso el precio se vería incrementado en la misma medida en que éstos incidieran sobre él.

CAMBIO DE MONEDA
El cambio aplicado para el cálculo de este presupuesto es de un dólar americano = 107.78. Cualquier variación se verá reflejada en el precio final de este presupuesto.

MINIMO DE PARTICIPANTES
El presente presupuesto realizado para agosto 1992 está sujeto a un mínimo de 50 personas para el Programa Base y 20 para la Extensión a Nueva York.

NOTA IMPORTANTE
El presente presupuesto está sujeto a disponibilidad de plazas en el momento de su contratación.

RECORDAMOS LA POSIBILIDAD DE UTILIZAR LA TARJETA DE COMPRA DE EL CORTE INGLES CON SUS VENTAJOSAS CONDICIONES DE PAGO.

VIAJES El Corte Inglés CONGRESOS SEVILLA

DELEGACIONES DE VIAJES EL CORTE INGLES

ALICANTE
– Avda. Maisonnave, 53 (Centro Comercial) Telfs. 512 31 55 y 512 36 12

ASTURIAS
OVIEDO
– General Elorza, 75 (Centro Comercial Salesas) Telfs.: 21 05 25 y 21 05 60
GIJON
– Hipercor Gijón Avda. Fdez. Ladreda, 129-131 Telfs.: 15 08 33 y 15 04 71

BARCELONA
– Plza. de Cataluña, 14 (Centro Comercial) Telfs.: 318 79 47 y 301 81 96
– Ausías March, 40 Telfs.: 246 16 86 y 245 97 92
– Diagonal, 617-619 (Centro Comercial) Telfs.: 322 99 53 y 322 52 56
– Pº de Gracia, 106 Telfs.: 218 91 81 y 218 90 51
– Vía Augusta, 167 Telfs.: 200 52 78 y 200 52 73
– Hipercor Meridiana Avda. Meridiana, 350-358 Telfs.: 311 82 11
SABADELL
– Centro Comercial Avda. Francesc Maciá vuelta a Pi i Margall (Próxima inauguración)

BILBAO
– Gran Vía, 9 (Centro Comercial) Telfs.: 424 02 15 y 424 22 11
– Empresas y Grupos Gardoqui, 3-8ª Planta Telfs.: 415 97 22 y 415 97 33

BURGOS
– Vitoria, 48 Telfs.: 27 23 92 y 27 20 02

CORUÑA, LA
– Avda. Ramón y Cajal, 57-59 (Centro COmercial) Telfs.: 28 72 11 y 28 73 76

GERONA
– Centre Comercial Girocentre Carrer de Barcelona, 106-110 Telfs.: 24 31 13 y 24 39 97

GRANADA
– Arabial, 97 (Tiendas Cortty) Telfs.: 28 26 12 y 28 26 16

HUELVA
– Hipercor Huelva Vía Paisajista Vuelta Alcalde Federico Molina

JEREZ DE LA FRONTERA
– Hipercor Jerez Ctra. Sevilla, 34 (Recreo de San José) Telfs.: 30 69 50

LOGROÑO
– Gran Vía del Rey D. Juan Carlos I, 47 Telfs.: 20 24 28

MADRID
– Gta. de Cuatro Caminos, 6 y 7, 7ª planta Telfs.: 253 32 21 y 253 32 91
– Preciados, 3 (Centro Comercial) Telfs.: 521 38 58 y 521 63 92
– Goya, 76 (Centro Comercial) Telfs.: 431 33 40 y 431 34 09
– Raimundo Fdez. Villaverde, 79 (Centro Comercial)
- • 2ª Planta-Caballeros Telfs.: 555 91 13 y 555 92 85
- • Terraza - 1ª Planta Telfs.: 597 06 37 y 597 41 40

– Hermosilla, 112 Telfs.: 401 54 60 y 401 56 22
– Tomás Bretón, 21 Telfs.: 239 78 77 y 239 78 61
– Princesa, 56 (Centro Comercial) Telfs.: 542 34 31 y 542 35 29
– Juan Bravo, 3 Telfs.: 435 82 45 y 435 82 95
– Alberto Alcocer, 7 Telfs.: 250 76 00 y 250 76 08
– Naciones, 15, 2ª Planta Telfs.: 413 84 30
– Príncipe de Vergara, 136 Telfs.: 563 84 10 y 563 84 11
– Magdalena Díez, 8, Bajo Telfs.: 571 17 53
– Pza. Pablo Ruiz Picasso, s/n. Edificio Torre Picasso Telfs.: 571 92 80 y 571 93 20
ALCALA DE HENARES:
– Mayor, 6 Telfs.: 889 33 62 y 889 36 08
ALCOBENDAS:
– Marquesa Vda. de Aldama, 11 Telfs.: 652 74 99 y 652 73 21
ALCORCON:
– C. Comercial S.J. de Valderas Ctra. Extremadura km. 12.500 Telfs.: 612 26 63 y 612 29 97
ARGANDA DEL REY:
– Juan de la Cierva, 29 Telfs.: 871 62 11 y 871 62 61
GETAFE:
– Hospital de San José, 17 Telfs.: 683 20 40 y 683 20 76
MAJADAHONDA:
– Pza. de Cristóbal Colón, 2 Telfs.: 638 10 13 y 638 10 14
MERCAMADRID:
– Ctra. Villaverde a Vallecas, km. 3,800 Zona Comercial - local 28
MOSTOLES:
– Av. de la Constitución, 54 y 56 Telfs.: 618 27 36 y 618 27 62
POZUELO DE ALARCON:
– C. Comercial Pozuelo Estación Telf.: 715 52 13
LAS ROZAS:
– Cañadilla, s/n.(Edifico Coronado) Telfs. 637 77 13 y 637 77 95
TRES CANTOS:
– Sector Foresta, 39, local 2 Telfs.: 803 45 85 y 803 04 11
TORREJON DE ARDOZ:
– Libertad, 2 Telfs.: 677 36 36 y 677 30 93

MALAGA
– Av. de Andalucía, 4 y 6 (C.Comer.) Telfs.: 30 82 00 y 30 00 00
– Hilera, 8, 1 (Dpto. Empresas) (Edificio Scala 2000) Telf. 28 37 00
MARBELLA
– Avda. Ricardo Soriano s/n Edificio Estela 1 Telfs. 82 56 02 y 82 56 60

MURCIA
– Avda. de la Libertad s/n (Centro Comercial) Telfs. 29 87 62 y 29 87 66

NAVARRA
PAMPLONA
– Navarro Villoslada, 7 (Caja de Ahorros Municipal de Pamplona) Telfs.: 23 17 00 y 23 17 04
– Avda. del Ejército, 2 (Caja de Ahorros Municipal de Pamplona) Telfs. 22 02 42
TUDELA
– Gaztambide, esq. a Sancho Fuerte (Caja de Ahorros Municipal a Pamplona) Telfs. 41 13 76 y 41 13 60

PALMA DE MALLORCA
– Pº de Mallorca, 24 Telfs. 72 30 26 y 72 30 27

PALMA, LAS
– Tomas Miller, 85 Telfs. 27 35 83 y 27 35 84
– Mesa y López, 18 (Centro Comercial) Telfs. 27 39 78 y 27 31 55

SANTANDER
– Miguel Artigas, 2 y 4 (K.U.O. C. Comercial - Planta 1ª) Telfs. 36 09 90

SEVILLA
– Pza. del Duque, 7 (Centro Comercial) Telfs.: 421 87 45 y 421 87 49
– Luis Montoto, 122 al 128 (Centro Comercial Nervion) Telfs.. 457 85 00 y 457 81 91
– Hipercor Sevilla Ctra. Sevilla-Málaga, 1 (Mercasevilla) Telfs.. 451 77 77 y 451 75 00
– Empresas Pza. del Duque, 1 - 2ª Planta, Local 2 Telf. 422 29 31 y 422 33 52

TENERIFE
PUERTO DE LA CRUZ
– Avda. Venezuela, 6 Telfs.: 38 43 53 y 38 66 55
SANTA CRUZ DE TENERIFE
Pza. Weyler, 9 Telfs.: 27 40 62 y 27 40 58

VALENCIA
– Pintor Sorolla, 26 (Centro Comercial) Telfs. 351 85 00 y 352 17 75
– Menéndez Pidal, 15 (Centro Comercial Nuevo Centro) Telfs. 347 71 42 y 347 33 53
– Plaza del Ayuntamiento, 19, 6º Telf. 351 36 76

VALLADOLID
– Acera de Recoletos, 7 Telfs. 39 28 88 y 39 27 99
– Pº de Zorilla, 130 (Centro Comercial) Telfs. 47 11 16 y 47 11 66

VIGO
– Gran Vía, 25 (Centro Comercial) Telfs. 41 74 55 y 41 73 33
– Empresas Uruguay, 8 - Oficinas 4 y 5 Telfs. 22 46 00 y 22 46 04

VITORIA
– Avda. Gasteiz, 30 Telf. 13 02 69

ZARAGOZA
– Pº de Sagasta, 3 (Centro Comercial) Telfs. 23 77 24 y 23 89 00
– Avda. César Augusto, 14-2ª Planta Telfs.. 21 51 65 y 21 61 55

CONSULTE NUESTRO SISTEMA DE PAGO APLAZADO

PROGRAMA DEFINITIVO AGENCIA OFICIAL

PREMIO ESCOLAR "SAN FERNANDO" EN LA MODALIDAD DE RENOVACIÓN MATEMÁTICA

Coincidiendo la vigencia de la presente edición del P.A.E. "ISLA - 91", con el I Centenario de la muerte del insigne matemático, astrónomo isleño y Director del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, D. Cecilio Pujazón, y con ánimo de colaborar en el desarrollo de las ciencias matemáticas, en el aspecto didáctico, se convoca este premio de acuerdo con las siguientes

BASES

1º Se convoca el Premio Escolar "San Fernando" en su modalidad de Renovación Matemática, con una dotación económica de 500.000 ptas.

2º Podrán optar al mismo todos aquellos interesados en la ciencia matemática.

3º Los trabajos aspirantes al Premio deberán contemplar la vertiente educativo e investigadora. Serán necesariamente originales, quedando excluidos los ya publicados, aunque sea fragmentariamente, y las tesis doctorales.

4º Los trabajos que opten al Premio deberán constar al menos de:

- Diseño curricular.
- Memoria razonada en la que se expresen las características del trabajo y las ventajas de su aplicación.
- Resultados de su experimentación, si los hubiese.

5º El plazo de recogida de los trabajos finalizará el día 1 de Junio a las 13 horas. Respetándose lo dispuesto al respecto por la Ley del Procedimiento sobre envíos por Correos certificados.

6º Los trabajos se presentarán en la Secretaría del P.A.E., sita en el C.P. "Almirante Laulhé", calle García de la Herrán, 30. 11.100 San Fernando.

7º El fallo del Jurado se hará público con anterioridad al 26 de Junio, comunicándose seguidamente a los participantes.

8º La entrega de premios se llevara a cabo en la Sesión de Clausura de las II Jornadas de Educación de San Fernando, prevista para el 26 de Junio de 1992.

9º La composición del Jurado se hará pública con ocasión del fallo del mismo.

10º El Jurado, a la hora de emitir el fallo, tendrá en cuenta:

a) La originalidad del trabajo presentado.
b) Que el desarrollo del trabajo implique una metodología dinámica y aplicable a las aulas.
c) La calidad del mismo.

11º En función de las características y calidad de los trabajos presentados, el Jurado podrá conceder un máximo de tres menciones honoríficas.

12º La propiedad intelectual y demás derechos de los trabajos ganadores del Premio Escolar "San Fernando" de Renovación Matemática será de los autores del mismo. En caso de comercialización o publicación, el autor o autores se comprometen a hacer constar la circunstancia del premio obtenido.

13º Los trabajos serán presentados bajo plica, en la que deberá figurar el título del mismo. Los datos personales del autor o autores, incluído número del D.N.I., así como las circunstacias reflejadas en el apartado número tres de las presentes Bases, deberán constar en un sobre cerrado, que se adjuntará con el trabajo y en cuyo exterior sólo figurará el lema o título del mismo.

14º El Excmo. e Ilmo. Ayuntamiento de San Fernando se reserva el derecho de publicar, en todo o en parte, los trabajos premiados para su distribución gratuita y exclusiva a los Centros Educativos y Culturales del Municipio, sin que ello devengue a los autores premiados cantidad económica alguna. Todo ello sin perjuicio en la base decimosegunda del Concurso.

Este derecho de publicación será ejecutable por el Ayuntamiento, tantas veces como lo considere necesario y sin limitación de número ni de plazo.

15º Los trabajos no premiados podrán ser retirados por sus autores en un plazo máximo de tres meses contados a partir de la fecha del fallo del Jurado. Fanilizado este plazo, los trabajos serán destruidos.

16º La participación en el presente Concurso supone la aceptación de las bases del mismo.

17º El fallo del Jurado será inapelable.

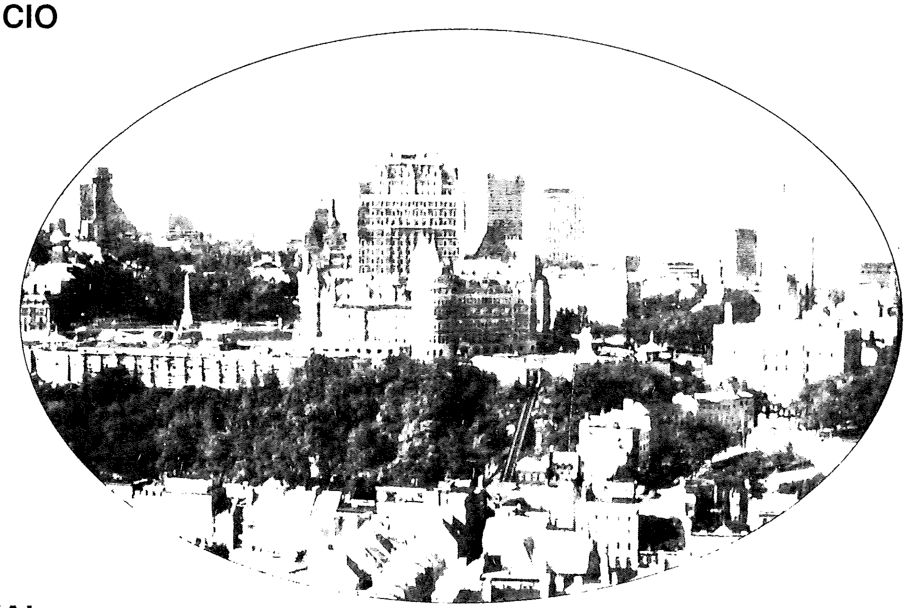
18º El Jurado podrá comprobar en cualquier momento de su actuación la correspondencia del trabajo presentado con utilización práctica en las aulas.

Consejo de Redacción

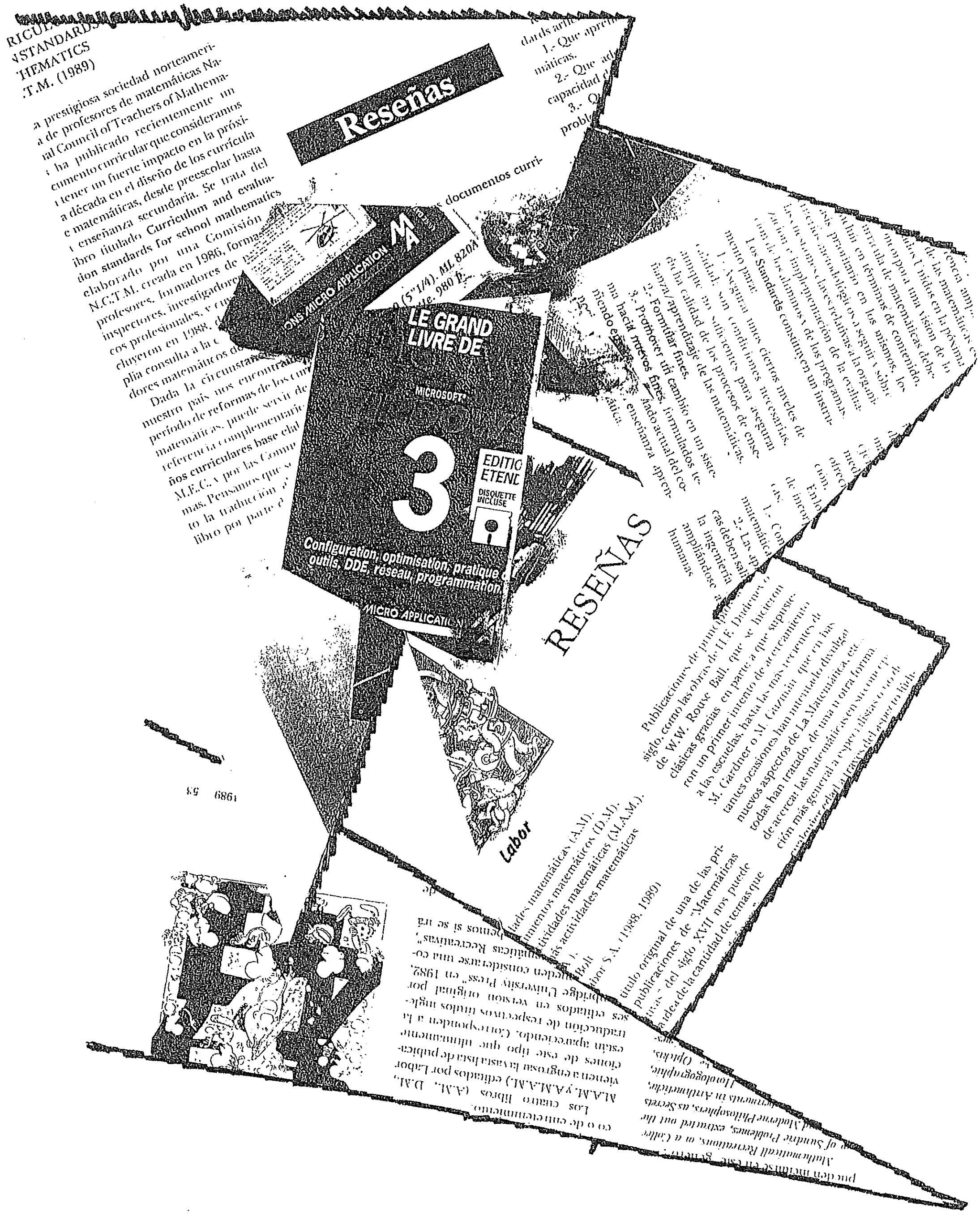
7° CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE EDUCACION MATEMATICA

ICME 7

SEGUNDO ANUNCIO



UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC, CANADA
17-23 de Agosto de 1992


Reseñas
LE GRAND LIVRE DE
MICROSOFT
3
DISQUETTE INCLUSE
Configuration, optimisation, pratique
outils, DDE, réseau, programmation
MICRO APPLICATION
RESEÑAS
Labor

RESEÑAS

MATEMÁTICAS BÁSICAS: DIFICULTADES DE APRENDIZAJE Y RECUPERACIÓN

F. Fernández Baroja y otros (1991)

El presente libro está dividido en dos partes claramente diferenciadas, la primera dedicada a los Fundamentos psicopedagógicos del aprendizaje de las matemáticas y la segunda dedicada al Análisis de las dificultades en áreas específicas y refuerzos pedagógicos.

Comienzan las tres autoras de este libro exponiendo la maduración del pensamiento lógico-matemático con la adquisición de las nociones de conservación, reversibilidad y número, según Piaget, pasando por la noción de espacio y tiempo. Después, siguiendo a Mialaret, desarrollan las funciones de atención y memoria.

Dentro de los contenidos fundamentales, destacan como punto de dificultad las nociones básicas, Numeración, Operaciones, Resolución de problemas y Lenguaje matemático. Como causas de estas dificultades las agrupan en dos bloques, las internas y las externas. En el primero mencionan alteraciones en el desarrollo intelectual, alteraciones del lenguaje y la psicomotricidad, alteraciones neurológicas y perturbaciones emocionales. Como causas externas consideran aquellas condiciones que pueden perturbar el aprovechamiento académico del alumno tales como cuestiones socioambientales, absentismo escolar y enseñanza inadecuada.

Tras dedicar un capítulo a la "Valoración diagnóstica de las estructuras matemáticas" titulan el capítulo siguiente "Didáctica de las Matemáticas" en donde las autoras describen lo que entienden por Enseñanza Tradicional y Activa, resaltando las figuras de Montessori y Decroly. Como nuevas tendencias presentan la línea de la Escuela de Ginebra y las asociaciones de profesionales de Inglaterra y Bélgica, completándolo con el constructivismo y la figura de Miaralet.

Pasan las autoras a detallar los contenidos básicos de la Enseñanza de las Matemáticas tanto para el primer nivel como para el segundo, considerando los bloques de Numeración, Cálculo operatorio, Razonamiento matemático, Topología y Geometría, Medidas, Lenguaje matemático y Estadística.

Completa este primer bloque los Recursos Didácticos especificando el Agrupamiento de alumnos con el estudio del grupo, la valoración de los alumnos con dificultades en matemáticas y cómo se organiza y, coordina el apoyo grupal. Dentro del material matemático específico exponen el Abaco, Material Montessori, Material de Decroly, Números en color, etc., etc.

En el segundo bloque del libro titulado *Análisis de las dificultades en áreas específicas: Refuerzos pedagógicos* lo comienzan las autoras hablando de la conservación de la materia, reversibilidad, correspondencia, seriación y clasificación, completándolas con unas orientaciones didácticas, unos materiales y unas actividades de recuperación para cada uno de los conceptos básicos expuestos.

Dentro de las Dificultades en el aprendizaje de la Numeración se centran en el concepto de número, las decenas, ordenación de cantidades y seriaciones. Presentan las autoras las dificultades en el cálculo operatorio de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, tanto en niños inmaduros como en niños con problemas grafomotrices y perceptibles, niños con alteraciones de memoria o atención y con inestabilidad emocional.

Como elementos que entran en la resolución de un problema destacan el lenguaje, el análisis del problema y el razonamiento matemático, destacando como actividades de recuperación manipulativas, verbales e icónicas.

En el último capítulo tratan aspectos topológicos y geométricos, siendo las relaciones espaciales, medida y figuras geométricas las estudiadas.

A lo largo de 311 páginas de que consta el libro, las autoras -Fernanda Fernández Baroja, Ana Mª Llopis Paret y Carmen Pablo Marco- exponen su experiencia personal de 25 años con niños que presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Dicen las autoras en la introducción "Si bien hay un capítulo dedicado a una revisión histórica de la didáctica de las matemáticas ...", sin embargo, este capítulo titulado "Didáctica de las matemáticas", resulta, cuando menos, incompleto ya que no se puede obviar a la National Council of Teachers of Mathematics, al Área de Conocimiento "Didáctica de las Matemáticas" constituida como tal en la Universidad en 1983, al grupo francés encabezado por Brousseau y Chevallard, a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, etc.

El libro en general, resulta ameno, claro y útil, presentando las autoras una recopilación de aquellos aspectos que han considerado más interesantes para un docente de matemáticas en Educación Primaria. Los enseñantes de Matemáticas que quieran consultarlo y aprovechar de la experiencia de las autoras, tienen un punto de partida importante para la resolución de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Andrés Nortes Checa

PRENSA, MATEMÁTICAS Y ENSEÑANZA

Corbalán Yuste, Fernando

MIRA EDITORES
Zaragoza, 1991

En los últimos años y paralelamente al desarrollo y puesta en marcha de la LOGSE se ha incrementado el uso didáctico de la prensa en las aulas. No cabe duda de que la Reforma en curso ha hecho posible que muchas experiencias ya iniciadas de utilización de los medios de comunicación en la escuela, experimenten un importante auge y sean objeto de estudios y reflexiones a diferentes niveles. Los D.C.B. (Diseños Curriculares Base) incluyen a la prensa como un tema transversal; por lo que el papel de los medios es absolutamente imprescindible en los planteamientos de la Reforma, no sólo para el tratamiento de las materias clásicas sino también desde una perspectiva global e interdisciplinar para todas las áreas. Por ello, y desde hace algún tiempo funcionan Programas específicos de Prensa-Escuela a nivel institucional -entre los que destaca el del Ministerio de Educación y las Asociaciones de Editores- con la finalidad de formar y orientar al profesorado en el uso crítico, plural e innovador de los medios de comunicación escritos en la enseñanza. Todas estas actuaciones no responden simplemente a modas más o menos superfluas y pasajeras, sino que ponen en evidencia la necesaria e imprescindible relación de la prensa y la educación, si queremos optar por una educación realista y práctica, que haga posible la inserción crítica y reflexiva de nuestros alumnos en una sociedad en la que la información/comunicación se muestran como valores prioritarios.

Pero, ¿qué relación puede establecerse entre Prensa, Matemáticas y Enseñanza? Precisamente eso es lo que Fernando Corbalán Yuste, profesor de BUP y asesor de Matemáticas del CEP de Zaragoza, nos hace preguntarnos y a lo que nos responde en este libro que reseñamos, con una extraordinaria perspectiva didáctica y de divulgación matemática. El autor nos anticipa en la introducción del texto que su objetivo fundamental es analizar las matemáticas que se encuentran en los periódicos "para capacitar a las gentes en el manejo de las masas de datos con que somos bombardeados en esta era de la información". Desde esta óptica pretende profundizar en el estudio de la prensa desde las matemáticas; de mostrar cómo los actuales programas de matemáticas pueden utilizar como recursos las páginas periodísticas y plantear actividades de todo tipo a partir de la prensa.

Las Matemáticas, quizás la asignatura más "coco" para la mayoría de nuestros alumnos, están demostrando que son la ciencia más necesaria; además en nuestro contexto actual "éstas proporcionan un medio de comunicación que es poderoso, conciso y sin ambigüedades", según cita el propio autor, basándose en el Informe Cockroft. No es posible entender nuestra civilización ni nuestro desarrollo sin matemáticas.

Acercar este contenido difícil de enseñar y aprender, hacerlo más agradable, ayudar a los alumnos a encontrar el placer intelectual,... supone cambiar totalmente nuestro estilo didáctico. El autor nos hace una propuesta sugerente para lograrlo: conjugar matemáticas y prensa para que los chicos y jóvenes analicen el mundo que les rodea de la forma más concreta y natural posible. La Matemática tendría así un carácter más lúdico, más dinámico, más atractivo,...

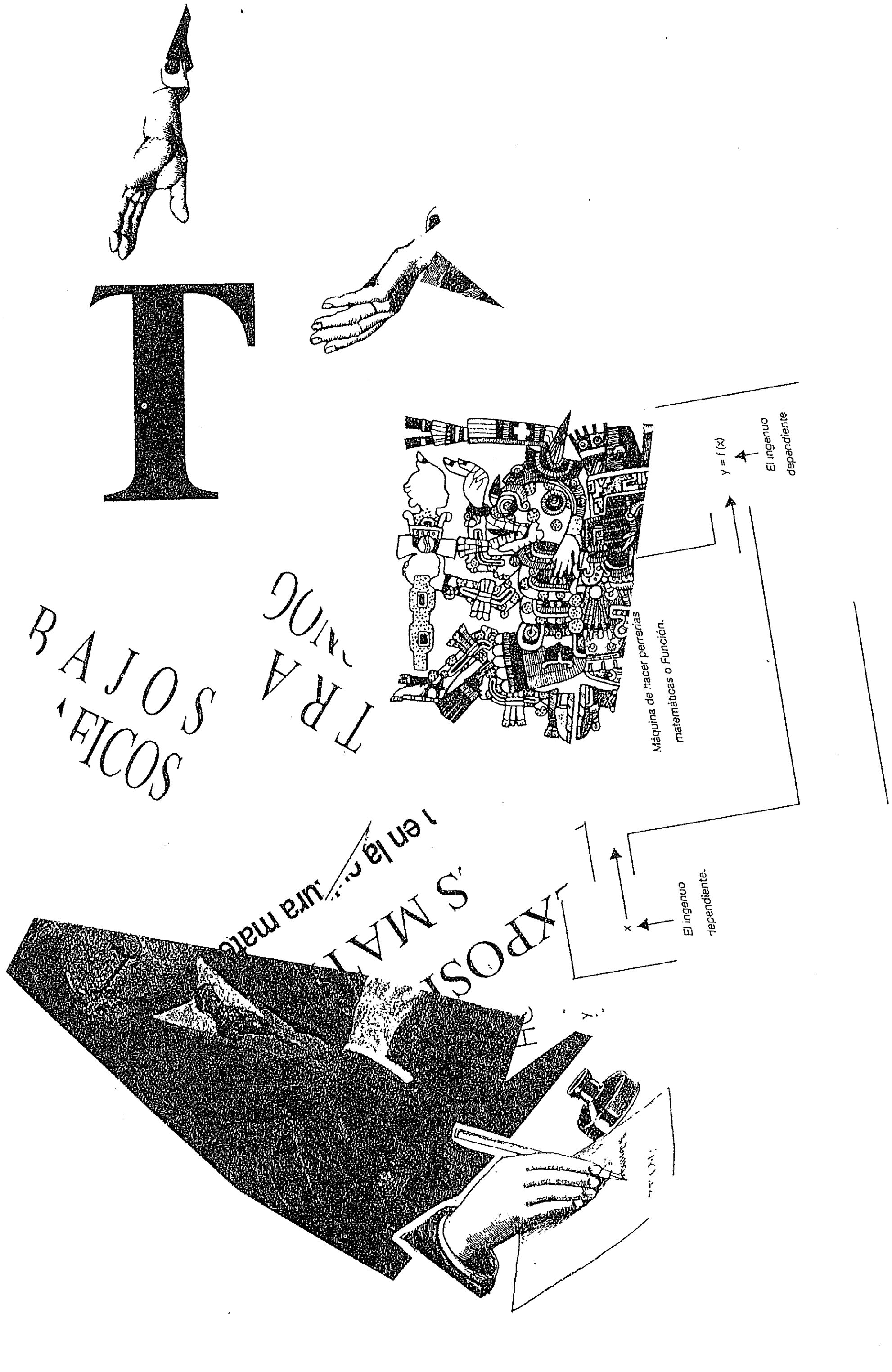
Realmente el libro aporta un análisis muy interesante del estado de las matemáticas como contenido a enseñar y aprender, desde el que se hace necesario la relación prensa-matemáticas como cambio de actitud para acercar esta ciencia a los alumnos. La propuesta, dentro de los planteamientos más innovadores de la Reforma, es utilizar la prensa y en general otros medios: radio, TV, cine, etc. como recursos. Juegos, investigaciones, materiales muy diversos, geometría con papel de prensa,... son algunas de las aportaciones prácticas que hacen de este libro una valiosa muestra como guía para hilvanar la prensa y la matemática; que, por cierto, no es mucho lo que hay publicado en nuestro país. Parece ser que hay matemáticas en los periódicos; la tarea, por tanto, es buscarla y encontrar usos didácticos que favorezcan un aprendizaje más significativo y de mayor calidad para nuestros alumnos, que es, en definitiva, de lo que se trata.

José Ignacio Aguaded Gómez

NUEVA DIRECCIÓN PARA LA CORRESPONDENCIA CON SUMA

Apdo. de Correos 1304

21080 - HUELVA


Máquina de hacer perrerías matemáticas o Función.
y = f (x)
El ingenuo dependiente.

MISCELÁNEA

NOTICIA HISTÓRICA

R. Mariño Caruncho

La Nota necrológica CHARLES HERMITE debida al matemático español Juan Jacobo Durán-Loriga (1854-1911), y cuya versión española ofrecemos hoy a los lectores de SUMA, fue publicada, en italiano, a petición de la revista *Le Matematiche pure ed applicate* dirigida por C. Alasia (N. 4, Vol. 1-Magio 1901). Entre los colaboradores de esta revista figuran Appell, Brocard, Burali-Forti, Halsted, Lemoin, Marcolongo, Peano, Poincaré, Retali, ... y dos españoles: J.J. Durán-Loriga (La Coruña) y Z. García Galdeano (Zaragoza). Una versión inglesa de dicha Nota -que desconocemos- de B. Halsted se publicó en la revista *Science* de Nueva York.

Estos preliminares y la consideración, por ejemplo, de uno de los logros de Durán-Loriga en la importante publicación de G. Loria *Curve piane speciali* (Hoepli ed. 1930. Vol. II, p. 215), revelan la importancia de la obra de nuestro matemático. De parte de esta obra sólo tenemos referencias, pero actualmente disponemos de una treintena de sus trabajos de los cuales entresacamos algunas citas que muestran la comunicación con el exterior que hoy nos interesa destacar.

En 1889, cuando era Capitán de Artillería, Durán-Loriga dedicó su *Teoría de formas algebráicas* al Mayor de la Artillería Real inglesa A.G. Greenhill; en *l'Annuaire des Mathématiciens* (1901) este eminente matemático consideró muy favorablemente las ideas de Durán-Loriga sobre funciones elípticas tratadas en el Congreso de París (1900).

En 1898 Brocard, acusándole recibo de una Nota, le expresaba a Durán-Loriga la originalidad y valía de sus trabajos.

A una "difícil cuestión" sobre Teoría de números planteada por Durán-Loriga en *l'Intérmediaire des mathématiciens* (T. VIII, 1901) contestó parcialmente "el ilustre matemático suizo Sr. M. Lerch", quien volvió a ocuparse de ella en su notable trabajo *Sur quelques applications des sommes de Gauss*.

En *Una conversación sobre La Matemática* (La Coruña, 1904), destacaba Durán-Loriga "los admirables estudios de mi eminente amigo el Teniente general belga J. de Tilly" y "también al hablar de metageometría un deber de amistad y de justicia me impelen a citaros los hermosos trabajos del Profesor Mr. George Bruce Halsted".

Invitado por la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, Durán-Loriga presentó al Congreso de Zaragoza de 1909 varias *Notas de Geometría* de las que destacamos: "no podemos dejar de consignar aquí los numerosísimos resultados que obtuvo nuestro excelente amigo el geómetra francés Sr. Longchamps (hoy fallecido); ...haremos notar, con nuestro excelente amigo, el sabio Profesor de Milán, V. Retali; ...satisfacción que sentimos al escribir hoy, en el idioma patrio, lo que anteriormente habíamos dado a la imprenta en lengua extranjera".

Charles Hermite

El día 14 de enero de 1901 debe ser señalado día de luto *-nigro lapillo* en el texto original- en los anales de la Matemática. El geómetra eminente, el hombre incomparable, el gran HERMITE, una de las glorias más puras de Francia, se ausentó para la Ciencia y la muerte implacable que no perdona postró en el luto a Su familia, a Sus amigos y a Sus admiradores. Como matemático de primer orden lega para gloria de Su Patria y de la humanidad entera un soberbio monumento científico edificado en sesenta años dedicados completamente a "su caro análisis" (para utilizar una de Sus frases) preparando con el influjo de Su genio puesto al servicio de la enseñanza a aquella pléyade de matemáticos ilustres que hoy tanto honran a la Nación hermana. Como STURM, reúne en grado extraordinario la cualidad de profesor haciéndose querer por sus discípulos a los que inculcaba el amor a la ciencia por la ciencia. Si en ello recuerda al gran Geómetra ginebrino, en ciertas condiciones de carácter y en su sagacidad y en el ingenio nos trae a la mente el recuerdo del inmortal CAUCHY. Dotado, como sus compatriotas PASCAL y CLAIRAUT, de singular precocidad, lo vemos, todavía escolar del Liceo Luis el Grande, obtener el premio de matemática con una tesis notable y, poco después, alumno de la escuela Politécnica, llamar la atención de JACOBI con sus primeros trabajos y situarse por derecho propio en primera línea entre los analistas de Europa.

No es posible, hablando de HERMITE, silenciar cómo en el análisis superior, en el Álgebra y en la teoría de números se encuentra por todas partes la huella de su paso de gigante. ¿Cómo no recordar Su Memoria sobre la función exponencial, en la que demostrando la trascendencia del número **e** abre la vía que once años después conduce a LINDEMANN a demostrar la propiedad análoga de π, resolviendo en forma negativa el célebre problema que por dos mil años había ocupado inútilmente a los geómetras?

No se puede ocultar la enorme contribución que HERMITE aportó a la Teoría de formas; su ley de reciprocidad, su admirable investigación sobre covariantes asociados, su trabajo sobre la forma quíntica, su memoria sobre la ecuación de quinto grado y su célebre teorema del cual puede deducirse como corolario el de STURM.

Los trabajos de HERMITE en la teoría de funciones son una nueva revelación de su genio. Su profunda investigación sobre las funciones elípticas, forman un monumento de gloria erigido a la ciencia francesa, revelándose la sagacidad del gran Analista por la facilidad con la cual deduce desde las más altas investigaciones analíticas, corolarios que descubren arduas propiedades de la teoría de números.

Tampoco dejaremos de recordar la obra *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (1885), de la que fue publicada sólo la primera parte: en ella se encuentra la bella aplicación de estas funciones que conduce a la integral general de la ecuación de LAME sobre el equilibrio de temperatura de un elipsoide homogéneo, la cual conduce al Autor, en dos casos particulares, al estudio de la rotación de un cuerpo sólido en torno a un punto fijo (cuando no existen fuerzas aceleratrices), tratado por JACOBI, y a la consideración del péndulo cónico.

De cuanto sabemos deja HERMITE dos obras didácticas: su *Cours de la faculté des sciences de Paris* (1891) y su *Note sur la théorie des fonctions elliptiques* (168 páginas) que sirve de apéndice al *Cours de calcul differentiel et integral* de J.A. SERRET (4ª ed., 1894). También se tienen de Él dos breves pero interesantísimas notas sobre los invariantes de las formas binarias de 5º y 8º grado en la traducción francesa del Álgebra superior de SALMON.

Tuvo el Geómetra Francés la dicha no concedida a todos los grandes hombres de ver reconocido, en vida, su mérito extraordinario por el mundo científico. El 24 de diciembre de 1892, su setenta aniversario, sus amigos, los discípulos, los admiradores del gran Geómetra se reunieron en la Sorbona para ofrecerle la medalla áurea acuñada en Su honor por suscripción internacional. El ilustre artista CHAPLAIN, esculpía en ella el busto del homenajeado y traducía sobre el metal con admirable fidelidad su semblante venerable, bondadoso y franco. Sr. CH. DUPUY concedía a HERMITE en nombre del Presidente de la República la insignia de Gran Oficial de la Legión de Honor y fueron leídas las adhesiones de aquellos que desde distintos puntos del Globo se asociaban a la conmovedora ceremonia.

Otro testimonio de admiración y simpatía fue tributado muy recientemente al gran Geómetra con ocasión de la reunión en París, en el pasado agosto, del congreso internacional de Matemáticos. Los Congresistas acordaron dirigirle un telegrama de admiración y simpatía (él se encontraba en San Juan de Luz). Este acto causó inmensa satisfacción y emoción profunda al Científico, como Él me había escrito en una de sus últimas cartas.

HERMITE conservó hasta los últimos días de su vida su inteligencia privilegiada; pero su cuerpo sufría; en una de sus largas cartas, de pocos días anteriores a la muerte, se lamentaba de sus ataques de asma y de la falta de apetito y de sueño: parecía presentir su próximo fin de tal modo que enviándome uno de sus trabajos me decía que ese sería sin duda el último, y que lo había terminado en gran parte en San Juan de Luz en donde gracias a aquel clima suave había visto despertar su actividad matemática. Este último trabajo es una carta al Prof. PINCHERLE publicada en el tomo V de sus *Annali di Matemmatica*. También decía que había enviado un breve artículo a la nueva publicación *Le Matematiche* del Prof. ALASASIA.

Terminamos haciendo un voto. Deseamos que aquellos que tienen autoridad se hicieran iniciadores de una suscripción internacional para una obra que contuviese una extensa biografía del inolvidable Geómetra y un análisis minucioso de sus trabajos; podrían añadirse algunos artículos breves de los Matemáticos en vida más ilustres; algo en suma que venga a ser casi una corona fúnebre ofrecida a la memoria del Gran extinto.

Mientras ponemos la firma a este sucinto bosquejo, nos vienen a la mente las bellas palabras pronunciadas por LIOUVILLE ante la tumba de STURM y que podrían del mismo modo aplicarse a HERMITE:

Ah! cher Ami, os n´est pas toi qu´il faut plaindre. Echappés aux angoisses de cette vie terrestre, ton âme immortelle et pure habite en paix dane le sein de Dieu, et ton nom vivra autant que la Science.

La Coruña, 3 mayo 1901.

JAN JACOBO DURÁN-LORIGA.

R. Mariño Caruncho

EL ESTADO DE COSAS

Francisco Hernán

Este artículo comienza con un postulado y algunas definiciones, sigue con una tesis bastante categórica y un análisis breve e incompleto que se ha levantado para sostenerla, y acaba extrayendo algunas consecuencias.

Presentación

Un organismo vivo, y por extensión un "sistema inteligente", al encontrarse en un estado de intercambios continuos con su entorno, es un sistema abierto.

El entorno es la parte del medio exterior que está en situación de actuar sobre una estructura o de recibir la acción de esta estructura.

El *sistema* del que aquí se hablará está formado por aquellas hipótesis e ideas nuevas acerca de la enseñanza, que basadas unas en descubrimientos de la biología, otras en datos experimentales de la psicología del aprendizaje y de la inteligencia, otras en la práctica, la reflexión y la filosofía individuales o colectivas de no pocos profesores, se vienen produciendo desde hace varias décadas en libros, revistas, seminarios y congresos profesionales. Aunque el término "nuevas" no sea del gusto de todos, creo que todos sabemos bastante bien de qué se trata.

Más difícil es definir el entorno, porque son demasiado numerosas las partes del medio exterior que actúan sobre ese sistema o pueden recibir su acción. Siguiendo el buen principio de limitar las variables, se entenderá como entorno el conjunto de instituciones administrativas y académicas que están en las cercanías de la enseñanza de las matemáticas, y el conjunto de profesores que, por causas variadas, no han participado en la emisión, transmisión o ensayo de aquellas ideas.

"Cercanías" es un término bastante vago, así que convendrá precisar al menos que ni los núcleos o asociaciones familiares, ni los medios de comunicación masiva -como la televisión-, ni las modas políticas, ni los presupuestos generales del Estado, ni el permanente abismo generacional se incluirán en esas cercanías. Esta decisión hace que disminuya ciertamente muchísimo la trascendencia social de lo que pueda decirse sobre las relaciones entre sistema y entorno. En compensación, tiene la ventaja de que da a la discusión una importancia estrictamente profesional.

Nudo

Naturalmente, el entorno es visto por el sistema inteligente a través de sus propios criterios. Si el entorno está sometido a fluctuaciones que lo hacen inestable y activo, el sistema tiene que evolucionar en consecuencia. Si el entorno está en equilibrio estable, el sistema no tiene ninguna razón para evolucionar, para estar mejor adaptado. En este caso, toda la actividad del sistema, por mucha que sea, es repetitiva, mecánica.

¿Qué es lo que el sistema, según sus propios criterios, puede percibir en el entorno?

Percibe que tras sus apariencias de agitación y tras sus afirmaciones de la necesidad de renovadas interacciones no hay más que ejercicios verbales, que están lejos de tener la determinación y la energía suficiente para poder alterar el equilibrio estático en que realmente se encuentra.

El sistema emite una proposición que le ha llevado su tiempo hasta darle una forma concisa: el aprendizaje consiste en la búsqueda de respuestas para una pregunta que nos interesa.

El entorno advierte que algo se le viene encima. Ve algo subversivo en una propuesta tan simple. Accede de mala gana, pero accede.

Las preguntas nacen de un punto de vista, de algo que ayuda a estructurar aquello que es problemático, aquello sobre lo que vale la pena interrogarse. El punto de vista, claro está, no determina la realidad, sino sólo aquello que de la realidad aceptamos y el modo que tenemos de estructurarlo.

El entorno se arrepiente ya de haber sido tan condescendiente. Una pluralidad inabarcable no puede llevar a ninguna parte. Bien está que cada uno aprenda lo que quiera, pero que lo haga fuera de la escuela.

El sistema, que nunca se ha referido a una voluntad aleatoria, continúa para exponer que si en su vida cotidiana -en su más amplio sentido- los jóvenes tienen ya, aunque sea en estado todavía naciente, sus puntos de vista desde los que hacerse preguntas; en cambio carece por lo general de punto de vista en matemáticas. Y que es asunto de los profesores ayudarles a construirse puntos de vista desde los cuales hacerse preguntas; proponerles situaciones sobre las que valga la pena interrogarse.

Esto es más tranquilizador: es una tutela razonable.

Claro que, correlativamente, los profesores prestan esa ayuda desde sus propios puntos de vista, que marcan aquello sobre lo que creen que valen la pena preguntarse y sobre lo que vale la pena que otros se pregunten. La consciencia de que se mira desde un punto de vista, y el derecho a tenerlo, es lo que humaniza la enseñanza, lo que la hace vulnerable, apasionada, sometida a evolución y, por tanto, a mutuaciones.

¡Pero eso significa la permanente existencia de elementos de anarquía interna en el sistema! No, las diferencias no deben ser tolerables eternamente. La realidad tiene que determinar el punto de vista.

No, no determina un único punto de vista. Pero somos lo bastante realistas como para creer que a la larga la realidad tenga la posibilidad de aceptar o rechazar nuestros varios puntos de vista.

(Pero ya es demasiado tarde; los recelos impiden la fluidez de la comunicación).

Esto en cuanto a las preguntas. Las cosas no van mejor con los conceptos. El entorno ama los diccionarios, así que sigámosle los pasos al de la Real Academia:

i) **Concepto:** idea que concibe o forma el entendimiento.
ii) **Idea:** primero y más obvio de los actos del entendimiento, que se limita al simple conocimiento de una cosa.
iii) **Concebir:** formar idea, hacer concepto de una cosa, comprenderla.
iv) **Entendimiento:** potencia del alma, en virtud de la cual concibe las cosas, las compara, las juzga e induce y deduce otras de las que ya conoce.

Como se ve, una auténtica cinta de Möebius, una superficie de una sola cara, que se limita al "simple" conocimiento de una cosa. Una cosa se sabe o no se sabe, se conoce o no se conoce.

El sistema, simplemente les da más vueltas a las cosas. Se pregunta cuál será el lugar del cerebro en el que se almacenen esos "obvios" actos del entendimiento. Tendrá que ser la memoria a largo plazo.

Ahora bien, los datos experimentales de la biología, a la vez que permiten señalar áreas cerebrales que son la sede del lenguaje, o de la vista, o del olfato, o de la sensibilidad a la temperatura, etc..., no aportan evidencia alguna de que haya un área del cerebro que sea la sede de la memoria. La biología también hace saber que la característica esencial de las neuronas es la extraordinaria riqueza de sus prolongaciones, cuyas ramificaciones y arborescencias ocupan un espacio asombrosamente grande; que el cerebro está constituido, más que por ninguna otra cosa, por "cables" de conexión.

Esto quiere decir que de alguna manera es la enorme red de conexiones entre las neuronas lo que constituirá el soporte de lo que se aprende. De modo que la memoria no es una especie de cemento húmedo (al entorno no terminan de gustarle las analogías, prefiere otros tipos más seguros de razonamiento), cemento en el que se incrustarían los conceptos, y bastará esperar a que se seque para que éstos queden sólidamente asentados. ¿Qué es, pues, un concepto? El sistema no lo sabe, pero no por ello permanece inactivo; actúa sobre la base de que la propiedad de ser un concepto es una propiedad de conectividad, sobre la base de que un concepto es tal por el modo de estar situado en una complicadísima red no estática en la que hay simultáneamente armonía y conflicto.

El hecho de que las matemáticas, la física, la química, sean independientes del tiempo, mientras que en la enseñanza, en el aprendizaje y en la psicología en general, la noción de tiempo desempeña un papel esencial, no ha sido en absoluto comprendido por el entorno, que espera leyes del aprendizaje similares en intemporalidad a las leyes de la mecánica racional.

El aprendizaje matemático se caracteriza por la coordinación de dos tipos de trabajos mentales situados en dos niveles de ejecución diferentes. El nivel 1 es el de la ejecución de las acciones (en particular, los cálculos y las transformaciones), el taller. El nivel 2 es el de la reflexión sobre los propios procedimientos. Desde este segundo nivel se observa y gestiona lo hecho en el primer nivel. Desde el segundo nivel no se observarán "los hechos" sino "lo hecho", para encargarse después de gestionar lo "por hacer"; no se observa el exterior sino el interior; el yo se parte en dos; una parte observa a la otra para preparar información acerca del comportamiento futuro.

La profesora y el profesor expertos llegan a saber lo que está pasando; pueden "ver" que cuando el nivel 2 tenía que haber tomado el mando en la mente de un estudiante, no lo ha hecho. La profesora sabe que ese estudiante debe hacer trabajar más a su nivel 2. Y se lo puede decir al estudiante. Pero en último extremo, cada persona es la única poseedora de su cerebro y por lo tanto la única que puede establecer mejores relaciones entre su nivel 1 y su nivel 2.

Este es, simplemente, el mayor y más difícil problema de la enseñanza de las matemáticas. De manera que puede decirse que una persona ha llegado a ser buena profesora cuando sus estudiantes han aprendido lo importante que es esa separación interna entre el nivel 1 y el nivel 2, cuando les gusta situarse en el mirador del segundo nivel para ver lo que hacen en el primer nivel, cuando saben que sólo mirando desde ahí observarán la diferencia entre lo particular y lo general, entre un elemento y una clase, cuando saben que sólo en el segundo nivel se aprende a aprender.

Y para lograr ésto, para lograr de los estudiantes el progresivo desarrollo de esa conciencia, los profesores necesitan emplear artes de comunicación más propias de eso, del arte, que del discurso.

Para el entorno, los análisis y las propuestas que el sistema ha realizado y emitido carecen de relieve, porque no tienen objetividad suficiente y no aportan demostraciones concluyentes. El entorno sigue esperando descubrimientos definitivos en la ciencia de la educación.

El sistema, que ya ha alcanzado una cierta madurez, no entra al trapo, porque -replica- tal ciencia de la educación no existe si se le exige determinar criterios de identidad para sus objetos, ya que los objetos de la educación, que son las mentes de las personas, son todos distintos, cada uno con una historia, unos motivos, unos afectos, unos deseos y una metas diferentes; no existe si se le exige la reproducibilidad de sus procedimientos, porque esa reproducibilidad depende siempre de los profesores que los intentan aplicar; no existe si se le exige no sólo explicar, sino predecir eventos de resultados gratos, porque sus predicciones no siempre satisfacen las esperanzas del entorno, que tiende a confundir realidad con deseo, y porque esas predicciones son generalmente de carácter estadístico y están a merced de excepciones aleatorias que dependen tanto del momento y de la disposición de los estudiantes como del arte de los profesores.

Por eso al desafío del entorno: demostradme que el sistema funciona y entonces lo adoptaré (lo cual quiere decir realmente: demostradme que podéis conseguir a vuestra manera aquello que yo quiero conseguir a la mía y no consigo), la respuesta -ya algo impaciente- del sistema es, en primer lugar, que no quiere conseguir lo mismo de otro modo, quiere conseguir cosas bastante distintas; además de que los conocimientos no son, ni muchísimo menos, independientes del modo de adquirirlos. Y en segundo lugar, que no pretende demostrar que lo consigue, porque aunque se estuviese en posesión de todos los datos acerca de cada una de las personas, el aprendizaje altera inevitablemente esos datos (una versión psicológica del principio de incertidumbre de Heisemberg), así que buena parte de lo que pasa durante el aprendizaje es imprevisible por definición. En particular, la dinámica de una clase es inestable: una "perturbación" en un lugar o un momento determinados de ella puede acarrear efectos considerables y a "distancias" considerables (según una especie de "efecto mariposa" de la enseñanza).

¡Que es lo que en el fondo estaba deseando oir el entorno! Su inquietud se debía a la posibilidad de que tal vez estuviese cerrando los ojos a pruebas irrefutables, de que tal vez estuviese perdiendo la curiosidad científica. Si resulta que la educación no es una ciencia, nadie tiene más razón que otro, todas las hipótesis tienen algo bueno y algo malo; todo vuelve a estar en calma. Sólo es necesario, como mucho, proceder a una actualización del vocabulario y recomponer el gesto.

Por lo tanto el sistema empieza a no tener ninguna razón para adaptarse mejor al entorno, ya que éste (que comenzó reaccionando contra la estructura del sistema) ya ni actúa sobre la estructura del sistema ni reacciona a sus acciones. Como el entorno no reenvía al sistema los resultados de los ensayos sugeridos por sus ideas (sencillamente porque los ensayos o no se han producido o los que oficialmente se han producido lo han sido con una notable frivolidad), entonces el sistema no tiene que hacer ninguna revisión, ninguna reconstrucción de sus ideas; le basta con seguir diciendo las mismas cosas, con seguir haciendo las mismas propuestas; no tiene necesidad de evolucionar.

Desenlace

¿Qué decisión puede tomar el sistema para salir de este bucle?

A primera vista y sin salir del contexto definido al comienzo, hay cuatro posibilidades. La primera es resistir, a la espera de que una alteración del entorno (no del sistema) ya sea en forma de un ¡ajá! de comprensión repentina, ya sea por un progresivo, aunque lento, avance de maduración social, le haga perder su equilibrio estático, lo cual permitiría establecer nuevas relaciones con el sistema. Muchos mantienen esta esperanza.

La segunda es la de cortar toda relación con el entorno; con lo cual el sistema pasará de ser abierto a ser cerrado, sólo actuará sobre sí mismo. Desvinculado de un medio exterior, su destino es alimentarse de autorreferencias endógenas y vivir en una escolástica circular de símbolos y macrosímbolos que disminuirán paulatinamente su valor de uso. Un importante subconjunto de profesores del sistema parece haberse inclinado por esta decisión (o al menos por la de cortar la relación con una parte del entorno: los profesores).

La tercera posibilidad -no muy diferente de la segunda- es buscar otro entorno con el que interactuar. Y no es muy diferente porque el sistema tiene como entorno natural el que actualmente tiene. Esta decisión supone, pues, en cierto modo, un suicidio del sistema.

La cuarta, en fin, es interactuar de otro modo con el entorno natural. Decidir unilateralmente abrir nuevos canales de conexión, aumentar el caudal de canales ya abiertos pero poco transitados, y mitigar o cegar el paso por otros. Esta decisión no implica la autonomía del sistema, que sigue reconociendo a su entorno; pero al cambiar su modo de emitir obligará al entorno a sincronizar sus mecanismos de recepción. Bien entendido que no hay ninguna garantía de que este movimiento del dial comporte un cambio dinámico del funcionamiento interior del entorno, aunque cabe la posibilidad de que una parte de él (sólo una parte) se haga sensible al nuevo estado de cosas.

Que podría empezar por la decisión de huir de la retórica, evitar la tentación de convencer, y especialmente la tentación de convencer con palabras. Si ya hay en las clases suficiente evidencia de que disertar es predicar en el desierto, ¿por qué habría de ser distinto en las relaciones del sistema con el entorno? Si de verdad se cree que el aprendizaje es básicamente un desarrollo, más que una acumulación, ¿por qué habría de hacerse una excepción con el aprendizaje de los profesores y con la receptividad administrativa o académica?

- Usted siempre habla de la inutilidad de las palabras. ¿Por qué sospecha usted tanto de las palabras cuando se trata de referirlas a la pintura? (Esto le preguntaba Juan Cruz al pintor Francis Bacon en una entrevista publicada en el semanal de "El País" el 4 de agosto de 1991).

- Porque la gente cree que está hablando de pintura cuando la conversación trata de pintura, y en realidad sólo están hablando: no hablan de pintura porque de eso no se puede hablar.

- Si hubiera sido contemporáneo de Velázquez, ¿de qué habría hablado con él? ¿Qué le habría preguntado?

- Nada. ¿Qué podría preguntarse a un pintor? Nada. Ningún pintor puede contarle a nadie lo que le ocurre. Acaso, si hubiéramos sido contemporáneos, lo único que pudo haberme dado habrían sido consejos -no hagas esto, no hagas lo otro-, de los cuales yo habría tomado nota. ¿Pero qué podría preguntarle yo a un genio como él? No creo que ningún pintor pueda preguntarle a otro sobre su propia pintura, o sobre su forma de abordar la obra de arte. Siempre se dan vueltas al asunto, nunca se llega al corazón de la pintura. La conversación con el artista no sirve para nada porque la pintura siempre queda al margen.

No sólo me parece curioso, me parece fundamental para el concepto de enseñanza lo bien que encajan estas ideas de Bacon si se sustituyen los términos "pintor" o "artista", y "pintura" o "arte" por "profesor" y "clase". Probemos con un fragmento: No creo que ningún profesor pueda preguntarle a otro sobre sus propias clases o sobre su forma de afrontar las clases: siempre se dan vueltas al asunto, nunca se llega al corazón de la clase. La conversación con el profesor no sirve para nada porque la clase siempre queda al margen.

A lo más que se puede llegar es a conversar sobre un proyecto de clase, que es algo así como el guión de una película. Y si bien se sabe que con un mal guión no puede hacerse una buena película, no es menos cierto que con un buen guión se pueden hacer películas mediocres. Para saber qué se ha hecho con el guión hay que ver la película.

Del mismo modo que ninguna explicación conseguirá hacer de un aficionado un Rembrandt, ninguna explicación, ninguna colección de técnicas, ningún muestrario de estilos conseguirán transformarme de profesor vulgar en buen profesor.

No sería extraño que estas afirmaciones, aunque puedan parecer inquietantes para el entorno, volviesen como un boomerang al lugar de partida y tuviesen un nuevo efecto tranquilizador. Para perturbar esa relajación hay que completarlas afirmando igualmente que, a pesar de que esas condiciones no sean suficientes, sí que son necesarias. Que hay conocimientos en gran número sobre la educación; tanto de tipo general (esto es, cosas como "Crea lo que crea quien lo emite, todo mensaje es interpretado siempre según el código de quien lo recibe", o "En el comportamiento exploratorio es el propio proceso de aprendizaje, y no el cumplimiento de la acción final, el que proporciona la motivación", o "Generalmente se aprende mejor bajo los signos del afecto que bajo la amenaza de la reprobación",...), como de tipo particular (e.g.: "En los problemas de crecimiento exponencial, la dificultad central para su comprensión es la persistencia del sujeto en considerar cada paso como un evento aislado, sin reconocer el procedimiento iterativo que conecta los eventos", o "No es intuitivamente obvio reconocer que la diferencia entre un número de dos millones de cifras enteras y un número de un millón de cifras enteras es un número muy parecido al primero", o "El algoritmo clásico para la resolución de ecuaciones de segundo grado -independientemente de su utilidad o su elegancia- es un obstáculo epistemológico para la resolución del resto de las ecuaciones",...), y que si bien esos conocimientos no convierten por sí solos a ningún profesor en un científico en la clase, ignorarlos o despreciarlos le llevarán previsiblemente a la oscuridad de las cuevas.

Hay todavía, sin embargo, algo que añadir, y es que para que todo esto surta algún efecto, el sistema debería igualmente huir, como de la peste, de cualquier género de autocomplacencia, es decir, tendrá que estar en permanente vigilancia ante la retórica interna, que casi siempre tiene su origen en diseños de salón que enseguida desencadenan tendencias normativas por encima del bien y del mal, diseños de los que, probablemente, tampoco estas páginas que ahora acaban estarán exentas, a pesar del cuidado puesto en evitarlos.

Francisco Hernán

LA CURIOSA HISTORIA DE ...

Los cerebros de los profesores de matemáticas

Mariano Martínez Pérez

Cuenta Howard Eves, en el "grado" 205 de su libro *Mathematical Circles Revisited*, la siguiente y divertida historia de ciencia-ficción, que traducimos y adaptamos un poco.

Había una vez, muy avanzado ya el siglo XXI, un cirujano neurólogo que había inventado una maravillosa técnica, totalmente segura, para trasplantar cerebros, de tal manera que podía cambiarle a una persona su cerebro por cualquier otro tipo de cerebro que desease. Lógicamente, y en buena economía de mercado, los diferentes tipos de cerebro en oferta costaban distintos precios.

Un buen día se le presentó al cirujano un cliente pidiéndole que le cambiara el cerebro.

- "Muy bien", dijo el médico, "¿qué tipo de cerebro le gustaría a usted tener? Los hay de varios precios. Por ejemplo, el cerebro de un abogado le costaría a usted a 1.000 pesetas los cien gramos, mientras que el de un juez a 5.000 pesetas los cien gramos, y así van subiendo los precios".

- "¡Oh, no!, esos tipos de cerebros no me gustan nada", contestó el paciente, "lo que me gustaría es tener el cerebro de un profesor".

- "Ah, ya entiendo; a usted le gustan las cosas caras !", replicó el cirujano. "Verá, el cerebro de un profesor de Lengua y Literatura le vendrá a costar a razón de 10.000.000 de pesetas los cien gramos; en cambio, los cerebros de los profesores de Historia están ya a 20.000.000 de pesetas los cien gramos. Así que, dígame qué tipo de cerebro de profesor desearía usted que le pusiese".

- "Me gustaría el cerebro de un profesor de Matemáticas", afirmó el paciente.

"¡Vaya, vaya!, veo que le gustan a usted las cosas realmente exquisistas y carísimas", dijo el médico, "ésos son los cerebros más caros de todos; están a 100.000.000 de pesetas los cien gramos".

-"¡Es increíble!", replicó el paciente, "¿por qué tienen que ser tan caros? Si el cerebro de un buen abogado sólo cuesta a 1.000 pesetas los cien gramos, y el de un honorable juez vale a 5.000 pesetas los cien gramos, ¿por qué tiene que costar a 100.000.000 de pesetas los cien gramos el cerebro de un profesor de Matemáticas?"

-"¡Oh!, eso tiene una explicación muy sencilla, y lo entenderá usted enseguida", dijo el médico, "¿se da usted cuenta de la cantidad de matemáticos que se necesitan para reunir tan sólo cien gramos de cerebro?"

Mariano Martínez Pérez

SUMA

hoja para fotocopiar y enviar

Nombre y Apellidos: ______________________________

Calle: ______________________________

Población: ______________________ C.P.: __________

Provincia/País: ______________________ Tfno.: ( ) __________

CIF/NIF: ______________ Centro de Trabajo __________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

☐ Renovación (Nº de suscriptor __________)*   Firma:

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número en curso al precio: 3.000 pts. particulares y 3.500 pts. Centros./Europa $35 U.S.A./América y resto del Mundo $45 U.S.A. (Ver condiciones de suscripción)

☐ Cheque bancario adjunto

☐ Domiciliación bancaria

☐ Giro Postal Nº ______ Fecha __________

* Imprescindible poner el nº de suscriptor

Domiciliación Bancaria

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________________

Agencia: ______________________ Nº C/C: __________

Calle: ______________________________

Población: ______________________ C. Postal: __________

Provincia: ______________________________

Titular: ______________________________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

Firma:

Condiciones de Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a **Revista SUMA, Apdo. 1304, 21080 Huelva (España)**. El número de inicio de la suscripción es siempre el que en ese momento se vaya a editar, considerándose los números precedentes como números atrasados. Dichos números, se enviarán previa solicitud contrarreembolso, al precio de **1.200 pts.** para España y **$ 12 U.S.A.** para el resto del Mundo cada ejemplar, más gastos de envío, excepto el nº 1 que está agotado. Para su comodidad la suscripción le será renovada automáticamente al finalizar el período inicial indicado, si no nos comunica por escrito, su deseo de causar baja.Para Iberoamérica, Europa y resto del Mundo, sólo se aceptará la suscripción por el importe indicado, mediante transferencia internacional a la c/c nº **101.133920286** de EL MONTE, Caja de Huelva y Sevilla, Oficina Principal, sita en c/Plus Ultra, 4. 21001 HUELVA (España). Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirle la domiciliación banciaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso no olvide rellenar con letra clara y firmar y, en el caso de los Centros sellar, los datos bancarios que aparecen en el boletín.

RECOMENDACIONES A AUTORES

1. De carácter general:

1.1. Los artículos se remitirán por triplicado, mecanografiados a doble espacio, por una sola cara y en formato DIN A-4.

1.2. Adjunto al artículo se redactará un resumen (Abstract) de cinco líneas como máximo, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción. Debe ir escrito en hoja aparte.

1.3. Si el/los autor/es ha/n utilizado un procesador de textos, recomendables Wordstar y Wordperfect 5.1. Es conveniente enviar un diskette para facilitar el trabajo de edición y posibles erratas.

1.4. Se identificará el autor o los autores debidamente al final del artículo. Deberá aparecer el nombre completo, lugar de trabajo (si procede) y dirección completa; en el caso de ser varios autores, los datos de al menos uno de ellos y para todos un número de teléfono de contacto.

2. Normas específicas.

2.1. Es aconsejable no rebasar las quince páginas de extensión.

2.2. Los símbolos y unidades empleadas no deben dar lugar a equívocos en su interpretación.

2.3. Las referencias bibliográficas deben ir numeradas entre corchetes y listadas al final del artículo claramente identificadas.

2.4. Las notas a pie de página deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. Los listados de ordenador deben ser rigurosamente originales.

2.6. Las ilustraciones y fotografías (preferentemente en hojas aparte e identificadas), deben estar hechas en blanco y negro, en el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

La mejor forma de presentar las ilustraciones es a tinta china sobre papel vegetal, en el caso de estar hechas con impresora, que sean originales.

3. Envíos.

Revista SUMA, Aptdo. 1304, 21080-HUELVA. España.

Excepcionalmente se puede enviar a cualquiera de los miembros del Consejo de Redacción.

PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A.
SCPM "Puig Adam", Madrid.
Arias Vílchez, J.
SAEM "Thales". I.B. "Auringis", Jaén.
Arrieta Gallastegui, J.
Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P.
EUPEGB, Cádiz.
Balbuena Castellano, L.
SCPM "Isaac Newton". La Laguna.
Bou García, L.
I.B. "Zalaeta", La Coruña.
Benítez Trujillo, F.
SAEM "Thales", E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C.
Escola de Mestres " S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J.
EUPGB, Melilla.
Cancio León, Mª P.
SCPM "Isaac Newton", Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. Mª
EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A.
Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo "Manuel Sacristán"
Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J.
I.B. "Colmenar Viejo", Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M.
SAEM "Thales" (Granada).
Díaz Godino, J.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Fernández Sucasas, J.
EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. Mª
Escola de Mestres "S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M.
SAEM "Thales", I.B. "Averroes", Córdoba.
García Arribas, C.
SAEM "Thales", I.B. "Padre Suárez", Granada.
García Cruz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
García González, E.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
García Cuesta, S.
Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M.
SAEM "Thales", Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F.
SAEM "Thales", EUPEGB, Almería.
Giménez, J.
EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL
ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA
EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO
Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS
ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO
Escola de Mestres "S. Cugat", Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de
Facultad de Matemáticas, Univ. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
López Gómez, J.
SAEM "Thales", I.B. "Luis Cernuda", Sevilla.
Luelmo Verdú, Mª J.
SMPM, I.B. "San Mateo", Madrid.
Llinares Ciscar, S.
SAEM "Thales", EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A.
SAEM "Thales", EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G.
Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A.
Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P.
Instituto Español, Andorra.
Nicoląu Voguer, J.
Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A.
EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R.
SNPM "Tornamira", EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L.
SAEM "Thales", I.B. "Emilio Prados", Málaga.
Pérez Fernández, J.
SAEM "Thales", IFP "Las Salinas", San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R.
SAPM "P. S. Ciruelo", I.B. "Miguel Servet", Zaragoza.
Pérez Jiménez, A.
SAEM "Thales", I.B. "Nervión", Sevilla.
Petri Etxeberría, A.
SNPM "Tornamira", C.P. "Mª Ana Sanz", Pamplona.
Puig Espinosa, L.
EUPEGB, Valencia.
Rico Romero, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Ruiz Garrido, C.
SAEM "Thales", Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A.
I.B. "San Mateo", Madrid.
Sánchez Cobos, F. T.
SAEM "Thales", C.P. "Virgen del Rosario", Jaén.
Santos Hernández, A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA
(M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Soto Iborra, F.
EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A.
SAEM "Thales", C.E. "Blanco White", Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A.
SAEM "Thales", I.B. "Trafalgar", Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L.
SAEM "Thales", Facultad de Matemática, Sevilla.

PARA COLECCIONAR SUMA Nº 2

Como anunciáramos en el número anterior, en el artículo de José Romero, Coordinador Nacional de la Olimpiada, aparecen a continuación los problemas que se propusieron a los chavales que acudieron a la cita de los 5os Juegos Matemáticos y Lógicos Internacionales, celebrados en París.

Esperamos que el contenido os sirva para vuestras clases, con esa idea se han creado estas páginas. Ya sabéis, si se os ocurre algo que creáis interesante reseñar en esta sección, hacédnoslo saber.

Hasta el próximo número.

PARA COLECCIONAR SUMA Nº 2

1. ¿Qué queda de BABA?

Encontrar dos cifras A y B, distintas entre sí, tales que el número de la forma BABABA sea múltiplo de AAA, de BBB y de AB. Sin embargo, BA no es múltiplo de B.

2. Cortes sucesivos

Un número entero se escribe, en base 10, con tres cifras distintas. De este número obtenemos otros tres de la siguiente forma: el primero suprimiendo la cifra de las centenas, el segundo suprimiendo la cifra de las decenas y el tercero suprimiendo la cifra de las unidades. La suma de estos tres números es igual a la mitad del número de partida.

Encontrar dicho número.

3. Los tres hermanos

Alix, Félix y Grégorix deben repartirse la propiedad familiar. En su testamento, su padre les ha exigido que sean lo suficientemente listos como para repartirse el terreno en tres partes de la misma forma (salvo una esquina), con el mismo área, y de forma que cada uno de ellos tenga acceso al pozo P sin salir de su propiedad.

Dibujad las tres parcelas sobre el plano del terreno, sabiendo que la división debe seguir las líneas de la cuadrícula.

4. Dos escalas sobre una cinta

Sobre una cinta de 2 metros de longitud, hemos señalado trazos verdes cada 11 mm, y trazos rojos cada 17 mm, partiendo del mismo extremo de la cinta.

¿Cuántos trazos rojos están a 1 mm. de un trazo verde?

5. La escalera

Escribimos debajo de la escalera la sucesión de los números enteros que no son múltiplos de 3. La primera columna, situada bajo el primer escalón, no tiene más que el 1, la segunda tiene solamente el 2 y el 4, la tercera 5, 7 y 8 ... etc. Cuando se alcanza lo más alto de una columna se continua a partir de la base de la siguiente.

¿En qué columna está el número 1991, y qué lugar ocupa dicho número en esa columna, contando a partir de la base?

(Ejemplo: el número 13 está situado en la 4ª columna, en tercer lugar).

6. El gato indeciso

Un gato, quieto a la izquierda de una ratonera (considerada como un punto), acecha. Un ratón sale, y se escapa rápidamente hacia la derecha. El gato salta al instante y atrapa al ratón. Cuando se dispone a devorar a su víctima, el gato ve salir un segundo ratón que huye, a la misma velocidad que el primero hacia la izquierda. Enseguida el gato se lanza y atrapa a su nueva víctima, después de una persecusión que dura cinco veces más tiempo que con el primer ratón. En el momento en que se dispone a comérselo, el gato percibe con sorpresa un gran ratón que sale del mismo agujero, y que huye hacia la derecha. Abandonando de nuevo a su víctima, el gato salta en su persecución...! Aunque el ratón grande vaya un poco menos rápido que los dos anteriores, el gato emplea el doble de tiempo en atraparlo, del que ha necesitado para el segundo ratón!

¿Cuál es la relación, g/p, de las velocidades del gran ratón y uno de los pequeños ratones? Dar esta relación aproximada a las centesimas.

PARA COLECCIONAR SUMA Nº 2

1. La estrella de la suma

En la punta A de la estrella de 6 puntas, se ha escrito el número 2.
¿Podéis colocar, en cada una de las otras puntas, un número entero distinto de cero de tal forma que los seis números sean todos distintos, y que cada uno de ellos sea igual a la cifra de las unidades de la suma de los números que figuran en las dos puntas vecinas?

Dar, en orden creciente, los números que hay que colocar en las puntas B y C.

2. El reverso de las cartas

Al gran mago A. TOUKARO le gusta hacer el truco de las cartas de la forma siguiente:
Toma una baraja de 20 cartas, coge la de arriba y vuelve a deslizarla debajo de la baraja, después vuelve la siguente sobre la mesa. Es un as de pique. Toma la nueva carta de arriba y vuelve a deslizarla debajo del paquete, de nuevo vuelve la siguiente: es un as de corazones. Continua así hasta la penúltima carta de la baraja, y, en orden de color pique, corazones, diamantes y tréboles, hace aparecer sucesivamente los 4 ases, después los 4 reyes, los 4 caballos, las 4 sotas, y los 10 de pique, de corazón y de diamantes.
Ahora no queda más que una carta que vuelve al fin: ¡el diez de trébol, seguro!
Pero, ¿sabrías indicar, en el paquete inicial, qué carta estaba en el lugar 17 y el lugar que ocupaba la sota de diamantes, el diez de trébol, y el diez de corazones?

Se supone que la carta nº 1 es la de arriba del paquete.

3. Cortar el pescado

¿Cómo cortar con un cuchillo el pescado de la figura con dos cortes rectilíneos de forma que en lo posible se pueda reconstruir un cuadrado yuxtaponiendo los tres trozos obtenidos?

Indicar los cortes sobre el dibujo.

4. Los pentágonos patagónicos

Al borde de un lago de la Patagonia, una nueva especie de tortuga acuática, desconocida hasta ahora, acaba de descubrirse. Las escamas pentagonales, debajo de su caparazón, son aleatoriamente claras u oscuras. Sobre cada pentágono del especimen representado en la figura, hemos indicado el número de pentágonos adyacentes oscuros, más él mismo si es oscuro (dos pentágonos se consideran adyacentes si tienen un lado en común).

Rayar las casillas oscuras del caparazón.

5. El carpintero geómetra

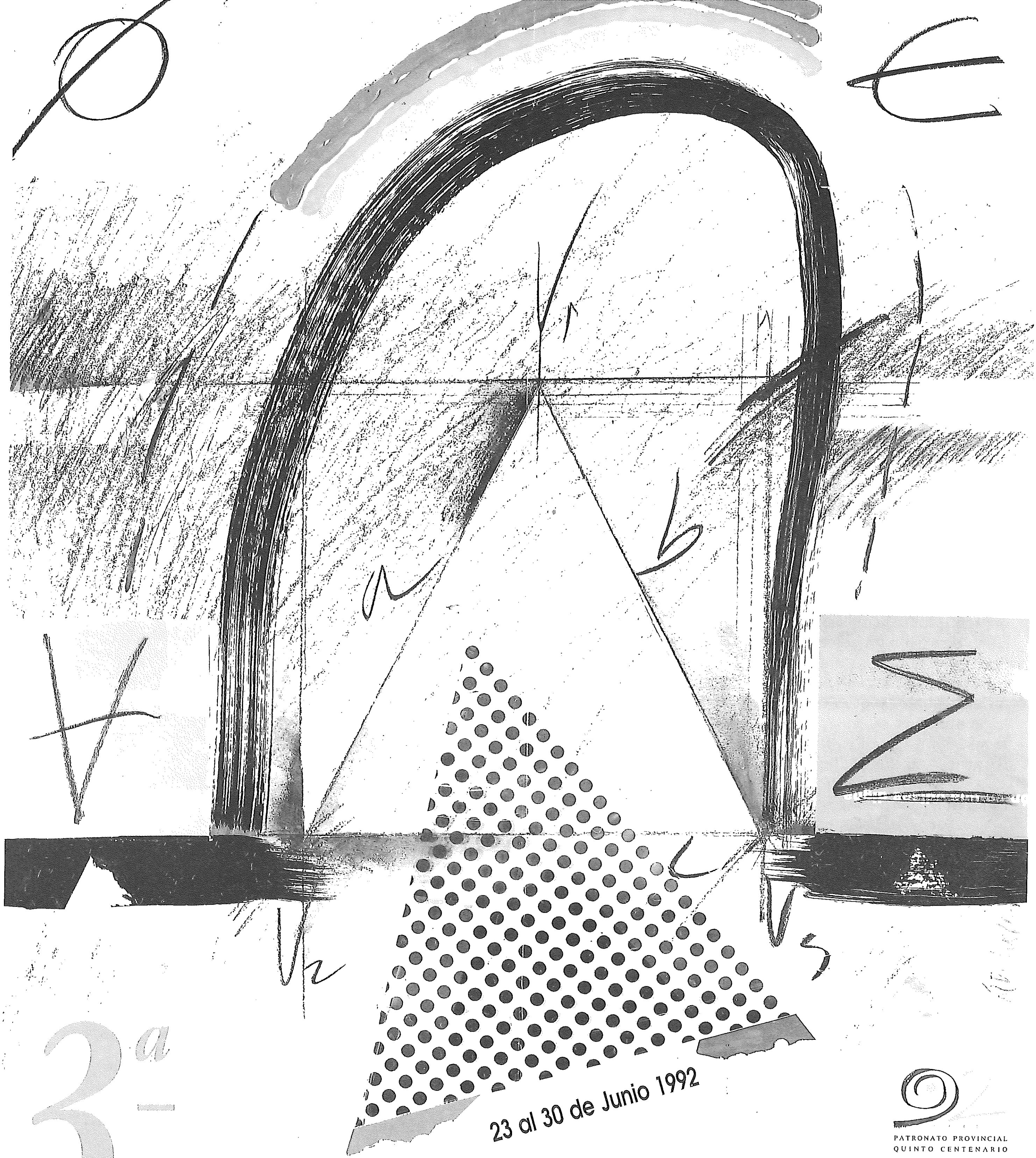
Un carpintero quiere transformar una bandeja rectangular cuyas medidas son 45 cm x 32 cms, por cortes, según una línea quebrada, con dos trozos que volverá a pegar después. Observa que puede hacer este corte de dos formas diferentes. El carpintero escoge, seguramente, la solución que da la línea de corte más corta.

¿Podéis dar, en centímetros, la diferencia entre estas dos líneas de corte?

6. Travesía

Los profesores y alumnos de un instituto (1991 personas en total), deben atravesar un río. Disponen para ello de una barca que no puede contener más de 100 Kg. Cada alumno pesa 50 Kg. y cada profesor 100 Kg. Se necesitan al menos 4235 travesías para que pasen todos.

¿Cuántos alumnos hay en el instituto?
(Atención: cada ida y vuelta cuenta por dos travesías)



OLIMPIADA MATEMATICA NACIONAL

F. E. S. P. M.

COLABORAN: Ayuntamiento de Huelva, Palos de la Frontera, Moguer, Bollullos del Condado, Aracena, Almonte y Cádiz. Diputaciones de Huelva y Cádiz. Delegaciones de Cultura y Medio Ambiente y Educación. Gobierno Civil. A.I.Q.B., El Monte, Caja Postal, SONY, La Casera, CEPS de Bollullos del Condado y Huelva, Huelva Información, La Caixa y el I.C.E. de Huelva.