CURRICULUM DE MATEMÁTICAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS[1]

María Luz Callejo de la Vega

En este artículo tratamos algunos aspectos del enfoque del curriculum de matemáticas desde la resolución de problemas. En primer lugar, para saber de qué y desde dónde hablamos al referirnos a la "resolución de problemas" como un enfoque de la matemática, plantearemos una serie de premisas sobre la concepción de esta disciplina y de su enseñanza/aprendizaje. A continuación propondremos una estrategia didáctica coherente con las premisas anteriores y extraeremos algunas consecuencias acerca de sus implicaciones en el curriculum. Finalmente propondremos dos estrategias de formación permanente de profesores, en el sentido más amplio del término, para hacer posible su preparación para este enfoque.

Introducción

En los últimos años han aparecido diversos informes, recomendando la incorporación de la resolución de problemas en el curriculum de matemáticas. Por ejemplo, "*An Agenda for Action*" (N.C.T.M., 1980) Y "*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*" (N.C.T.M., 1989) en los Estados Unidos y el "*Informe Cockcroft*" (Cockcroft, 1982) en Gran Bretaña. En nuestro país, la resolución de problemas aparece como una orientación en los Diseños Curriculares Base (D.C.B.) de esta materia (M.E.C., 1989).

El documento que ha ejercido mayor influencia ha sido "*An Agenda for Action*" de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (N.C.T.M., 1980. Contiene ocho consejos para la enseñanza de las matemáticas. El primero dice así:

"El N.C.T.M. recomienda que la resolución de problemas sea el objetivo principal de la enseñanza de las matemáticas en la década de los 80". (p.1)

J. Kilpatrick (1981) señala que el documento no especifica lo que entiende por "resolución de problemas" y que una buena parte del mismo podría haberse extraído con pocos cambios del informe "*Mathematics in General Education*" que publicó en 1940 la Progressive Education Association. C. Gaulin (1982) considera que esta recomendación "ha sido formulada en términos vagos y muy generales". Esto ha dado lugar a "interpretaciones muy diferentes -a veces incluso divergentes" (p.47). Ante esto nos preguntamos:

- ¿Se trata entonces de continuar haciendo lo mismo de siempre, pero llamándole de otra manera?

1. Este artículo corresponde a la conferencia "Curriculum y resolución de problemas", pronunciada en los "Encuentros del profesorado de matemáticas de Madrid" de Junio de 1991, organizado por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas. La autora agradece a los organizadores su autorización para la publicación.

- ¿O se trata quizá de una moda pasajera que a España nos llega con un poco de retraso y por ello aparece en los DCB de matemáticas de la Reforma actual?
- ¿O por el contrario, se trata verdaderamente de una renovación importante de la educación matemática que supondrá cambios sustanciales en el curriculum y en el papel que el profesor debe jugar en la formación matemática de sus alumnos?

Estas son las cuestiones que abordaremos a continuación.

En este artículo sólo tocaremos algunos aspectos del enfoque de la matemática desde la resolución de problemas que deberían incidir en el Diseño Curricular. No vamos por tanto a tratar sobre el Diseño Curricular propiamente dicho, sino de las estrategias que se pueden poner en práctica para introducir este enfoque. Partimos también de una perspectiva constructivista[2] del aprendizaje. Dentro de esta perspectiva se plantean dos modelos de instrucción; unos orientados al cambio conceptual y otros a la resolución de problemas. Dejamos en esta ocasión el primer grupo y nos situamos en el segundo (Wheatley, 1991).

Pero antes de empezar a desarrollar el tema invitamos al lector a hacer un poco de gimnasia mental a partir de la situación siguiente:

El juego del 7: Es un juego para dos jugadores. El primero dice un uno o un dos. El segundo le suma uno o dos al número que dijo su compañero y dice el resultado. Así sucesivamente, por turnos. El que diga siete gana.
¿Lleva ventaja alguno de los jugadores? ¿Cómo tiene que jugar para ganar siempre? [3]

Presupuestos básicos del enfoque heurístico de la matemática

Entre las distintas aproximaciones a la didáctica de la matemática, el enfoque heurístico es el que mejor se adapta a nuestro planteamiento. A continuación exponemos de forma breve los presupuestos de este enfoque.

Qué es la matemática

Aristóteles describió la matemática como "el estudio de la cantidad"; R. Descartes como "la ciencia del orden y de la medida"; F. Klein la definió como la "ciencia de las cosas que son evidentes por sí mismas"; B. Russel la identificó con "la lógica"; D. Hilbert la describió como un "juego formal sin significación"[4]; I. Lakatos como "una actividad humana que encierra en sí misma una dialéctica de conjeturas, refutaciones y demostraciones, hasta llegar al establecimiento de la teoría o resultado final"; y G. Polya decía que la matemática es "«saber-hacer»" más que "«saber»". Cada una de estas afirmaciones supone adoptar un punto de vista sobre las matemáticas. Aquí nos situaremos del lado Lakatos y de Polya que conciben esta disciplina y su enseñanza desde un "enfoque heurístico". Esto implica:

- Por una parte, introducir los conceptos a partir de la situación problemática que ha dado origen a su aparición e introducir los teoremas de modo que no se oculte la sucesión de tentativas que precedieron al establecimiento de éstos (Lakatos, 1974);
- Por otra parte, considerar el proceso de búsqueda, de creación, de tanteos, de inferencias, de comprobaciones, propio de la resolución de problemas, como el corazón de la actividad matemática (Polya, 1945).

Aquí sólo desarrollaremos el segundo apartado.

2. Una exposición sintética sobre el constructivismo puede verse en: ¿Qué es una enseñanza constructivista? T. SERRANO. Documentos IEPS. Monografía nº9. IEPS. Madrid, 1989.
3. Además de dar la solución sería interesante repasar el proceso seguido hasta encontrarla e intentar relacionar los datos (1,2 y 7) con los números que permiten ganar, que son 1,4 y 7. Por tanto lleva ventaja el primer jugador.
4. Nota previa de J.R. Newman al artículo de H. Weyl, El modo matemático de pensar. En: La forma del pensamiento matemático, J.J. Sylvester y otros, Grijalbo, Barcelona, 1974.

Cuál es el objetivo fundamental de la educación matemática

En las etapas iniciales de la educación (Primaria y Secundaria) el objetivo básico de la educación matemática, es facilitar a los alumnos el camino para "la consideración de las matemáticas como un poderoso instrumento que permite representar, analizar, explicar y predecir hechos y situaciones de una forma rigurosa, concisa y sin ambigüedades" (M.E.C., 1989, p. 486). Pero ante todo la educación matemática debería enseñar a pensar: "El profesor de matemáticas no debería contentarse con dispensar el saber, sino que también debería intentar desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar ese saber; debería insistir en el saber-hacer, en las actitudes adecuadas, en los hábitos intelectuales deseables" (Polya, 1967, p. 281). La enseñanza matemática tradicional desarrolla, en el mejor de los casos, la memoria, el sentido práctico, las facultades de abstracción, el razonamiento lógico, el rigor, etc. Pero lo más importante es cultivar la inteligencia, que es la aptitud para hacer frente a situaciones nuevas y para establecer relaciones. Desde este punto de vista la resolución de problemas es la actividad matemática más importante.

Cómo se aprende la matemática

El conocimiento matemático no se recibe pasivamente, como si la mente fuese un libro en blanco en el que se van escribiendo los nuevos contenidos, en el sentido más amplio de este término, sino que el sujeto construye activamente el conocimiento, incorporando los nuevos contenidos a las estructuras mentales que se experiencia ha ido forjando. Esto significa que la matemática no se aprende por transmisión directa de lo que se explica en clase o de lo que se lee en los libros de texto, sino que la matemática se aprende en interacción con situaciones problemáticas y con otros sujetos, que obligan al alumno a ir modificando su estructura cognitiva mediante una serie de acciones: experimentando, haciéndose preguntas, particuarizando situaciones, generalizando resultados, encontrando contraejemplos, etc. En una palabra, las matemáticas "se aprenden en gerundio". Estos procesos requieren un cierto nivel de intencionalidad y de predisposición por parte del sujeto que aprende. La reflexión sobre la experiencia, sobre la propia actividad matemática y la de otros, está también en la base de su aprendizaje. Como señala el D.C.B. de Matemáticas de la E.S.O., "la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas impuestas por la realización de tareas y la resolución de problemas particulares" (M.E.C., 1989, p. 481).

Esto mismo lo decía, hace ya algunas décadas, G. Polya (1967) con otras palabras. Este autor se refería entonces a tres "principios para aprender", sacados de la experiencia y sugeridos por la psicología:

- *el principio de actividad*, un viejo principio fundado en el método socrático;
- *el principio de motivación*: "para aprender eficazmente, el estudiante debe encontrar interés en la materia que estudia y placer en la actividad que resulta";
- *el principio de las fases consecutivas*: "para aprender eficazmente, una fase exploratoria debería preceder a la de formalización de los conceptos. El contenido de lo que se aprende debería ser asimilado en la mente de quien aprende y contribuir a formarla".

Cómo se enseña la matemática

La educación matemática debe por tanto proporcionar a los alumnos: a) contextos de aprendizaje adecuados para que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos en interacción con sus compañeros y con el profesor y b) situaciones problemáticas que les den la oportunidad de experimentar, conjeturar, refutar, comprobar, generalizar resultados, inventar nuevos problemas.

A continuación vamos a tratar de esbozar los rasgos más destacados de estos contextos de aprendizaje y de estas situaciones problemáticas a las que nos referimos.

Estrategia didáctica para desarrollar este enfoque

El contexto de aprendizaje

El aprendizaje centrado en la resolución de problemas requiere que el profesor seleccione situaciones problemáticas y trate de crear un clima de libertad para que los alumnos puedan expresarse con espontaneidad. La dinámica de la clase se desarrolla según un ciclo que comporta varias etapas:

- **Orientación del trabajo:** el profesor puede comenzar presentando la situación problemática a todos los alumnos o entregarla por escrito a cada estudiante. Es importante que se asegure de que todos los estudiantes la han comprendido.

- **Trabajo exploratorio en grupo:** los estudiantes pueden comenzar abordando la tarea individualmente y luego en grupo o directamente en pequeños grupos de cinco o seis alumnos como máximo. Para que el trabajo en grupo sea eficaz, un estudiante hace de moderador y otro de secretario[5], anotando el proceso de resolución. De esta forma se promueve la comunicación y la discusión entre los miembros del grupo que tratarán de encontrar juntos la solución.

- **Confrontación de ideas:** mientras los alumnos trabajan en grupo, el profesor sirve de guía a los estudiantes, animándoles a comprobar los resultados, ofreciéndoles contraejemplos que les ayuden a profundizar en sus ideas, abriéndoles nuevas pistas, desbloqueando situaciones, sugiriendo generalizaciones. Si los alumnos siguen una línea de razonamiento que al profesor no le resulta familiar o que aparentemente es infructuosa, el profesor deberá seguirla atentamente hasta verificar si es buena o no (¡puede llevarse una sopresa!).

- **Revisión:** al final de la sesión se dedica un tiempo a discutir en clase: los grupos presentan a toda la clase, (no sólo al profesor), sus soluciones y cómo llegaron a ellas, para discutirlas. En el proceso de decir a otros cómo se ha pensado en un problema, se elabora, se perfila y se profundiza el propio pensamiento. El profesor debe facilitar la libre expresión de los alumnos y no enjuiciar las soluciones, ya sean buenas o malas pues ésto bloquea el diálogo, impide una discusión fluída y presdispone a los estudiantes a buscar "la" respuesta esperada por el profesor (cfr. Adda, 1985), más que a exponer sus propios razonamientos. Por el contrario, el profesor tratará de "negociar" con los alumnos las soluciones propuestas y trabajará con ellos para llegar a un consenso. Debe intentar comprender las diferentes aproximaciones de los estudiantes a la situación, sean adecuadas o no; en este último caso tratará de ver en qué medida pueden serlo.

- **Aplicación:** se debe dar a los alumnos la oportunidad de aplicar sus nuevos conocimientos a *situaciones análogas* para reforzar los contenidos claves que deben construir.

Este ciclo se puede desarrollar en una o varias sesiones de una hora aproximadamente. El momento de la revisión lo deberá decidir el profesor de acuerdo con el trabajo de los alumnos, para que esta fase resulte provechosa. En cualquier caso, todos los alumnos han debido disponer de tiempo suficiente para llegar a alguna conclusión. Si se hace en una sola sesión, no se da espacio al fenómeno de la incubación de ideas que, por otra parte, es un aspecto decisivo en la resolución de un problema (Poincaré, 1932; Hadamard, 1934).

Las situaciones problemáticas

El corazón de este tipo de aprendizaje es un conjunto de *situaciones problemáticas* que encierran los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales claves de la matemática y que guiarán a los estudiantes en la construcción de los mismos.

---

5. La descripcipon del trabajo del moderador y del secretario en la resolución de problemas en grupo puede verse en : El pensamiento lateral; Manual de creatividad. E. DE BONO. Paidos Barcelona, 1986.

Es obvio que todos los alumnos de una clase no tienen la misma capacidad para las matemáticas, ni el mismo nivel de desarrollo psicoevolutivo, por lo tanto hay que procurar que estas situaciones problemáticas sean: *fáciles de abordar por toda la clase*, que se puedan hacer observaciones y constataciones, que inviten a conjeturar, a preguntarse "que pasaría si...". Pero al mismo tiempo, que sean situaciones *que se presten a la generalización*, de modo que los alumnos puedan trabajar en ellas con todo el grado de profundización de que sean capaces. En este sentido podemos considerar la actividad matemática como una espiral (Mason, Burton y Stacey, 1988): la primera vuelta de este espiral representará el proceso de resolución de un problema hasta llegar a la solución justificada de la cuestión planteada; la vuelta siguiente será el proceso de resolución de un problema más general que el problema planteado, y así sucesivamente. Por tanto la resolución de un problema es un proceso que no se puede acotar de antemano porque siempre da lugar a la resolución de nuevos problemas. Y, por último, que sean problemas que motiven a los estudiantes, por ejemplo que les planteen retos, que les inciten a hacerse preguntas, por ejemplo, "¿qué pasaría si en El juego del 7, en lugar de llegar a 7 debemos llegar a 31 y, si en vez de añadir hasta 2 añadimos hasta 5?".

Ejemplos de situaciones problemáticas

A continuación sugerimos algunas actividades que reúnen las características antes expuestas:

El juego del 31: Es un juego para dos jugadores. El que juega primero dice un número cualquiera del 1 al 5. El que juega segundo le suma al número que dijo el primer jugador un número del 1 al 5 y dice el resultado. A continuación el primer jugador hace lo mismo, es decir, suma al número que dijo el otro jugador un número del 1 al 5 y dice el resultado. Así sucesivamente. Gana el que primero diga 31.
¿Tiene ventaja alguno de los jugadores? ¿Por qué? Si alguno de los dos lleva ventaja, ¿cómo debe jugar para ganar siempre?[6]

Este problema sirve para ilustrar el procedimiento heurístico "suponer el problema resuelto" o "empezar por el final". Todos los estudiantes pueden jugar al azar o sistemáticamente, con tal de tener conocimientos mínimos de cálculo. Al proponerlo en clases del Ciclo Medio (7 u 8 años) hemos podido comprobar que muchos alumnos, son capaces de descubrir que 25 es un número clave porque "el que diga 25 gana". De entre ellos, algunos se quedan ahí, creyendo haber hallado la solución. Otros continúan profundizando y llegan a obtener casi todos o todos los números claves que debe decir el primer jugador para asegurarse el éxito (1, 7, 13, 19, 25 y 31). Cuando el profesor invita a alumnos del Ciclo Superior a resolver un problema más general, algunos cambian el número que hay que decir para ganar o las cantidades que se pueden añadir, llegando incluso a descubrir la secuencia ganadora en forma de variables, es decir, escribiendo estos números en función del número ganador "n" y de las cantidades que se pueden añadir, un número entre "1" y "p". Unos pocos llegan a las siguientes conclusiones: el primer número que debe decir el primer jugador es el resto de la división del número "n" entre "p+1"; si "p+1" es divisor de "n" entonces lleva ventaja el segundo jugador porque según el argumento anterior el primer jugador debería decir "O" para ganar y eso no está permitido; si se pudiese añadir solamente un número entre "q" y "p", siendo "q<p", entonces ese primer número sería el resto de la división de "n" entre "p+p".

Otra presentación del Juego del siete es la siguiente:

Fichas sobre la mesa. Se trata de un juego para dos jugadores. Hay 7 fichas sobre una mesa y cada jugador, por turno, puede coger una o dos fichas. El que coja la última pierde. ¿Lleva ventaja alguno de los jugadores? ¿Cómo debe jugar para ganar siempre?

En este caso las fichas que debe dejar el segundo jugador para ganar son 7, 4 y 1 sucesivamente, es decir, los mismos números que eran claves en El

6. Lleva ventaja el primer jugador pues la secuencia ganadora es 1, 7, 13, 19, 25 y 31.

juego del 7. Nos preguntamos ¿Qué pasaría si el que cogiese la última ficha en lugar de perder ganase? ¿Y si las fichas estuviesen distribuidas en que cogiese la última ficha en lugar de perder ganase? ¿Y si las fichas estuviesen distribuidas en varios montones, por ejemplo dos, y se pudiese coger como mínimo una ficha de un montón y como máximo una de cada montón? Tendríamos un nuevo problema, bastante conocido, en el que se suelen emplear cerillas:

Jugando con cerillas. Es un juego para dos jugadores. Sobre una mesa hay distribuidas 7 cerillas en dos montones. Cada jugador, por turno, puede coger una cerilla de un montón o una cerilla de cada montón. Gana el que coja la última cerilla. ¿Lleva ventaja alguno de los jugadores? ¿Cómo debe jugar para ganar siempre?[7]

Este problema, plantea una situación parecida a la del anterior, sin embargo, el tratamiento más adecuado para llegar a la solución es diferente porque las cerillas están distribuidas en dos montones. Las "posiciones" claves son ahora distintas, dependiendo del número de cerillas que haya en cada montón. Si se representa las "posiciones" del problema en un diagrama cartesiano se obtienen fácilmente las que son ganadoras y perdedoras. Por ejemplo, si en un montón hay 4 cerillas y en otro 3, los "movimientos" permitidos desde cada casilla son: una casilla a la izquierda (quitar una cerilla del montón de 4) o una casilla hacia abajo (quitar una cerilla del montón de 3) o una casilla en diagonal (quitar una cerilla de cada montón). Quien llegue primero a la posición (0,0), ha cogido la o las últimas cerillas y gana. Retrociendo desde esta posición a las tres que permiten acceder a ella, tenemos tres posiciones ganadoras que designamos con la letra "G" y que son las tres casillas del diagrama que limitan con la (0,0) (figura 1). Retrocediendo de nuevo desde estas posiciones se tienen como posiciones perdedoras, designadas en el diagrama por la letra "P", aquéllas desde las que sólo se puede acceder a posiciones ganadoras y como posiciones ganadoras aquellas desde las que se puede acceder a alguna posición perdedora. Así, retrocediendo, se van obteniendo las posiciones perdedoras y ganadoras.

3	G	G	G	G	G
2	P	G	P	G	P
1	G	G	G	G	G
0		G	P	G	P
	0	1	2	3	4

Figura 1

Son muchas las posibilidades didácticas de este juego modificando los datos y generalizando el procedimiento de solución a otros problemas. Por ejemplo, a partir de la representación anterior se puede plantear un juego moviendo fichas sobre un tablero cuadriculado desde unas posiciones iniciales y dirigiéndose hacia una meta, según ciertas normas.

Una generalización clásica de "Jugando con cerillas" es el conocido "Juego de Nim" en el que los objetos se distribuyen en varios montones (Ball y Coxeter, 1974).

Algunas implicaciones en la concepción del curriculum

Este modo de aprender y de enseñar matemáticas se traduce en una serie de consecuencias que afectan a la concepción del curriculum de matemáticas. Entre ellas podríamos destacar las siguientes:

* Privilegiar las *actitudes* adecuadas para la actividad matemática (confianza en las propias capacidades de aprendizaje, gusto por afrontar retos y desafíos, originalidad, fluidez de ideas, flexibilidad de pensamiento, espíritu reflexivo y crítico, perseverancia en la búsqueda de soluciones) y los

7. La solución depende del número de cerillas que haya en cada montón. En cualquier caso uno de los jugadores lleva ventaja. Si las cerillas estuviesen distribuidas en dos montones de 4 y 3 cerillas, que notamos (4,3), el primer jugador lleva ventaja si deja siempre a su oponente en una de las posiciones siguientes: (4,2), (4,0), (2,2), (2,0) y (0,2).

procedimientos heurísticos sobre los contenidos conceptuales. Como afirma M. de Guzmán, "el saber matemático resulta ser esencialmente saber de método mucho más que saber de contenido. En matemáticas es mucho más importante familiarizarse con métodos de trabajo, con métodos de abordar diferentes problemas, que conocer muchos resultados dispersos. Existe, en realidad, una íntima conexión entre los resultados importantes y los métodos esenciales de una teoría hasta tal punto que los resultados no suelen ser sino hitos del camino que constituye el desarrollo de los métodos propios. No en vano método, *meta odon*, significó para los griegos "*según el camino*" (Guzmán, 1985. p. 32).

* **Evaluar** a los alumnos de modo distinto al habitual por dos razones importantes: la naturaleza de la tarea y el modo en que aquí la hemos planteado.

- En primer lugar *el éxito en la resolución de un problema nunca está garantizado de antemano* porque los conocimientos que hay que aplicar no son rutinarios: si los fuesen no se trataría de un problema. Sabemos por experiencia que se puede tener un día malo en el que no se llegue a ningún resultado interesante a priori, que ayude a encontrar la solución, y eso no quiere decir que hayamos perdido el tiempo o que no seamos capaces de llegar a la solución. Se trata simplemente de que *la inspiración* se puede favorecer con un trabajo consciente de familiarización con el problema activando nuestros conocimientos, poniendo en juego nuestra experiencia resolviendo otros problemas, intentando tomar consciencia de los bloqueos de todo tipo que pueden obstaculizar el camino para encontrar la solución (cfr. Guzmán, 1991); sin embargo, dar con la "idea feliz" que ilumine el problema y la vía para llegar a la solución es algo que escapa muchas veces al esfuerzo anterior (cfr. Poincaré, 1932). Además hay que contar con otro fenómeno importante en el proceso de resolución de un verdadero problema, la *incubación*: es necesario dejar un cierto tiempo para que tras el trabajo consciente de familiarización con el problema, el semiconsciente y el inconsciente puedan combinar libremente las ideas dando lugar en algunos casos a combinaciones útiles y provechosas para la resolución del problema (cfr. Poincaré, 1932 y Hadamard, 1934).

- En segundo lugar, en la resolución de un problema intervienen conocimientos de orden superior que llevan el control del proceso de resolución, denominados *metaconocimientos*, a los que resulta difícil acceder. Sus funciones son, entre otras, las siguientes: elegir los conocimientos que se van a utilizar, decidir qué estrategia seguir, así como el momento de abandonar un camino emprendido, etc (Schoenfelf, 1985). Para acceder a ellos es necesario emplear métodos refinados como la obtención y análisis de protocolos escritos o audiovisuales.

- En tercer lugar en el proceso de resolución de problemas, además de los aspectos cognitivos y metacognitivos, hay otros elementos importantes a valorar: las *actitudes* de los alumnos ante la tarea (espíritu reflexivo y crítico, fluidez de ideas, flexibilidad de pensamiento, perseverancia); los *hábitos* y la *capacidad para el trabajo en equipo*; la *capacidad de expresión, de argumentación, de comunicación oral y escrita*.

Podemos resumir dos cosas importantes de la evaluación de esta habilidad: primera, que tiene que ser **cualitativa y multidimensional**: resulta ridículo asignar un número de uno a diez a una habilidad que encierra distintas capacidades; segunda, que tiene que ser una medida **procesual**: no se puede evaluar a un alumno proponiéndole un problema en tiempo acotado o a partir de un solo problema, sino que es necesario observarle durante un tiempo más menos prolongado, para poder constatar si ha habido un progreso, esto es, si resuelve más problemas y los resuelve mejor.

Formación del profesorado para este enfoque

Este tipo de enseñanza exige una **preparación del profesor** diferente de la que se necesita para el método expositivo clásico. Requiere, como ha indicado M. de Guzmán (1985) "tratar de acercarse al desarrollo genético de las ideas matemáticas, preocuparse por la historia, por la motivación intrínseca, por los desarrollos y aplicaciones posteriores, preparar la estrategia de comunicación y participación, tratar de prever cómo se desarrolla esta participación y tener dispuestas alternativas adecuadas. Exige una preocupación individual por los alumnos para evitar que muchos queden descolgados del proceso". (p.42).

Esta imagen del profesor parece poco realista. El profesor tiene unas ideas previas sobre las matemáticas, sobre su enseñanza/aprendizaje, sobre los alumnos, sobre el curriculum, sobre la programación, que son difíciles de cambiar, y necesita ayuda para reflexionar sobre su propia práctica docente, para cambiar sus ideas sobre la educación matemática y para modificar sus modos de intervención en el aula. En algunos países se han diseñado estrategias de formación permanente de profesores de matemáticas en ejercicio a fin de prepararles para este enfoque (Simon y Schifter, 1991). Aquí sólo nos referiremos a un aspecto, la necesidad de trabajar en grupo para llevar estas ideas a la práctica, ya sea creando un seminario permanente con este objetivo u organizando clubs matemáticos con alumnos que se presten voluntariamente a esta actividad.

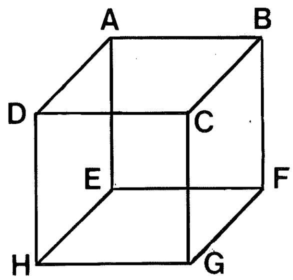
Los **grupos de trabajo** de profesores, centrados en la resolución de problemas (cfr. Guzmán, 1987) pueden organizarse del siguiente modo: se proponen problemas que no exijan conocimientos superiores, pero que demanden un cierto grado de concentración y de trabajo creador y de forma que los participantes puedan utilizar en sus clases la mayor parte de las actividades propuestas, sin que haga falta modificarlas sustancialmente. Se resuelve el problema individualmente o en grupo realizando un protocolo, esto es, registrando todo aquello que se va pensando y sintiendo a lo largo del proceso de resolución, por ejemplo, las ideas que se consideran importantes, lo que intenta hacer, el parecer sobre todo ello, los sentimientos de frustación, de entusiasmo, etc. Una vez resuelto el problema, se hace una exposición sobre este proceso, con ayuda del protocolo, y se discute sobre las implicaciones didácticas: ¿este problema se puede utilizar en clase? ¿en qué momento del programa se puede proponer? ¿qué puntos necesitan más atención? ¿cómo se puede intentar abordarlos? ¿qué generalizaciones se pueden hacer? Estas sesiones de trabajo se pueden tener también con alumnos, fuera del horario escolar, en el marco de un Club matemático, en cuyo caso cambian algunos de los objetivos anteriores.

Los **Clubs matemáticos** con alumnos son actividades fuera del aula que pueden plantearse con distintas finalidades, entre ellas brindar a los estudiantes la educación matemática que no les proporciona la enseñanza formal de esta disciplina, por ejemplo, tener la experiencia de resolver verdaderos problemas: dar vueltas a una cuestión durante varias semanas o durantes meses, tomar consciencia lentamente de la naturaleza de las dificultades de resolución, llegar a un resultado después de un largo proceso gracias a una iluminación que desvela la solución. Se trata de una aventura que queda en la memoria de todos los que la han vivido, y del profesor que la da a gustar a sus alumnos.

Pero otra finalidad de los Clubs matemáticos es que el profesor se forme en el enfoque de la matemática a través de la resolución de problemas, ejerciendo su actividad con un grupo de alumnos que se prestan a ello voluntariamente, sin las limitaciones que impone el sistema escolar. De esta forma el profesor planteará sesiones que se desarrollarán según la dinámica antes expuesta y aprenderá el difícil papel de moderador y guía de la actividad de los alumnos. En una experiencia de este tipo que yo misma conduje durante varios años y que he descrito en otros lugares (Callejo, 1988, 1990, 1991), tuve la oportunidad de disfrutar, junto con estudiantes de Bachillerato de diversos Institutos y Colegios de Madrid, de momentos especialmente interesantes propiciados por el esfuerzo constante, el azar o el trabajo en grupo. Uno de los momentos estelares fue la resolución del siguiente problema, propuesto en una edición de la "*Olimpiada Matemática Belga*", que lo conocíamos como "*El problema de la mosca*".

El problema de la mosca. Una mosca se pasea por las aristas de un cubo ABCDEFGH. Cuando se encuentra en un vértice prosigue su camino hasta el vértice de una cualquiera de las aristas que parten del vértice en que está. Por tanto la probabilidad de que elija una arista determinada es 1/3. Los vértices F y G están fumigados de un insecticida mortal. Si la mosca parte del vértice A, cuál es la probabilidad.

- de que llegue al vértice F
- de que llegue al vértice G
- de que no pase nunca ni por F ni por G.



El proceso de investigación duró un año (Callejo, 1988). Las conjeturas acerca de la posibilidad de que la mosca muriese eran diversas: algunos estudiantes decían que seguro que la mosca moriría; otros mantenían que no, porque la mosca se puede pasear indefinidamente por vértices que no están envenenados; un último grupo creía que la probabilidad de que la mosca muriera era un número próximo a 1 porque era casi seguro que moriría. En el proceso de comunicación y discusión de estas ideas algunos estudiantes cambiaron de postura y aceptaron los argumentos de sus compañeros como más fiables. Para justificar las conjeturas vislumbraron tres vías: resolver primero un problema más sencillo, considerar por ejemplo un tetraedro con un solo vértice envenenado y luego generalizar el resultado como si la probabilidad de llegar a F y a G fuese la misma, idea que posteriormente se reveló falsa; plantear un sistema de ecuaciones, estrategia que abandonaron pronto y, por último, sumar la serie de término general:

a_n-" probabilidad de que la mosca no llegue ni a F ni a G después de n aristas recorridas".

Esta última idea fue la que más prosperó. Los estudiantes utilizaron diversas astucias para calcular esta suma. La más ingeniosa estaba inspirada en "El juego de la vida" de Martin Gardner. Al final la solución se reveló más fácil de lo que los participantes habían pensado: bastaba con plantear un sistema de ecuaciones lineales que consideraba la simetría de los vértices no envenenados en relación a F y a G y que relacionaba la probabilidad de ir de un vértice a otro en un número indeterminado de aristas recorridas. La probabilidad de llegar a F es 4/7, de llegar a G 3/7, y de no pasar nunca ni por F ni por G es cero.

Conclusión

Comenzamos esta exposición haciéndonos tres preguntas acerca del enfoque de las matemáticas desde la corriente denominada "resolución de problemas": *¿Se trata de continuar haciendo lo mismo de siempre pero llamándole de otra manera?; ¿O se trata quizá de una moda pasajera que a España nos llega con un poco de retraso y por ello aparace en los DCB de matemáticas de la Reforma actual?; ¿O, por el contrario, se trata verdaderamente de una renovación importante de la educación matemática que supondrá cambios sustanciales en curriculum y en el papel que el profesor debe jugar en la formación matemática de sus alumnos?* Tal como la hemos descrito, esta forma de concebir la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, supone un cambio importante respecto a una práctica educativa basada en el "saber" más que en el "saber-hacer". No estamos pues ante una moda pasajera sino ante una corriente que pone el acento en un aspecto nuclear de la matemática, la resolución de verdaderos problemas. Esto puede significar una renovación importante de la educación matemática en lo que concierne a los tipos de contenidos a privilegiar, a la metodología a adoptar, al modo de evaluar y a la elección de materiales curriculares a utilizar tal como ha quedado expuesto. Pero este enfoque va más allá del curriculum de matemáticas, se trata de un modo de entender la educación en las etapas iniciales, (Primaria y Secundaria), que supera la disciplina concreta, las matemáticas. Un tipo de educación basada en el trabajo en equipo, en la comunicación, en la libertad para expresar ideas y defenderlas en el respeto hacia las ideas de los otros, en el interés por la materia y en la motivación intrínseca. **Ponerlo en práctica no es fácil, pero merece la pena intentarlo**.

El testimonio escrito de un profesora con quien he compartido un grupo de trabajo centrado en la resolución de problemas durante el curso 90-91 es bastante expresivo de lo que puede significar este planteamiento en la renovación del profesor y de su práctica docente.

"Realizar este tipo de trabajo me ha servido para reflexionar sobre mi propia práctica y sistematizarla. (...). He aprendido a observar y a tomar nota de lo que sucedía en clase, igual que mis alumnos han aprendio a anotar lo que pasaba en la resolución de problemas. También he aprendido a ser un mero conductor de la actividad del alumno, una vez que le ponía en situación de conflicto. He podido comprobar que alumnos que tienen una dificultad enorme en clase se integran y trabajan buscando soluciones, lo cual no suelen hacer en una clase tradicional. En definitiva, creo que los alumnos y yo nos hemos vuelto un poco más reflexivos".

María Luz Callejo de la Vega
Dep. de Didáctica de las Matemáticas
I.E.P.S. - Madrid

Bibliografía

ADDA, J. (1985). Pragmatique et questionnements scolaires en mathématiques, **Discours, Essays in Educational Pragmatics-1**, M. Spoeldes, F. Van Beisen, F. Lowenthal y F. Vandamme (Eds.), ACCO, Lovaina, 223-230.

BALL, W.W. y COXETER, H.S. (1874). **Mathematical Recreations and Essays**. Univ. de Toronto Press, Toronto.

BONO, E. de (1986). **El pensamiento lateral: Manual de creatividad**. Paidós, Barcelona.

CALLEJO, M.L. (1988). Un club matemático. **Cuadernos de Pedagogía** nº 159, 50-52.

CALLEJO, M.L. (1990). **La resolución de problemas en un Club matemático**. Apuntes IEPS nº 53, Narcea, Madrid.

CALLEJO, M.L. (1991). **Les représentations graphiques dans la résolution de problémes de type olympiades: Une expérience de Club mathématique**. Tesis doctoral. Universidad París-VII.

COCKCROFT, W.H. (1982). **Mathematics Counts**. HMSO, Londres.

GAULIN, C. (1982). La résolution de problémes: le mot d´ordre pour les annèes 1980-1990. Quoi en penser?, **Actes du Colloque Mathématique: La didactique au primaire**, Dep. des Sciences de l´education. Universidad del Quebec en Chicontimi.

GUZMÁN, M. de (1985). Enfoque heurístico de la enseñanza matemática. **Aspectos didácticos de matemáticas-1**, Bachillerato. Aula Abierta nº 57. ICE de la Universidad de Zaragoza, 31-46.

GUZMÁN, M. de (1987). Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. **Educación abierta** nº 71. ICE de la Universidad de Zaragoza.

GUZMÁN, M. de (1991). **Para pensar mejor**. Labor. Barcelona.

HADAMARD, J. (1934). **The Psychology of Invention in the Mathematical Field**. Dover, Nueva York.

KILPATRICK, J. (1981). Stop the Bandwagon, I Want off. **Arithmetic Teacher**, vol. 28, p. 2.

LAKATOS, I. (1978). **Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático**. Alianza, Madrid.

MASON, J. BURTON, L. y STACEY, K. (1988). **Pensar matemáticamente**. Labor, Barcelona.

MEC, (1989). **Diseño Curricular Base, Educación Secundaria Obligatoria**, MEC, Madrid.

NCTM (1980). **An Agenda for Action**. NCTM. Reston, Virginia.

NCTM (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. NCTM. Reston, Virginia.

POINCARE, H. (1932). **La Science et l'Hypothèse**. Flammarion, París.

POLYA, G. (1945). **How to Solve It**. Princenton University Press. Princenton.

POLYA, G. (1967). **La découverte des mathématiques**. Dunod. París.

SCHOENFELD, A. (1985). **Mathematical Problem Solving**. Academic Press. Orlando.

SERRANO, T. (1989). **¿Qué es una enseñanza constructivista?** Documentos IEPS. Monografías nº 9, IEPS, Madrid.

SIMON, M.A. y SCHIFTER, D. (1991). Towards a constructivist Perspective: An Intervention Study of Mathematics Teacher Development. **Educational Studies in Mathematics**, 22: 309-331.

WHEATLEY, G.H. (1991). Constructivist Perspectives on Science and Mathematics Learning. **Science education**, 75 (1), 9-21.