JUEGOS Y ACTITUD CRÍTICA

Antonio Moreno Galindo

Introducción

Hoy día, qué duda cabe, estamos inmersos en un proceso de reforma de la enseñanza que nos lleva a pensar que debe ser continuo y secuenciado. En este contexto cambian los objetivos que pedimos a nuestros alumnos. Cada vez más se tiende a potenciar los aspectos lúdicos y las capacidades de los mismos. El "recorrido por la actividad matemática debe ser en la medida de lo posible, *lúdico* y estar exento de frustraciones. Que contribuya a despertar la curiosidad, la confianza en sí mismo y la *actitud crítica*, como elementos transformadores de la dimensión individual y social de los alumnos"[3].

En este proceso, la formación, y yo añadiría la actitud del profesorado, es imprescindible. ¿Cuál es nuestra formación en matemáticas recreativas? ¿Tenemos nosotros esa actitud crítica que exigimos a nuestros alumnos?

Expongo aquí una experiencia en un curso de formación del profesorado de matemáticas. En él se habló de juegos y, entre otras cuestiones, de tres juegos, que según autores tan reconocidos como Martin Gadner y Brian Bolt, son isomorfos o equivalentes. Pocos pondrán en duda la capacidad y el rigor de ambos autores. Sin embargo, en esta ocasión, una circunstancia ajena a ellos y seguramente desconocida por los mismos hace que tal isomorfismo no sea cierto tal como aparece en la bibliografía en español[1, 2].

Juegos

En el curso 90/91 los CEPs de Almería y El Ejido organizaron un curso titulado "Matemáticas recreativas: su aplicación en el aula", dirigido a profesores de EGB y EEMM.

Uno de sus módulos trataba sobre los juegos. Parece que estos nos incitarán a todos a la búsqueda de estrategias. Son un desafío para medir nuestra habilidad contra el adversario o contra el "solitario". Nos permiten particularizar en muchos casos, hacer nuestras propias conjeturas, ponerlas a prueba llevándolas a la práctica, etc. En resumen nos incitan a pensar matemáticamente.

Juegos isomorfos

En ocasiones nuestra experiencia en juegos anteriores nos puede ayudar en otros nuevos. Concretamente hay juegos que a primera vista parecen distintos, pero que estructuralmente son idénticos. Son juegos equivalentes o isomorfos.

Seleccioné, en mi condición de profesor de dichos cursos, varios juegos que según la bibliografía consultada eran isomorfos y que agrupé bajo el título "Juegos del tipo tres en raya o tatetí".

El Tatetí o tres en raya

Es un popular y antiquísimo juego. Sobre un tablero de 3x3, dos jugadores alternativamente van marcando una casilla. Por tanto el primero en jugar realizará como máximo cinco movimientos; el segundo sólo cuatro. El primero en marcar tres casillas alineadas, horizontal, vertical o diagonalmente, gana. Veamos un ejemplo en el que el primer jugador marca sus casillas con una "X" y el segundo con una "O":

Nº jugada — Primer jugador — Segundo jugador

1ª

X		

X		
		O

2ª

X		
X		
O		

X		
X		
O		O

3ª

X		
X		
O	X	O

X		O
X		
O	X	O

4ª

X		O
X	X	
O	X	O

X		O
X	X	O
O	X	O

Figura 1.

Gana el segundo jugador que juega con círculos.

En el tres en raya, si se juega correctamente, se tiene asegurado al menos quedar en tablas.

El quince gana (Gadner, 1987, pag. 116 y Bolt, 1989, pag. 54)

Este año con la feria ha llegado un nuevo juego. El sr. Loreto desde su caseta vocifera: "¡Acérquense señoras y señores! Las reglas son sencillas. Iremos tomando cartas de este grupo de 9, numeradas del 1 al 9, cuyos números están a la vista de todos. No importa quién salga primero. ¡Pero vds. apuestan 100 pts. y yo 1.000 pts. El primero que con tres de sus cartas logra sumar 15 gana la partida".

He aquí un ejemplo:

	Jugada 1ª	2ª	3ª	4ª	
Contrincante:	7	2	1	5	
Sr. Loreto:	8	6	4	3	Gana: 8+4+3=15

Para la explicación del isomorfismo entre este juego y el tatetí cito textualmente a M. Gadner, 1987, pág.118):

"...este juego es matemáticamente equivalente al tatetí, es decir, al tres en raya. Y lo más sorprendente es que tal equivalencia se establece mediante el lo-shu, el conocidísmo cuadrado mágico de 3 por 3, descubierto en la antigua China.

Para apreciar mejor la belleza del cuadrado mágico, enumeremos primero todas las combinaciones de tres dígitos (distintos entre sí y distintos de cero) que dan suma 15. Existen exactamente ocho de tales ternas:

1+5+9=15	1+6+8=15	2+4+9=15	2+5+8=15
2+6+7=15	3+4+8=15	3+5+7=15	4+5+6=15

Ahora fijémonos bien en el único (sobre la unicidad véase el anexo II) cuadrado mágico de orden 3:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Figura 2.

Observamos que hay ocho grupos de tres casillas que están alineados: las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales principales. Cada una de estas líneas rectas puede identificarse como uno de los conjuntos de tres dígitos que suman 15. Por consiguiente cada uno de los conjuntos de tres números que nos haría ganar la partida en la feria queda representado en el cuadrado mágico por una fila, una columna o una diagonal.

Es ahora sencillo ver que toda partida de "Quince" equivale a otra de tres en raya sobre el cuadrado mágico."

Brian Bolt (1989, pág. 164) hace el mismo razonamiento y propone adaptar el juego a otros conjuntos de números:

10	2	9
6	7	8
5	12	4

suma 21

9	2	7
4	6	8
5	10	3

suma 18

6	-1	1
-3	2	7
3	5	-2

suma 6

Figura 3.

Después de ver el isomorfismo entre estos dos juegos, M. Gadner dice:

"Para reforzar la comprensión de tan fundamental concepto (el isomorfismo), fijémomos en el siguiente juego, que se desarrolla con estas nueve palabras: ..."

Nueve palabras

Este juego es una variante de otro ideado por el matemático canadiense Leo Moser, al que llamó HOT a causa de una de las palabras utilizadas. Rotula las siguientes nueve palabras en una tarjeta cada una, como se muestra y colócalas a la vista sobre la mesa.

AMOR	RISA	SIMA
MERO	ROMA	TOSE
PITO	SETA	EROS

Figura 4.

Dos jugadores van por turno tomando una tarjeta. Quien primero logre disponer de tres tarjetas que contengan la misma letra gana.

Brian Bolt (1989, pág. 54), propone el mismo juego con el siguiente conjunto de palabras: ARAS, TEMA, TUBO, LEES, LIBAR, TIOS, MORO, MIL y ORBE. El juego con este conjunto de palabras se estudia en el anexo I.

Para ambos autores este juego es isomorfo a los anteriores: *"¡Sin duda, tendríamos que jugar mucho rato para darnos cuenta de que no estamos más que jugando al tres en raya! Es fácil ver el isomorfismo de ambos juegos escribiendo las palabras en un cuadrado de tatetí, tal como vemos en la figura. Una rápida inspección muestra que cada terna de palabras con una letra en común ocupa una linea recta, en horizontal, vertical, o diagonal. El juego de palabras, es por tanto, equivalente al tatetí y al juego de «quince»"*, (Gadner, 1987, pág. 119).

O	AMOR	ROMA	TOSE	
I	RISA	SIMA	PITO	
E	EROS	MERO	SETA	
S	R	M	T	A

Figura 5.

Brian Bolt dice (1989, pág. 164): *"...las palabras han sido elegidas cuidadosamente para que encajen como se muestra en la tabla 3x3, de modo tal que las palabras de una fila, columna o diagonal dada tengan cada una, una letra en común que ya no aparece en las demás. Así pues, las series de palabras que dan la victoria son las correspondientes a las líneas de victoria en el tres en raya"*[1].

Actitud crítica

Cuando leí las dos versiones de este juego, asumí como correcto el razonamiento por el cual este es isomorfo al tatetí. Lo mismo ocurrió en el curso en los CEPs dirigidos a enseñantes. Pocos dudaron de aquello que afirmaba "el profesor". Sólo una profesora de dibujo, en contra de la opinión del profesor, vio claramente que el jugador que comenzaba a jugar era el ganador. Un análisis elemental nos hace pensar que este juego con los conjuntos de palabras escogidas no es isomorfo al tatetí. Veámoslo.

Trabajaremos ahora con el conjunto de palabras elegido por M. Gadner: AMOR, RISA, SIMA, MERO, ROMA, TOSE, PITO, SETA y EROS (Ver el anexo I para el otro conjunto).

Podemos disponer una tabla de doble entrada con las palabras en la primera columna y las letras que aparecen en tres o más palabras en la primera fila:

	A	M	O	R	I	S	E	T	
AMOR	X	X	X	X					
RISA	X			X	X	X			
SIMA	X	X			X	X			
MERO		X	X	X			X		
ROMA	X	X	X	X					
TOSE			X			X	X	X	
PITO			X		X			X	
SETA	X					X	X	X	
EROS			X	X		X	X		
Nº palabras	5	4	6	5	3	5	4	3	
Nº ternas	10	4	20	10	1	10	4	1	TOTAL:60

Tabla 1.

En la penúltima fila aparecen el número de palabras que contienen cada una de las letras. En la última el número de ternas que podemos formar con estas palabras: 10 (combinaciones de 5 elementos tomando 3), 4 (combinaciones de 4 sobre 3), etc. Vemos que hay 60 ternas de palabras con una letra en común. Con esto es suficiente para demostrar que el juego no es isomorfo al tatetí o tres en raya, en el que sólo hay 8 ternas ganadoras. Además de las 8 filas, columnas o diagonales de la figura 5 existen otras 52 ternas ganadoras. No se cumple el razonamiento de Brian Bolt[1] cuando dice que *"las palabras han sido elegidas cuidadosamente ... de modo tal que las palabras de una fila, columna o diagonal dada tengan cada una, una letra en común que ya no aparece en las demás".*

Por otro lado la estrategia ganadora es simple. Obsérvese que las letras A, O, R y S aparecen en cinco o más palabras. La estrategia ganadora del jugador que comienza la partida consiste en ir cogiendo palabras de uno cualquiera de estos cuatro grupos:

A:	Amor,	risA,	simA,	romA,	setA	
O:	amOr,	merO,	rOma,	tOse,	pitO,	erOs
R:	amoR,	Risa,	meRo,	Roma,	eRos	
S:	riSa,	Sima,	toSe,	Seta,	eroS	

Al tener cada uno de estos grupos 5 o más palabras, el jugador que sale puede tomar tres de ellas. Por tanto el jugador que sale gana siempre.

Rectificando

Mientras la elección del conjunto de nueve palabras no es correcta, los dos autores citados comentan a continuación que no es necesario limitarse a palabras y sorprendentemente proponen ejemplos válidos utilizándo símbolos, no letras. *"Lo que verdaderamente se requiere son ocho símbolos distinguibles, uno que corresponda a cada fila, uno a cada columna y uno a cada diagonal"*[1], símbolos que no aparecen en las demás líneas. Esto me hace sospechar que, en realidad, la elección de las palabras anteriores ha sido un problema en la traducción al español del original en inglés. Los dos libros son de la misma editorial y tienen el mismo traductor. He aquí un ejemplo con símbolos:

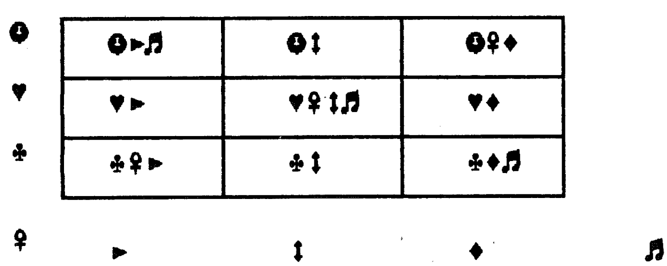

Figura 6.

Esta elección sí es correcta. El hecho de que la carta central tenga más símbolos que las restantes y las de las esquinas más que las de los centros de los lados hace que cualquier jugador las prefiera en este orden, aunque las cartas se dispongan sobre la mesa al azar, sin formar el cuadrado.

Por último propongo un conjunto de 9 palabras, en nuestro idioma, correctamente elegido. Pongo en mayúsculas las letras que están en común en tres palabras. Añado otras letras, en minúsculas, para que no se vea tan claramente qué carta o cartas son mejores. Estas nueve palabras sí que cumplen la condición de que las palabras de una fila, columna o diagonal dada tienen cada una, una letra en común (figura alrededor del cuadro) que ya no aparece en las demás. Así las palabras de la primera fila, SUB, HUMOR y PULIR, tienen en común la letra U que no está en las seis palabras restantes. Las palabras de una diagonal tienen en común la letra L; las de la otra la letra B. Sólo las palabras de la primera columna tienen en común la letra S, etc.

U	SUB	hUmOr	pULIr	
A	mASa	BOLA	hAcIa	
E	LES	fEO	tIBEt	
L	S	O	I	B

Figura 7.

Para jugar se escribirá cada palabra en una tarjeta, todas con el mismo tipo de letra y se dispondrán al azar y a la vista sobre la mesa, para que el jugador inexperto no pueda identificar el juego con el tatetí.

Anexo I

Se estudia aquí sucintamente y en forma análoga a como se ha hecho en el artículo el juego de las nueve palabras con el conjunto elegido por Brian Bolt: ARAS, TEMA, TUBO, LEES, LIBAR, TIOS, MORO, MIL y ORBE. Podemos disponerlas así:

R	ARAS	MORO	ORBE	
T	TIOS	TEMA	TUBO	
L	LEES	MIL	LIBAR	
E	S	M	B	A

Figura 8.

Está mejor elegido este conjunto de palabras. Procedamos igual que antes:

	A	R	S	M	O	B	E	T	I	L
ARAS	X	X	X							
MORO		X		X	X					
ORBE		X			X	X	X			
TIOS			X		X			X	X	
TEMA	X			X			X	X		
TUBO					X	X		X		
LEES			X				X		X	
MIL				X					X	X
LIBAR	X	X				X			X	X
Nº palab.	3	4	3	3	4	3	3	3	3	3
Nº ternas	1	4	1	1	4	1	1	1	1	1
TOTAL TERNAS GANADORAS: 16.										

Tabla 2.

Al haber 16 ternas de palabras con una letra en común no es isomorfo al tatetí, en el que sólo hay 8 ternas ganadoras.

La estrategia ganadora no es en este caso tan obvia. Aún así el jugador que sale jugando gana siempre. La mejor estrategia no es escoger la palabra central (el 5 del tatetí) de la figura 8. Una estrategia ganadora sencilla es la siguiente: el primer jugador toma la palabra ORBE, palabra que forma parte de 10 ternas ganadoras (4 con la O en común, 4 con la R, 1 con la B y 1 con la E). Distingo ahora dos casos:

Caso A. El segundo jugador toma la palabra MORO.

	Primer jugador	Segundo jugador
1ª Jugada	ORBE	MORO
2ª Jugada	LIBAR	Cualquiera
3ª Jugada	TUBO/ARAS	

El primer jugador gana tomando en la 2ª jugada la palabra LIBAR y en la 3ª jugada una de estas dos: TUBO (tienen en común la B) o ARAS (tienen en común la R).

Caso B. El segundo jugador no toma la palabra MORO.

	Primer jugador	Segundo jugador
1ª Jugada	ORBE	Otra que no sea MORO.
2ª Jugada	MORO	Cualquiera
3ª Jugada	ARAS/LIBAR/TIOS/TUBO	

El primer jugador gana tomando en la 2ª jugada la palabra MORO y en la 3ª jugada una de estas cuatro palabras: ARAS (en común la R), LIBAR (R), TIOS (O) o TUBO (O).

Puede ayudarnos a jugar la figura 6 modificada:

R	aras	moro	orbe	
T	TIOS*	TEMA	TUBO	
L	LEES	MIL*	libar*	
E	S	M	B	A

Figura 9.

Las 16 ternas ganadoras son las filas, columnas y diagonales del cuadrado más la toma de tres cualesquiera de entre las cuatro subrayadas o de entre las cuatro en minúscula o las tres que tienen un *.

Anexo II

Sobre la unicidad en el cuadrado mágico de orden 3, con los números del 1 al 9, salvo simetrías o permutaciones de filas

La suma de las 3 filas (o de las tres columnas) será la suma de los 9 números, o sea 45. Por tanto cada fila, columna o diagonal deberá sumar 45/3=15.

Observando las 8 ternas que suman 15:

1+5+9=15 1+6+8=15 2+4+9=15 2+5+8=15
2+6+7=15 3+4+8=15 3+5+7=15 4+5+6=15

tenemos que:

el número 5 forma parte de 4 ternas
los números 2,4,6 y 8 forman parte de 3 ternas
los números 1,3,7 y 9 forman parte de 2 ternas.

Observando las lineas del cuadrado:

E	L	E
L	C	L
E	L	E

Figura 10.

tenemos que:

la casilla central C forma parte de 4 líneas
las casillas E de las esquinas forman parte de 3 líneas
las casillas L de los lados forman parte de 2 líneas.

Identificando las ternas con las líneas llegamos a que:

a) el 5 debe ocupar la casilla central C. Esto puede demostrarse también planteando un sistema de 8 ecuaciones con 9 incógnitas obteniendo que C=S/3. En nuestro caso S=15.

b) los números 2,4,6 y 8 se colocarán en las esquinas E

c) los números 1,3,7 y 9 deben colocarse en los lados L.

Obsérvese también que tras la conclusión a) vemos que los otros dos números de una línea pasando por el centro deben tener la misma paridad, para que la suma dé 15, impar.

Tras esto y haciendo un pequeño ejercicio de combinatoria se obtienen 8 cuadrados mágicos con los números del 1 al 9:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Figura 11.

Resultan ocho casos reducibles todos ellos al primero por una o varias simetrías o permutaciones de filas y columnas.

Antonio Moreno Galindo
I.B. Santo Domingo, El Ejido (Almería)

Bibliográfia

[1] BOLT, BRIAN. **Aún más actividades matemáticas**. Lábor. Barcelona. 1989.

[2] GADNER, MARTIN. **Inspiración ¡ajá!**. Lábor. Barcelona. 1987.

[3] VARIOS. **Proyecto curricular de Matemática para el primer ciclo de la R.E.M. elaborado en Andalucía durante el curso 85/65**.