# DIAGNÓSTICO: LAS ESTRUCTURAS CONCEPTUALES

**José Antonio Mora y José Ángel Bolea**

**Cuando se trabaja en clase un tema matemático, aparecen conexiones con otros conocimientos, cuyo dominio es necesario para continuar el avance en la programación prevista por el profesor. En este artículo, relatamos una experiencia de clase que nos llevó a reflexionar sobre el estado de las estructuras conceptuales de los estudiantes.**

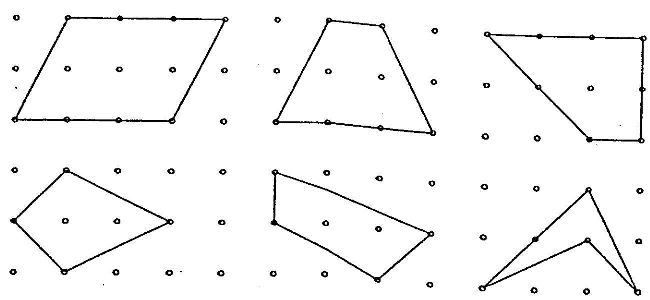
## Antecedentes

Curso de 1º en un Instituto de Bachillerato. Los alumnos trabajan habitualmente en grupos de cuatro-cinco.

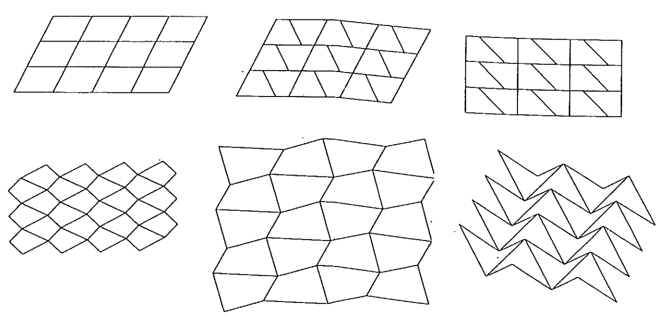
Están estudiando la Geometría a través de un tema globalizador como el de los mosaicos. El proceso seguido hasta ahora es:

> Construir mosaicos con baldosas cuyas formas resulten "familiares" a los estudiantes (ladrillos, letras del abecedario, cuadrados de dos tamaños distintos).
>
> Han estudiado con qué triangulos pueden formar un mosaico y han llegado a la conclusión de que con cualquier triángulo se puede conseguir.

La clase anterior se dedicó a la construcción de mosaicos con una serie de cuadriláteros propuestos para iniciar la tarea:



Que llevó a soluciones como las siguientes:



Esta sesión se dedica a la puesta en común del trabajo realizado en la clase anterior, en la que ya se avanzó la cuestión de averiguar qué cuadriláteros servirán como baldosa para formar mosaico.

Está previsto continuar el trabajo con la obtención de los mosaicos regulares, los semirregulares y algunos uniformes e introducir durante el proceso conceptos geométricos (ángulos, polígonos, movimientos, etc.), a la vez que aparecen otros numéricos, y algebráicos.

A la clase asiste una vez por semana un observador. Su trabajo consiste en ir tomando nota del trabajo de los estudiantes para comentarlo después con el profesor. Como hoy se va a realizar una puesta en común, se limitará a tomar nota de las intervenciones de los estudiantes y del profesor.

En el siguiente relato, ***reproducimos en negrita*** los diálogos que han tenido lugar. En texto normal, se intercalan las reflexiones del profesor y los comentarios sobre el ambiente de la clase.

## La clase

**Profesor:** Ya obtuvimos mosaicos con algunos cuadriláteros, ahora se plantea una cuestión más general: ¿Con qué cuadriláteros podremos formar mosaico?

El profesor ha preparado previamente la clase, ha previsto varias posibles respuestas y ha diseñado su trabajo en función de ellas. Sin embargo, un alumno:

**Estudiante:** Se puede formar mosaico con los que tengan al menos dos lados iguales.

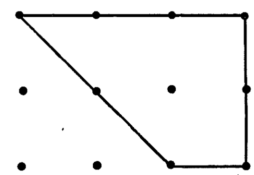
Esto no estaba en el guión pero podemos entrar a ver por dónde salimos.

**P:** ¿Todos los cuadriláteros del dibujo tienen dos lados iguales?

**E:** En el primero, los lados opuestos son iguales. En el segundo los dos lados inclinados son iguales. En el tercero el lado de arriba y el inclinado...

Podríamos aprovechar para revisar el teorema de Pitágoras. Es un buen momento para sacarlo a relucir, seguro que no nos llevará demasiado tiempo.

**P:** ¿Seguro? ¿Cuánto miden los lados?

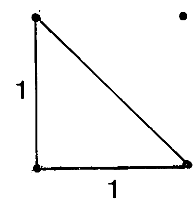


**E:** 1, 2, 3 y .... (silencio)

**P:** ¿Cómo podemos saber lo que mide el que falta?

(Más silencio). Esto no sólo se sale del guión de la clase, sino del plan de trabajo marcado con anterioridad.

Parece que Pitágoras sólo está en la mente del profesor. Habría que proporcionarles una pequeña ayuda. Dibuja en la trama el triángulo:




**P:** ¿Cuánto mide el lado que falta?

**E:** 1.5, 1.25, 2, otras

¿Qué se puede hacer en un caso como éste, para que entre Pitágoras en la escena de la clase sin que sea el profesor el que lo traiga a empujones? Volvemos a empezar desde más atrás.

**P:** ¿Cómo es el triángulo dibujado?

**E:** Es un triángulo rectángulo.

**P:** ¿Hay alguna relación entre sus lados?

**E:** Es la mitad de un rectángulo.

**E':** No digas tonterías... (risas)

**E'':** Los lados se llaman catetos y hipotenusa.

**P:** ¿Hay alguna relación entre los catetos y la hipotenusa?

**E:** (después de una pausa) El teorema de Pitágoras.

**P:** ¿A cuántos les suena eso del "Teorema de Pitágoras"?

(Todos los estudiantes, sin excepción, levantan la mano)

Aquí está pasando algo, el problema inicial con cuadriláteros y mosaicos se ha arrinconado. Lo que importa es ahondar en las ideas de los estudiantes: en las matemáticas que recuerdan y en cómo hacen un uso efectivo de ellas.

**P:** Rubén (es el alumno que ha mencionado a Pitágoras), ¿te acuerdas de lo que dice el teorema de Pitágoras?

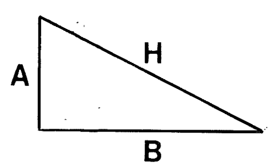
**Rubén:** Si, era algo de matemáticas..., pero nada.

**P:** ¿Alguien se acuerda?

**E:** Algo de "a" elevado al cuadrado y "c" elevado al cuadrado.

**E':** La hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

El profesor dibuja en la pizarra




e incluye algún elemento más de confusión:

**P:** Con lo que has dicho, ¿cómo lo puedo escribir, $h = a^2 + b^2$ ó $h = (a+b)^2$?

**Varios alumnos:** Es lo mismo.

**P:** ¿Son iguales $3^2 + 4^2$ y $(3+4)^2$?

**E:** (Realizan cálculos y obtienen 25 y 49). No son iguales. (Se quedan con la primera).

Se podría entrar en este momento en la justificación geométrica de que $a^2 + b^2$ no es igual que $(a+b)^2$ pero por ahora ya hay demasiadas puertas abiertas y ninguna cerrada.

**E':** Yo creo que es $h = \sqrt{a+b}$

Durante este tiempo, un alumno ha sacado un material de Lengua que contiene muestras de textos e incluye un ejemplo de texto matemático en el que se habla de Pitágoras y de su teorema. Hasta ahora le había hecho guardarlo, cree que éste puede ser el momento apropiado, le pide que lo lea al resto de la clase.

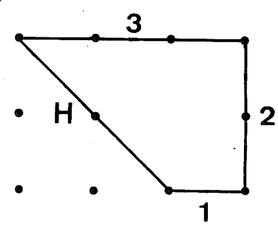
**E:** En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

A la luz del texto se corrigen los errores en las expresiones y quedan $h^2 = a+ b$ y $h = \sqrt{a^2 + b^2}$

**P:** ¿Cuánto medirá el lado desconocido?

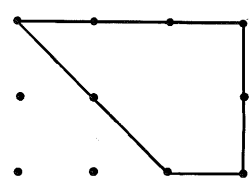
Los alumnos trabajan en grupo, el profesor pasea por la clase para ver lo que hacen y responder a sus preguntas (en la mayoría de los casos con nuevas preguntas). Está confiado en que esta tarea será sencilla, no hay más que aplicar el resultado obtenido. Dos de los grupos obtienen el resultado con facilidad. Lo que hacen otros tres grupos es revelador:

**GR 1:**



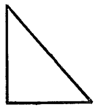

$h = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}$

**GR 2:**



$h = \sqrt{3^2 + 2^2}$

**GR 3:**



$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 2} \qquad \sqrt{4}\,\vdash$

**Estudiante del grupo 3:** (llama la atención del profesor) ¿Cómo se hace la raíz cuadrada?

Con lo que han hecho los estudiantes de este grupo habría para discutir durante dos semanas.

**P:** ¿No tenéis calculadora? Por cierto, ¿cuánto es $1^2$?

**E:** 2

**P:** ¡Eso es nuevo!

**E:** No, no, 1

El error $1^2 = 2$ puede venir originado por dos causas: en algunos casos es un fallo de percepción, el alumno percibe la potencia como un producto. En otros, se debe a problemas de comprensión, no ha adquirido correctamente la operación de potenciación. Da la impresión de que en este caso, el error se ha debido a la primera.

También hay que resaltar que, en el momento en que han llegado a $\sqrt{4}$, han plantado la raíz y han llamado al profesor porque no se acuerdan del algoritmo para obtener ¡la raíz cuadrada de 4!

Una alumna sale a la pizarra, obtiene la medida que faltaba al cuadrilátero, toca el timbre, la clase ha terminado. Los mosaicos tendrán que esperar a la próxima clase.

## Impresiones y reflexiones

El desarrollo de la clase no ha servido para avanzar el trabajo con mosaicos. En cambio, hemos sobrevolado varios temas aunque no se ha profundizado en ninguno. El torbellino de ideas surgidas y los cambios de dirección realizados en el transcurso de la sesión, dificultan la estructura de contenidos a la que estamos acostumbrados como profesores.

La actitud del profesor tampoco ha sido la usual, normalmente capta el error cometido por el primer alumno y lo resuelve con rapidez y elegancia: "*No hombre, ese lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2. Puedes calcular su longitud mediante el teorema de Pitágoras y verás que no tiene dos lados iguales, en cambio, ha sido posible formar mosaico con lo que tu conjetura ha sido refutada. A ver, que responda otro, ¿qué cuadriláteros formarán mosaico?*". De esta forma se asegura el avance en el programa pero, ¿a qué precio?

Muchas veces se tiende a pensar que la no afloración de los conflictos es señal de que no existen. Podemos tener la completa seguridad de que si esta clase no se hubiese desarrollado de la forma descrita, el conflicto seguiría latente, y es difícil que alguien haga algo por remediarlo mientras mantenga una actitud que podríamos calificar de "*supremo otorgador de respuestas*". Por otra parte, aunque tampoco estamos en condiciones de afirmar que todos los estudiantes salieron de clase dominando las ideas que allí se barajaron, sí avanzaron en su comprensión de ciertos conocimientos matemáticos y los aplicaron en contexto.

La clase ha sido muy útil para el profesor que ha podido diagnosticar qué es lo que saben esos alumnos y para qué les sirve. Y lo que saben tiene poco que ver con lo que aparecía en los listados de contenidos de matemáticas de los cursos anteriores. Los estudiantes no pueden hacer un uso efectivo del teorema de Pitágoras, de $1^2$, de la raíz cuadrada de 4, del cuadrado de una suma o tantos otros conocimientos a los que en su día se prestó gran atención y, ahora que se necesitan, no hay otra forma de encontrarlos.

No basta con lamentarse de lo poco o lo mal que han aprendido las matemáticas. Si queremos que nuestros estudiantes aprendan matemáticas, es necesario profundizar en cuestiones del tipo: ¿Cómo hacer efectivos unos conocimientos que están perdidos en algún lugar de la memoria para resolver una situación concreta? ¿Cómo almacenar esos conocimientos en la memoria para que sea fácil extraerlos cuando los necesitamos? O esta pregunta más general: ¿Cómo diseñar los aprendizajes para que una persona esté capacitada para utilizar las matemáticas que aprende en la escuela?

Es muy probable que aún estemos lejos de disponer de las respuestas precisas a estas cuestiones, pero ya conocemos lo que ocurre cuando el libro o el profesor enuncian el teorema de Pitágoras, se explica en la pizarra y los estudiantes realizan unos cuantos ejercicios de práctica: no se crean las suficientes conexiones entre las ideas para que unas puedan tirar de otras, se complementen y enriquezcan su significado mutuamente. Una construcción (de conocimiento o de cualquier otro tipo) ha de tener sólidos cimientos para que no se derrumbe.

Hemos presentado estas notas a algunos compañeros (tanto de E.G.B. como de EE.MM). La reacción más común ha sido la de sorpresa. "*¡Qué nivel tan bajo tienen esos alumnos!*", "*¿De verdad son de B.U.P.?*", "*Si el teorema de Pitágoras es una de esas cosas que se trabajan bien en E.G.B.*", "*¿No será que los buenos estudiantes estaban cohibidos y no se atrevían a dar las soluciones por temor a ser calificados de empollones?*". Hemos estado en pocas clases en que los alumnos se pudieran expresar con mayor libertad, es más, se podría calificar de excelente el grado de participación de los alumnos. Por lo que se refiere a su rendimiento académico, es un grupo normal.

Estamos convencidos de que no ha sido una casualidad, ni se trata de un caso de amnesia colectiva, aunque, de haber tenido más suerte, podríamos encontrar a dos o tres estudiantes en condiciones de responder a las preguntas planteadas y quizás habrían salvado la situación. Aún así sería indicativo de un nivel de productividad tan bajo, que en cualquier empresa sería causa de un profundo replanteamiento.

---

**José Antonio Mora y José Ángel Bolea**
*CEP d' Alacant*
*Col.lectiu Mosàic*