

MATEMÁTICA Y CULTURA GENERAL

Luis A. Santaló

La importante revista inglesa *Nature*, en su volumen 340 del mes de Julio de 1989, publica interesantes resultados referentes a una encuesta realizada simultáneamente en los Estados Unidos de Norteamérica y en Inglaterra, para averiguar el concepto que el hombre común tiene de la ciencia y de sus métodos, así como del interés por la misma y del grado de conocimientos referentes a algunas de sus realizaciones. La encuesta se hizo sobre una muestra de unos dos mil norteamericanos y otros tantos ingleses, tomados al azar entre mayores de 18 años.

Muchas de las preguntas se refieren a la biología o a la química y no nos vamos a ocupar de ellas. Tan solo, a manera de ejemplo, podemos mencionar algunas como las siguientes: a) ¿Tienen todos los insectos 8 patas?, respuestas afirmativas 7,9%, negativas 83,7%, sin opinión 8,3%. b) ¿Es el hígado el órgano productor de la orina?, respuestas afirmativas 25,4%, negativas 53,1%, sin opinión 21,4%. c) ¿Son los electrones más pequeños que los átomos?, respuestas afirmativas 30,9%, negativas 23,5%, sin opinión 45,3%. d) Los diamantes ¿están hechos de carbón?, respuestas afirmativas 58,9%, negativas 15,5%, sin opinión 25,3%. e) La sal común, ¿está formada por carbonato de calcio?, respuestas afirmativas 36,5%, negativas 31,2%, sin opinión 32,3%. f) Los primeros hombres ¿convivieron con los dinosaurios?, respuestas afirmativas 31,6%, negativas 46,2%, sin opinión 22,1%.

Todas estas cuestiones son ajenas a la matemática. Relacionados con la misma hay algunos resultados bastante satisfactorios, posiblemente por tratarse de temas puntuales de uso frecuente. Por ejemplo: un doctor, basándose en estudios genéticos, dice a una pareja que el hijo que está por venir tiene una probabilidad de uno sobre cuatro de heredar cierta enfermedad. Sentado esto, se plantean las siguientes preguntas: i) Si la pareja tiene solamente 3 hijos, ¿es cierto que ninguno va a heredar la enfermedad? respuestas afirmativas 4,9%, negativas 84,2%, sin opinión 10,7%. ii) Si el primer hijo tiene la enfermedad, ¿es cierto que los tres restantes no la tendrán? respuestas afirmativas 9,3%, negativas 80,3%, sin opinión 10,3%. iii) ¿Todos los hijos de la pareja tienen el mismo peligro de heredar la enfermedad? respuestas afirmativas 82,1%, negativas 9,6%, sin opinión 8,0%. iv) Si los tres primeros hijos nacen sanos, es cierto que el cuarto heredará la enfermedad? respuestas afirmativas 8,6%, negativas 80,3%, sin opinión 10,9%.

Los resultados son, hasta aquí, bastante razonables. Hay, sin embargo, otras preguntas de la encuesta cuyas respuestas llaman la atención. Nos referimos a las tres siguientes:

1. ¿Cuál es mayor, la velocidad de la luz o la del sonido? Respuestas: la luz 74,7%, el sonido 18,5%, sin opinión 6,6%.

2. ¿Es la Tierra que gira alrededor del Sol o es el Sol que gira alrededor de la Tierra? Respuestas: la Tierra alrededor del Sol 62,8%, el Sol alrededor de la Tierra 30,1%, sin opinión 7,1%.

3. A los que opinan que la Tierra gira alrededor del Sol se les preguntó ¿cuánto tiempo tarda en dar la vuelta completa? Respuestas: 1 día el 16,2%, 1 mes el 2,2%, 1 año el 34,1%, no opinan el 10,0%.

Estas tres últimas preguntas y sus resultados, aunque se refieren a cuestiones de física y astronomía, no hay duda de que cierta responsabilidad en ellos tienen los cursos de matemática. Se refieren a cuestiones sin trascendencia para la vida práctica de todos los días y de aquí, posiblemente, el alto porcentaje de respuestas erróneas o sin opinión. Pero, en cambio, son hechos que forman parte de la llamada "cultura general" de nuestra civilización. Es asombroso que 400 años después de Copérnico, con todos los debates que ello dio lugar a lo largo de la historia, todavía haya un 30% de adultos que opinen que la Tierra es inmóvil y que es el Sol el que gira. Y aún, dentro de los 62,8% que conocen la respuesta correcta, solamente un 34,1% saben que el periodo de revolución es el año. La encuesta ha sido hecha en Inglaterra y los Estados Unidos. Sería interesante conocer los resultados en nuestros países.

De todas maneras, como los problemas educacionales son análogos en todas partes, la encuesta puede servir como toque de atención para los responsables de los contenidos de matemática de la enseñanza obligatoria, que se impone a todos los ciudadanos. Aunque son temas que no pertenecen exactamente a la matemática en el sentido tradicional, por su estrecha relación con ella, no hay duda de que los profesores de matemática no pueden desentenderse de la responsabilidad de formar ciudadanos con una cultura general acorde con el estado de la civilización actual. Cada maestro o profesor debe procurar impartir los conocimientos básicos de esta civilización, sin preocuparse de si los mismos son repetidos en otras materias y bajo otros puntos de vista, pues las cosas que se repiten son siempre, en general, las que son importantes y conviene queden grabadas en el alumno. Preferible una repetición que un olvido general. La moraleja

de la encuesta anterior es que durante los años de la enseñanza obligatoria, el alumno debe ser instruido, junto con las técnicas corrientes específicas de cada materia y que son de utilidad inmediata para la vida laboral, en la "cultura general" que está en las raíces y constituye la base de nuestro concepto actual del mundo.

Pondremos algunos ejemplos. Desde los primeros años del ciclo intermedio o secundario, es importante que el alumno se familiarice con las cónicas. La elipse, la parábola y la hipérbola, a partir de sus definiciones como lugar geométrico, deben saberse dibujar por puntos o por trazo continuo y ser vistas como secciones planas de un cono de revolución. Son curvas demasiado frecuentes en el mundo de hoy para que queden olvidadas en la enseñanza obligatoria.

La elipse puede dibujarse por el método usual de un hilo sujeto por los extremos y mantenido tirante por un lápiz que la describe (elipse del jardinero), observando que su forma puede variar desde una circunferencia hasta un segmento recorrido dos veces (elipse aplastada), como resulta muy intuitivamente al considerarla como una circunferencia vista de costado. Conocida la elipse, se aprovecha la oportunidad para recordar que la Tierra describe una elipse alrededor del Sol y enunciar las leyes de Kepler, con un poco de historia sobre Copérnico, Tycho Brahe, Kepler y Galileo. Como la elipse descrita por la Tierra es muy cercana a una circunferencia, conviene conocer su radio y para ello se necesita la velocidad de la luz (300.000 Km/seg) y la información de que ella tarde 8 minutos en llegar del Sol a la Tierra (aproximadamente). Con esto caben problemas sobre la longitud de la trayectoria y la velocidad de la Tierra en su movimiento de traslación, sabiendo que el tiempo de revolución es un año. Para practicar el cálculo con números grandes aproximados (notación científica) y para los alumnos que muestren afición para ello, pueden plantearse problemas referentes a las distancias, velocidades y tiempos entre los planetas del Sistema Solar y de las sondas enviadas por el hombre para su exploración.

Es también oportuno hablar de los satélites artificiales, en particular de los satélites de co-

municaciones, que permanecen inmóviles respecto de un punto de la Tierra (buscar su altura y velocidad en algún texto o revista) haciendo así que se comprenda el significado de las frases “televisión satelital” o “comunicación via satélite”, que se usan con tanta frecuencia, al mismo tiempo que se adquieren ideas acerca de las dimensiones de nuestro universo.

El cálculo del radio de la Tierra por el método de Eratóstenes, midiendo los ángulos de la vertical con los rayos solares el día del solsticio de verano en las ciudades de Siena y Alejandría, situadas sobre un mismo meridiano, se presta a practicar geometría elemental y a hacer consideraciones sobre la época de Eratóstenes (el mismo año de la “criba” para la obtención de números primos) y de la biblioteca de Alejandría que dirigió (siglo III).

Hay que proponer la búsqueda de elipses en la arquitectura y en la naturaleza, así como elipsoides de revolución, alargados o aplastados. Un ejemplo aparece al observar la media luna, o sea, la Luna en sus períodos de creciente o menguante, cuya parte exterior es una media circunferencia, pero la interior es un arco de elipse, por proceder de la circunferencia que separa la parte iluminada de la oscura, vista de costado.

La parábola es también interesante y su conocimiento y trazado cabe darlos desde la escuela elemental o intermedia. Por revolución alrededor del eje se obtienen los paraboloides, actualmente muy citados como forma de las antenas parabólicas de la televisión o de los radares. Un estudio detallado puede exigir conocimientos superiores, pero una idea debe incluirse en el ciclo de enseñanza obligatoria, pues su frecuente uso la hace integrante de la “cultura general”.

Finalmente, la hipérbola, dibujada por puntos a partir de la fórmula $y = k / x$, es básica como representativa de la proporcionalidad inversa, que los alumnos practican desde la escuela primaria en los problemas de regla de tres simple. La idea de proporcionalidad, directa o inversa, forma parte también de los conocimientos básicos de nuestra cultura, desde Thales, cuya historia conviene recordar, hasta las continuas aplicaciones actuales

para la interpretación de mapas, escalas e imágenes de objetos o figuras.

Sin salir de la astronomía o de la geografía, forma también parte de la cultura general y está vinculada con la matemática, la explicación de las estaciones y la inversión de las mismas entre el hemisferio norte y el sur. Entre las consecuencias que pueden buscarse de la esfericidad de la Tierra, se puede hacer notar como las formas de la parte iluminada de la Luna en sus cuartos menguante y creciente, aparecen invertidas en los dos hemisferios terrestres: mientras que en el Norte el cuarto menguante tiene forma de C (inicial de “creciente” y por eso se habla de la Luna mentirosa), en el Sur es el cuarto creciente que tiene forma de C y, por tanto la Luna deja en él de ser mentirosa. ¿Cómo se ve desde los puntos del ecuador?

Habría que pensar en otras cuestiones, ya no de tipo astronómico, que forman parte de la cultura deseable para todos quienes hayan cursado el ciclo de enseñanza obligatoria y que, a veces por su carácter interdisciplinario y a veces por la costumbre de considerarlas de un nivel superior, escapan a su tratamiento en dicha etapa de la enseñanza. En un folleto publicado por la UNESCO titulado *Science and Technology in School Curricula, Case Study 1, People's Republic of China* (1988) se menciona que para averiguar los contenidos indispensables de matemática para la escuela elemental se hizo una estadística de los temas que aparecían como necesarios para comprender los contenidos de las publicaciones periódicas no especializadas (diarios y revistas) de mayor circulación en China. Si se siguiera este método en muchos países es posible que, aparte de los conceptos clásicos (sistema métrico decimal, porcentajes, áreas, volúmenes, escalas) aparecieran cuestiones de uso generalizado y que, sin embargo, no suelen aparecer en los programas de la escuela obligatoria. Por ejemplo, algunas cuestiones referentes a la teoría de muestras: sondeos de opinión para adelantar los posibles resultados de unas elecciones, análisis de mercados, impacto de la propaganda en los distintos medios de difusión como la radio, la televisión o los diarios, el “rating” de algunos espectáculos o programas de televisión, etc.

Sin pretender, naturalmente, formar especialistas en muestreo, no hay duda de que algunos ejemplos simples para hacer comprender sus fundamentos, serían de interés para todo el mundo. Lo mismo podríamos decir de la teoría de colas o filas de espera, fenómeno que atañe a todos y que sería muy útil que también todos estuvieran informados de un mínimo de investigación operativa para comprender su posible tratamiento basado en estadística y algunos casos simples concretos.

Otro ejemplo es la interpretación de los gráficos y datos meteorológicos que suelen figurar en todos los periódicos y es posible que no todos los ciudadanos "cultos" conozcan el significado de la presión o de la humedad o de los milímetros de lluvia caída. Todo ello, sin embargo, cabe ser considerado en los cursos elementales de matemática, como ejemplos de gráficos, correlaciones y de áreas y volúmenes, calculando, por ejemplo, para un determinado número de milímetros de lluvia caída, la altura del agua recolectada en un recipiente conocida su forma y el área de la boca de recepción.

Como ejemplos de aplicaciones de la función exponencial son interesantes algunos problemas de crecimiento de poblaciones biológicas, que los hay muy simples y que se pueden ir graduando hasta otros más difíciles suponiendo la presencia de especies depredadoras o parásitas. La clásica teoría de la lucha por la vida de Volterra o la más simple de Malthus sobre las relaciones entre el crecimiento o desaparición de las poblaciones y la cantidad de alimentos disponibles, necesitan cierto nivel matemático para su estudio completo, pero una idea de las mismas, junto con ejemplos de propagación de epidemias o de rumores, cabe bien en el nivel de la enseñanza obligatoria. El profesor de matemáticas de enseñanza media debe esforzarse para que este tipo de ideas, consideradas de nivel superior, quepan dentro de sus cursos, naturalmente con las simplificaciones necesarias, siempre que ellas dejen suficientemente claros los fundamentos y el tipo de resultados que cabe esperar...

Una técnica que es conveniente fomentar, por sus muchas aplicaciones, es la recolección de estadísticas. Como ejemplos fáciles y atractivos figuran las estadísticas sobre el idioma. Se pide a

cada alumno que elija unas 10 líneas de cualquier obra literaria y de cualquier página del mismo y que cuente el número de letras "a" en las mismas. Ello será una muestra del idioma. Dividiendo por el número total de letras (o, mejor, de espacios de la composición, incluyendo signos de puntuación y los espacios entre palabras) se tiene la frecuencia de la letra "a" en las líneas elegidas. Se observa que cualquiera que sea el párrafo elegido (uno distinto para cada alumno) la frecuencia es "casi seguro" que no difiere demasiado de 0,11 que es la frecuencia de la letra a en el idioma castellano. Tomando la media aritmética entre las frecuencias obtenidas para cada alumno, lo que equivale a haber tomado una muestra mucho mayor, es muy probable que el resultado se acerque bastante al real. Es un ejemplo de que las muestras muchas veces no necesitan ser muy grandes para obtener resultados suficientemente aproximados para las necesidades prácticas. Lo mismo se puede hacer para las otras vocales y para otras letras. Los resultados son frecuencias características del idioma. En cambio, si se hacen estadísticas sobre la frecuencia de la longitud de las frases o de las palabras empleadas (tomando en este caso algunas páginas al azar), los resultados dependen del autor, lo que se ha usado para comparar estilos literarios. Ordenando la frecuencia de cada palabra de un texto y graficando la frecuencia respecto de este orden, es curioso que se obtienen siempre curvas de forma parecida (ley de Zipf). Se puede ver, al respecto, el libro de Evyatar-Rosenbloom *Motivated Mathematics*, Cambridge University Press, 1981. La importancia de estas cosas desde el punto de vista educativo es que pueden interesar a algunos alumnos (no debe ser obligatorio para todos), a leer obras de distintos autores y hacer comparaciones sobre la mayor o menor riqueza del lenguaje empleado para cada uno. Desde el punto de vista matemático, enseña a diagramar, calcular y comparar.

Habría que buscar otros ejemplos simples de teorías, actualmente de nivel universitario, pero cuyos resultados van siendo de uso cada vez más extendido y por tanto que deben, poco a poco, irse incorporando a la cultura general de todo ciudadano. Nos referimos, por ejemplo, a los elementos de la teoría de la información (concepto de medida

de la información de un mensaje, número de "bits" necesarios para adivinar cierto dato), teoría de la decisión y teoría de los juegos de estrategia.

Todo ello se podría considerar como una traslación, al nivel elemental, de las ideas de Ortega y Gasset respecto de la necesidad de "fomentar un género de labor intelectual, dedicada no tanto a aumentar la ciencia en el sentido habitual de la investigación, cuanto a simplificarla y producir en

ella síntesis quintaesenciadas, sin pérdida de substancia y calidad", todo ello para introducir en la cultura o "sistema de ideas vivas que cada tiempo posee, ideas determinadas que constituyen el suelo en que el hombre apoya su existencia" (*Misión de la Universidad*, Cap.IV, 1930).

Luis A. Santaló



BASES PARA UN PLANTEAMIENTO ACTUAL DE LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA (12 - 16)

Modesto Arrieta Illarramendi

Propuesta para un planteamiento de la Geometría en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16), siguiendo las directrices del Diseño Curricular Base.

La propuesta consta de tres partes:

1.- Justificación y finalidad de la Matemática en general y de la Geometría en particular en dicho nivel obligatorio.

2.- Listado de temas desglosados en conceptos y procedimientos propios de la geometría elemental atendiendo a los objetivos propuestos.

3.- Enfoque a dar a cada tema o concepto geométrico para tratar de conseguir un correcto aprendizaje.

Con este trabajo se pretende, siguiendo las directrices del DCB (12-16) para el área de la Matemática, sentar las bases para un planteamiento general del Bloque Temático de Geometría que sirva como punto de partida para el diseño de unidades didácticas.

Para ello iremos un poco más lejos que el DCB especificando o fijando, aunque sólo sea de forma provisional la justificación de su inclusión, los temas de trabajo apropiados y el enfoque general a dar en la práctica a dichos temas pues pensamos que una concreción de dichos aspectos curriculares

o mejor una propuesta sistemática sobre esos tres aspectos permitirán dedicar nuestro tiempo a la manera más adecuada de impartir las clases.

Ocurre a menudo que aunque estemos de acuerdo en muchos aspectos de la programación, el no hacerlo explícito, nos obliga a pensar en todo, nos quita seguridad y evita centrar el tema en los aspectos prioritarios.

Partiendo de una justificación de la Matemática en la enseñanza obligatoria en general y de la Geometría en particular propondremos un listado de temas de trabajo-contenidos y un tratamiento de los mismos.

Como tal propuesta puede estar sujeta a todo tipo de críticas, pero de lo que se trata es de fijar un listado de temas mínimos para que la experiencia decida sobre el futuro de cada tema en cuestión. Además creemos que lo importante es que haya una propuesta concreta para que la experiencia permita ir puliéndola y mejorándola.

En cuanto al enfoque a dar al tema pensamos que hay cierta unanimidad en ciertos principios generales de búsqueda, participación, actividad, pero que haría falta también sistematizarlos para ir fijando y centrando cada vez más esa práctica diaria en la que ya existen grandes diferencias entre unos profesores y otros.

De acuerdo con estas ideas la propuesta constará de tres apartados:

- 1.- Justificación-finalidad.
- 2.- Temas de trabajo.
- 3.- Enfoque-tratamiento temas.

Con todo esto se pretende sentar las bases para una propuesta sistemática que sirva como punto de partida para una puesta en práctica razonada y que sobre todo permita dedicar nuestro tiempo a pensar en cómo daremos nuestras clases, cosa que lo agradecerán nuestros alumnos pues es entonces cuando incidiremos de verdad en el problema clave de la enseñanza como es la mejora de su calidad.

Personalmente me hubiera gustado que en el DCB se recogiera una propuesta unitaria que abarcara esos tres aspectos (por qué-para qué, qué, cómo) de una forma concreta, abierta y con margen suficiente para un tratamiento activo, de tal manera que una comisión Nacional (?) de seguimiento fuera recogiendo todas las propuestas y sugerencias, replanteara anual o bianualmente el tema en su triple vertiente y dejara en cambio el tema de la práctica del trabajo diario de clase en manos de los centros.

También se echa en falta una vez más la evaluación de la reforma que debería, primero, definir qué porcentaje de fracaso es asumible por el plan para en el caso de que sea inferior proponer recuperaciones individuales para los alumnos afectados, pero si fuera superior, alterar el propio plan. Lo que ocurre es que por la propia estructura de éste, al no hacer propuestas concretas de temas de trabajo ni ajustar metodologías todo queda en el aire de tal manera que después es prácticamente imposible incidir sobre dichos temas.

Es como si cada vez partiéramos de cero. Evidentemente los nuevos planes mejoran actuaciones precedentes e incluso el espíritu de la Reforma es positivo y progresista pero es preciso concretar para decidir si se actúa positivamente o no y obrar en consecuencia. Es importante hacer propuestas abiertas pero tan importante es concretarlas para alterarlas en el caso que sea necesario.

1. Justificación y finalidad

Se trata de fijar y en lo posible clasificar las razones por las que se imparte Matemáticas y en especial la Geometría y para qué se imparte, es decir, qué es lo que se pretende conseguir.

Si en los aspectos más generales estamos básicamente de acuerdo, no lo estamos en los diferentes matices como en el papel que juegan en el desarrollo global de los alumnos ya que dependen más de cómo se enseñan y se aprenden que en el hecho de impartir simplemente.

A pesar de esa aparente unanimidad sería importante sistematizar pues hay razones de tipo social, de tipo cultural, de tipo psicológico de capacidades que merece la pena clasificar y exponer abiertamente a una continua revisión.

Esto nos dará seguridad y confianza para saber lo que se pretende conseguir, cuál es la meta de nuestro trabajo o los objetivos que nos marcamos al impartir clases de matemáticas.

Tampoco se trata de ser exhaustivo sino de proponer las líneas maestras que permitan establecer un marco de referencia abierto y ágil en nuestro trabajo.

La matemática siempre ha ocupado un lugar importante en las propuestas curriculares ya que:

- * Es importante para cualquier situación de la vida y en particular la geometría para el estudio de la naturaleza, como componente esencial del arte, para orientarse en el espacio o hacer estimaciones.
- * Es componente básico para el avance tecnológico y el desarrollo de la Ciencia y en particular la geometría para el diseño, en arquitectura y en topografía.
- * Como lenguaje (gráfico y simbólico) preciso, conciso y riguroso es un poderoso instrumento de comunicación.
- * Desarrolla diferentes capacidades: lógica, numérica, espacial...
- * Importante instrumento para otras áreas curriculares.

Esta justificación implica unas finalidades que una vez agrupadas se plantean como desarrollo de las capacidades siguientes:

- * Identificar formas, relaciones espaciales, otros elementos matemáticos y cuantificar diferentes aspectos de la realidad, actuando sobre situaciones cotidianas con modos propios de la actividad matemática.
- * Incorporar al lenguaje las distintas formas de expresión matemática.
- * Utilizar las formas de pensamiento lógico y elaborar estrategias personales de análisis.

Además estas finalidades se pueden concretar en objetivos específicos del bloque temático que en el Real Decreto de desarrollo de la LOGSE adoptan la forma de criterios de evaluación:

- * Utilizar los conceptos de incidencia, ángulos, movimiento, semejanza y medida...
- * Interpretar y obtener información de representaciones planas...
- * Identificar y utilizar relaciones de proporcionalidad.
- * Estimar y calcular la medida de superficies y volúmenes...

Estas consideraciones nos llevan a proponer una Geometría que, atendiendo la edad de los alumnos (12-16), les inicie en el razonamiento deductivo, que partiendo de situaciones reales, las matematice y generalizándose sirva para resolver nuevas situaciones reales y que como instrumento de comunicación que es, al trabajar los diferentes lenguajes nos sirva como pauta de trabajo para otras áreas curriculares.

Se puede pensar que con estas conclusiones se podrían proponer diferentes temas de trabajo y más si se considerara prioritaria la metodología a utilizar ya que ello nos podría llevar a pensar que no es necesario fijar temas de trabajo pero la experiencia enseña que ello conlleva una dispersión y una falta de consistencia del aprendizaje en un campo de conocimiento ya sistematizado como es la Matemática.

No se trata de entrar en discusión de si el qué precede al cómo o si lo importante es el cómo sin importar el qué. Pensamos que es un problema ya

superado y que ambos van de la mano y que lo importante de verdad es fijar ambos y revisarlos periódicamente dejando para el trabajo de Centro la metodología y la búsqueda de actividades apropiadas.

2. Temas de trabajo

Se pretende fijar los temas de trabajo para cuatro cursos. Deben ser temas mínimos de tal forma que haya un margen para un tratamiento activo, participativo, de relación con el entorno, de uso de material, etc.

La propuesta deber ser también abierta, concreta y revisable al igual que la anterior, con la idea de que sirva de punto de partida para una puesta en práctica crítica.

El bloque dedicado a la Geometría (Representación y organización en el espacio) lo dividimos en 6 grandes temas o unidades temáticas:

- 1.- Elementos en el plano.
- 2.- Figuras planas.
- 3.- Transformaciones.
- 4.- Elementos en el espacio.
- 5.- Cuerpos geométricos.
- 6.- Semejanza.

Estando los tres primeros temas dedicados a la geometría plana, los dos siguientes a la geometría del espacio y el último a ambos.

Cada unidad temática se desglosa en 6 apartados respondiendo a los diferentes conceptos y procedimientos propios de la geometría elemental así como a los diferentes objetivos perseguidos:

Situación de entorno

Sirve de punto de partida para trabajar el tema. Para lo cual nos basamos en un tema de nuestro entorno justificando así el trabajar una Geometría real que nos sirve asimismo de motivación.

Conceptos

Por un posible uso excesivo de la memoria, a veces se tiende a rechazar un tratamiento sistemático de las definiciones pero conviene hacer un listado de los mismos. El problema reside en

trabajarlas adecuadamente y siempre que lleve implícita la comprensión del concepto definido. También hay que hacer un esfuerzo de memoria, ¿por qué no?

Razonamiento

Si a los 12 años los alumnos inician el pensamiento formal, hay que darles la oportunidad de iniciarse aunque al principio sea más intuitivo e inductivo que propiamente deductivo. Para ello conviene hacer un listado de propiedades, relaciones y teoremas con demostraciones sencillas aunque hay que completarlas con diferentes actividades de tipo deductivo. También se presta para un uso adecuado del lenguaje oral, gráfico, simbólico, etc.

Construcciones

Importancia del uso de diferentes técnicas como construcciones con regla y compás, doblado de papel o construcciones con diferentes materiales como cartulina, plastilina, alambre, etc.

Aritmetización

Punto de encuentro de la Geometría con los números y la medida. Habitualmente convertida en recetario para una aplicación exclusivamente mecánica de la que hay que alejarse e incidir en una justificación inductiva-deductiva para un uso mínimamente razonado y justificado del tema.

Aplicaciones-problemas

Partiendo de una situación práctica, la matemática después de teorizar o de modelizar vuelve para generalizar resolviendo otros problemas prácticos. Situaciones que nos van a permitir, además de adentrarnos en el tema de la resolución de problemas, comprobar el nivel de comprensión-adaptación adquirido por los alumnos.

De todas formas esta propuesta había que concretarla más, en el sentido de proponer los temas de trabajo detallados y secuencializados por cursos pero eso ya se escapa del objetivo más general de esta propuesta.

TEMAS TRABAJO	SITUACIÓN	CONCEPTO	RAZONAMIENTO	CONSTRUCCIÓN	ARITMETIZACIÓN	APLICACIÓN
ELEMENTOS EN EL PLANO	<ul style="list-style-type: none"> • Laberintos • Itinerarios • Puntos cardinales 	<ul style="list-style-type: none"> • Punto. Recta. Plano • Semirrec. Segmento • Ángulos: Tipos • Paralelas. Perpend. • Mediatriz. Bisec. 	<ul style="list-style-type: none"> • Relación ángulos correspon. opuestos y alternos 	<ul style="list-style-type: none"> • Representación • Esquemas 	<ul style="list-style-type: none"> • Distancias entre puntos y rectas 	<ul style="list-style-type: none"> • Distancias largas, inaccesible
FIGURAS PLANAS	<ul style="list-style-type: none"> • Mosaicos • Azulejos • Puzzles • Sección aurea 	<ul style="list-style-type: none"> • Triángulos. Clasif. • Cuadrilát. Clasif. • Polígonos. Elemen. • Circunferencia. • Tangente. Central e inscrito 	<ul style="list-style-type: none"> • Ángulos tr. • Pitágoras • Ángulos pol • Prop. tg. • Relación ins-central 	<ul style="list-style-type: none"> • Mediatriz. (C) • Bisectriz. (I) • Mediana. (B) • Altura. (O) 	<ul style="list-style-type: none"> • Justificación y uso de las fórmulas de perímetro y área. 	<ul style="list-style-type: none"> • Superficies grandes. • Teselar
TRANSFORMACIONES	<ul style="list-style-type: none"> • Puertas • Plantas • Espejos • Máquinas 	<ul style="list-style-type: none"> • Traslaciones • Giros • Simetrías 	<ul style="list-style-type: none"> • Propiedades • Composición 	<ul style="list-style-type: none"> • Representación • Esquemas • Diagramas 	<ul style="list-style-type: none"> • Relación entre áreas 	<ul style="list-style-type: none"> • Diseño de mosaicos
ELEMENTOS EN EL ESPACIO	<ul style="list-style-type: none"> • Laberintos • Itinerarios • Puntos cardinales 	<ul style="list-style-type: none"> • Pto. Rec. Plan. Esp. • Ángulos diedros. • Rectas y planos: incidencia, paral. perpendicularidad 	<ul style="list-style-type: none"> • Propiedades 	<ul style="list-style-type: none"> • Representación • Esquemas 	<ul style="list-style-type: none"> • Distancias entre puntos, rectas y 	<ul style="list-style-type: none"> • Distancias largas inaccesible
CUERPOS GEOMÉTRICOS	<ul style="list-style-type: none"> • Globoterráqueo • Cristales • Pirámides • Planetarium 	<ul style="list-style-type: none"> • Poliedros • Prismas • Pirámides • Cuerpos redondos • Elementos. Clasif. 	<ul style="list-style-type: none"> • Fórmula Euler • 5 poliedros regulares. 	<ul style="list-style-type: none"> • Elaboración • Desarrollos • Representación plano • Perspectiva • Comp. Descomp. 	<ul style="list-style-type: none"> • Justificación y uso fórmula volumen. • Altura pirámide • Diagonal prisma 	<ul style="list-style-type: none"> • Distancias mínimas. • Volumen mínimo.
SEMEJANZA	<ul style="list-style-type: none"> • Escalas • Plano. Mapa • Maquetas • Curvas nivel • Fotografía 	<ul style="list-style-type: none"> • Característica. • Proporcionalidad 	<ul style="list-style-type: none"> • Thales • Propiedades 	<ul style="list-style-type: none"> • Dibujo escala • Plano-espacio 	<ul style="list-style-type: none"> • Relación entre área y volumen de figuras semejantes 	<ul style="list-style-type: none"> • Escalas • Planos • Mapas • Maquetas • Topografía

3. Enfoque-tratamiento temas

Conviene tener presente a la hora de dar nuestras clases aspectos pedagógicos ya propuestos en la Reforma de los años 70, confirmados en los Programas Renovados y puestos al día en los DCB últimos como son:

- * Metodología lo más activa y participativa posible.
- * De acuerdo con los intereses de los alumnos.
- * Lo más individualizada posible.
- * Relacionada con su entorno.
- * Importancia del uso del material.
- * Lo más interdisciplinar posible.

La propia historia de la Matemática nos ha enseñado que a pesar de ser una ciencia deductiva, el propio entorno, los problemas reales, la intuición, la inducción han sido el motor o las actitudes que han impulsado y hecho avanzar a la matemática; lo que ocurre es que no se hace ciencia hasta que todas las consecuencias se pueden deducir según un determinado sistema riguroso de leyes, aunque no es menos cierto que esta fase de rigor deductivo es el final de ese largo proceso.

Esta dicotomía ha provocado muchas veces un debate a la hora de enseñar Matemáticas entre matemáticas hechas y por hacer, entre una matemática más o menos activa y más o menos constructiva e inductiva o una matemática más deductiva, de comprobación y comprensión de lo ya conocido, cosa que actualmente pensamos ya superado.

Por otro lado conviene tener presente los principios de Dienes: dinámico -de constructividad-de variabilidad matemática-de variabilidad perceptiva, que siempre ayudan a un tratamiento sistemático, sobre todo a la hora de encarar un nuevo concepto.

También interesa proponer actividades adecuadas a la edad de los alumnos y ordenadas en orden creciente de dificultad; y en el caso concreto de la Geometría interesa recordar los niveles ya conoci-

dos de Van Hiele, para saber en cada momento el lugar que ocupa el alumno posibilitando así un correcto aprendizaje:

- 1º Reconocimiento global de las figuras.
- 2º Análisis de las componentes de las figuras, de sus propiedades pero relacionándolas de forma intuitiva y experimental.
- 3º Relación y clasificación de figuras de modo lógico mediante razonamientos sencillos pero sin organización deductiva.
- 4º Comprensión de la organización deductiva pero con falta de rigor.
- 5º Capacidad de razonamiento deductivo sin necesidad de ayuda de la intuición.

Pero sobre todo para llegar a un nivel de comprensión o aprendizaje significativo propondremos tres fases básicas en el tratamiento de un tema o concepto.

Partiendo de una situación real de nuestro entorno:

- 1.- Experimentación.
- 2.- Comprensión (Representación-Reflexión-Comunicación).
- 3.- Aplicación.

Y que aunque se pueden desglosar en más pasos preferimos mantenerlos así por una mayor coherencia e incluso para un más fácil y fluida puesta en práctica.

Todo ello se completa con una propuesta concreta, abierta y revisable en la que dichas fases didácticas se complementan con un desglose de los procedimientos y actitudes propuestos por el DCB. Y aunque a cada fase del tratamiento del tema se le asigne un determinado aspecto de los procedimientos o de las actitudes esto no quiere decir que el único que se trabaja sino que es el más apropiado en cada caso y el que más se puede y debe potenciar.

		TRABAJANDO PROCEDIMIENTOS	ATENDIENDO ACTITUDES
FASES	Experimentación: - Ensayos. - Pruebas. - Simulaciones - Juegos. - Materiales.	Estrategias	Curiosidad Reconocimiento y valoración
TRATAMIENTO	Comprensión: - Representación gráfica y simbólica. - Reflexión - Comunicación oral y escrita	Lenguajes	Interés y gusto Apreciación belleza
CONCEPTO	Aplicación	Algoritmos destrezas	Flexibilidad Tenacidad

Modesto Arrieta Illarramendi

*E.U. Profesorado de E.G.B.
San Sebastián - U.P.V.*

Bibliografía

* Informe Cockcroft (1982). M.E.C. Madrid.

* ICMI (1987). **Las Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90** (Kuwait-86). Mestral. Valencia.

* DISEÑO CURRICULAR BASE. ESO (12-16). M.E.C. Madrid.

* FREUDENTHAL, H. (1983). **Didactical phenomenology of mathematical Structures**. D. Reidel Publishing Company.

* GRUPO CERO (1984). De 12 a 16. **Un proyecto de curriculum de Matemáticas**. Mestral. Valencia.

* ALSINA Y OTROS. (1987). **Invitación a la didáctica de la Geometría**. Síntesis. Madrid.

* ALSINA Y OTROS. (1988). **Materiales para construir la Geometría**. Síntesis. Madrid.

* MARTÍNEZ RECIO Y OTROS. (1989). **Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría**. Síntesis. Madrid.

* GRUPO BETA (1990). **Proporcionalidad geométrica y semejanza**. Síntesis. Madrid.

* DEL OLMO, M.A. Y OTROS (1989). **Superficie y volumen**. Síntesis.

* CASTELNUOVO, E. (1981). **La Geometría**. Ketres. Barcelona.

* JACOBS, H.R. (1987). **Geometry**. Freeman and Company. New York.

* MOISE, E. Y DOWNS, F. (1982). **Geometry**. Addison-Wesley. U.S.A.

* CARWELL, R. (1979). **Geometry problems**. National Council. U.S.A.