POSIBILIDADES DIDÁCTICAS DE ... CUADRAR SIN MULTIPLICAR POR SÍ MISMO

Manolo Fernández Reyes
Ana Negrín Hernández

Aprender sin pensar es inútil.
Pensar sin aprender es peligroso.
(Coriat y otros autores)

Aburrirse y aprender es un mal mayor.
No aprender aburriéndose constituye una tragedia.
(Ana y Manolo)

Introducción

Este trabajo -tercero de una serie (1)- pretende ser una muestra de cómo, partiendo de lo puramente intuitivo, podemos abrir la puerta de la Matemática deductiva y formalizada a los alumnos de la E.S.O.

El punto de partida es una de las estrategias generales que señala el D.C.B.: la "Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en conjuntos de números". O, como indica el apartado dedicado al desarrollo de actitudes: "Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números o códigos numéricos".

La experiencia fue realizada con alumnos del 8º nivel de E.G.B. de los colegios "Punta del Hidalgo" y "Marina Cebrián" del municipio de La Laguna (Tenerife) y, posteriormente y con mayor amplitud de miras, con un grupo reducido de estudiantes de 1º de B.U.P.

El Problema propuesto y lo que pretendíamos

Escribimos en la pizarra la tabla que sigue y les aseguramos que podíamos continuarla hasta dónde quisieran, sin necesidad de multiplicar los números por sí mismos. Y añadimos: "No sabemos de memoria los cuadrados; empleamos una regla. ¿Quieren intentar descubrirla?"

$$
\begin{aligned}
15^2 &= 225\\
25^2 &= 625\\
35^2 &= 1225\\
45^2 &= 2025\\
55^2 &= 3025
\end{aligned}
$$

No consideramos aportuno adelantarles que nuestro objetivo era más ambicioso. Nos proponíamos:

- Que descubrieran nuestra regla u otra similar.
- Que, con poca ayuda, demostraran su validez general (para todo entero terminado en 5).
- Analizar otras posibilidades del problema (sólo con el grupo de B.U.P.).

Dos días investigando

Rápidamente se dieron cuenta de que el cuadrado de cualquier número entero que acabe en 5, termina en 25, aunque no supieron explicar bien el por qué.

Se les pidió entonces que vieran si en las otras cifras de los cuadrados de la tabla existe alguna regularidad. Trabajaron en grupos y, poco a poco, fueron surgiendo las siguientes respuestas:

A) El 6 de 625 se obtiene sumando 4 al primer 2 de 225; el 12 de 1225, añadiendo 6 al 6 de 625; el 20 es 12 + 8; ...

B) Otros lo vieron así:

$$\begin{array}{r} 25 = 5^2 \\ +\ 200 \\ \hline 225 = 15^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 = 15^2 \\ +\ 400 \\ \hline 625 = 25^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 625 = 25^2 \\ +\ 600 \\ \hline 1225 = 35^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1225 = 35^2 \\ +\ 800 \\ \hline 2025 = 45^2 \end{array}$$

C) Algunos llegaron a esto:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 15^2 & = & 225 & \text{y} & 2 & = & 1 \bullet 2 \\ 25^2 & = & 625 & \text{y} & 6 & = & 2 \bullet 3 \\ 35^2 & = & 1225 & \text{y} & 12 & = & 3 \bullet 4 \\ \ldots \end{array}$$

D) Y, por último, unos pocos presentaron esta conclusión:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 15^2 & = & 225 & \text{y} & 2 & = & 1^2 + 1 \\ 25^2 & = & 625 & \text{y} & 6 & = & 2^2 + 2 \\ 35^2 & = & 1225 & \text{y} & 12 & = & 3^2 + 3 \\ \ldots \end{array}$$

Les felicitamos por sus hallazgos, comentamos cada uno de ellos y pedimos que los aplicaran para ampliar la tabla dada y que verificaran los resultados multiplicando. Conseguimos así que ganaran en seguridad respecto a la bondad de las reglas descubiertas y que toda la clase se familiarizara con las cuatro.

Como trabajo para casa les propusimos que averiguaran si sus algoritmos son válidos para números de tres cifras.

Al día siguiente

Iniciamos la clase reproduciendo una de las tablas "domésticas" más larga (hasta 195^2) y, refiriéndonos a ella, dedicamos el tiempo necesario a:

- Que cayeran en la cuenta de la equivalencia de las reglas A y B, lo que nos permitió prescindir de la primera (esto, de común acuerdo y con la mayor delicadeza, para que los autores no se sintieran dolidos).

- Expresaran en palabras las otras tres. (2)

Para esto último, fuimos escribiendo las redacciones iniciales, haciendo las correcciones o mejoras sugeridas por los descubridores u otros compañeros, retocando aquí y allá y aportando consideraciones respecto a la necesidad de precisión de lenguaje, no ambigüedad, etc. Finalmente quedaron así:

Regla B.- *Partiendo del cuadrado de 5, ir sumando sucesivamente 200, 400, 600,...*

Regla C.- *El número de centenas de cualquier cuadrado (3) es igual al número de decenas de la base multiplicado por su consecutivo posterior.*

Regla D.- *El número de centenas de un cuadrado cualquiera es igual al cuadrado del número de decenas de la base, aumentado en este número.*

A estas alturas, el alumnado había advertido ya el inconveniente de la regla B, esto es, que para calcular el cuadrado de un determinado número hay que calcular previamente el de los anteriores. No creímos bueno distraer su atención haciéndoles ver que hay una manera de evitarlo (4); preferimos aconsejarles que emplearan en adelante una de las otras dos. Y así, sin herir susceptibilidades, decidimos entre todos quedarnos con las C y D. (Nos valimos de un pequeño embuste. Les dijimos que nosotros también habíamos renunciado a la "nuestra", por la que, por cierto, no habían preguntado... ¡y que era la C!)

A continuación, propusimos cuadrar números de cuatro o más cifras, terminados en 5, advirtiéndoles que debían verificar resultados y disponer el proceso de cálculo como en el siguiente ejemplo:

Según C:

$$\underbrace{201}_{\text{Nº de decs.}}5^2 = \underbrace{(201 \,.\, 202)}_{\text{Nº de cents.}}.100 + 25 \;=\; 4060225$$

Aplicando D:

$$201\,5^2 = (201^2 + 201)\,.100 + 25 \;=\; 4060225$$

Con alumnos de 8º de E.G.B. (2º de la ESO futura), lo hecho hasta ahora puede considerarse más que suficiente. No obstante, dado que los nuestros están acostumbrados a oírnos decir que los matemáticos son desconfiados, que no quedan satisfechos hasta que una conjetura es deductivamente razonada, es decir, hasta que se demuestra su generalidad (en nuestro caso, "para todo entero acabado en 5"), algunos preguntaron que cómo podía hacerse la demostración. Respondimos que ellos mismos podían hacerla; que sólo tenían que: Escribir la forma polinómica de un número terminado en 5 ($N = d \bullet 10 + 5$) y multiplicarlo por sí mismo.

Con alguna indicación nuestra, y corregidos que fueron algunos fallos de expresión, la demostración quedó escrita en la pizarra y comentada para toda la clase así:

$$\begin{aligned} N^2 = \;& (d \,.\, 10 + 5)^2 = (d \,.\, 10 + 5) \,.\, (d \,.\, 10 + 5) = \\ & d^2 \,.\, 100 + 5 \,.\, d \,.\, 10 + d \,.\, 10 \,.\, 5 + 25 = \\ & d^2 \,.\, 100 + d \,.\, 100 + 25 = (d^2 + d) \,.\, 100 + 25 = \\ & \qquad\qquad \text{(Regla D)} \\ & d \,.\, (d + 1) \,.\, 100 + 25 \\ & \qquad\qquad \text{(Regla C)} \end{aligned}$$

Y aprovechamos para hacerles observar que, de paso, y simplemente habiendo sacado factor común "d" en el último paso, habíamos probado la equivalencia de los algoritmos C y D, esto es, que ambos son las dos caras de una regla única. En consecuencia, decidimos llamarla, después de un debate seguido de votación, *Regla de las decenas* o, en honor de nuestros colegios, y para uso exclusivamente casero, GRAN REGLA CUADRÁTICA DE PUNTA MARINA.

La broma nos permitió interesar a la mayoría en el proceso de demostración.

Ampliación de la experiencia con los chicos de B.U.P.

En líneas generales, lo anterior se desarrolló en la forma descrita, pero dada la mayor preparación del grupo (tercer trimestre del curso), añadimos las cuestiones que a continuación comentamos someramente. Es de advertir que trabajaron casi sin ayuda por nuestra parte.

A) Otra demostración de la regla de las decenas

1. Verificación de igualdades del tipo

$$25^2 = (25 + 5) \,.\, (25 - 5) + 5^2$$

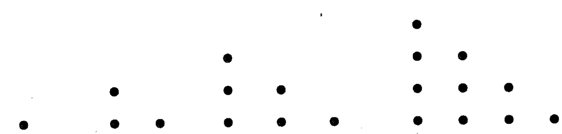
2. Demostración de que la regla anterior es válida para cualquier entero que termine en 5.

3. Demostración de la regla de las decenas por aplicación de la de "sumar o restar 5":

$$\begin{aligned} N^2 = \;& (N + 5) \,.\, (N - 5) + 5^2 = \\ & [(d \,.\, 10 + 5) + 5] \,.\, [(d \,.\, 10 + 5) - 5] + 5^2 = \\ & \ldots = d \,.\, (d + 1) \,.\, 100 + 25 \end{aligned}$$

B) Cuadrar con números triangulares

Después de jugar un rato con los números triangulares, que la mayoría de los integrantes del grupo desconocía, presentamos la fórmula que permite calcular el n-simo números de este tipo:



$$T_n = n \,.\, (n + 1) \,/2$$

El parecido de esta fórmula con la de la regla de las decenas en su versión C, les dió la pista.

En efecto, tomando desde n = 1, resultan los triangulares

$$1, \;\; 3, \;\; 6, \;\; 10, \;\; \ldots$$

Y, duplicándolos, obtenemos las sucesivas cantidades de centenas de los cuadrados de los enteros terminados en 5, a partir del 15. Así:

$$T_1 = 1 > 15^2 = (2 \,.\, 1) \,.\, 100 + 25 = 225$$
$$T_2 = 3 > 25^2 = (2 \,.\, 3) \,.\, 100 + 25 = 625$$
$$T_3 = 6 > 35^2 = (2 \,.\, 6) \,.\, 100 + 25 = 1225$$
...

¿Qué dificultad tiene esta regla? ¿Puede superarse?

C) Demostrar que el cuadrado de un entero acabado en 2 ($N = d \,.\, 10 + 2$) puede calcularse mediante la fórmula

$$N^2 = (d \,.\, 10 + 2)^2 = 10d \,.\, (10d + 4) + 4$$

Por ejemplo:

$$1562^2 = 10 \,.\, 156\, (10 \,.\, 156 + 4) + 4 = 2439844$$

D) Deducir una regla general para cuadrar cualquier entero, sin tener que multiplicarlo por sí mismo.

Acertijo para el lector: EEMREEDDLE

Una pista: Tiene relación con este trabajo
El premio: Tiene que ver con QUEBEC.

Notas:

(1) El primero publicado en el nº 1 de esta revista bajo el título de, "Posibilidades didácticas... del cubo de las caras negras". El segundo, "Posibilidades didácticas... de un puzzle de estrella y navetas", en el nº 19 de NÚMEROS, que edita la Sociedad Canaria de Profs. de Matemáticas. "Isaac Newton".

(2) Es de destacar la conveniencia de este tipo de ejercicios. Sorprende la disparatada manera en que, a veces, los alumnos expresan conceptos que nos consta han asimilado perfectamente. ¿No obedecerá esto, en parte, al excesivo tiempo dedicado en las clases de Lengua Española a cuestiones puramente gramaticales, en detrimento del debido cultivo del "arte de hablar y escribir correctamente"? Y en mucho, claro, se debe a la prematura y excesiva formalización a que solemos someter a los alumnos, olvidando que se piensa en palabras, no en símbolos.

(3) La expresión "número de centenas" suele tener un significado único para los alumnos. Influenciados quizás por la llamada descomposición polinómica de un número, parecen creer que, por ejemplo, 3245 sólo puede expresarse como 3 . 1000 + 2 . 100 + 4 . 10 + 5. No se les ocurre que también podemos escribir, entre otras, esta igualdad: 3245 = 32 . 100 + 4 . 10 + 5. Y, análogamente, respecto al "número de decenas", es tan válido escribir: 3245 = 3 . 1000 + 2 . 100 + 4 . 10 + 5 como 3245 = 324 . 10 + 5.

Para aclarar esta cuestión acudimos a ejemplos con cantidades concretas. Por ejemplo, expresar una cantidad de dinero empleando todas o sólo algunas de las unidades decimales de nuestro sistema monetario. Después de esta ejercitación, todos entendieron que para representar un número entero cualquiera acabado en 5 podemos escribir $N = d \,.\, 10 + 5$, es decir, expresar todo lo que no sean unidades simples en decenas, y que, si "c" es la cantidad de centenas (número formado por todas las cifras que no representen decenas y unidades simples), podemos decir que $N = c \,.\, 100 + d \,.\, 10 + 5$.

Fue esta una buena ocasión, que aprovechamos al máximo, para profundizar en el sistema decimal de numeración y medida, una estructura conceptual fundamental y que, sin embargo, hay todavía quien la "enseña" ligeramente y desde un punto de vista mecánico.

(4) Trabajando con los ordinales.

Manolo Fernández Reyes
Ana Negrín Hernández
Soc. Canaria de Profs. de Matemáticas. "Isaac Newton"