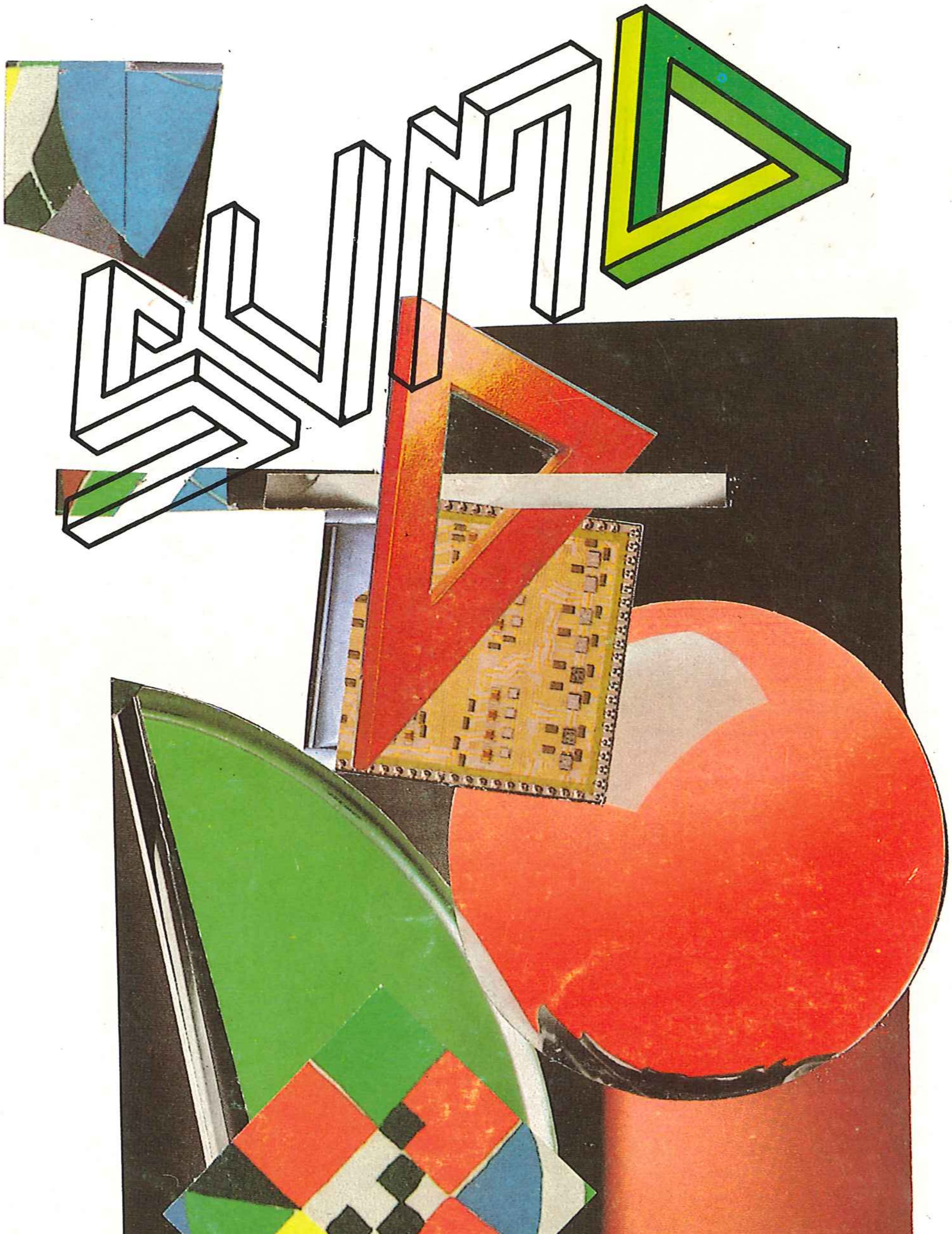


REVISTA SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Núm. 1 - Año I

Vol. I - Octubre 1988

PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A., SCPM «Puig Adam», Madrid.
Arias Vílchez, J., SAEM «Thales». I.B. «Auringis», Jaén.
Arrieta Gallastegui, J., Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P., EUPEGB, Cádiz.
Bou García, L., I.B. «Zalaeta», La Coruña.
Benítez Trujillo, F., SAEM «Thales», E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C., Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J., EUPEGB, Santiago de Compostela.
Cancio León, M.ª P., SCPM «Isaac Newton», Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. M.ª, EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A., Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo «Manuel Sacristán», Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J., I.B. «Colmenar Viejo», Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M., SAEM «Thales», I.B. «Padre Poveda», Guadix (Granada).
Díaz Godino, J., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Fernández Sucasas, J., EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. M.ª, Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M., SAEM «Thales», I.B. «Averroes», Córdoba.
García Arribas, C., SAEM «Thales», I.B. «Padre Suárez», Granada.
García Cruz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
García González, E., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
García Cuesta, S., Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M., SAEM «Thales», Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F., SAEM «Thales», EUPEGB, Almería.
Giménez García, J., EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL, ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA, EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO, Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS, ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO, Escola de Mestres «S. Cugat», Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de, Facultad de Matemáticas, Univers. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
López Gómez, J., SAEM «Thales», I.B. «Luis Cernuda», Sevilla.
Luelmo Verdú, M.ª J., Servicio de Innovación Educativa del MEC, Madrid.
Llinares Ciscar, S., SAEM «Thales», EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A., SAEM «Thales», EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G., Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A., Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P., Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J., Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A., EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L., SAEM «Thales», EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonís, J. R., SAPM «P. S. Ciruelo», EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L., SAEM «Thales», I. B. «Emilio Prados», Málaga.
Pérez Fernández, J., SAEM «Thales», IFP «Las Salinas», San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R., SAPM «P. S. Ciruelo», I. B. «Miguel Servet», Zaragoza.
Pérez Jiménez, A., SAEM «Thales», I. B. «Nervión», Sevilla.
Petri Etxeberría, A., SAPM «P. S. Ciruelo», C.P. «María Ana Sanz», Pamplona.
Puig Espinosa, L., EUPEGB, Valencia.
Rico Romero, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Romero Sánchez, J., SAEM «Thales», C.P. «F. García Lorca», Huelva.
Romero Sánchez, S., SAEM «Thales», E.U. Politécnica «La Rábida», Huelva.
Ruiz Garrido, C., SAEM «Thales», Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A., I.B. «San Mateo», Madrid.
Sánchez Cobos, F. T., SAEM «Thales», C.P. «Virgen del Rosario», Jaén.
Santos Hernández, A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA (M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Soto Iborra, F., EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A., SAEM «Thales», C.E. «Blanco White», Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A., SAEM «Thales», I.B. «Trafalgar», Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L., SAEM «Thales», Facultad de Matemáticas, Sevilla.

SUMARIO

Artículos

Ideas para la clase

Recursos para el aula

Información

Director
Rafael Pérez Gómez

Director Adjunto
Manuel Vela Torres

Dirección Administrativa
Felipe López Fernández

Diseño Gráfico
Fernando Hernández Rojo

Consejo de Redacción
María del Carmen Batanero Bernabéu
Antonio Canalejo Santaella
Josefa García Hernández
Victoriano Ramírez González
Dori Villena López

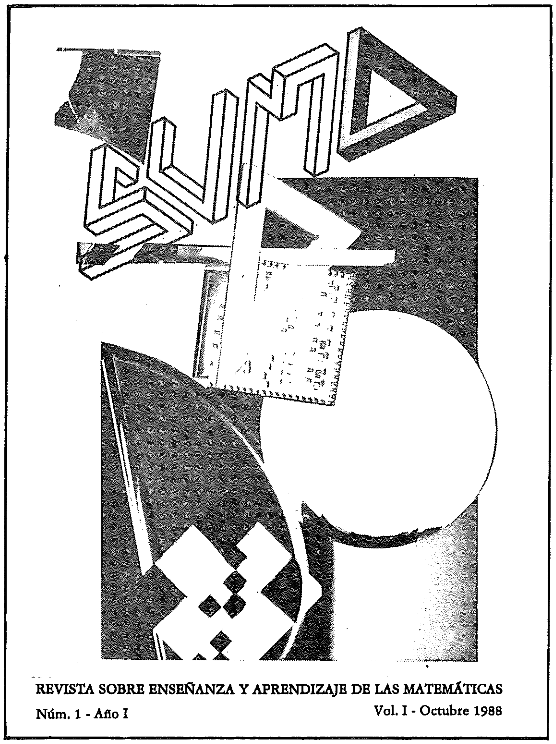
Consejo Editorial
Claudi Alsina Catalá, Representante en el «ICMI».
Mercedes Casals Colldecarrera, SCPM «Puig Adam».
Carmen da Veiga Fernández, Grupo «Azarquiel».
Manuel Fernández Reyes, SCPM «Isaac Newton».
Vicens Font Moll, Grup «Zero».
Salvador Guerrero Hidalgo, SAEM «Thales».
Magda Morata Cubells, Grupo «Cero».
Enrique Vidal Costa, Universidad.
Florencio Villarroya Bullido, SAPM «P. S. Ciruelo».

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas:

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez.
Apartado 1160. 41080-Sevilla.

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «P. Sánchez Ciruelo».
Presidente: Rosa Pérez García.
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza.

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton».
Presidente: Luis Balbuena Castellano.
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife).



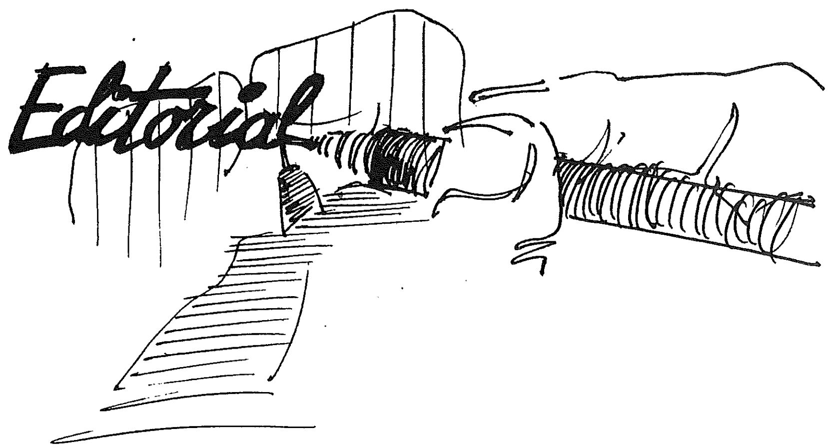
Fernando Hernández Rojo

Depósito legal
Gr. 752-1988

Impresión
GRAFSUR, Armilla (Granada)

Suscripciones
Revista SUMA
Apdo. 1017. 18080-Granada

Condiciones de suscripción
Particulares: 2.500 PTA (tres números).
Centros: 3.000 PTA (tres números).
Números sueltos: 1.200 PTA.



Lo que en ocasiones pudo ser una utopía ahora puede tornarse en realidad. Pero nada se improvisa. Desde la aparición de los «soñadores» que a modo de poetas comprometidos inician la difusión de una idea hasta su implantación en una sociedad pasa tiempo. A veces, demasiado. En estos casos ha sido necesario que sus esfuerzos, tan aislados como atractivos, tan altruistas como desconcertantes, tan bellos como necesarios, calasen en el complejo tejido social desencadenando un cambio.

Algo de esto es lo que está ocurriendo en el campo de la Educación Matemática. Baste recordar a los profesores Puig Adam y Santaló, cuyos trabajos fueron poco valorados por una sociedad que no supo, o no quiso, entenderlos. Parecida suerte siguieron todos aquellos que desde la década de los sesenta comenzaron a organizar Escuelas de Verano y a organizarse en grupos y sociedades en un intento de transformar las estructuras educativas. La situación en aquellos años hizo que el esfuerzo fuese enorme, pero no baldío. Los pioneros —grupos *Ceros,* Sociedad Canaria de Profesores de Matemaáticas *Isaac Newton,* el colectivo *Rosa Sensat*—, son sólo ejemplos diferentes, y no un muestrario de nombres que siempre caería en el riesgo de olvidar a otros tan importantes como los citados. Todos merecen algo más que este modesto reconocimiento después de tantos años de lucha. Al canto de estos «poetas» infatigables se han ido uniendo, poco a poco, muchísimos más en una sociedad libre que exige adaptar su sistema educativo a los aires frescos que corren. Así aparecieron otros grupos (*Azarquiel, Beta...*), otras agrupaciones de profesores («*P. Sánchez Ciruelo*», «*Puig Adam*», «*Thales*»...) que con sus publicaciones quisieron extender su mensaje. *Números, L'Escaire, Epsilon, Thales, Boletín Puig Adam,* etc., son ejemplos de ellas.

Hechos recientes demandan nuevas actuaciones. Desde finales de 1985 surgen en las universidades españolas los Departamentos de Didáctica de las Matemáticas, a veces unidos en la misma área de conocimiento con la Didáctica de las Ciencias Experimentales. Todo un reto en el desarrollo de la docencia y la investigación en todos los ciclos. Hay abierto un proceso de Reforma de las Enseñanzas (Básica y Media) que exige un nuevo perfil del profesorado. Se han abierto canales de colaborción en el desarrollo de la Educación Matemática con otros países. A pesar de todo, hay muchos profesores demasiado aislados, lejos de los canales por donde circula la información, realizando un trabajo en unas condiciones poco favorables.

Parece el momento de dar un paso adelante, de aglutinar esfuerzos y buscar una publicación de ámbito nacional que canalice este entusiasmo que hoy vive el mundillo de los profesores de Matemáticas. Hubo reuniones en Málaga, Valencia, Granada y Madrid y se formó una gestora y una Federación de Sociedades de Profesores de Matemática... y después de muchos meses de acciones diversas y colaboraciones positivas aparece hoy el número 1, al que deberán seguir todos los otros naturales, de la publicación apoyada por la inmensa mayoría de todos los hasta aquí citados.

SUMA nace, pues, con pretensión de ser una revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, órgano de expresión de la Federación de Sociedades que la edita y de los grupos que la apoyan; útil para la clase, plural y participativa, dedicada a todos los niveles educativos y que recogerá ideas, sugerencias, informaciones, innovaciones..., agrupadas en las distintas secciones.

— En la sección de *Artículos* se incluirán trabajos que contribuyan a mejorar nuestro bagaje sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

— La sección anterior se complementa con la de *Ideas para la clase* en la que se incluirán artículos con sugerencias que, de modo fácil y cómodo, puedas incorporar a tus clases. En este número verás algunos trabajos muy cortos y llenos de interés, son *ideas* como las que todos tenéis que han funcionado bien ante unos alumnos. Tenemos mucha ilusión en que esta sección sea de las más leídas por su utilidad casi inmediata y por la gran cantidad de trabajos que esperamos recibir de vosotros.

— La importancia, actualmente reconocida, del uso de materiales didácticos en la clase nos ha llevado a dedicar una sección que llamaremos *Recursos para el aula* en la que se describirán distintos materiales indicando sus posibles usos didácticos.

— Antes nos referíamos a la necesidad de difundir informaciones sobre múltiples aspectos que pueden interesarnos. Congresos, exposiciones, libros, etc., serán anunciados en la medida en que se nos hagan llegar o sepamos de su existencia. Todo ello definirá la sección titulada *Información.*

— Aunque en esta primera aparición pública de *SUMA* sólo figuran estas cuatro secciones, es nuestra intención que en sucesivos números nazca una nueva, que llamaríamos *Buzón de SUMA,* en la que incluiríamos vuestras cartas con sugerencias, opiniones, problemas que deseéis proponer, etc. Esta última pretende un acercamiento de la revista a nuestros lectores.

La existencia de un *Panel de Colaboradores* formado por las personas que están dispuestas a trabajar por *SUMA* posibilitará la proximidad a todos vosotros en cualquier punto de España. De este modo presentamos con orgullo nuestro Panel de Colaboradores, son las personas que van a acercar esta revista a todos vosotros —a quienes os podéis dirigir para hacerles entrega de vuestros trabajos (tan necesarios para que *SUMA* siga viviendo), sugerencias y críticas— y van a procurar que los sucesivos números de *SUMA* vayan mejorando y tengan la calidad que vosotros merecéis. En definitiva, no son sino una pequeña muestra del verdadero equipo de colaboradores en el que pronto, muy pronto, esperamos tenerte.

¡Súmate a *SUMA*!

EL CONSEJO EDITORIAL
(en funciones)

Lo que he aprendido

Francisco Hernán

Estas cosas pasan de vez en cuando. Viene a verte una antigua alumna que acaba de licenciarse en filología y sabe con claridad a qué piensa dedicarse: a estudiar cómo se aprenden las segundas lenguas. Y te dice: «Como sé que tú estás trabajando sobre el aprendizaje, he pensado que podrías recomendarme algunos libros.»

Inmediatamente piensas que tu trabajo no es sobre el aprendizaje en general, sino sobre el de las matemáticas en particular, y que a ella no le interesan las matemáticas en particular sino el aprendizaje en general. «Pues no sé; ahora no se me ocurre ninguno.» «Pero —insiste— seguro que has leído cosas. Piaget, Vygotsky y otros que tú sabrás.»

Su deseo de saber te convierte de pronto en un ignorante, así que le dices: «Bueno, déjame que lo piense. Te llamaré dentro de un par de días.»

Un hormigueo te desasosiega y empiezas a tomarte la cosa en serio: ¿y qué es lo que yo sé acerca del aprendizaje en general? Cuando voy a clase y tengo previsto que tratemos tal o cual tema, sé unas cuantas cosas acerca del aprendizaje de *ese* tema; pero no es lo que le interesa a ella. Desde luego —te dices; pero tendrás algunas ideas generales, algunas hipótesis relativas a las condiciones que han de cumplirse para un buen aprendizaje, a las dificultades iniciales, a la psicología del aprendiz, independientemente de que lo que vaya a aprender sea trigonometría, manejar una cámara fotográfica o redactar una carta. Y esas ideas estarán firmemente incorporadas a tu «ideología», esas ideas tendrán una configuración pragmática; no irás a los libros a consultarlas cada día; serán ideas «tuyas», ideas que subyacen a tu actividad didáctica.

Así que me dispuse a hacerlas explícitas, necesitaba *recordar* cuáles eran. Cogí unos folios y me dije que no consultaría ningún libro, porque no se trata de ideas que haya leído y olvidado o de las que importe una cuidadosa redacción; son las ideas que uso y que sostienen mi práctica diaria.

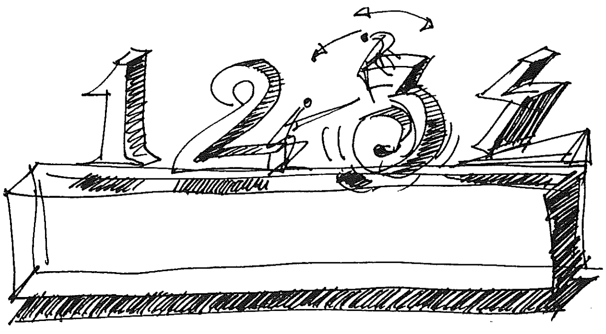
No tardé en darme cuenta de que no eran muchas, y mientras las estaba escribiendo me iba dando también cuenta de que la mayoría eran bastante vagas y muy empíricas; tanto, que más que un cuerpo de doctrina eran unas cuantas ramas que difícilmente podría decirse que constituían un árbol frondoso a cuya sombra pudiera uno convocar a una tribu numerosa.

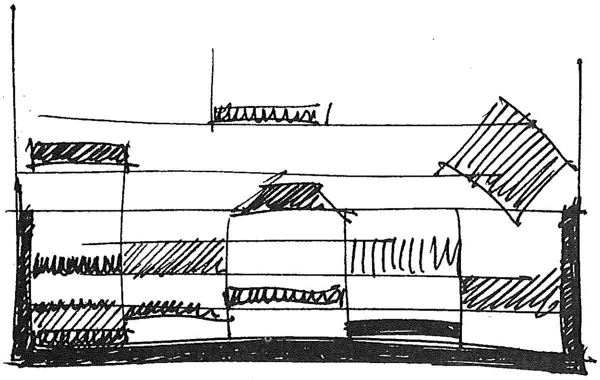
Y otro inconveniente: ¿qué hago, empleo el impersonal «Uno aprende...», «Se aprende...», o es mejor la primera persona de plural «Aprendemos...»? Algunas de las cosas que «sé» acerca del aprendizaje las sé por auto-observación o auto-análisis; de manera que sería más justo emplear «yo aprendo...». Opté por prescindir de la unicidad del sujeto y dejar que las frases se construyeran sin restricciones.

Esto es lo que logró salir flotando a la superficie:

— No todas las actividades humanas se realizan con el propósito de aprender. Ir a un concierto, oír un chiste, salir a pasear bajo la lluvia, comerse un melón, limpiar la cocina.

— Aprender no es siempre un acto de voluntad. La mayor parte de las cosas que aprendemos hasta los seis años, es decir, posiblemente las más importantes, no son consecuencia de un acto *previo* de decisión consciente.





— Aprender sin darnos cuenta es algo mucho más frecuente de lo que en ocasiones creemos.

— Aprender es una actividad marcadamente heterogéna. Aprendemos cosas de ningún significado y mucho uso, por ejemplo, el nombre y la grafía de las consonantes. Aprendemos cosas con poco significado (Minnesota es uno de los Estados Unidos de Norteamérica) y más tarde las dotamos de un significado riquísimo (cuando estudio el mapa porque voy a pasar dos meses trabajando en la capital de Minnesota). Aprendemos otras en las que el significado nos importa poco o nada; nos importa el uso que vamos a hacer de ellas, como cuando aprendemos a conducir un coche.

— Cuando queremos aprender algo voluntariamente, parece que lo hacemos porque nos interesa, o porque creemos que es necesario socialmente, o porque pensamos que será personalmente placentero, o porque «los otros» lo saben.

— Uno quiere participar de las pequeñas y grandes maravillas del mundo y del pensamiento («Sólo lo maravilloso es hermoso», dice André Breton).

— Todos tenemos cuando niños una pasión por saber, por preguntar, por aprender. Algunos tienen suerte y la mantienen durante toda su vida. Otros muchos ven obstaculizada esa pasión. Pero, en cualquier caso, pervive siempre, siempre está a la espera de ser despertada.

— Información y aprendizaje no son, ni muchísimo menos, sinónimos. La información viene de fuera («Las rocas sedimentarias son...», «Eso es la vía láctea»); el aprendizaje, tanto si es consciente como si no, ocurre *en uno mismo;* y cuando es consciente va acompañado de una tensión, sea en forma de ensimismamiento, sea en forma de olvido de sí mismo. La soledad del aprendiz.

— Las personas necesitamos que confíen en nosotros mientras aprendemos. Cuando estoy intentando aprender algo no me gusta que me digan «Estás cometiendo un error, lo estás haciendo mal». Me gusta que me digan «Cuando necesites ayuda te puedo echar una mano, si quieres» o «¿Te parece que lo intentemos juntos?».

Mientras que se dice «*sufrir* un accidente», es curioso que se diga «*cometer* un error», en un alarmante paralelismo semántico con «*cometer* un delito».

No creo que se cometan errores durante el proceso de aprendizaje. Cuando un niño que está aprendiendo a andar pierde el equilibrio y se cae, nadie dice que se haya equivocado. O bien se le anima a levantarse por sí solo, o bien se le ofrece un punto de apoyo.

Cuando tantos estudiantes responden que siete al cuadrado es catorce, lo importante no es que hayan «cometido un error», sino que su respuesta es síntoma de un conocimiento que sí que tienen. Incompleto, de acuerdo; pero no una ausencia de conocimiento. Cuando uno *está* aprendiendo, afirma poco y titubea mucho; pregunta, se pregunta, ensaya, vuelve atrás, revisa.

— La mayoría de las personas que he conocido —y entre ellas yo mismo— necesitamos una recompensa tras al aprendizaje. Pero esa recompensa no es un terrón de azúcar. En realidad son dos recompensas; una, interior: la alegría de haber aprendido algo (necesito saber que he aprendido y qué he aprendido); otra, exterior: la pulsión de comunicárselo a otros; no *para que* sepan lo que

he aprendido, sino por la comunicación misma. Uno aprende para estar en el mundo, para ser camarada de otros seres humanos, para entender juntos. Y quiere comunicarles a los demás que el mundo es manejable, es inteligible, al menos en parte.

— Se aprende mejor cuando lo que pasa *durante* el aprendizaje tiene más importancia que las consecuencias de ese aprendizaje; cuando la acción es más importante que las consecuencias de la acción. El temor al fracaso *es* el fracaso.

— Me gusta aprender cuando lo que voy a aprender está en un contexto lleno de significados, cuando la relación entre los componentes y el total es flexible, como si ambos estuviesen empujándose con los codos para encontrar el sitio en el que estar todos cómodos. Aprender no es como añadir pasas a un pastel, sino hacer el pastel desde el comienzo, pasarse de harina, quedarse corto en levadura, ver que se quema si el horno está demasiado fuerte... hacerlo mejor al día siguiente. Es verdad que hay cosas que se aprenden paso a paso, pero la mayoría se aprenden *por inmersión*.

— Para que algo merezca el esfuerzo del aprendizaje ha de estar en la frontera de mis posibilidades: accesible, pero no en un territorio demasiado familiar.

— Integro mis nuevos conocimientos entre los que ya tenía, y los que ya tengo son la trama sobre la que necesariamente han de encontrar su sitio los que adquiera en el futuro.

Esa es una de las razones por las que la analogía y la metáfora son instrumentos básicos para el aprendizaje. Ambas son esencialmente relacionales; son apoyos, son traductoras, son centros de intersección de conceptos.

— Ley de Hofstadter: «Todo (y en particular aprender) lleva más tiempo del que uno había pensado que iba a llevar, incluso teniendo en cuenta la Ley de Hofstadter.»

— La belleza en el aprendizaje es aprender algo sin darse cuenta del esfuerzo (enorme, a veces) que uno ha estado haciendo mientras lo aprendía.

— Pensar da resultado.

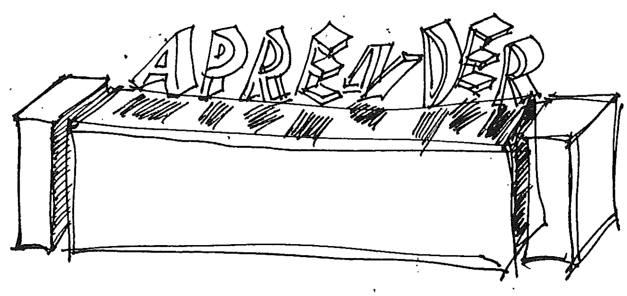
Y tan chocante es que personas distintas lleguen al mismo resultado como que personas distintas lleguen a resultados distintos. Ambas cosas ocurren con similar frecuencia.

«Este puñadito de deshilvanadas ideas ¿es todo lo que sabes acerca del aprendizaje?».

Pues me parece que sí.

«No es mucho, ¿no te parece?».

Tal vez. Pero se extiende considerablemente si luego lo concretas en un aprendizaje específico, sea el de las matemáticas o el de las segundas lenguas.



«¿Tanto como para decir, como te lo he escuchado a menudo, que sabemos incomparablemente más acerca del aprendizaje que lo que sabían Platón o Rousseau o lo que se sabía hace treinta o cuarenta años?».

Bueno, puede que me refiriese al aprendizaje y a la enseñanza.

«¿Qué quieres decir?».

Quiero decir que si cuando actúe como profesor tomo como punto de partida esas deshilvanadas ideas, o nociones, o hipótesis, las consecuencias metodológicas, sociales y éticas son extraordinariamente importantes. Por ejemplo, el modelo de enseñanza por transmisión se desvanece, y con él el modelo «profesor-alumno» que se caracteriza porque el alumno, el aprendiz, intenta *imitar* al profesor. Y si no se desvanece, al menos queda limitado al aprendizaje de ciertas técnicas manuales o a campos en los que predominan las acciones perceptibles, campos de muy escasa extensión si se les compara con aquellos en los que predominan las acciones mentales.

Más aún, supone alterar radicalmente el relato de la historia del pensamiento humano, historia escrita tradicionalmente por uno de cada mil acerca de uno cada cien mil.

«¿Una especie de giro copernicano?».

En efecto. Copérnico propuso un cambio de *percepción,* más mental que física; después de Copérnico ya no se puede «ver» al Sol moverse. Lo que hemos aprendido en los últimos treinta o cuarenta años es que ya no se puede ver al aprendiz como un ser imperfecto que sólo alcanzará la perfección cuando se convierta en profesor.

«Vale. Y ahora ¿qué libros me recomiendas?».

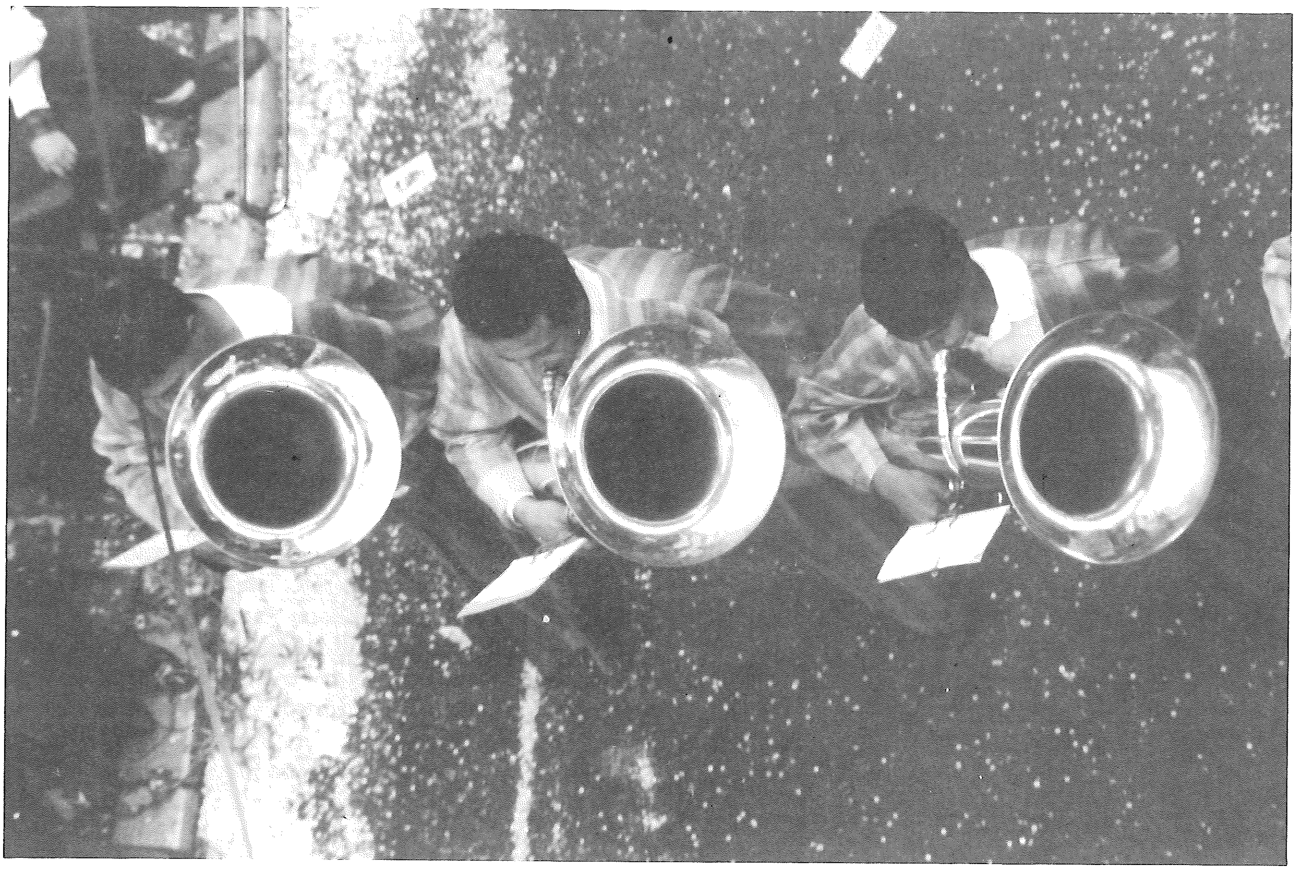


Foto: *Pilar Moreno*

Funciones, simetría y frisos

Claudi Alsina Català
y
Jaume Ll. García-Roig

La interdisciplinariedad en la enseñanza es una necesidad metodológica si se pretende ofrecer una visión global, interactiva y plural de los diversos campos del saber que hoy inciden en la formación académica. En el caso de las Matemáticas no sólo cabe atender a la incidencia de éstas en las otras asignaturas, y viceversa, sino pensar en *la propia interdisciplinariedad entre las diversas ramas matemáticas.* Es muy bello, por ejemplo, que el estudio de una curva sea motivado por un análisis físico realizado en un laboratorio y luego ver cómo la misma curva tiene una lectura interesante en Ciencias Sociales. Pero sería un grave error no integrar en el estudio de la curva las aportaciones aritméticas, geométricas, analíticas..., etc.

En el presente artículo planteamos una integración de la Geometría en el estudio de funciones, es decir, *analizar las gráficas de funciones como figuras geométricas.* Con vistas a simplificar nuestra exposición consideraremos funciones f con dominio e imagen en los números reales y denotaremos por grafo *(f)* la gráfica en el plano.

1. La simetría de una función

Traslaciones, simetrías y giros son los movimientos rígidos del plano. Un primer estudio interesante puede ser, dada una función f, ver cómo es posible que su gráfica quede invariante por tales transformaciones, es decir, encontrar el grupo de simetría de la gráfica de la función:

a) *Gráficas y traslaciones*

Fijado un vector (a, b) no nulo queda definida la traslación

$$T(x, y) = (x + a, y + b).$$

Que una gráfica de una función f quede invariante por T equivale a la condición $T[graf(f)] = graf(f)$, es decir,

$$f(x + a) = f(x) + b,$$

para todo real x. Esta ecuación [1] equivale a decir que f sea *periódica en la dirección* (a, b) y obviamente debe ser $(a, b) \neq (0, 1)$.

Ejemplos típicos de este caso son las funciones $\sin x$, $\cos x$ con $(a, b) = (2\pi, 0)$.

b) Gráficas y simetrías axiales

Fijada una recta r de ecuación $y = ax$ queda definida la simetría axial

$$S(x, y) = (Ay + Bx, Ax - By)$$

donde $A = 2a/(1 + a^2)$ y $B = (1 - a^2)/(1 + a^2)$. En el caso $a = 0$ resulta ser $S(x, y) = (x, -y)$ y no puede existir ninguna gráfica de función invariante por dicha simetría dado que, por definición, a cualquier punto del dominio sólo le puede corresponder una única imagen. Si $a \neq 0$ sí que puede darse esta simetría. Concretamente $S[graf(f)] = graf(f)$ equivale a la ecuación funcional

$$f[Af(x) + Bx] = Ax - Bf(x).$$

Así, por ejemplo, si $a = 1$ la condición [2] se reduce a,

$$f[f(x)] = x,$$

es decir, f es una función biyectiva igual a su inversa que se denomina *involutiva.* Éste es el caso de las funciones x, $-x$, $1/x$.

Cuando el eje de simetría es el eje OY resulta la condición

$$f(-x) = f(x),$$

conocida popularmente por la denominación de *paridad.* Tal es el caso de x^2, $\cos x$, $|x|$,...

c) *Gráficas y giros*

Los únicos giros compatibles con la definición de función continua son obviamente los de 180° y en este caso de simetría central resulta la condición

$$f(2m - x) = 2n - f(x),$$

si (m, n) es el centro de giro. En el caso de centro $(0, 0)$ resulta la conocida condición de *imparidad*

$$f(-x) = -f(x)$$

Tal es el caso de x^3, $\sin x$,...

Este apartado puede presentarse cómodamente con transparencias y retroproyector. En una transparencia se indicarán los dos ejes y la diagonal. En otras transparencias se dispondrán de las gráficas de x^2 y $\sin x$. Mediante una transparencia sin dibujar se podrán ensayar la traslación, simetría y giro de la totalidad o partes de x^2 y $\sin x$ e ir dibujando las gráficas así generadas. Puede ser instructivo insistir sobre la relación entre seno y coseno vía traslación y hallar las gráficas de funciones inversas vía la simetría en la diagonal.

2. Funciones friso

En la geometría clásica un *grupo de friso F* es cualquier subgrupo del grupo de isometrías del plano cuyos elementos dejan invariante una recta r y tal que todas las traslaciones contenidas en F son generadas por una sola traslación T diferente de la identidad. Así un *friso* será cualquier figura plana que queda invariante por un grupo de friso F. Es bien conocido que existen exactamente *7 tipos de frisos* (fig. 1).

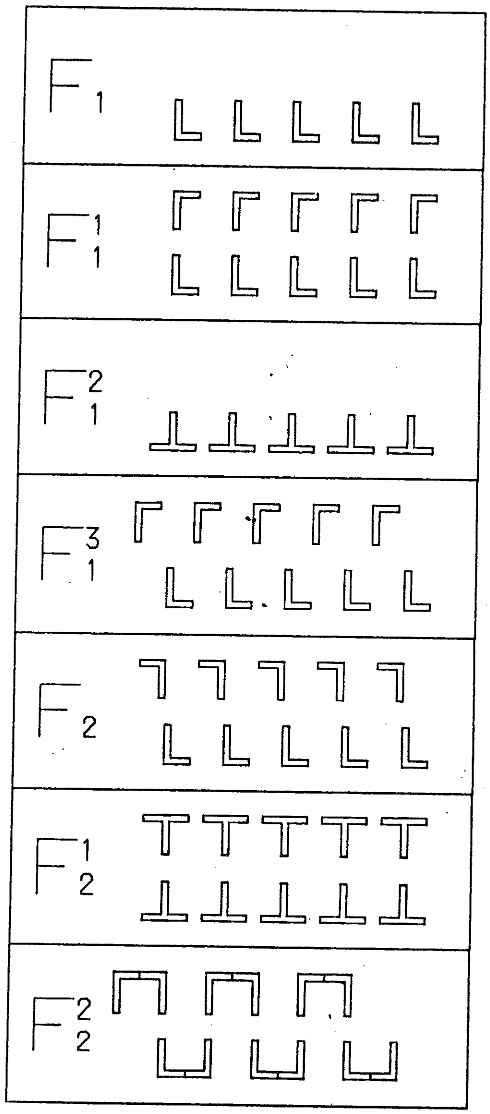


Fig. 1.—Tipos de frisos.

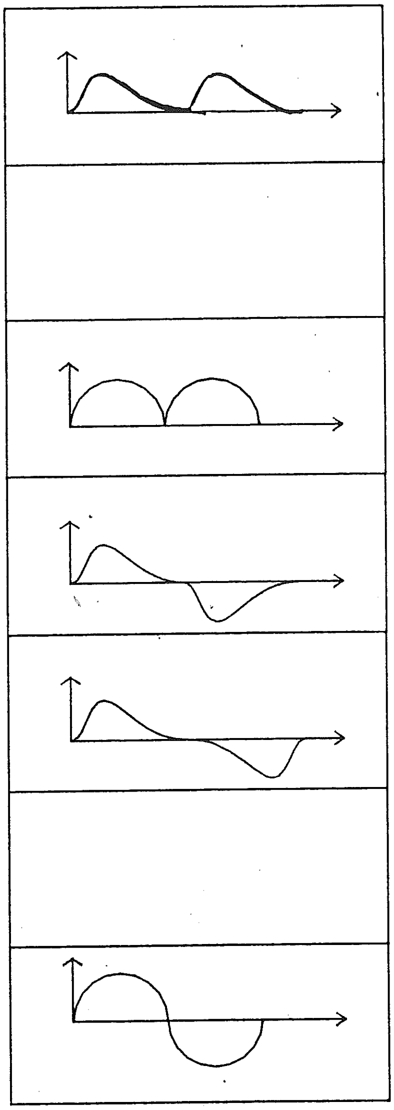


Fig. 2.—Funciones friso con recta de friso el eje OX.

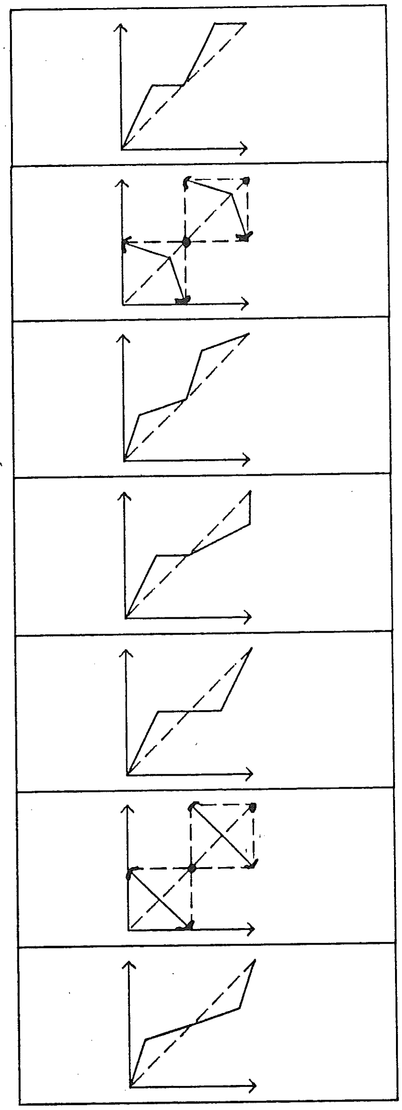


Fig. 3.—Funciones friso con recta de friso una recta distinta a los ejes.

Fijada la recta r si T indica la traslación en la dirección de r, S la simetría respecto de r, S' una simetría de eje perpendicular a r, G el giro de 180º alrededor de un punto de r y L la simetría con desplazamiento $L = 1/2\ T \cdot S$, entonces los 7 tipos de frisos vienen generados por

$$F_1 = \langle T \rangle,\ F_1^1 = \langle T, S \rangle,\ F_1^2 = \langle T, S' \rangle,\ F_1^3 = \langle T, L \rangle$$
$$F_2 = \langle T, G \rangle,\ F_2^1 = \langle T, G, S' \rangle,\ F_2^2 = \langle T, G, L \rangle.$$

Un estudio sugestivo consiste en analizar *funciones friso,* es decir, aquellas funciones reales (definidas en toda la recta real) cuya gráfica es un friso. Para este objetivo hay que distinguir tres situaciones:

Caso 1.º Con recta de friso el eje OY no pueden existir funciones friso.

Caso 2.º Con recta de friso el eje OX sólo pueden existir 5 tipos funciones friso al estar excluida la simetría respecto de OX (fig. 2).

Caso 3.º Con recta de friso una recta diferente de los ejes cartesianos sí que pueden darse los 7 tipos. Es de destacar que recientemente hemos demostrado que ¡una función simétrica y periódica nunca puede ser continua! (fig. 3).

A nivel didáctico puede ser interesante proponer los dibujos de las funciones friso exigiendo a priori propiedades globales del friso. Así si se exige continuidad o diferenciabilidad la pieza generadora del friso debe cumplir ciertas condiciones cuya investigación puede tener interés cara a consolidar estas condiciones de regularidad, trabajando siempre a nivel visual y gráfico. Por supuesto en una primera aproximación al tema, como simple trabajo de gráficas de funciones, cabe recortar en cartón un trozo de función y con dicha plantilla dibujar los frisos correspondientes. Otra posibilidad es recortar dichos frisos en papel plegado en forma de acordeón o utilizar dos espejos pequeños iguales y paralelos donde al colocar un trozo de función se «verá» todo el friso. En este caso puede ser curioso ver cómo debe ser el trozo generador para que dé lugar a los distintos frisos.

REFERENCIAS

ALSINA, C. y GARCÍA-ROIG, J. Ll., *On symmetric periodic functions* (1987). (Pendiente de publicación.)

ALSINA, C. y TRILLAS, E., *Lecciones de Álgebra y Geometría,* Ed. Gustavo Gili, Barcelona (1983).

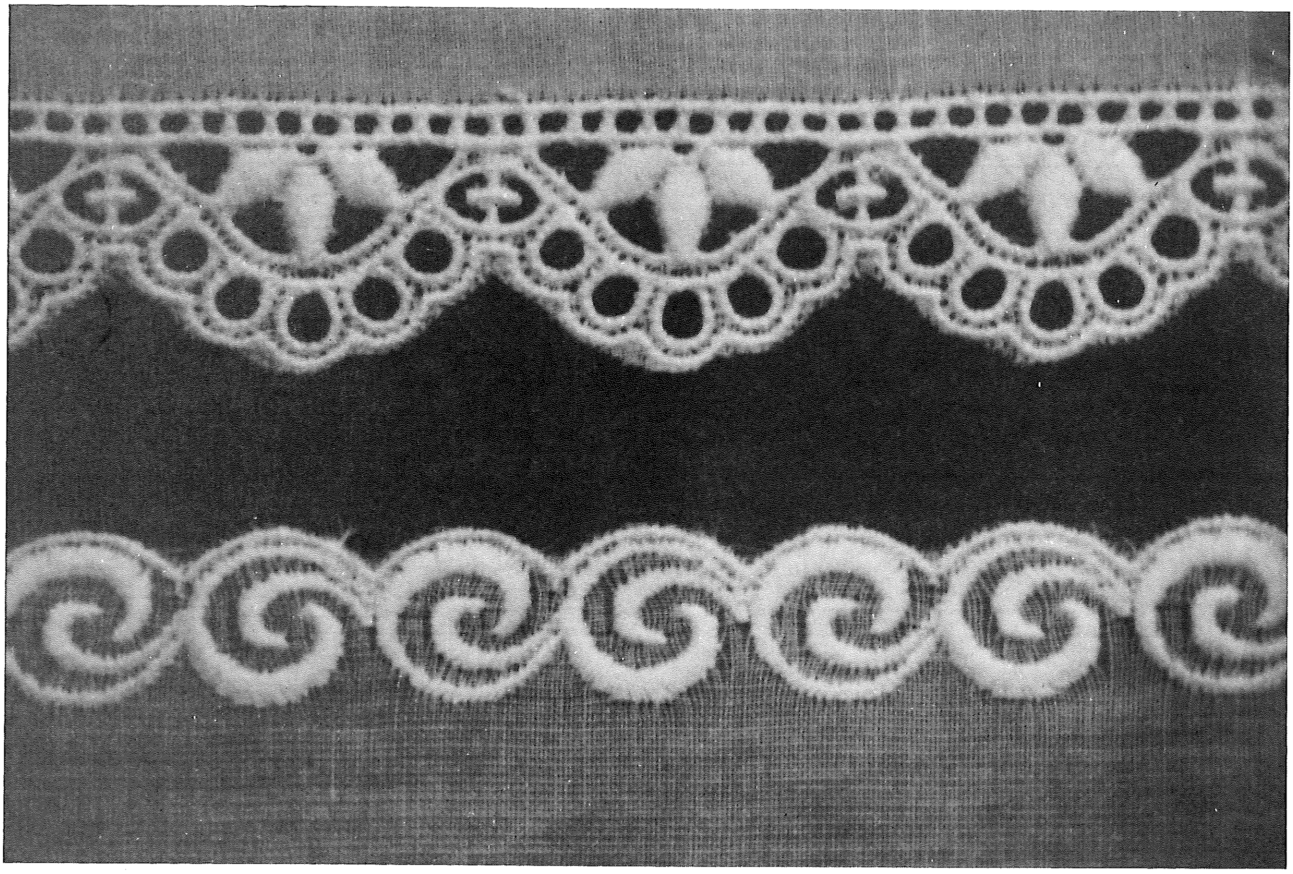


Foto: Pilar Moreno

Algunos reflejos de las Matemáticas en la obra de Jorge Luis Borges (Notas profanas)

Andrés Soria

«Para borrar o mitigar la saña
de lo real, buscaba lo soñado.»
(J. L. B., *Un soldado de Urbina*)

Fantasía y Matemáticas son dos conceptos aparentemente antagónicos. Se puede pedir para el matemático imaginación, pero no fantasía. Los sueños nocturnos o los que surgen en la vigilia no se adornan de guarismos ni de vectores.

Sin embargo, el reverendo Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) —experto en determinantes— las abandona un buen día para, desdoblado en Lewis Carroll, brindar al mundo *Alicia en el País de las Maravillas* y *A través del espejo* [1]. Y con él, otros como Holleway Hern, teórico de las estructuras, escapan de ese cercado para dar directamente en las creaciones fantásticas... Pero se trata de circunstancias especiales: las viejas ciudades universitarias inglesas, llenas de humor, melancolía y extravagancia. Motivos que, unidos, coadyuvan a que, de vez en cuando se produzcan estas sorprendentes reacciones y brote el chorro de luz desconcertante, producido por la mente humana.

Tal vez la veta inglesa de Borges le haya llevado a asomarse él también a ese campo, en ciertos aspectos, contiguo al de sus más acendradas creaciones. Hay que tener en cuenta el giro de fantasía que va a presidir lo fantástico moderno, propio del siglo XX, iniciado alrededor de la mitad de los años treinta y extendido y teorizado (con sutil argumentación analítica) tras la Segunda guerra mundial [2].

La fantasía parece abandonar el cuarto de los niños y dejar sus ropajes infantiles, acostumbrados, optimistas, para afirmarse como adulta e ins-

[1] Jorge Luis Borges con María Esther Vázquez en *Introducción a la Literatura Inglesa,* Buenos Aires, Columba, 1965 (traducida al inglés por Keating y Evans, London, Robson Book, 1974), trata de Lewis Carroll con especial cariño.

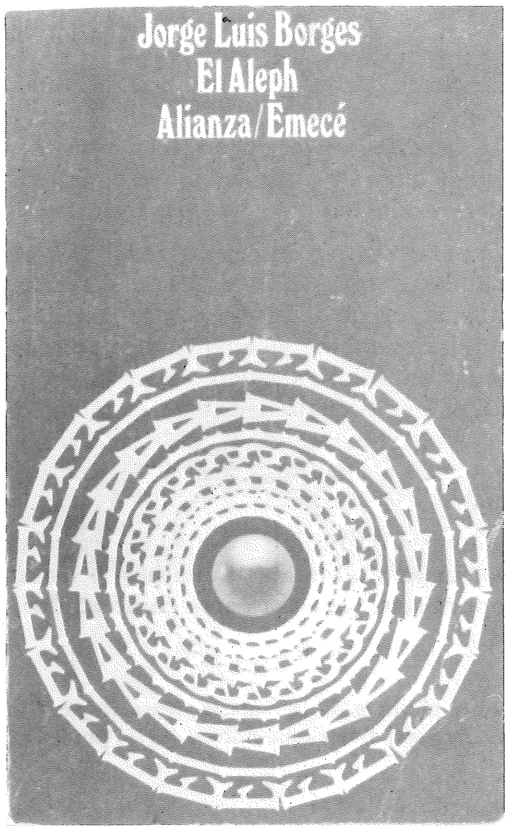
[2] Sobre el viraje da la fantasía, véase Roger Caillois, *Imágenes, Imágenes,* Barcelona, Edhasa, 1970, pp. 9-42.

talarse en la realidad del vivir presente, planetaria, escéptica, pegada a la ciencia. En esta nueva dirección había tenido destacados precursores aislados y casi todos, en lengua inglesa.

Las breves notas reunidas aquí, se limitarán, más que nada a indicar unas posibilidades más en la vasta obra borgiana, señalando algunos aspectos de ella que puedan relacionarse, más o menos intencionalmente con el mundo de las matemáticas. Y es muy importante anticipar dos observaciones previas: la primera, que siempre se estará en clave *literaria.* La segunda, que el guía de esta clave es, además, ajeno al campo específico y en todo momento tan diferenciador, de las ciencias exactas.

Para encajar el tema, hay que considerar varios elementos.

La obra de Borges es *concentración* interna, aunque aparezca dispersa. Lo mismo que las sucesivas etapas de su larga vida, representa una variedad. No obstante, debido a circunstancias especiales, destacadas por biógrafos y críticos —y algunas, por el propio escritor— puede divisarse un camino, ceñido a las constantes culturales del siglo, vivido por Borges en su mayor parte. De ahí el interés de estas apreciaciones y la necesidad de recorrer someramente la cronología, antes de detenernos en el punto concreto de su actividad.



Borges, en el espacio, se ha desplazado desde su Argentina natal a Europa. También a Norteamérica o a Israel. Para su desarrollo intelectual, esto es muy importante, por haber coincidido con decisivos períodos vitales.

Sus años de formación y de revelación —las primeras creaciones juveniles— se sitúan en Buenos Aires, en Europa y, de nuevo, en la ciudad porteña, en esa época, tan densa y original de los años veinte[3]. A esta etapa sucede otra, la más perfectamente homogénea: la que cubre ese período en que, desde la orilla atlántica americana, se sigue con interés, tensión y ansiedad y preludio bélico protagonizada ya por España y, a continuación, con el intervalo de un verano, la conflagración europea y mundial. En el quehacer borgiano, una etapa larga y fructífera (la Segunda guerra mundial, con sus avatares y episodios, será un constante punto de referencia). Y al llegar la paz, Borges tendrá también una participación en lo que ha sido destino de millones de hombres y mujeres: la zozobra, el atropello, que lo lastimará como ser humano y como intelectual juntamente.

Si los años cincuenta, mitad por mitad, son para él infelices y compensadores, la década de los sesenta representa su consagración mundial[4]. Estados Unidos, Europa (Madrid, Ginebra, Londres, Edimburgo...)[5], en tanto que el decenio de los setenta y el actual —hasta su muerte en 1986— serán, en general, años ajetreados. En volandas de la fama que hoy prodigan los medios de comunicación de masas, aunque clausurado en su ceguera, será símbolo contravertido y, en parte, beneficiario para el paladar común del *boom* de las letras

[3] Véase Gérard de CORTANZE, «Chronologie de Jorge Luis Borges», en *Europe* (1982), pp. 142-146.

[4] Emir Rodríguez Monegal —hace poco desaparecido— ha puntualizado la fecha en que J. L. B. dejó de ser inédito fuera del mundo hispánico: 1961, cuando recibe, junto con Samuel Beckett, el Premio Formentor (*Borges por él mismo,* por Emir R. MONEGAL, trad. del francés, Barcelona, Laia, 1984), (la ed. «Ecrivains de Toujours», n. 86, París, Le Seuil, 1978).

[5] En lo personal, durante estos años, su tardío matrimonio, su separación y su ceguera.

americanas (que, en lo recóndito, lo reconoce como uno de sus padres o precursores extraordinarios).

Al lado de la trayectoria de su vida, puede seguirse el zig-zag paralelo representado por sus obras. La esfera intelectual en que Borges se ha movido, presenta, en escorzo un panorama del siglo XX. Tan denso en el campo de las letras y las artes como en el de las ciencias y la tecnología, con interferencias que aparecen en la mente y en la creación borgiana. (Desde las matemáticas tradicionales de principio de siglo, a la revolución einsteiniana, y —en un gran salto— a la cada vez más universal dominación de los ordenadores, a lo largo de toda esta centuria se han dado pasos gigantescos y ha habido cambios muy profundos que se han sucedido con rapidez. La «reconstrucción imaginativa», como dice Bertrand Russell, implica un esfuerzo enorme para adaptar la mente y sacarla fuera de sus hábitos rutinarios. Este camino ha sido paralelo a la evolución, la formación y el desarrollo de la obra borgiana. No lo olvidemos.)

1.—Si un matemático examina con detención la obra de Borges, concluirá juzgando negativo su interés. En efecto, no hay ningún texto, breve o extenso de argumento matemático, si bien aparece la matemática, como veremos en alguna utilización, no demasiado original —aparentemente— de la aporía clásica.

Se ha aludido, más arriba, a esos matemáticos ingleses que alternan su labor específica con la literatura fantástica. Borges no puede incluirse entre ellos, por falta de una «dedicación» primaria y específica a la materia. Es decir, el camino de Lewis Carroll (de la matemática a la fantasía) no admite el recorrido inverso.

Tampoco podría comparársele a Bertrand Russell (1870-1972). El filósofo era también matemático, sobre todo en su primera época del Trinity College (Cambridge)[6]

> «Necesitaba yo la certeza como otros necesitan la fe religiosa. Creía que la certeza podía ser encontrada con mayor probabilidad en las matemáticas que en cualquier otra esfera...».

Así pensaba hacia 1910. Pero esas matemáticas no le convencen y busca «otras» —curiosamente explicadas por una fábula (el elefante y la tortuga). Desengaño que se acentúa al final de su vida longeva: el mundo platónico, eterno, y la belleza de las matemáticas se han disipado[7].

Este descreimiento (que le permitiría bromear, fantasear y divertirse en sus textos divulgativos —como el de la teoría de la relatividad—) puede compararse con ciertas actitudes borgeanas, que, sin embargo, tienen un origen muy diverso.

¿Cuál es, pues, la posición de Borges ante el tema? En nuestra opinión es algo complejo. Intentaremos enfocar sucesivamente las zonas que creemos deben distinguirse en su proceso.

Hay, en primer lugar, una situación (compartida, por otra parte, con otros escritores y que sin duda se adscribe a una época muy real), que podría llamarse de «adhesión» a la matemática. Una aceptación deliberada del rigor, la exactitud, la lógica,

6 *Principles of Mathematics*, 1903, *Principia Mathematica*, 1910.

7 B. RUSSELL, *Retratos de memoria y otros ensayos*, Madrid, Alianza Ed., 1976, pp. 58-59 y 62.

invocada por autores que se hallan dentro de la devoción borgiana y que se encarnaría en Paul Valéry, definidores y propugnadores de la pureza —la poesía pura—, que repite como imagen la depuración que respecto a la aritmética representa el álgebra [8]. Este adoptar la «actitud matemática» es un indicio que revela al grupo de los que se oponen a la irracionalidad desencadenada y galopante de los años treinta, en vísperas de las guerras y más aún, en medio de la gran conflagración, cuando la sinrazón colectiva hace tambalear los cimientos del mundo.

De aquí la utilización, no muy abundante, del lenguaje matemático —sobre todo por vía de comparación— que encuentra plasmaciones verdaderamente felices en el *verso* (un poema-resumen, como muchos otros del autor, e intimista):

> «Álgebra y fuego, la carga de Junín en tu sangre».
> *(Mateo, XXV,30)*

o en este otro, de un tema muy recurrente:

> «No sé si volveremos en un ciclo segundo
> Como vuelven las cifras de una fracción periódica»
> *(La Noche Cíclica)*

Y en la *prosa,* señalamos, en uno de sus primeros ensayos («La Metáfora», publicado en *Cosmópolis* (Madrid, 1921), donde dirá:

> «Cuando un geómetra afirma que la luna es una cantidad extensa en las tres dimensiones su expresión no es menos metafórica que la de Nietzsche» (un gato que anda por los tejados) [9].

O esta acotación, banal, de tipo escolar, referida a la diversidad de las traducciones de Homero:

> «El estado presente de sus obras es parecido al de una complicada ecuación que registra relaciones precisas entre cantidades incógnitas.»
> («Las versiones de Homero» en *Discusión*)

La utilización de este lenguaje matemático (como de otro cualquier lenguaje específico) es, en última instancia, cuestión de estilo y por tanto no deja de ser significativa. ¡Cuántas veces se prodigan, al hablar de poetas y prosistas, calificativos para destacar precisamente esas cualidades generales de las matemáticas! Por eso hemos de aumentar algo más todavía el terreno de nuestra ilustración, permaneciendo a caballo entre la opinión crítica personal del autor y el mundo matemático.

2.—En este segundo momento se puede apreciar cómo el universo de guarismos se aleja para ser mirado con ojos críticos, pudiendo reducirse así: un conjunto de símbolos en el que la fantasía (la propia de Borges, por supuesto), puede intervenir.

Aún estamos en esa concentrada etapa vital de los años treinta. Y la chispa borgeana salta ante libros ajenos (pero reales).

Dos textos relacionados con las matemáticas le provocan sus manifestaciones, muy intencionales. El primero es *Dic Unbekannte Grösse* [«La cantidad incógnita»], de Hermann Brech, el escritor nacido en Austria en 1886 y muerto en Estados Unidos en 1951.

El protagonista de esta ficción es Richard Hieck, un matemático al que no le interesa su propia vida, sino el mundo de los símbolos. Sólo el suicidio de

[8] Cfr. la cita, no de J. L. B., pero sí de Guillermo de Torre, muy cercano a él: Valéry, hablando de Mallarmé y su universalidad «concibe como un *álgebra* lo que los demás piensan en la particularidad de la aritmética» (G. de TORRE, *Problemática de la Literatura,* Buenos Aires, Losada, 1966 (3.ª ed.), p. 104.

[9] Véase Joaquina NAVARRO, «Jorge Luis Borges: Traumaturgo de la Metáfora», en *RHM,* XXXI.

un hermano menor le devuelve a la realidad. Pero Borges apostilla:

> «Sospecho, sin embargo, que me habría gustado más el argumento inverso: el que mostrara la invasión progresiva del mundo cotidiano por el mundo platónico de los símbolos»[10].

La conclusión apunta a la apertura de un campo, el simbólico, platónico, arquetípico, opuesto de manera dramática al mundo real común.

El segundo texto reseñado por Borges es más elocuente y más concreto. Se trata de la obra de E. T. Bell, *Men of Mathematic* (New York, 1937), una historia de las matemáticas. Para abordarla, Borges supone poseer conocimientos previos «borrosos o elementales».

Es una historia de los matemáticos «de Zenón de Elea hasta Georg Ludwig Cantor de Halle...»[11]. No sin misterio se resaltan ambos nombres:

> «Veintitrés siglos los separan, pero una misma perplejidad les dio fatiga y gloria a los dos, y no es aventurado colegir que los extraños números transfinitos del alemán, fueron ideados para resolver de algún modo los enigmas del griego...».

Habla de Pitágoras, Arquímedes, Descartes «algebrizador de la geometría», «Baruch Spinoza, que aplicó infelizmente a la metafísica el lenguaje de Euclides», Gauss «que aprendió a calcular antes que a hablar», de Jean Victor Poncelet, inventor del punto en el infinito; Boole, algebrizador de la lógica; Riemann, que desacreditó el espacio kantiano...

(A continuación se lamenta que un libro tan abundante en «noticias curiosas», no hable de un sistema binario de numeración contenido en una obra china, *I King*... [Suponemos que este final sea una interpolación borgeana])[12].

Por último, otra tercera reseña nos pone más directamente en contacto —muy breve— con la fantasía matemática, que podría llamarse «matemática ficción» (como «ciencia ficción»).

Con el título «Un resumen de las doctrinas de Einstein», trata de una obra divulgativa en lengua inglesa

> «De las muchas cartillas que nos permiten deletrear (siquiera falazmente) las dos teorías de Albert Einstein, la menos fatigosa, es acaso la intitulada *Relativity and Robinson:* "La relatividad y Rodríguez" [...] Según es de uso en publicaciones como ésta, el capítulo más satisfactorio es el que trata de la cuarta dimensión...».
>
> «La cuarta dimensión fue imaginada en la segunda mitad del siglo XVII por el plotiniano inglés Henry More (hecho curioso, las razones que le impulsaron a esa invención fueron de naturaleza metafísica, no geométrica). Los partidarios de una geometría tetradimensional suelen argumentar de este modo. Si el punto que se traslada engendra una línea y la línea que se traslada una superficie y la superficie que se traslada engendra un volumen, ¿por qué no engendraría el volumen una figura inconcebible de cuatro dimensiones...? El sofisma prosigue. Una línea, por breve que sea, contiene un número infinito de puntos: un cuadrado... un número infinito de líneas: un cubo... un número infinito de cuadrados. Un hipercubo (figura cúbica de cuatro

10 Jorge-Luis Borges *Textos Cautivos,* Ensayos y reseñas en «El Hogar» (1936-1939), Ed. de Enrique SACERIO-GARÍ y Emir RODRÍGUEZ MONEGAL, Barcelona, Tusquets, 1986, p. 96.

11 Murió en Halle (1888), pero había nacido en San Petersburgo en 1845.

12 *Textos Cautivos,* pp. 249-250.

dimensiones) contendría siempre un número infinito de cubos. No sabemos si hay hipercubos pero sabemos que cada una de esas figuras, está limitada por ocho cubos, por veinticuatro cuadrados, por treinta y dos aristas y por dieciséis puntos... Ello no es todo. Mediante la tercera dimensión, la dimensión de altura, un punto encerrado en un círculo puede huir sin tocar la circunferencia, mediante la cuarta dimensión, la no imaginable, un hombre encarcelado en un calabozo podría salir sin atravesar el techo, el piso o los muros...» [13].

El nombrar a la *cuarta dimensión,* parece desencadenar un movimiento de realidad y fantasía. Henry More (1614-1687), fue, en efecto, un platonizante de Cambridge en la segunda mitad del XVII, antimaterialista y anticartesiano, conocido por su tratado de filosofía moral y menos por su tendencia hacia el lado teosófico y místico del neoplatonismo. Sus escritos —como los de Borges— terminan en fantasía y también ha sentido la llamada cabalística —compone, a requerimiento de lady Anne Conway— *Conjectura Cabbalistica* en 1653 y más tarde *Catechismus Cabbalisticus* (1674). Asimismo, como Borges, también escribe poemas.

Pero, al mismo tiempo, esa cuarta dimensión lo proyecta, con toda su nebulosa mística y fantástica, al mundo real. Toda la discusión «tetradimensional» es, por una parte, una elucubración, como se ha visto, fantástica (para engendrar la cuarta dimensión, habría que mover un volumen (un sólido, un poliedro), pero éste deberá salir de sí mismo en el movimiento generador, lo que requeriría un espacio de más de tres dimensiones. De donde esta idea es analógica y privada de sentido. Nuestra mente no puede intuir un espacio de cuatro dimensiones... Sin embargo, en esos mismos años, las nuevas teorías geométricas, por su parte, se abren a nuevas perspectivas (el espacio-tiempo como cuarta dimensión en la teoría de la relatividad es un dato corriente). Henry More ha sido precursor [14].

No hay que ahondar mucho para hallar aquí el esquema borgeano: un punto de realidad, clavado en tierra «como la estaca pampa» (diríamos con su propio verso) permite atar a él un altísimo globo de fantasía surcando los cielos.

[13] *Op. cit.,* pp. 276-277.

[14] R. ZIMMERMANN, *Henry More und die vierte Dimension der Raum,* Wienn, 1881.

3.—Hay en el ritmo de la escritura borgeana un cambio, expresado por sus propias palabras:

> «Pasé de las mitologías del arrabal a los juegos con el tiempo y con el infinito» («Borges y yo») [15].

En realidad se simultanean, hasta el final, los temas cuyo tránsito asegura. Lo que sí es claro, se refiere a un mayor énfasis en la recreación o modificación de argumentos largamente acariciados.

Al reconocer, ahora, su acercamiento lúdico (en realidad quiere decir «estético»), a dos categorías de suyo avistadas siempre desde la ribera matemática, nos situamos, en cierto modo frente al núcleo de lo que podría llamarse «aspecto matemático de la obra borgeana». Y en una rápida síntesis —que por fuerza ha de ser somera— atisbaremos algo de la participación del Borges total en estos juegos. La fantasía —acabamos de ver— puede estar del lado de las matemáticas. y desde ese mismo plano matemático se van a proponer ciertas cuestiones, enunciándolas como problemas (aporías) o enigmas.

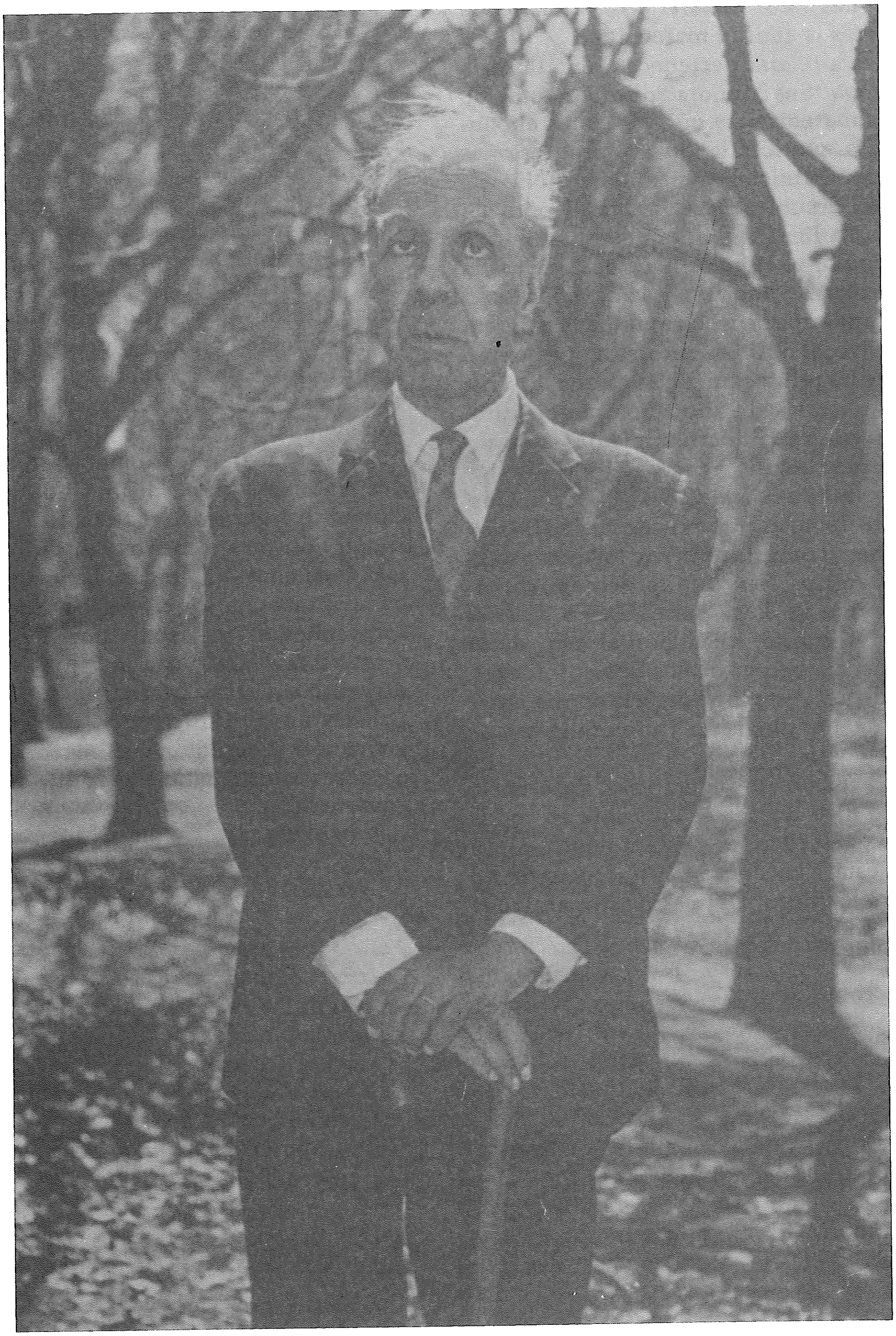
La segunda aporía de Zenón de Elea, discípulo de Parménides es el argumento matemático más conocido en la obra del escritor argentino. Ha mostrado por él su preferencia. Lo ha tratado al menos cuatro veces. Dos de ellas son las más importantes.

En la primera (1932), la paradoja (la carrera de Aquiles y la tortuga) es una *joya.* De ella se exaltará la *perplejidad* que causa en sus receptores y el *arcano* que en sí encierra. Tras la exposición del problema con sus referencias numéricas, se ordenan las refutaciones, basándose en tres autores modernos (anglosajones): Stuart Mill, B. Russell y W. James. El primero asume a los clásicos Aristóteles y Hobbes. Borges se decide por seguir a James. la paradoja eleática atañe a la invulnerabilidad del espacio y a la más fina, del tiempo. (Salvo considerando la idealidad de ambas categorías, Zenón es incontestable). El texto termina con una especie de moraleja:

> «¿Tocar a nuestro concepto del Universo, por ese pedacito de tiniebla griega? —interrumpirá mi lector» [16].

[15] J. L. B., *Antología Personal,* Buenos Aires, Sur, 1961, p. 194.

[16] J. L. B., «la Perpetua Carrera de Aquiles y la Tortuga», en *Discusión* (1932) (en *Prosa Completa,* vol. I, Barcelona, Bruguera, 1979, p. 92).



Siete años después —número mágico— de la primera publicación, se acomete de nuevo el tema, con el texto más rico: *Avatares de la Tortuga.* Se subraya aquí más la actitud matemática.

Lo que se va a relatar pertenece a una ilusoria *Biografía del infinito.* Sus connotaciones son todas de esa «literatura matemática» que ya hemos encontrado (la Hidra pluricéfala de las progresiones geométricas, las definiciones atribuidas a Nicolás de Cusa —la circunferencia, un polígono de infinitos lados, la línea infinita que contiene a la recta, el triángulo, el círculo, la esfera...). Pasada esta introducción, se vuelve a narrar, ahora con detalle, la segunda aporía y se recuerda la primera (también alusiva al movimiento). Se presentan detenidamente las refutaciones clásicas. La de Aristóteles, que se ilustra con anotación matemática, en realidad va contra la doctrina platónica (argumento del «tercer hombre»). A partir de ella hay un desvío, el *regressum in infinitum* ataca los universales, sirve para demostrar la existencia de Dios en la *Summa* (Santo Tomás), refuerza los escepticismos (antiguo: Agripa, Sexto Empírico; moderno: Lotze, Bradley)... Se llega hasta Lewis Carroll *(Mind)* donde la aporía, asida por el lado de la fábula finge un diálogo entre los dos corredores, Aquiles y la tortuga: ésta introduce la aporía entre las premisas de un silogismo (primera *animación* fantástica).

Al final se disparan las sugerencias. La esencia de la paradoja, dice Borges es aplicable en todos los terrenos —el estético, el epistemológico...

¿Es válida esta dialéctica...? Un brochazo de seriedad remata el juego. Detrás de estos antiguos problemas, se toca el problema real, que atañe a la irrealidad del universo

> «Lo hemos soñado resistente, misterioso, visible, ubicuo en el espacio y firme en el tiempo; pero hemos consentido en su arquitectura tenues y eternos intersticios de sinrazón para saber que es falso» [17].

Formidable conclusión final.

Todavía pueden señalarse dos textos más que rondan el mismo tema («Kafka y sus precursores», de 1951, donde se compara la «infinita postergación» kafkiana con la aporía y el último —una breve alusión— en el prólogo de *El Oro de los Tigres* (1972), donde con aire de reminiscencia autobiográfica, Borges nos cuenta cómo se le despertó la vocación filosófica al explicarle su padre la aporía, con ayuda del tablero de ajedrez...

No se acaban en este muestrario las intromisiones matemáticas en la obra borgeana. Combinaciones de argumento matemático y filosófico con conclusión más o menos fantástica —el esquema más frecuente— abundan. La inclusión de la perspectiva matemática, al sesgo, produce resultados sorprendentes (el asomarnos a la Cábala en *La Muerte y la Brújula,* o a la broma optimista en el *Argumentum Ornithologicum...*).

Estas líneas han querido ser, sobre todo, una invitación a explorar con mayor intensidad esta parcela tan original en un autor que lo es en tan gran medida.

[17] J. L. B., *Otras Inquisiciones,* Buenos Aires, Emecé, 1960, p. 156.

Poliedros flexibles

Ceferino Ruiz Garrido

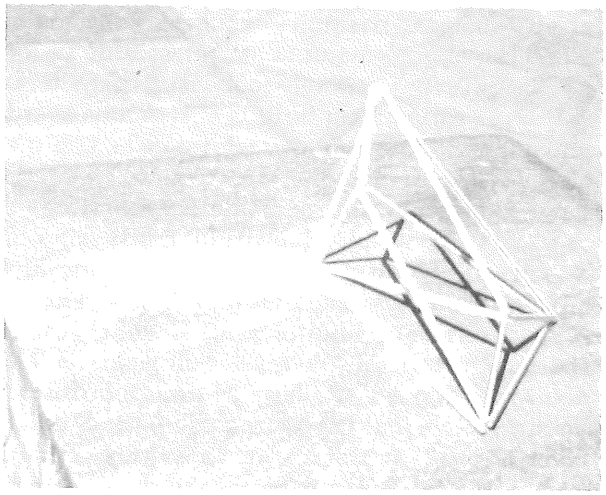
Mi primer contacto con los poliedros flexibles fue en el Seminario de Nicolás Bourbaki, en febrero de 1978, cuando N. H. KUIPER[1] sorprendió a la audiencia con un enorme poliedro de aluminio que resultaba ser flexible. Allí planteó, entre otras, las siguientes preguntas: ¿Cuál es el número mínimo de vértices para una esfera poliédrica flexible?

Por esfera poliédrica quiso referirse a los poliedros usuales para excluir a otros poliedros «raros», como pueden ser las traingulaciones sobre toros, botellas de Klein, etc... Por eso, en lo que sigue, llamaremos simplemente poliedros a las esferas poliédricas. Hagamos una reflexión sobre la situación en la que se encontraba el problema. La cuestión de saber si existe algún poliedro que sea flexible se remonta al libro II de los *Elementos* de Euclides. Un poliedro flexible, que algunos han dado en llamar flexaedro, es un poliedro P del espacio euclideo, para el que existe una familia uniparamétrica continua de poliedros P_t, con $P_0 = P$, de manera que, para cada $t \neq 0$, P_t es isométrico a P, pero no se obtiene de P por una isometría del espacio euclideo. En 1813, A. L. CAUCHY[2] demostró que todo poliedro convexo es rígido, es decir, no es flexible, pero dejó abierta la *conjetura de Cauchy-Euler,* en la que se establecía que todo poliedro de caras rígidas es inflexible. Hubo que esperar más de siglo y medio para que la conjetura fuera refutada por R. Connelly.

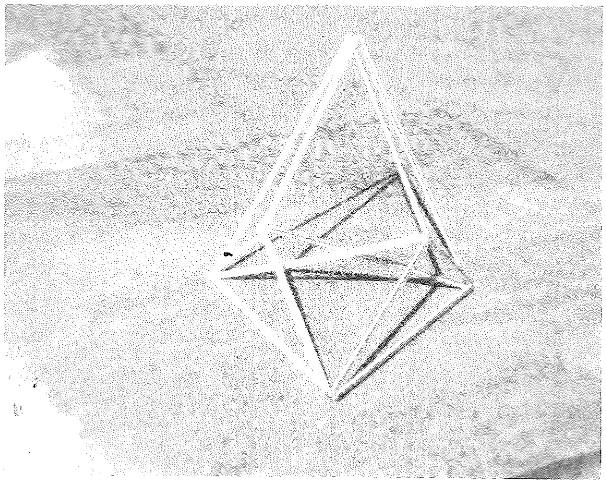
Entre los polígonos, tanto en el plano como en el espacio, los únicos que son rígidos son los triángulos, pues los de cuatro o más lados son siempre flexibles. Por tanto, para garantizar la rigidez de las caras del poliedro, cuyo número, C, está determinado por el número, V, de vértices, $C = 2V - 4$, podemos suponer que todas ellas son triángulos, aunque eventualmente algunos de ellos estén en un mismo plano formando otro tipo de polígonos. Así podemos considerar únicamente el esqueleto, formado por los vértices y las aristas

[1] KUIPER, N. H., «Sphères Polyhédriques Flexibles dans E^3 (d'après Robert Connelly)», *Séminaire N. Bourbaki,* exposé 514, 1977-78.

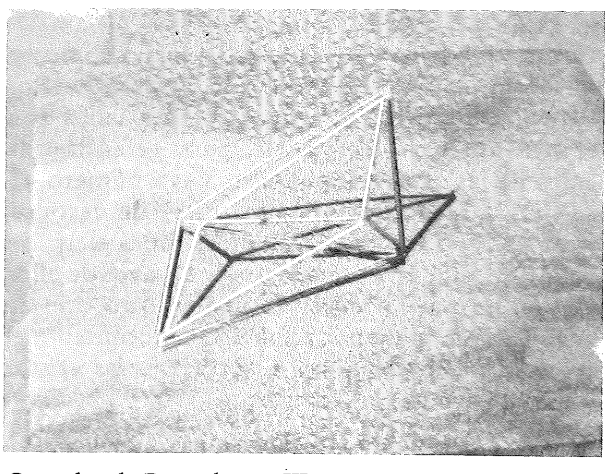
[2] A. L. CAUCHY, «II.ª Mémoire sur les polygênes et les polèdres», *J. Ecole Polytechnique,* 19 (1813), 87-98.



Octaedro de Bricard, tipo I.



Octaedro de Bricard, tipo II.



Octaedro de Bricard, tipo III.

que los unen, siendo el número de estas últimas $A = 3V - 6$, por la *fórmula de Euler:* $C + V = A + 2$. Para encontrar un poliedro flexible puede comenzarse con la búsqueda de un esqueleto flexible. Este esqueleto debe tener, al menos 6 vértices, pues con 4 vértices corresponde al esqueleto de un tetraedro, que es rígido y convexo, y con 5 es el de dos tetraedros unidos por una cara, que por ser rígido cada tetraedro, el poliedro es rígido. En el caso de 6 vértices, tales que en cada uno de ellos tienen que coincidir 4 de las 12 aristas, se obtiene el esqueleto de un octaedro (se han evitado los vértices rígidos en que sólo confluyen tres aristas).

En 1897, R. BRICARD[3] encontró todos los octaedros flexibles, pero sus tres tipos de *octaedros articulados* no son propiamente los esqueletos de poliedros, ya que sus caras se cortan transversalmente lo que hace que si quisiéramos proyectarlo en una esfera, los puntos de los cortes no tendrían determinada su imagen en dicha proyección; es decir, son inmersiones poliédricas de la esfera, pero no son inyectivas. El primer tipo corresponde a octaedros que tienen un eje de simetría; el segundo a los que poseen un plano de simetría que pasa por dos vértices opuestos; y el tercero, de más difícil descripción, corresponde a octaedros en los que todos los ángulos tetraedros tienen sus caras opuestas iguales o suplementarias dos a dos. Aunque los resultados de Bricard no resolvieron la conjetura, posteriormente han sido esenciales para su resolución, pues en ellos se basa el razonamiento.

Después de los trabajos de Bricard, el problema estuvo parado durante largo tiempo, hasta que R. CONNELLY[4] retomara el tema de la flexibilidad, en 1976. Desde entonces hasta ahora ha evolucionado mucho el problema. La idea de Connelly consiste en tomar un octaedro de Bricard adecuado de entre los del primer tipo. La razón por la que los octaedros de este tipo no son rígidos es que tienen un eje de simetría. Concretamente, si se tiene un cuadrilátero, *ABCD,* que tenga iguales los lados opuestos, cuyos vértices no han de estar necesariamente en un plano, la recta que une los puntos medios de las diagonales es la perpendicu-

[3] R. BRICARD, «Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé», *J. Math. Pures Appl.* (5), 3 (1897), 113-148.

[4] R. CONNELLY, «A counter-example to the rigidity conjeture for polyhedra», *Publ. Math. IHES,* 47 (1978), 333-338.

lar común a ambas y, por tanto, un eje de simetría del cuadrilátero (fig. 1). Si tomamos un punto cualquiera *E,* que no esté en ese eje, al unirlo con los cuatro vértices del cuadrilátero resulta una especie de pirámide lateral que lo tiene por base. Dicha pirámide es flexible. Fijando dicho eje, al realizar una flexión de esta pirámide lateral, el punto *F,* simétrico del vértice *E* de la pirámide, respecto del eje, se mueve también, manteniendo constantes sus distancias a los vértices del cuadrilátero, que son iguales a las distancias del punto *E* a dichos vértices. Por tanto, el esqueleto octaédrico *A,B,C,D,E,F* es flexible, lo que ocurre es que en el correspondiente poliedro, algunas caras se cortan (fig. 2). Para construir su octaedro, Connelly parte de un paralelogramo del plano, *ABCD,* y toma el punto *E* también en el plano, pero fuera de las diagonales, siendo *F* su simétrico respecto del centro del triángulo. Al unir *E* y *F* con *A,B,C* y *D* (fig. 3), se tiene un octaedro plano articulado, que será flexible, cuando se tome la arista *EC* sobre *FD,* y *EB* bajo *FA* (fig. 4), o bien, cuando se sustituya alguna de estas aristas por una curva (fig. 5) que haga una especie de puente a la altura de uno de los puntos, *P* o *Q,* de intersección de las aristas *EC* con *FD* y *EB* con *FA,* respectivamente. A continuación, sobre los triángulos *ABE, EBC* y *CDE* monta pirámides laterales de base triangular, y bajo los triángulos *ABF, FDA* y *FDC* coloca otras pirámides similares. Finalmente, sitúa las caras de los triángulos *AED* y *CFB.* El poliedro resultante sólo tiene *P* y *Q* como puntos dobles. Para que este poliedro pueda realizar una verdadera flexión, es necesario construir un hueco en alguno de los diedros de las aristas citadas, a la altura de los puntos *P* o *Q* (fig. 6), para que uno de estos diedros

Fig. 1

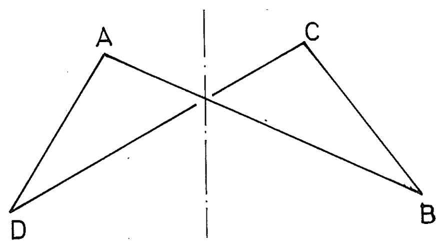


Fig. 2

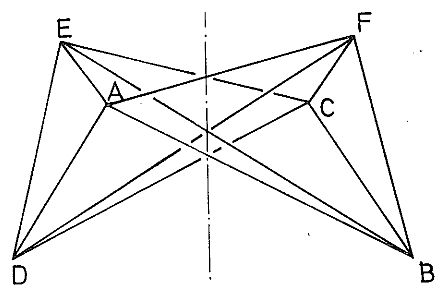


Fig. 3

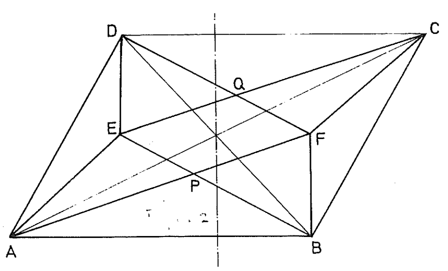


Fig. 4

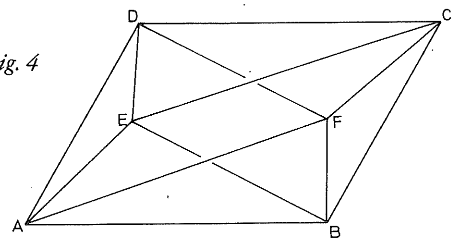


Fig. 5

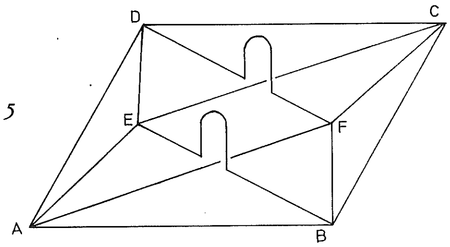
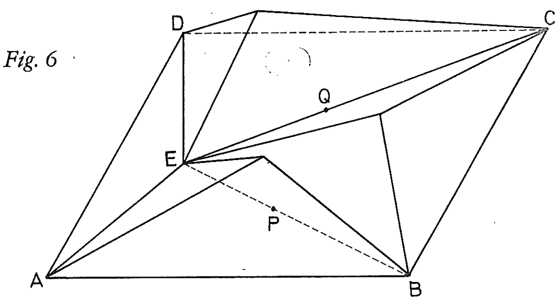
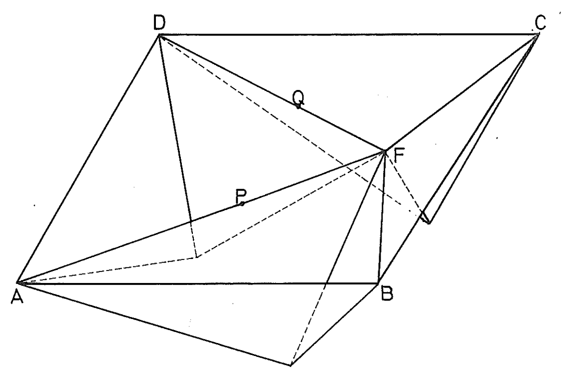


Fig. 6





pueda entrar en el otro. Esto lo consigue Connelly al realizar su *hueco* poliédrico que también se basa en un octaedro de Bricard muy particular. Es del mismo tipo que el anterior, pero ahora el cuadrilátero de partida tiene los cuatro lados iguales, por lo que, además del eje, posee dos planos de reflexión que se cortan perpendicularmente a lo largo del eje. Si el cuadrilátero de partida es el $A'B'C'D'$ y el vértice considerado, E', se encuentra en uno de esos planos de simetría, pero fuera del eje, resulta que F' es simétrico de E', tanto respecto al eje, como al otro de los planos. De esta forma, el octaedro resultante tiene simultáneamente las propiedades de los octaedros del primer y segundo tipos, y además un nuevo plano de simetría. En este octaedro, como en todos los del segundo tipo, se presenta la dificultad de que dos de las aristas se cortan en cualquier instante de la flexión (en la fig. 7 las aristas son $C'E'$ y $A'F'$, que se cortan en R), por lo que realmente no es un octaedro articulado constructible, pero eso no importa, ya que para su trabajo prescinde de una de ellas (en la fig. 7, la $A'F'$). Justamente, al eliminar una de esas aristas, así como las dos caras que en ella inciden, lo que queda es el esqueleto de una superficie poliédrica que realiza una flexión con un plano de simetría, pudiendo acoplarse a unos huecos triangulares, realizados con las medidas iguales a las aristas del hueco poliédrico, en las caras de uno de los diedros y haciendo coincidir el plano de simetría del hueco con el bisector del diedro. El resultado es un diedro con un hueco, como en la fig. 8, en el que

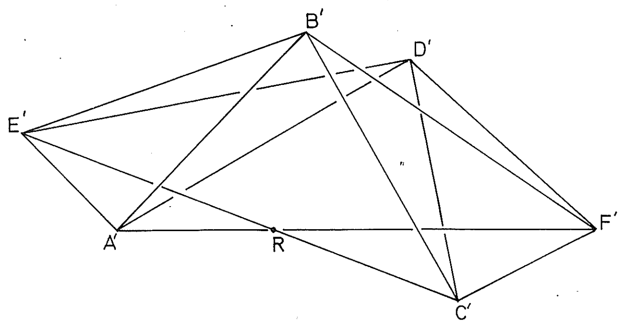


Fig. 7.—El esqueleto del hueco de Connelly.

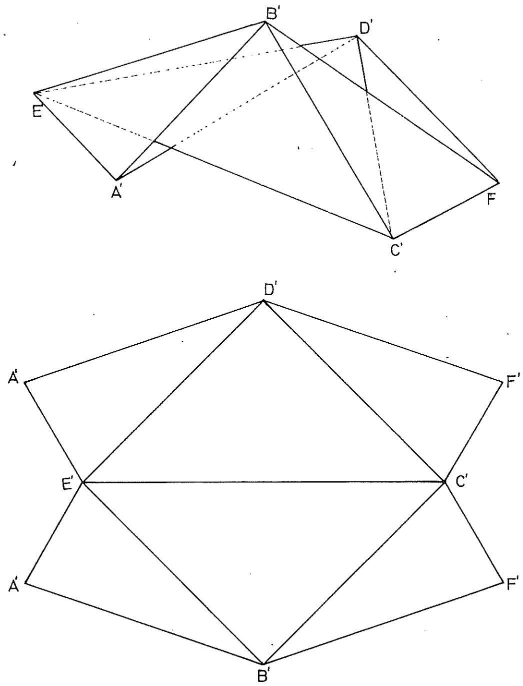


Fig. 8.—El hueco de Connelly y su desarrollo.

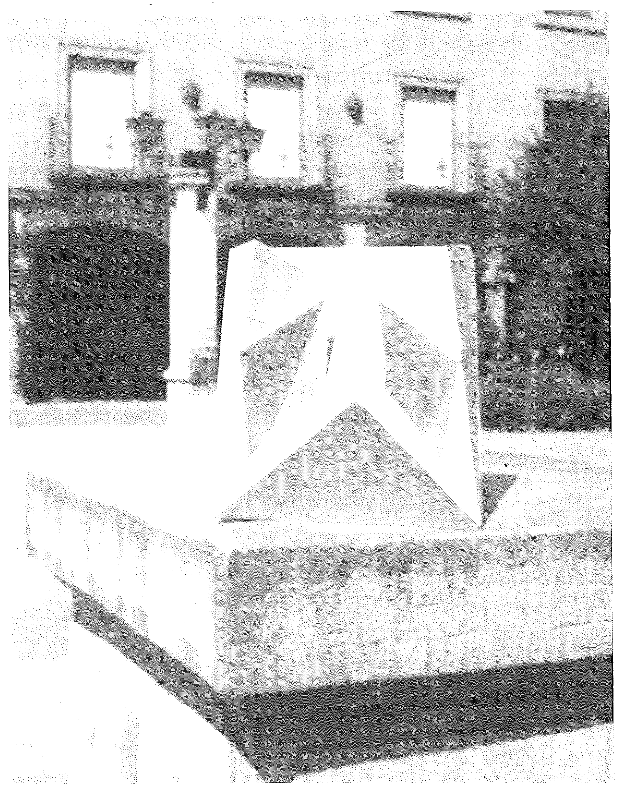


Foto 4.—El poliedro de Connelly.

puede introducirse transversalmente, otro diedro. Del tamaño del hueco y de la amplitud del diedro que se desea introducir en él, dependerá la amplitud de la flexión. El resultado es el *Poliedro flexible de Connelly,* que tiene 18 vértices, 54 aristas y 32 caras. La versión en aluminio mostrada por Kuiper, que ha sido el más difundido de los poliedros flexibles, incluía dos de estos huecos poliédricos, por lo que tenía 24 vértices, para hacer con ellos más vistosa la exposición, ya que así puede moverse el poliedro a ambos lados del plano que contiene el rectángulo de partida.

A partir de aquí, mi trabajo consistió en eliminar aquellas pirámides triangulares que no eran estrictamente necesarias para la flexión, por ejemplo, si se ha colocado el hueco en el diedro *EB,* las pirámides montadas sobre *ECD* y *FCD,* pueden suprimirse y sustituirse por caras, ya que al mover el poliedro estas caras se separan. También agrandando el hueco poliédrico hasta cubrir toda la arista del diedro en que se ha colocado y haciendo coincidir sus vértices con los de las caras en que ha sido colocado el hueco, así como deformando las magnitudes del paralelogramo de partida cuanto sea necesario, pueden suprimirse nuevos vértices que no intervienen de modo efectivo en la flexión. Con esta filosofía llegué a obtener un poliedro flexible con 11 vértices (foto 5) y luego con 10 (foto 6) quedando, en este último, un solo vértice que no interviene en la flexión por incidir solamente tres aristas en él. Todos los intentos que realicé para eliminar ese vértice rígido fueron vanos.

Ya corría la primavera de 1978 cuando en una entrevista con N. H. Kuiper, en el IHES, mostré estos resultados. En aquella entrevista participó K. Steffen quien varios días después me enviaba una nota con el desarrollo de su poliedro con 9 vértices (foto 7).

La idea de STEFFEN[5] se basa en partir de dos discos poliédricos iguales, del mismo tipo que los utilizados por Connelly en su hueco, y unirlos adecuadamente por dos aristas consecutivas. El resultado es una superficie poliédrica que tiene en el borde un cuadrado alabeado. Se observa que las dos estructuras poliédricas, que se han unido, pueden flexionar independientemente la una de la otra, siempre que se tomen las medidas adecuadas

[5] R. CONNELLY, «A Flexible Sphere», *Math. Inteligencer,* 1 (1979), 130-131.

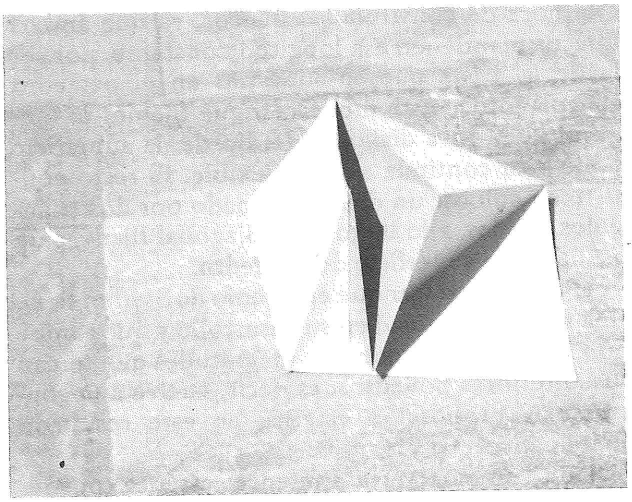


Foto 5.—Poliedro con 11 vértices.

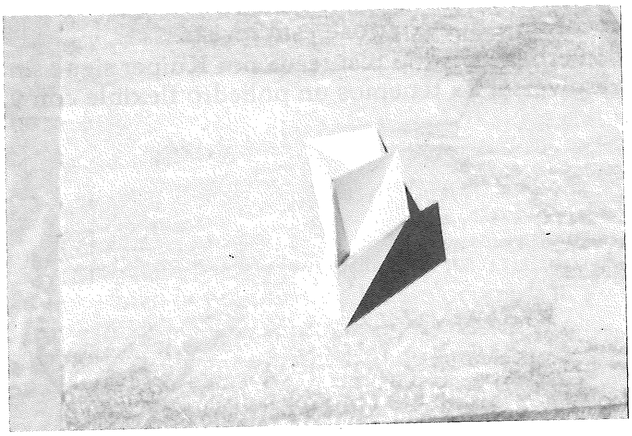


Foto 6.—Poliedro con 10 vértices.

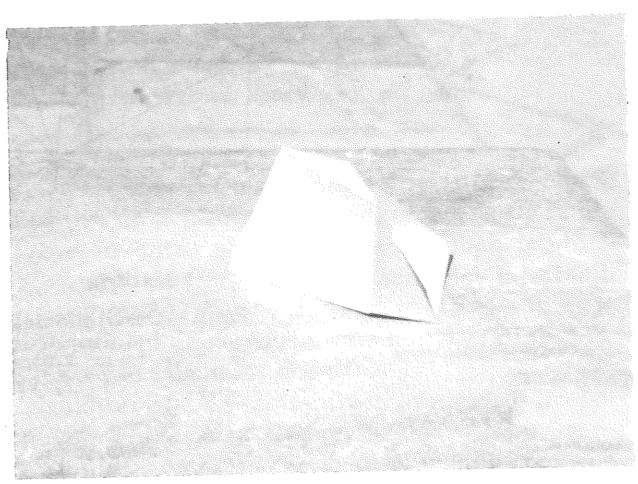


Foto 7.—Poliedro con 9 vértices.

a la hora de construir los huecos, ya que ambos huecos mantienen esa longitud constante, por ser la de la arista que se suprimió en el octaedro articulado. De este modo, aunque fijemos la longitud de la otra diagonal del borde, la superficie poliédrica continúa siendo flexible. El resto consiste en colocar un diedro formado por dos triángulos iguales, a lo largo de la diagonal fijada, para así cerrar la superficie del poliedro.

Hay que destacar que el ingenio de Steffen tiene una gran simplicidad en su desarrollo y que rompe con las desproporcionadas magnitudes que tenían los anteriores poliedros, es decir, vuelve a encontrarse la proporción estética en este resultado matemático.

Para comparar esta diferencia estética, puedes realizar con cartulina un poliedro flexible de Steffen sirviéndote del desarrollo que aparece en la fig. 9 y construir el poliedro de 10 vértices utilizando el recortable que contiene esta revista.

Pero la cuestión planteada por Kuiper sigue sin resolverse. Ya tenemos un poliedro flexible con 9 vértices y también se sabe que con 7, o menos, no puede construirse. Queda pues por dar respuesta a la pregunta: ¿Existe algún poliedro flexible con 8 vértices?

Todos los poliedros flexibles que conozco, incluido otro construido por P. Deligne con 11 vértices, que también parte del mismo principio y que puede verse en el vídeo de J. BRETTE y P. HUET[6], tienen la propiedad de que a lo largo de la flexión conservan el volumen del espacio que encierran. Esto hace que se plantee la siguiente interrogante: ¿Existe algún poliedro flexible que varíe su volumen a lo largo de la flexión?

Sería para mí una gran satisfacción recibir del lector de este artículo la respuesta a alguna de las preguntas planteadas.

[6] J. BRETTE y P. HUET, *Poliédres flexibles,* IREM de la Univ. París, 7 (1979).

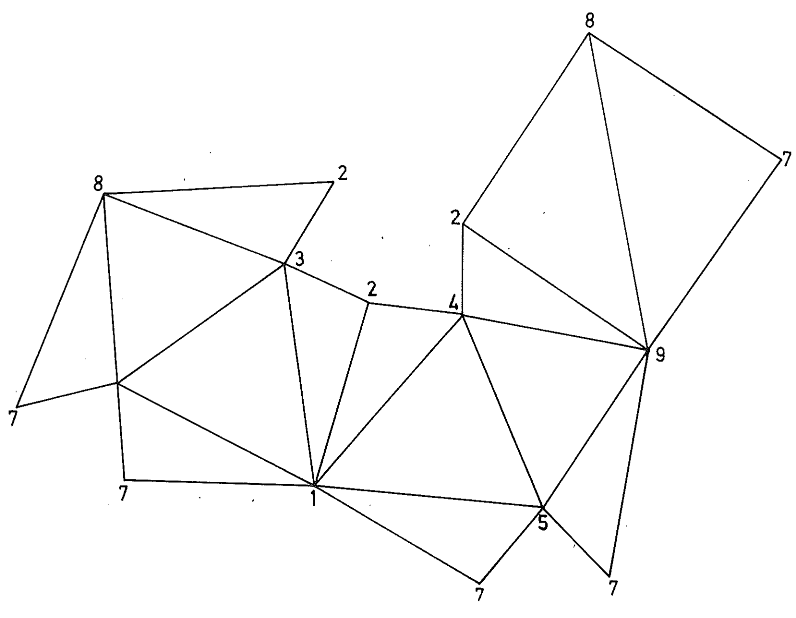


Fig. 9.—Desarrollo del poliedro de Steffen.

Una clase sobre probabilidad en COU

Salvador Guerrero

Durante el estudio de los temas de probabilidad en COU se planteó el siguiente ejercicio:

> Dos jugadores *A* y *B* juegan del siguiente modo: se lanzan dos monedas al aire y se mira el número de caras y el de cruces obtenidas al caer. Si en las dos monedas sale lo mismo, gana *A*; si sale distinto, gana *B*. ¿Es equitativo el juego?

En una primera ronda de opiniones, la apreciación intuitiva era diversa, aunque con mayor proporción de los que se inclinaban por la equitatividad, es decir que ellos podrían ser el jugador *A* sin temer que ello fuera desfavorable. Al tener que precisar y fundamentar esa opinión, una simple descripción del espacio muestral con un diagrama en árbol como el de la fig. 1, y el cálculo de la probabilidad del suceso *S*: «salir lo mismo en ambas monedas», confirmó que la probabilidad era 1/2.

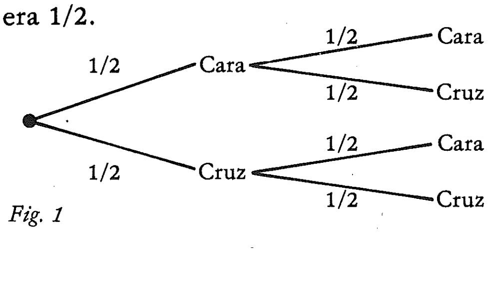


Fig. 1

El ejercicio pasó a ser interesante cuando el profesor hizo la pregunta de lo que ocurriría si los datos estuvieran sesgados, y hubiese mayor probabilidad de sacar cara (p.ej., 4/5) que de sacar cruz. ¿Seguía siendo el juego equitativo?

[*Una primera estrategia útil —a veces— para convertir ejercicios en problemas (además del propio interés humano del juego de azar como tema de estudio) es la de hacer depender el resultado de un parámetro, y estudiar la variación del resultado dependiendo del parámetro.*]

Otra ronda de opiniones sobre la apreciación intuitiva de la nueva situación, ofrece la siguiente discusión entre alumnos (¡los alumnos también saben argumentar, cuando el tema les interesa!):

Alumno A) Ahora tiene el jugador *A* mayor probabilidad de ganar, porque hay más probabilidad de que salgan las dos caras...

Alumno B) ... Pero también hay menos probabilidad de que salga cruz en las dos.

Alumno C) Entonces la del jugador *B* no ha cambiado: lo que sale «cara» de más, por lo que sale «cruz» de menos...

con el permiso de los autores.

Alumno A (el mismo A) Si no ha cambiado la probabilidad de *B* tampoco ha cambiado la de *A*, porque la suma de las dos es 1.

[*Con las discusiones en clase se pone de manifiesto que las primeras intuiciones que construye la mente, es posible que no reflejen la complejidad de la situación. Una posterior reflexión (o discusión) aunque sólo sea cualitativa (y cuantitativa si es necesario) permite ir detectando ya ciertas incorrecciones, e ir perfilando un plan de acción. Resaltar esto al resolver problemas e ir creando un ambiente de clase que permita el desarrollo de estas actitudes, es mucho más importante que el propio resultado, porque permite un ambiente de clase que propicia el desarrollo de las actitudes científicas, que hacen entender el sentido profundo del conocimiento científico —conjeturas provisionales sometidas a verificabilidad— y, en definitiva, el valor de la ciencia.*]

Sobre el mismo diagrama en árbol del espacio muestral, una probabilización distinta de la establecida en la fig. 1, como la que se ve en la fig. 2, permitió obtener que la probabilidad de que ganara *A* era de 17/25 frente a un 8/25 de que ganara *B*, o sea algo más del doble, pero que no llegaba al 80 por 100. El profesor fuerza la situación al preguntar cuál es la probabilidad de ganar *A* si la probabilidad de sacar cara en una moneda sólo fuese 1/5. La evidencia de la simetría del sesgo de la moneda hacia uno u otro resultado es patente ahora.

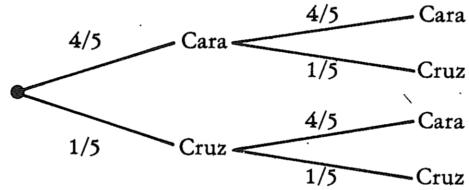


Fig. 2

Una pregunta de un nuevo alumno, que hasta ahora no había expresado sus opiniones en la discusión:

Alumno D) Aumentando la probabilidad de salir cara, ¿siempre aumenta la probabilidad de que gane *A*?

[*Resuena en la pregunta el eco de un tipo de investigación científica: "¿Cómo varía la magnitud* Y *al ir cambiando la magnitud* X*?".*]

El profesor sugiere que se estudie la probabilidad *(y)* de que gane *A* en función de la probabilidad *(p)* de salir cara. El sencillo diagrama en árbol utilizado les permite obtener ahora

$$y = p^2 + (1 - p)^2$$

o sea

$$y = 2p^2 - 2p + 1$$

siendo

$$0 \leq p \leq 1$$

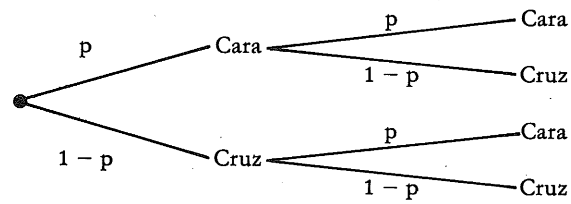


Fig. 3

[*¡Y hemos pasado de "probabilidad" a "funciones"! En el estudio matemático de una situación no tienen por qué existir los compartimentos estancos en los que solemos dividir los programas oficiales.*]

La gráfica que nos permite ver la variación de *y* es inmediata y sencilla: es una parábola, definida de manera natural en el intervalo [0, 1], que toma el valor 1 para $p = 0$.

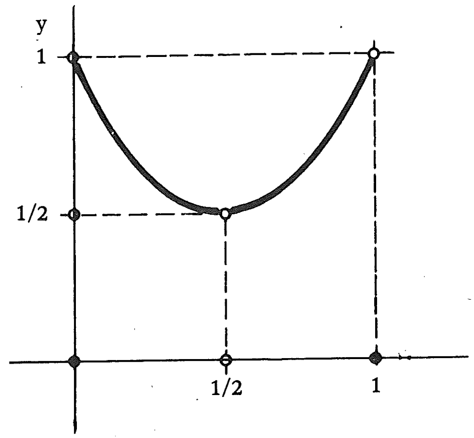


Fig. 4

PROFESOR: ¿Está eso de acuerdo con nuestra experiencia?

ALUMNO E) Claro; si siempre sale cruz en las dos monedas, gana el que juega con los dos resultados iguales. Lo mismo pasa para $p = 1$; también $y = 1$.

Así pues, la parábola de la gráfica es decreciente hasta $p = 1/2$ donde tiene el mínimo, y creciente a partir de él. El valor del mínimo es $2 \cdot 1/4 - 2 \cdot 1/2 + + 1 = 1/2$. Luego, para cualquier valor de p tiene más probabilidad de ganar que para $p = 1/2$. La probabilidad (x) de B, que es $x = 1 - y = 2p - 2p^2$, cuya gráfica es la de la fig. 5, nos permite ver que el jugador B está siempre en desventaja frente al A, pues cualquier alteración en la exactitud de la moneda, beneficia al jugador A pues la gráfica de (y) está siempre por encima de la de (x) para cualquier valor de p salvo para $p = 1/2$.

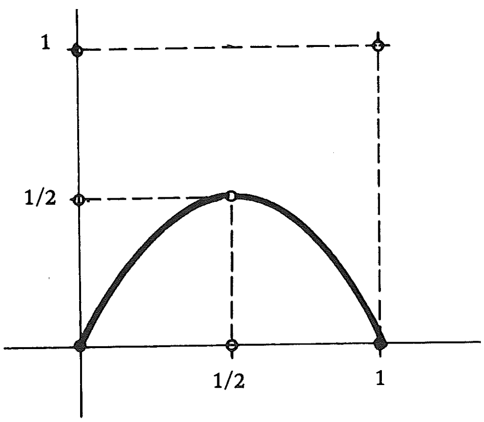


Fig. 5

[¡El profesor está contento! La situación definitivamente aclarada..., al parecer.]

La situación de investigación toma una ruta inesperada con una nueva intervención.

Alumno E) ¿Y si las dos monedas no están igual de mal hechas? Hay distinta probabilidad de salir cara en una que en otra.

Alumno F) O que la probabilidad de más que hay en una de las monedas, para salir cara, la tenga la otra moneda para salir cruz.

Esta última situación tuvo defensores de que no cambiaba para nada la probabilidad 1/2, pues «lo que había de más en una, lo había de menos en la otra». La resolución fue fácil, pues era un caso más de los métodos usados, y la probabilidad de que gane A se obtuvo fácilmente como

$$y = 2\,p\,(1 - p) = 2\,p - 2\,p^2.$$

Es decir, que la gráfica es como la de la fig. 5, y por tanto ahora es A el que sale siempre perjudicado salvo cuando una moneda sea exacta, en cuyo caso la otra también ha de serlo. Se han cambiado los papeles de A y de B.

La pregunta del alumno E deparó nuevas sorpresas, pues el habitual diagrama en árbol, probabilizado ahora como en la fig. 6, nos permitió obtener

$$y = pq + (1 - p) \cdot (1 - q)$$
$$y = 2pq - p - q + 1$$

La probabilidad de que gane A depende ahora de dos variables, p y q.

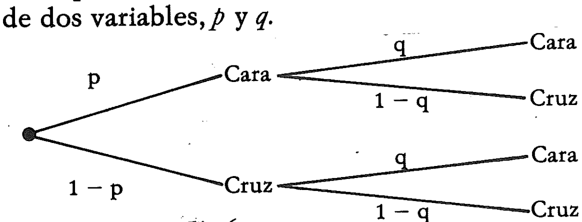
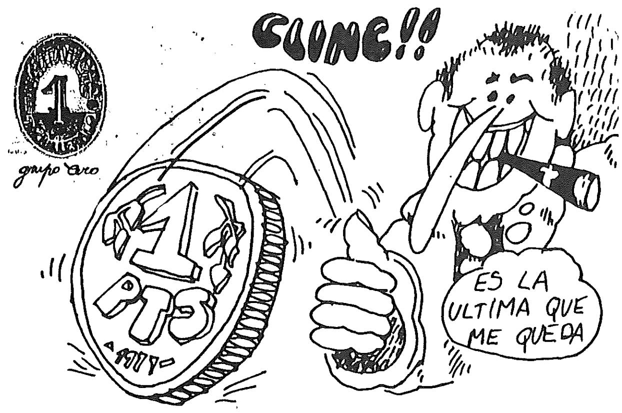


Fig. 6



con el permiso de los autores

[Las dos variables han aparecido de manera natural en una investigación. ¿Para cuándo introducirlas en los cursos de Bachillerato? El mimetismo hacia lo universitario hace que si no se introducen instrumentos de cálculo como las derivadas parciales no se puedan estudiar. Pero al estudiar múltiples situaciones en la realidad, aparecen dichas funciones: piénsese como ejemplo más simple en el volumen de los cuerpos, dependiendo de dos y a veces de tres variables. Hay aquí un ejemplo más de cómo el punto de vista académico *(¡esos objetivos finales ocultos tantas veces negados o inconscientes!) influye en los programas del Bachillerato. Naturalmente que se puede conocer algo sobre los valores de la función, sin necesidad de potentes instrumentos de cálculo; es como si no se pudiera estudiar nada de las funciones de una variable hasta no haber dado la derivación. Además, el no disponer de potentes instrumentos de cálculo obliga a estudiar aprovechando al máximo de lo que se dispone, es decir enseña a utilizar mejor el cálculo y sacarle todo su provecho. En definitiva, hace que desarrollemos la creatividad.*]

Es una función de dos variables y nada más natural que intentar dibujar los valores que toma la función en el cuadrado de lado 1. Lo primero fue calcular los valores en los extremos y en algunos puntos de los bordes y en el del centro, de coordenadas (1/2, 1/2), y eso permitió ya tener un esbozo de la posible «superficie».

[¿Pero no sólo metemos funciones en un problema de probabilidad, sino también geometría? ¡Los alumnos se van a hacer un lío! Cada cosa hay que darla en su sitio. La matemática ha sido siempre una ciencia ordenada.

¿No oyen las carcajadas de Arquímedes, de Galileo, de Euler, de Gauss...?]

El profesor tuvo que tomar parte más activa en la clase para ayudar un poco en un esfuerzo nuevo. pensaron que una manera de hacernos idea de cómo era seria mediante sección por planos paralelos... [a lo que llamamos los planos de referencia]. El profesor sugirió que cada idea geométrica se fuese «traduciendo» a términos de cálculo:

— cortar por planos paralelos era hacer que los valores de p o de q fuesen fijos. En ese caso lo que se obtenía eran líneas rectas. ¿Cómo es su pendiente?

— el profesor sugirió que estudiaran lo que ocurría al cambiar p por q en la ecuación de la superficie. ¿Cambiaba? ¿Qué significado geométrico tiene eso?

— propuso el profesor que se estudiara lo que ocurriría al cortar por planos paralelos a la «base». Lo que se obtienen son curvas, estudiadas el curso anterior.

El inmediato movimiento de manos y dibujos para hacerse una idea de cómo era la superficie, hizo que uno de los habituales «manitas» que hay por nuestras clases, sugiriera el construir una maqueta, puesto que los cortes por los planos paralelos verticales eran líneas rectas que se podían simular muy bien con hilo tenso, atado a clavos.

[¿No les viene el recuerdo de Galileo cortando una cicloide de latón, hecha con sumo cuidado, para calcular el área de la cicloide?]

Una sola clase ya dio bastante de sí, aunque no habíamos hecho más que un solo ejercicio de la hoja de probabilidad. Pero también el final es anecdótico. Al sonar el timbre volvieron a la realidad (como el cuento de la *Cenicienta*).

Alumno B) ¿Pero esto último que hemos dado no entra en el programa de selectividad? Me ha gustado, pero ya lo investigaré cuando tenga tiempo.

¡Sería bonita una enseñanza sin el agobio de la selectividad! ¿Sería posible?

«Donald en el País de las Matemágicas» o el aprovechamiento didáctico de una película

José del Río Sánchez

1. Introducción

No abundan demasiado las películas didácticas en Matemáticas y, a veces, su calidad es bastante discutible. Walt Disney produjo una película en 16 y 35 milímetros titulada *Donald en el País de las Matemágicas* que ahora está disponible en los vídeoclubes dentro del volumen 5 del Canal Disney, distribuida por Filmayer Vídeo (Mártires de Alcalá, 4; 2815 Madrid; Tfno. 2489205). Se trata de un film corto (25 minutos), muy rico en contenidos didácticos, que puede ser utilizado como mera motivación del apetito matemático de los alumnos pero también como fuente de una variada gama de actividades complementarias. En los párrafos que siguen describo una experiencia de este segundo tipo, en la que se trabaja, de una manera asequible, con el bello pero difícil tema del Número de Oro.

2. Redacción y encuesta

En uno de los primeros días del curso pasado, hice que los alumnos de 1.º de BUP viesen esta película y, a continuación, en la misma clase, les pedí que redactaran sus impresiones en una hoja y también que escribieran, al final, dos o tres preguntas sobre aspectos de la película que no hubieran entendido o que, habiéndolos entendido, quisieran saber más sobre ellos. Los resultados, a tenor de la experiencia, demuestran que la curiosidad de los alumnos es tan amplia como interesante.

Resumo a continuación sus variadísimas preguntas, agrupándolas en cuatro temas genéricos y expresándolas con sus mismas palabras:

A) *El rectángulo de oro*

1.—¿Quién lo inventó?
2.—¿Por qué se llama así?
3.—¿Qué significó la estrella de cinco puntas y el rectángulo de oro para los antiguos?
4.—¿Cómo sale la espiral de los rectángulos áureos?
5.—¿Cómo se descomponen en rectángulos áureos los objetos? ¿Cómo se acopla el rectángulo áureo en formas no rectangulares, como templos, estatuas...?
6.—¿Cómo se relaciona el rectángulo de oro con el cuerpo humano?

7.—¿Qué tienen en común los números con las figuras?

B) *Los juegos*

8.—¿Hay alguna fórmula para acertar siempre en el billar?

9.—¿Influye la fuerza del tiro en el billar?

10.—¿Qué tienen que ver las matemáticas con el ajedrez?

11.—Quiero saber más sobre las matemáticas y los juegos.

C) *La historia*

12.—¿Cómo fueron acogidas las matemáticas de Pitágoras?

13.—¿Cuándo y dónde se utilizaron por primera vez las matemáticas?

14.—¿Cómo tuvo Pitágoras la idea de pensar en las matemáticas?

D) *Aplicaciones de las matemáticas*

15.—Quiero conocer algún invento basado en las matemáticas.

16.—¿Cuál es la ley que hace que los planetas estén colocados como están?

17.—¿Cómo se construye la lira?

18.—¿En qué se diferencia la matemática pura de la aplicada?

19.—¿En qué ciencias se usan las matemáticas?

20.—¿Se seguirán descubriendo más matemáticas?

Se me ocurrió que estas 20 preguntas me podían servir para programar actividades de clase encaminadas a satisfacer la curiosidad despertada ya por la película. Tenía dos posibilidades de organización: tomarlas como centro de interés y desarrollar en torno a ellas los contenidos del programa habitual o utilizarlas como fuente de actividades complementarias. Opté por esta última posibilidad y les dediqué una sesión de clase cada quince días con alumnos de 1.º de BUP. A continuación, describo brevemente mi experiencia.

3. ¿Quién inventó el rectángulo de oro? ¿Por qué se llama así? ¿Qué significó la estrella de cinco puntas y el rectángulo de oro para los antiguos?

Contesté a estas preguntas mediante una exposición de los conocimientos adquiridos por mí en un rastreo por los libros de BOYER (1986), CASTELNUOVO (1963), GHYKA (1983), Grupo GAUS (1985) y PEDOE (1979).

Luego me di cuenta de que hubiera sido mejor plantear una investigación por equipos (adaptando un poco el esquema de RODRÍGUEZ ROJO, 1987) utilizando los alumnos esa misma bibliografía y explorando también en la realidad actual dónde se encuentra la estrella de cinco puntas y qué significado tiene (signos militares, políticos, publicidad...).

4. ¿Cómo sale la espiral de los rectángulos áureos?

Es curiosa esta pregunta, no sólo por el interés que tiene en sí misma, sino por la siguiente circunstancia: ningún alumno me preguntó cómo se construía un rectángulo áureo o cómo se reconocía si un rectángulo era áureo o no; sorprende que se pregunte por la construcción de la espiral y no del rectángulo que la engendra. ¿O es que la construcción de ese rectángulo queda clara en la película?

Pasé de nuevo esta secuencia de la película a mis alumnos y les pedí, a continuación, que dibujasen un rectángulo áureo. Nadie fue capaz de hacerlo. Repetí la experiencia y les hice la misma proposición. Surgió en seguida en todos la siguiente pregunta: ¿Cómo se dibuja un pentágono regular?

Les indiqué dos métodos «empíricos»:

a) Con un transportador de ángulos, medimos sobre una circunferencia un arco AB de 72° y luego lo llevamos con el compás sobre ella (fig. 1). Cabe exactamente 5 veces. Unimos estos puntos y ya tenemos construido el pentágono regular. ¿Por qué sucede esto?

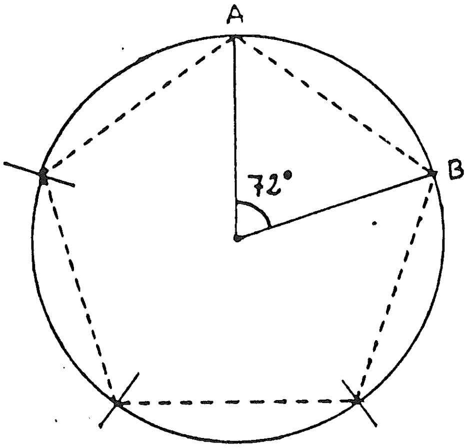


Fig. 1.—Construcción de pentágono regular con compás.

b) Partimos de una tira de papel de 4 ó 5 cm. de ancho, hacemos un nudo, aplastamos, cortamos lo sobrante, y el nudo plano resultante $ABCDE$ nos sirve para trazar el contorno de un pentágono regular (fig. 2). (Los alumnos ante la evidencia que tenían en sus manos, no dudan de que este polígono fuese regular. Preguntarles la razón teórica de este hecho hubiera resultado demasiado arriesgado.)

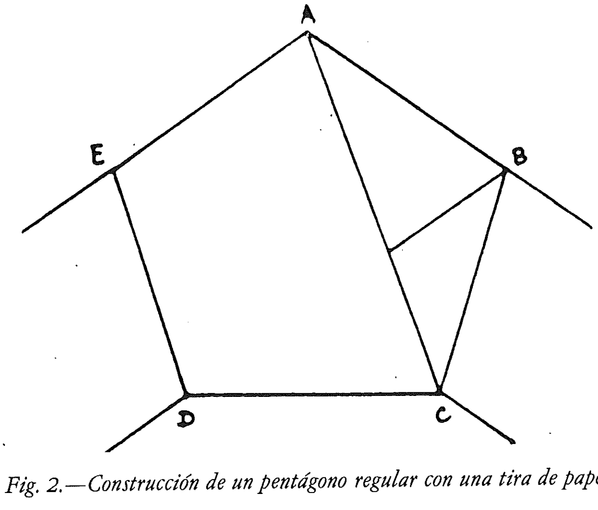


Fig. 2.—Construcción de un pentágono regular con una tira de papel.

Una vez que tenían dibujado su pentágono regular, ya trazan fácilmente la estrella correspondiente y luego, tal como muestra la película, construyeron los rectángulos áureos «abriendo» (con el compás) los lados de los triángulos que aparecen en la estrella (fig. 3).

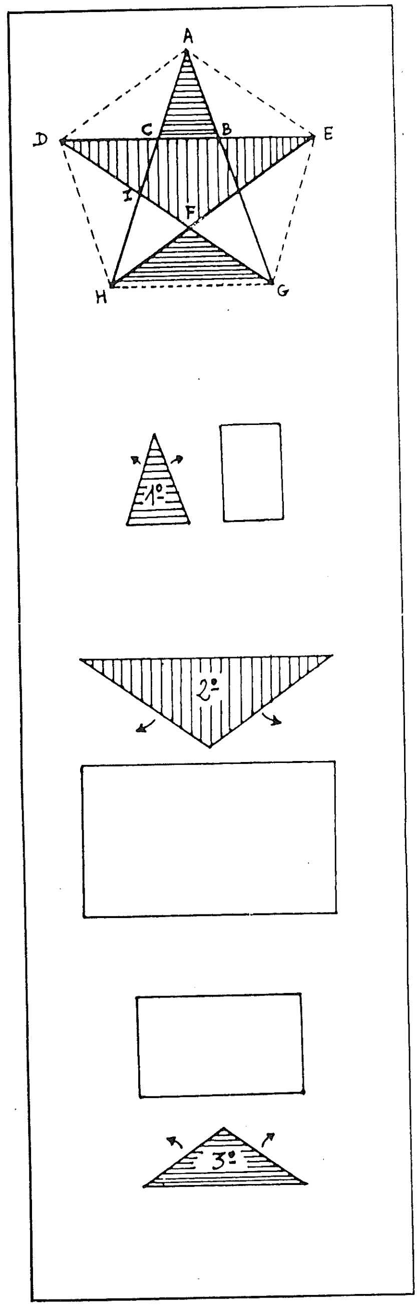


Fig. 3.—Rectángulos áureos.

Proyectamos de nuevo la película y la paramos en la imagen de la espiral. Fijándose en ella, los alumnos fueron capaces de descubrir su proceso de construcción (fig. 4).

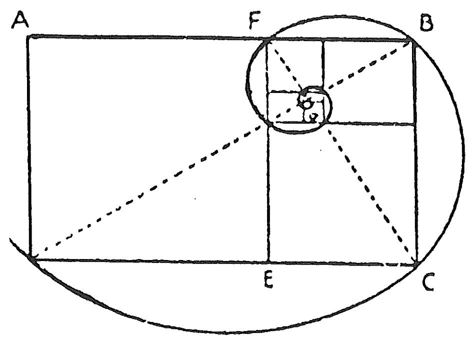


Fig. 4.—Espiral.

Les hice notar que esta espiral se encuentra frecuentemente en la naturaleza, como muestra la película, pues es una forma de crecimiento armónico de la materia viva (GHYKA, 1983).

Aproveché esta situación para tratar de buscar un criterio que nos sirviera para decidir si un rectángulo es áureo o no, y procedí de la siguiente manera:

Como cada alumno había tomado un triángulo distinto en la estrella, también fueron distintos los rectángulos obtenidos. Les pregunté: ¿Qué es lo que tienen en común todos esos rectángulos?

Contestaron: que tienen la misma forma.

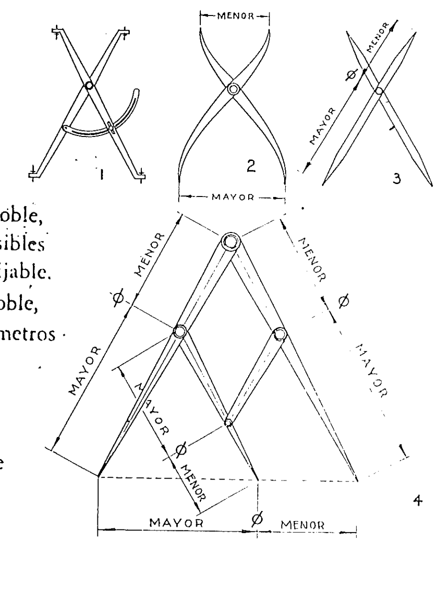
¿Y qué determina la forma de un rectángulo?, seguí preguntando. Respondieron: sus lados, las dimensiones de sus lados. Hice que los midieran y les pregunté: ¿Qué es lo común a esas distintas parejas de longitudes, de números? ¡Su cociente!, dijeron. En efecto, el cociente entre la longitud mayor y la menor eran números que oscilaban entre 1,45 y 1,75 en todos los casos. Estas diferencias fueron atribuidas al método de construcción y empezamos a discutir sobre cuál sería el número más representativo de esa «tabla». Las opiniones se decantaban hacia «el valor medio» y hacia el número que «más se repite». Ambos vinieron a coincidir en 1,6 aproximadamente, y con ese valor nos quedamos. De este modo habíamos descubierto un criterio empírico para determinar si un rectángulo era áureo: el cociente entre la longitud mayor y la menor ha de ser 1,6. (Este tratamiento permite conectar con el tema de la semejanza de figuras y con las medidas estadísticas de centralización.)

5. ¿Cómo se descomponen en rectángulos áureos los objetos?

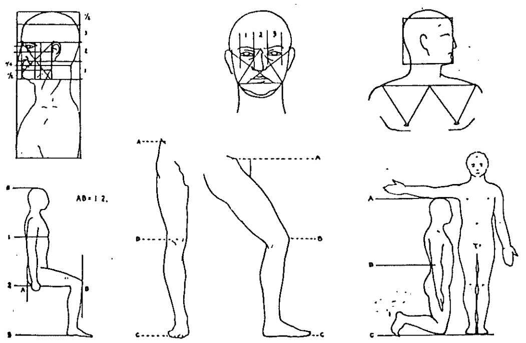
La pregunta es muy amplia y una contestación completa requeriría un tratado de Estética, como, por ejemplo, el de Matila C. GHYKA (1983). Me conformé con proponer a mis alumnos que, en fotografías de edificios, de cuadros, de cerámicas, etcétera..., tratasen de localizar algún rectángulo áureo, uniendo puntos o enmarcando aspectos significativos de la obra, como hace la película con el Partenón, con la Gioconda o con la catedral de Notre-Dame. Muy útil en esta tarea les fue el compás áureo, que construyeron con dos palitos afilados (de helado, por ejemplo) unidos de modo que la razón sea 1,6.

Les hice también otra pregunta relacionada con ésta y que, sin duda, completa la formulada antes sobre el significado del rectángulo de oro: ¿Por qué los artistas emplean en sus obras el rectángulo de oro con relativa frecuencia?

Pegué en una pared de la clase 6 cartulinas rectangulares grandes, numeradas, del mismo color, cuyas razones entre sus lados eran, respectivamente, 1, 1'2, 1'4, 1'6, 1'8 y 2, y les pedí que, en votación secreta y sincera, escogieran la que más le gustaba. La mayoría se decidió por la de razón 1'6. Luego, ellos sacaron las conclusiones de este hecho.



1. Compás áureo doble, de puntas extensibles y con tornillo fijable.
2. Compás áureo doble, curvo, para diámetros o calibres.
3. Compás áureo doble, recto.
4. Compás áureo de tres puntas.



Cánones y proporciones humanas de LEONARDO en base a medidas iguales, por comparación.

6. ¿Cómo se relaciona el rectángulo de oro con el cuerpo humano?

Yo creí que, en la película, quedaba claro este aspecto, pero observé que no era así, puesto que los alumnos creían que había que enmarcar en un rectángulo áureo el cuerpo humano o alguna de sus partes. Les expliqué que esto no era necesario y que bastaba con medir longitudes: del ombligo a la cabeza, del ombligo a los pies, de las rodillas a los pies, etc., y luego hallar sus cocientes. Aclarado esto, les pedí que recogieran fotografías de personas y/o esculturas y que, en ellas, corroboraran o rechazaran las hipótesis que hacía la película sobre las proporciones del cuerpo humano, y que tratasen de encontrar otras.

7. ¿Qué tienen en común los números con las figuras?

Esta pregunta me sorprendió enormemente por su profundidad: buscar la relación, lo que hay de común, entre números y figuras, entre números y realidad, es uno de los cometidos más importantes de la Geometría, y en general, de todas las ciencias.

En una actividad anterior, habíamos comprobado experimentalmente, midiendo, que la razón entre los lados de un rectángulo áureo era 1'6, aunque algunos alumnos hubieran obtenido 1'56, 1'62, 1'57, 1'63, etc. ¿Sería posible calcular la razón exacta sin necesidad de medir los lados del rectángulo áureo?

Pedí a los alumnos que analizaran los tres triángulos que utiliza la película para obtener el rectángulo áureo (fig. 3): el primero es un triángulo isósceles cuyos ángulos miden 36°, 72° y 72° respectivamente; el segundo es también isósceles, sus ángulos miden 36°, 36° y 108°, y junto con el triángulo *FEG,* que tiene a su derecha, constituye otro triángulos isósceles semejante al primero; el tercero es del mismo tipo que el segundo y también junto con el triángulo *FHI,* que tiene a su izquierda, forma uno semejante al primero.

¿Qué relación existe entre los lados de un triángulo isósceles de 36°, 72°, 72°?

El siguiente razonamiento, realizado por mí sobre una transparencia, y, al mismo tiempo, por los alumnos osbre su cuaderno no fue comprendido por la mayoría (fig. 5):

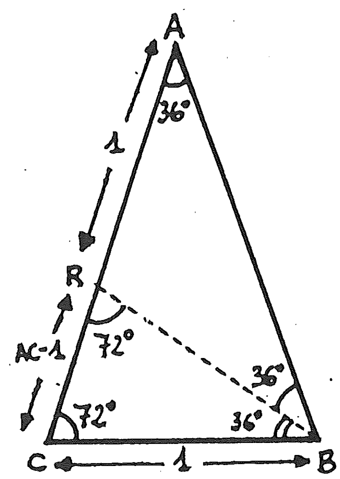


Fig. 5

«Tomemos como segmento unidad la base *BC* del triángulo. Al trazar la bisectriz *BR* del ángulo *B,* el triángulo *RBC* obtenido es semejante al total, *ABC,* puesto que son respectivamente iguales sus tres ángulos. Por lo tanto, deberá verificarse:

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CR}};$$

como, además, por la construcción de la bisectriz, resultan ser isósceles los triángulos *ARB* y *RCB,* se verifica también que: $BC = BR = 1$ y que $CR = AC - 1$. Sustituyendo arriba se obtiene:

$$\frac{\mathrm{AC}}{1} = \frac{1}{\mathrm{AC}-1}\,;\ \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AC} - 1 = 0\,;\ \mathrm{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Luego la razón exacta entre los lados del rectángulo de oro construido a partir de este triángulo es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180...$

Si partimos del segundo triángulo, *DEF,* como $EF = EC$, la relación entre DE y EF vuelve a ser $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puesto que el triángulo total DEG es semejante al ABC que acabamos de estudiar. Y lo mismo sucede, si partimos del triángulo *FGH.*

En resumen, la razón entre el lado mayor y el menor de un rectángulo áureo es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; y esta propiedad sirve para definir y caracterizar a los rectángulos áureos.

El número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ fue llamado por Leonardo da Vinci Número de Oro, y Divina Proporción por su amigo Lucca Pacioli quien escribió un libro exaltando las propiedades tanto geométricas como aritméticas. Se suele representar por la letra Φ y, cuando la razón entre dos segmentos es el número de oro, se dice que el menor es la sección áurea del mayor.»

Finalmente, les presenté una transparencia con la fig. 6 y les pedí que, a partir de ella, interpretándola, aprendieran a construir el rectángulo de oro. Aunque con ayuda, al final, todos lo consiguieron. Constatamos, así, que habíamos cerrado el ciclo que iba de la figura (el rectángulo de oro) al número y de éste a la figura de nuevo.

No pudimos realizar ninguna actividad más por falta de tiempo, pero la experiencia resultó muy positiva tanto para mí como para los alumnos y creo que puede ser trasladada formalmente a cualquier otro nivel educativo entre los 12 y 16 años.

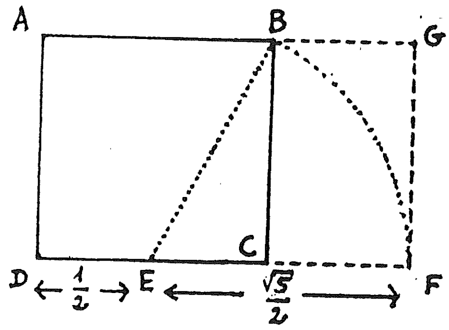


Fig. 6

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C. y TRILLAS, E., 1984, *Lecciones de Álgebra y Geometría* (Gustavo Gili, Barcelona).

BOYER, C. B., 1986, *Historia de la Matemática* (Alianza Editorial, Madrid).

CASTELNUOVO, E., 1963, *Geometría intuitiva* (Labor, Barcelona).

GHYKA, M. C., 1983, *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes* (Poseidón, Barcelona).

Grupo GAUSS, 1985, *Geometría activa* (ICE, Salamanca).

PEDOE, D., 1979, *La Geometría en el arte* (Gustavo Gili, Barcelona).

RODRÍGUEZ ROJO, M. y otros, 1987, «Aportación teórico-práctica a la Investigación por Equipos en las EUMs», *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado,* núm. 0, pp. 77-100.

Posibilidades didácticas... del cubo de las caras negras

M. Fernández Reyes

I. Introducción

En congresos y todo tipo de reuniones de profesores de Matemáticas, así como en la abundante bibliografía sobre la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina, se insiste, entre otras cosas, en la conveniencia de plantear a nuestros alumnos problemas abiertos y ejercitarlos en la visualización espacial. Sin embargo, tengo la impresión de que todavía estas sanas ideas no se están llevando a las aulas con la generalidad y frecuencia que merecen. Es más, creo que, en muchos de los casos en que se hace, no se intenta aprovechar al máximo, bajo diferentes enfoques, el problema o la actividad en cuestión. Por otro lado, no conozco —aunque no afirme que no exista, claro— bibliografía que dé nortes claros de cómo hacerlo.

Lo que sigue pretende, con sincera modestia, y por si resultare de utilidad a algún lector, de una parte, exponer una forma de enseñar que me está dando resultados aceptables; de otra, animar a que sean dados a conocer trabajos similares de mayor entidad.

II. Preparación de la actividad

Hace unos días propuse a mi hijo David, alumno de 8.º de EGB, el problema del cubo de las caras negras que, por si algún lector no conoce, transcribo a continuación:

Tenemos un cubo o hexaedro de madera, pintado de negro en todas sus caras. Lo cortamos en 27 cubitos iguales. ¿Cuántos de ellos tendrán pintadas de negro tres caras, dos caras, una cara y ninguna? (Tal como aparece en Mariano Mataix, *Nuevos divertimentos matemáticos,* Marcombo, Barcelona).

Después de recomendarle que leyera detenidamente el enunciado y asegurarme, a través de sus respuestas a las oportunas preguntas, de que lo había comprendido, le hice las siguientes consideraciones:

— Debes intentar resolverlo sin mi ayuda. Tanto si lo consigues como si no, te sentirás contento, pues habrás descubierto muchas cosas y te encontrarás mejor preparado para atacar este tipo de problemas.

— Quizá te convenga plantearte previamente uno parecido, pero más sencillo.

Pasados unos minutos me dijo, más bien interrogando que afirmando: Tengo los de 3 caras negras y los de 2. Son 9 y 13'5.

Es evidente que pensó, lamentablemente condicionado por la todavía tan frecuente forma de enseñar: Éste es de dividir. ¡Y dividió!

Le contesté que no eran esos los resultados correctos, y añadí: Pero, ¿por qué no seguiste adelante?

Porque si divido entre 1 me da 27, que son todos los cubitos, y eso no puede ser. Además, si divido 27 entre 0, ¿qué hago con eso?

No consideré adecuado el momento para explicarle qué es eso de «dividir entre cero» (más bien, qué no es). Le animé diciéndole que, aunque su solución no era válida, su razonamiento me gustaba. Y añadí: Este problema no es de dividir; es más, ni siquiera es necesario saber dividir para resolverlo. Sólo necesitas imaginarte dónde están situados los cubitos de cada clase, tanto los de fuera como los de dentro, y contarlos mentalmente. Tómate el tiempo que quieras. Y, por si te sirve de ayuda, construye un cubo con una patata («papa» en Canarias) sin piel, y píntalo con un rotulador.

Construido que hubo el que dimos en llamar «cubo papal», se dispuso, influido tal vez por el nombrecito, a hacer movimientos a modo de cruces con la mano, alrededor del cubo. Cortando..., sin cortar.

Estaba ya en el buen camino. Rápidamente descubrió que:

— dando 2 cortes horizontales, podía obtener 3 porciones iguales, que convinimos en llamar «planchas»;

— con 2 cortes más, perpendiculares a la cara superior y en el sentido delante-atrás, y otros 2, también verticales, de izquierda a derecha, conseguiría partir cada plancha en 9 cubitos y, por tanto, obtendría los 27.

Me sorprendió entonces con este comentario: Sí, pero si tuviera que dividir el cubo en muchas más partes sería mucho más difícil. ¿No hay alguna manera de saber cuántos cortes tendría que dar y cómo darlos, sin tanto rollo?

Sí, le dije, pero tienes tú que descubrirla. ¿Te pones a ello o continúas con el caso de nuestro cubo hasta averiguar cuántos cubitos de cada clase salen?

Decidió que mejor esto último.

Le eché entonces un pequeño cabo haciéndole estas recomendaciones:

— Piensa sólo en la plancha de arriba; olvida de momento las otras dos.

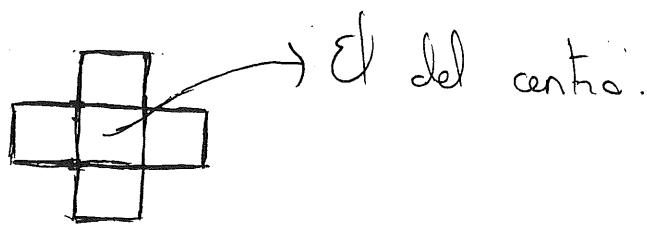
— Clasifica los cubitos por su situación. Por ejemplo, tantos «esquineros», etc.

— Si lo crees necesario, haz un dibujo de la superficie de la plancha.

Observé cómo se concentraba imaginándose la plancha. No tardó mucho en decir, lentamente, revisando mientras hablaba: Hay 4 cubitos en las esquinas, 1 solo en el centro y otros 4 que no sé cómo decir dónde están.

Dibújame las caras superiores de esos 4.

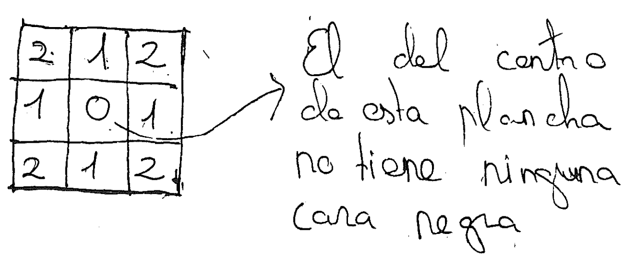
Presentó este dibujo:



El del centro

Y, como ya lo tenía pensado, dijo: Hay 4 esquineros con 3 caras negras, 4 en cruz que tienen 2 y 1 central con 1 cara negra. Y la plancha de abajo tiene que ser igual.

Imaginar la plancha central le costó un poco más. Fue rellenando un cuadriculado representativo de la plancha, que al final quedó así:



El del centro de esta plancha no tiene ninguna cara negra.

Hizo entonces el cálculo global y dio como solución: 8 de 3 caras negras, 8 de 2, 2 de 1 y 1 de 0, pero, dándose cuenta que así resultaba un total de 23, revisó y me dio finalmente la correcta: 8, 12, 6 y 1, respectivamente.

Y... si el cubo de dividiera sólo en 8 cubitos, ¿cómo serían?

Todos tendrían 3 caras negras, contestó casi inmediatamente.

Y si se dividiera en 100, preguntó.

¿Estás seguro que se puede dividir en 100? Vete pensando en esto. Buscaremos la respuesta en clase, junto con tus compañeros. También intentaremos resolver entre todos el problema que tú planteaste.

III. Repetición y ampliación de la experiencia en el aula

En clase, con las naturales diferencias inherentes al trabajo en grupo, el desarrollo de esta actividad inicial fue similar a como queda relatado.

Un número considerable de alumnos resolvió el problema casi sin ayuda mía o de sus compañeros. En general, todos mostraron interés y trabajaron con gusto. Algunos hicieron sugerencias o comentarios que me proporcionaron ideas para diseñar nuevas experiencias.

En días sucesivos, dedicamos parte del tiempo de clase a tratar las cuestiones, nacidas del problema de partida, que siguen:

1. *Descubrimiento y simbolización de una sencilla ley matemática*

Vamos a contar el número de divisiones hechas en estos cuadrados y el número de partes iguales que han resultado en cada caso.

¿Qué parece ocurrir siempre?

Y, cada uno a su modo, contestó que siempre resultaba una parte más que el número de divisiones.

Pedí, entonces, que completaran esta frase:

El número de partes es igual al número de divisiones...

No les supuso ningún esfuerzo entender que, según el código acordado (representar con d el número de divisiones hechas y con p el de partes resultantes), esto se expresa en lenguaje matemático así:

$$p = d + 1$$

Un sencillo e inocente ejercicio que me sirvió para:

— Darle carácter de descubrimiento a algo en lo que quizá no habían reparado.

— Insistir en la necesidad de tener especial cuidado al enunciar un hecho matemático en lenguaje ordinario. En este sentido, hubo en principio algunas maneras equívocas, incompletas e, incluso, totalmente carentes de sentido, de completar la frase. Al fin, todos estuvieron de acuerdo en que añadiendo *aumentado en 1* resultaba una expresión clara, entendible por cualquiera.

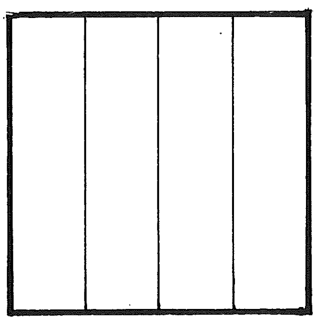
— Por último, que les resultara digerible el proceso a seguir hasta llegar a formular una propiedad matemática.

Creo que son todos aspectos importantes que se deben trabajar cada vez que tengamos ocasión.

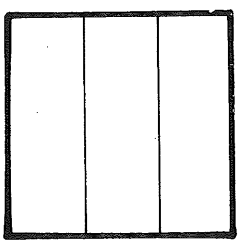
2. *¿Qué hay que hacer para que las partes, además de iguales, sean cuadrados?*

Les propuse que, aprovechando los cuadrados que tenían ya dibujados, trazaran ahora divisiones de izquierda a derecha.

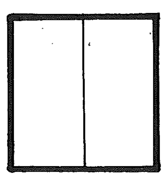
$d = 2$
$p = 3$



$d = 3$
$p = 4$



$d = 1$
$p = 2$



¿Cuántas?, dijeron casi a coro.

Las que cada uno quiera; lo único que hay que respetar es la condición de que las nuevas partes sean iguales entre sí.

Una vez revisadas las construcciones, y para no hacer excesivamente largo el ejercicio, les mostré una lámina en la que yo había dibujado diez cuadrados; unos donde las partes eran a su vez cuadrados y otros donde resultaban rectángulos no cuadrados. Fui entonces remarcando los casos de partes cuadradas y les pedí que contaran el número de divisiones hechas en una dirección y en otra. Luego, que hicieran lo mismo en los casos de rectángulos.

Después de algunas consideraciones, especialmente dirigidas a la precisión de lenguaje, escribieron, más o menos, esto:

Salen cuadrados cuando se hacen las mismas divisiones de izquierda a derecha que de arriba a abajo.

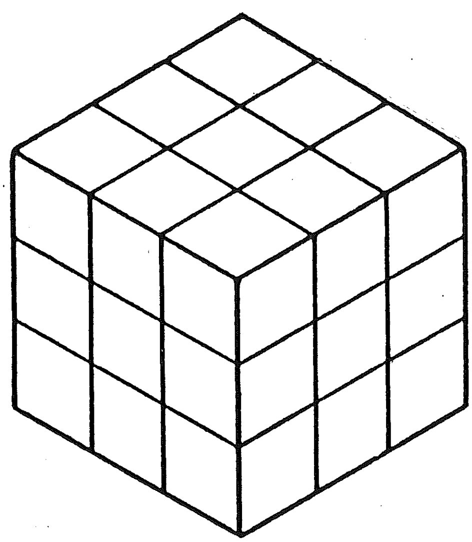
Comenté que no me gustaba mucho lo de *las mismas divisiones* y acordamos sustituir esta expresión por *el mismo número de divisiones.*

A continuación, les hice recapitular por escrito lo descubierto hasta ese momento, indicándoles que nos serviría para saltar del plano al espacio, esto es, para retomar el cubo.

3. *¿Es válido todo lo anterior para el cubo?*

Para que lo averiguaran, les pedí que rellenaran la siguiente ficha.

— ¿Cuántas divisiones horizontales se han hecho en este cubo?



— ¿Cuántas verticales en el sentido cara frontal-cara dorsal?

— ¿Cuántas verticales de izquierda a derecha?

— Si has contado bien, te ha tenido que resultar el mismo número. Recuerda que este número común lo estábamos representando por d. Completa ahora esta igualdad: $d =$

— Completa: Como el número de divisiones de cada una de las tres clases es el mismo ($d = 3$), el cubo queda partido en...

— Como es $d = 3$, el número p de planchas es ...

— $d = 3 \Rightarrow p = 4$. ¿Es ésta la traducción al lenguaje matemático de lo dicho en el punto anterior?

— En cada plancha hay ... cubitos. ¿Cuántos hay en las 4 planchas?

4. *Actividades de refuerzo y para otros fines*

— Dibujar un cubo de 8 cm. de arista. Trazar las divisiones necesarias para que quede dividido en 8 cubitos.

— Calcular el área de una cara y el área total.

— ¿Qué volumen tiene cada uno de los cubitos?

— Si las aristas interiores del cubo miden 7,999 centímetros, ¿qué cantidad de agua cabría en él?

— ¿Cuánto pesaría el cubo si fuera de plomo? ¿Y si fuera de aluminio?

— Construir tres cubos de cartulina y cuadricular sus caras de manera que resulten divididos, respectivamente, en 8, 27 y 64 cubitos.

— Para investigar en casa: ¿Pueden obtenerse menos de 8 cubitos de un cubo? ¿Pueden obtenerse 10?

5. *En busca de la fórmula de David*

Recordé a los chicos que, en palabras del propio David, la cuestión era ésta:

Si tuviera que dividir el cubo en muchas más partes sería mucho más difícil. ¿No hay alguna manera de saber cuántos cortes tendría que dar y cómo darlos, sin tanto rollo?

Hay una manera, les dije, y la vamos a averiguar. Pero antes, vamos a hacer otra cosa. Y añadí: También los matemáticos, para evitarse tanto rollo, tienen que hacer antes otras cosas.

Les pedí entonces que contaran las baldosas de la clase. Una vez me dieron el número, les dije que cada baldosa era un cuadrado de 30 cm. de lado y que calcularan su área en m^2. Finalmente, que determinaran el área del piso.

(Como era de esperar hubo algunos errores de cálculo; la mayoría, de paso de una unidad a otra. La clase del día siguiente se dedicó íntegramente a la medida.)

Esperé entonces que alguien me dijera... ¡pero hay una forma más fácil! Y, en efecto, alguien me lo dijo.

Claro, midiendo el largo y el ancho del piso, y empleando luego la fórmula del área del rectángulo, dije. Y añadí: Sabemos ya cómo dar los cortes para que resulten cubos: haciendo el mismo número d de cortes de los tres tipos. Nos falta sólo averiguar *cuántos cortes hay que dar para obtener un número determinado de cubos.* Vamos a intentar descubrir la fórmula que nos permita calcular rápidamente ese número.

Les entregué entonces cubos de cartulina con las caras cuadriculadas en 4, 9 y 16, es decir, cubos divididos en 8, 27, y 64 cubitos, respectivamente.

Acordamos luego emplear la siguiente simbología:

C = Número de cubitos resultantes.

p = Número de planchas.

d = Número de divisiones de cualquier tipo que es necesario para obtener los C cubitos.

c = Número de cubitos resultantes en cada una de las planchas.

Pasaron luego a completar la tabla que sigue:

d	p	c	C
1	2	4	$8 = 2^3$
2			
3			

Después de verificar la corrección de la tabla de cada uno, les pedí que hicieran en casa este trabajito:

— Estudiar bien el funcionamiento de la tabla y continuarla hasta $d = 10$.

— Razonar por qué el número mínimo de cubitos posible es 8. Escribir el razonamiento hecho, cuidando de que lo que escribieran respondiera exactamente a lo que pensaban. (Al día siguiente analizaríamos una por una las frases.)

— *Ídem* respecto a la pregunta ¿por qué no se puede obtener un número cualquiera de cubitos: por ejemplo, 20?

A la siguiente sesión, la mayoría presentó la tabla hasta $d = 10$ correctamente hecha.

Sin tener que insistir demasiado, conseguí que vieran claramente que de la tabla podía deducirse que, siempre, *el número de cubitos resultante es igual al cubo del número de planchas.* O, lo que es lo mismo, *el cubo del número de planchas es igual al número de cubitos.*

Y, pasando al lenguaje de los matemáticos y alevines de matemáticos, *la fórmula buscada:*

$$C = p^3, \text{ y dándole la vuelta, } p^3 = C$$

Para reforzar visualmente lo estudiado en los apartados 3 y 5, dedicamos una media hora a jugar con el «decímetro cúbico desmontable».

Uno de los juegos que más les interesó fue éste: Les mostré el cubo completo y uno de los cubitos y les pregunté si creían que del grande podían cortarse 1.000 pequeños. La mayoría dijo que no. En cuanto a los que dijeron que sí, sospecho que acertaron porque alguien había usado el cubo desmontble para explicarles el SMD.

Procedimos entonces a comparar «cubito» con «barra», «barra» con «plancha» y «plancha» con «cubo», es decir, a determinar los factores de conversión. Y, al paso, a multiplicar. Resultado: 1.000.

Vamos a comprobar ahora si nuestra fórmula mágica funciona. Recuerden que sólo hay que contar el número de planchas... y elevarlo al cubo.

Hay 10 planchas y 10^3 es 1.000 ¡Perfecto! ¡La fórmula antirollo es buena!

Hubiera sido una lástima no aprovechar el decímetro cúbico que tenía en las manos para hacerles ver «por dentro» el por qué de la reglita, tal vez aprendida de memoria, «para pasar de dm^3 a cm^3 se multiplica por 1.000».

También hubo ocasión de ver experimentalmente, con un decímetro cúbico hueco, que 1 dm^3 tiene una capacidad de 1 litro. Y, como dato interesante, explicarles el significado del c.c. de los productos farmacéuticos.

6. *¿Qué es eso de "en función de"?*

Les dije que los matemáticos emplean a veces expresiones que nos parecen muy misteriosas y que, en realidad, significan cosas muy sencillas. Por ejemplo, nosotros hemos calculado el número de cubitos, *en función del número de planchas,* es decir, *sabiendo (conociendo) el número de planchas.* Otro ejemplo: Para calcular el área de un triángulo necesitamos conocer lo que mide un *lado cualquiera y la altura de dicho lado. Pues bien, si queremos ser un poco más «finos» decimos: El área de un triángulo se puede calcular en función* de un lado cualquiera y su altura.

¿Por qué digo en este último ejemplo «se puede calcular»? Porque también se puede calcular conociendo los tres lados, esto es, *en función de los tres lados.*

Nota histórica.—Herón de Alejandría fue un matemático griego que vivió hace un montón de siglos. No está muy claro si fue el descubridor de la fórmula que lleva su nombre o el primero que la demostró. Sea como fuere la seguimos llamando «fórmula de Herón». Es ésta:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

En la fórmula de Herón, p representa el semiperímetro, y a, b, c las medidas de los lados. Un día de éstos la usaremos.

7. *¿Se puede calcular el número de cubitos en función del número de divisiones que se le hagan al cubo?*

Podía haberles demostrado —más propiamente, ayudado a demostrar— que sí, siguiendo paso a paso este proceso:

1.º En la igualdad $20 = 2 \cdot 10$ podemos sustituir el 10 por $8 + 2$ y escribir $20 = 2\ (8 + 2)$.

2.º No pasa nada si en la igualdad $3^2 = 9$ cambio 3 por $7 - 4$. Tendría entonces que escribir la igualdad así: $(7 - 4)^2 = 9$.

3.º Recordemos que el número de planchas *(p)* es igual al *número de divisiones de cualquier clase (d) aumentado en* 1. Es decir, $p = d + 1$.

4.º ¿Cómo quedará nuestra fórmula $C = p^3$ si sustituimos p por $d + 1$, que es lo mismo que p?

Quizá así hubieran acertado a escribir

$$C = (d + 1)^3.$$

No lo sé.

Pero, preferí no ser tan explícito, a ver si ocurría lo que presentía: que concluyeran escribiendo $C = d + 1^3$.

Y así fue. Todos —todos los que llegaron a una conclusión, porque algunos, afortunadamente muy pocos, no concluyeron «ná»— cayeron en la trampa que les tendí.

Dije entonces: Me van a ayudar a demostrar que esa fórmula no es correcta. Y lo vamos a hacer de dos maneras.

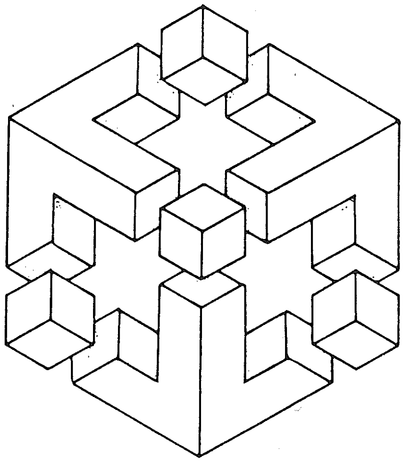
1.ª Empleando la fórmula de las planchas (número de cubitos en función del número de planchas, insistí), que ya hemos sometido a pruebas y comprobado que es buena, vamos a calcular, por ejemplo, el número de cubitos que resulta al partir un cubo en 5 planchas. Será:

$$C = p^3 \Rightarrow C = 5^3 = 125$$

Vamos a ver qué ocurre ahora con la fórmula que yo sostengo que es falsa. Hay que tener en cuenta que si el número de planchas es 5, el de divisiones de cada clase es 4. Entonces:

$$C = d + 1^3 \Rightarrow C = 4 + 1^3 = 4 + 1 = 5$$

Y, como 125 es el resultado correcto, el 5 no lo es. Por tanto, tampoco sirve vuestra fórmula. *I'm sorry,* coleguillas.



2.ª Un cubo no puede ser dividido en *menos de* 8 cubitos, Una de las formas de demostrarlo es ésta: Para obtener 8 cubitos hay que obtener 2 planchas. En consecuencia, para obtener menos de 8 habría que hacer *menos de* 2 planchas, es decir, sólo una plancha. Pero, haciendo una plancha... queda nuestro cubo tal como es; no resulta seccionado en cubitos.

Ésta es, como digo, una de las formas de demostrar que *el número mínimo de cubitos que se puede obtener es* 8. No es, desde luego, una manera muy matemática de demostrarlo. Es un rollo, ¿verdad? Pues bien, os voy a dar ocasión de que descubráis otra ley matemática. Haced esto:

1.º Recordad lo que hemos llamado *número cuadrado perfecto* y deducid lo que es un *número cubo perfecto.*

2.º Mirad la tabla que construimos al principio y fijaos en los valores de C.

3.º ¿Es 5 un *cubo perfecto*? ¿Lo son los números 2, 3, 4, 5, 6 y 7? ¿Cuál es el menor número entero distinto de 1 que es *cubo perfecto*?

4.º Completad correctamente lo que sigue y podréis presumir de haber descubierto una doble ley matemática:

Un cubo no puede ser dividido en un número cualquiera de cubitos. Sólo puede seccionarse en un número de cubitos que sea...

El menor número de cubitos en que puede partirse un cubo es..., porque 8 *es el menor número entero distinto de* 1 *que es...*

Al día siguiente revisamos todo lo hasta ese momento visto y les recordé que habíamos demostrado la incorrección de la expresión $C = d + 1^3$, pero que aún no habían obtenido la expresión correcta. Y les advertí que no se trataba de un mal razonamiento, sino que su error consistía en no haber tenido cuidado en expresar debidamente su descubrimiento.

Con ejemplos numéricos sencillos les hice comprobar que *sumarle a un número el cubo de otro* no es igual que *hallar el cubo de la suma de esos números.* Es decir, que

$$a + b^3 \neq (a + b)^3$$

Y así, llegamos por fin a la fórmula que permite calcular el número de cubitos en función del número común de divisiones:

$$C = (d + 1)^3$$

Como ejercicio para casa les propuse verificar los valores de C de nuestra tabla, empleando la nueva fórmula.

En una clase normal (de programa «oficial») aproveché que, al parecer, había quedado clara la diferencia entre $a + b^3$ y $(a + b)^3$ que, como refuerzo, les enseñé a leer respectivamente así: «*a* más...*b* al cubo» y «*a* más *b*...al cubo», haciendo una pausa larga en el lugar de los puntos suspensivos, apoveché, digo, para insistir en las diferencias entre cada una de las expresiones de diversas parejas de expresiones similares a la estudiada. Por ejemplo, entre «2 por *a* ... más *b*» y «2 por... *a* más *b*», esto es, entre $2 \cdot a + b$ y $2 \cdot (a + b)$.

Y, metido ya en harina, hablarles de la distributividad o no distributividad de una determinada operación respecto a otra, fuente tan frecuente de errores. Ejemplos:

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ (Distributividad de la potenciación respecto a la multiplicación.)

$(a + b)^m \neq a^m + b^m$ (La potenciación no es distributiva respecto a la adición.)

$\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$ (¿Es distributiva la radicación respecto a la multiplicación?)

$\sqrt{16 + 25} \neq \sqrt{16} + \sqrt{25}$ (¿Qué significa esto?)

IV. Cuestiones, problemas y sugerencias sobre otras posibilidades didácticas del cubo negro

1. Imagínate un cubo con la cara superior pintada de rojo, la lateral izquierda de verde y las otras de amarillo. Córtalo, usando tu mente a modo de sierra, en 64 cubitos. Contesta, en el orden que

creas más conveniente, a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos cubitos bicolores resultan?

b) ¿Cuántos sin pintar?

c) ¿Cuántos tienen 2 caras verdes?

d) ¿Hay cubitos verdiamarillos?

e) ¿Cuántos cortes horizontales tendrías que dar para obtener los 64 cubitos? ¿Cuántas divisiones en total?

2. Un cubo se ha dividido en 125 cubos pequeños. Empleando la fórmula de las planchas, calcula el número de éstas. Calcula, también empleando una fórmula, el número de divisiones de cada tipo que ha habido que hacer.

3. Estudia muy bien lo que sigue, porque te permitirá descubrir otra ley:

$$8 = 2^3$$
$$27 = 3^3$$
$$216 = 2^3 \cdot 3^3$$
$$9.261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Hemos visto ya que un cubo no permite que se le divida en el número de cubitos que cada uno quiera. Tiene el individuo esa manera de ser y hay que respetarla. Con los números 8, 27, 216 y 9.261, por ejemplo, es tolerante. Pues bien, fíjate en lo que ocurre cuando esos números se expresan como producto de números primos. Si deduces lo que yo —y yo no estoy equivocado, claro— estarás en condiciones de ganar siempre si juegas con un amigo a averiguar si un cubo se puede dividir en el número de cubitos que tú o él propongan. Pero..., cuidado, ganará el que no se equivoque en eso de expesar un número como producto de números primos.

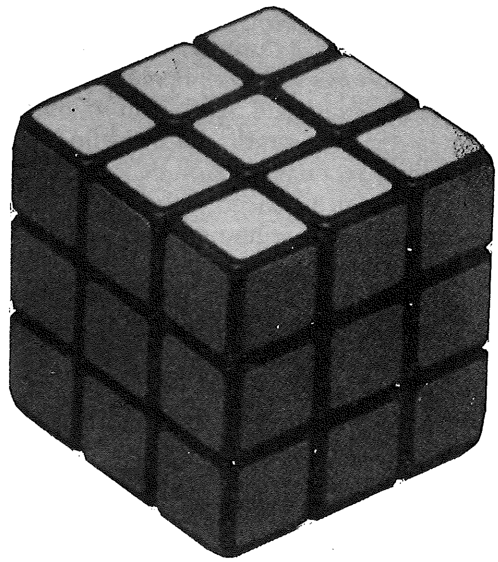
4. De nuevo con la importancia de evitar expresiones equívocas: Releyendo la cuestión anterior me di cuenta que cuando digo *y yo no estoy equivocado, claro,* alguien pudiera pensar que quiero decir que *yo no me equivoco nunca,* que soy un verdadero coco. ¿Cómo me corregirías la frasecita para que nadie tuviera esa falsa impresión?

5. Valiéndote del decímetro cúbico desmontable explícale a un compañero la simplificación de fracciones. Construye otros cubos que te permitan hacerlo con fracciones no decimales.

6. ¿No crees que usando esos mismos cubos podríamos entender muy bien por qué, por ejemplo, sumando 1/2 y 3/8 resulta 7/8? Inténtalo en clase.

7. Revisa todas tus notas y dedica un fin de semana a inventar problemas y juegos sobre el cubo de caras pintadas.

8. Desempolva y juega con el cubo mágico de Rubik. Quizá lo que has aprendido estos días te sirva para elaborar una buena estrategia.



Dedico muy cariñosamente este trabajo a mis alumnos de 8.º del Colegio Pco. "Punta del Hidalgo". Tenerife, octubre de 1988.

El Tangram

Grupo Azarquiel

1. Introducción

El Tangram es un rompecabezas que consiste en siete piezas geométricas que juntas forman un cuadrado y muchas otras figuras (fig. 1).

La finalidad del juego del Tangram es construir con estas piezas figuras de todo tipo, geométricas, animales, personajes, objetos, etc. Como predecesor de este tipo de rompecabezas está el Stomachion o Loculus de Arquímedes (fig. 2). En

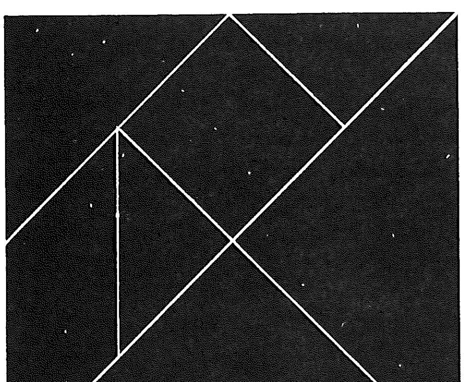


Fig. 1

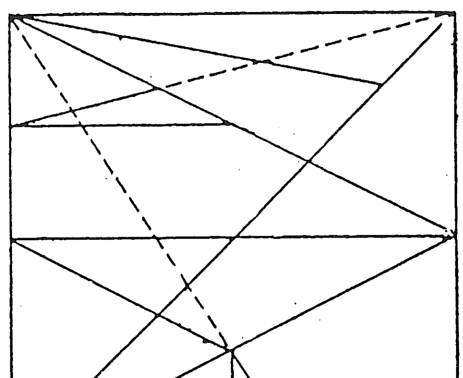
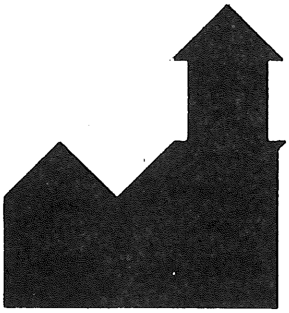
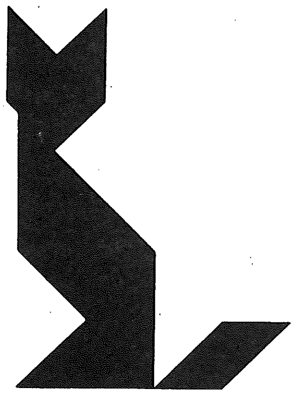
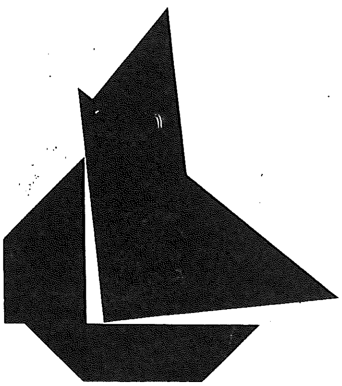
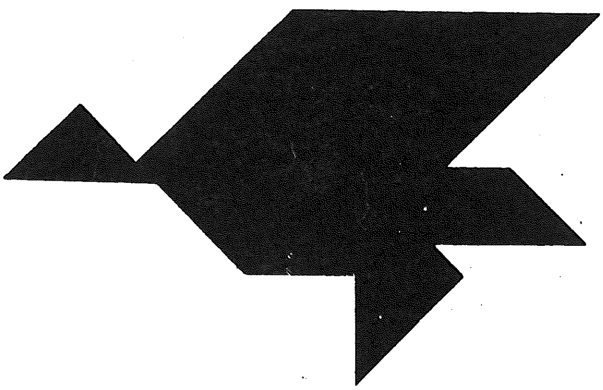


Fig. 2









1899 M. Suter, de Zurich, encontró una versión árabe de un libro de Arquímedes en el que propone: «Descomponer un cuadrado en catorce elementos cuyas áreas estén en razón racional respecto del cuadrado inicial».

En el libro de Joost ELFFERS[1] se puede encontrar alrededor de 1.600 figuras diferentes realizadas con las siete piezas del Tangram. Según se cuenta en este libro, los primeros textos impresos sobre el juego del Tangram aparecen en China hacia 1800, aunque el juego podría ser muy anterior. En 1818 aparecen las primeras publicaciones sobre el Tangram, simultáneamente, en EE UU, en Alemania, en Inglaterra, en Francia, en Italia y en Austria, consiguiendo el juego un éxito arrollador que nos recuerda el más reciente del cubo de Rubik.

También de forma similar al Cubo de Rubik aparecen estudios e incluso tratados matemáticos relacionados con el Tangram. Uno de ellos tenía el rimbombante título: *Nuevas demostraciones matemáticas de geometría sencillas y accesibles a los jóvenes con la única ayuda de las piezas del juego comúnmente llamado puzzle chino.*

Sin embargo, durante mucho tiempo, el juego solamente fue utilizado en su forma lúdica como puede corroborar el que W. W. Rouse Ball en su conocido libro *Mathematical Recreations and Essays* (acaba de salir la decimotercera edición en la Editorial Dover), resta toda importancia matemática a este juego.

Por el contrario Martin Gardner en 1959 escribe en su columna de Juegos Matemáticos de *Scientific American:* «Puzzles de este tipo provocan ocasionalmente problemas de matemáticas nada triviales como, por ejemplo, ¿Cuántos polígonos convexos se pueden construir con las siete piezas del Tangram?».

En este mismo artículo Martin Gardner muestra los 13 únicos polígonos convexos que existen (fig. 3) como fue demostrado en 1942 por dos matemáticos chinos en el American Mathematical Monthly. Una adaptación de esta demostración puede verse en (1). Posteriormente, en la misma sección de la misma revista, pero en 1974, Martin Gardner clasifica el uso del Tangram en tres categorías:

[1] Joost ELFFERS, *El Tangram: Juego de formas chino,* Labor, 1982 (Barral, 1976). El libro va acompañado de un juego de plástico.

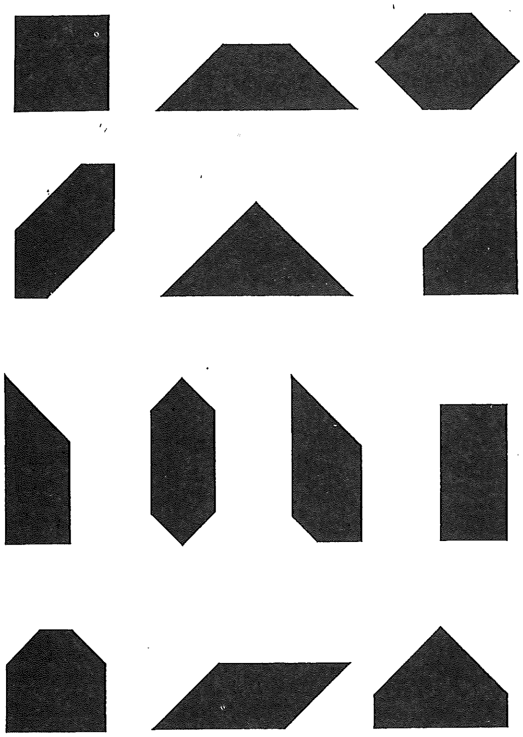


Fig. 3

1.—Construcción de una figura dada o demostración de la imposibilidad de construirla con las piezas del Tangram.

2.—Diseño de nuevas figuras, artísticas o humorísticas: siluetas de animales, figuras humanas y otros objetos.

3.—Resolución de una gran variedad de problemas de geometría combinatoria, como el problema anterior de los polígonos convexos.

También muestra, Martin Gardner, algunas figuras creadas por Loyd (fig. 4-a) y Dudeney (fig. 4-b) que son verdaderas pradojas geométricas. Todas están construidas con las siete piezas del Tangram.

Actividades relacionadas con el Tangram

Hasta aquí no se ha sugerido nada sobre la utilización en nuestras aulas del juego del Tangram. Es en 1971 cuando Dale Seymour se expresaba con las siguientes palabras: «Debido al reciente énfasis sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos a través de la manipulación de materiales, unido a la natural fascinación de los puzzles, no sorprende que el puzzle llamado Tangram, se haya convertido en una herramienta popular para el profesor en sus clases.»

En su libro *Tangramath* [2] este autor presenta una gran cantidad de actividades matemáticas relacionadas con el Tangram; actividades dirigidas a un amplio espectro de edades y niveles educativos a través de las cuales se desarrollan conceptos geométricos, polígonos, áreas, equivalencia de polígonos, convexidad y concavidad, no olvidando al mismo tiempo a lo largo de todo el libro el aspecto lúdico.

En España, la primera utilización didáctica del Tangram, que nosotros conozcamos, es la que presentan Puig Adam y Rey Pastor en su libro *Elementos de Geometría* (Madrid, 1945) para mostrar la equivalencia de figuras.

Ha pasado mucho tiempo desde entonces y, sin embargo, la utilización en clase del Tangram sigue siendo minoritaria. Últimamente empiezan a apa-

[2] Dale SEYMOUR, *Tangramath,* Creative Publications, Inc. Palo Alto, California, 1971.

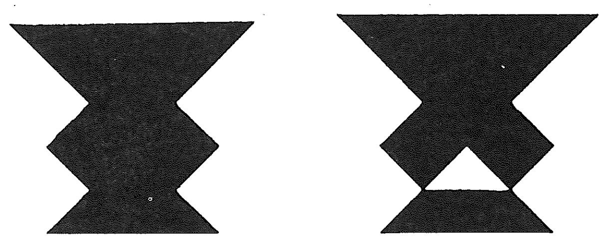


Fig. 4-a.—Figuras de Loyd.

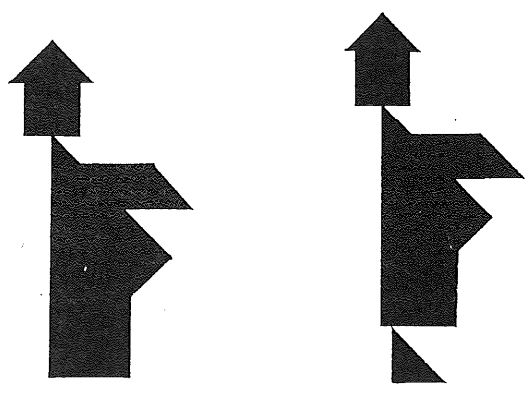


Fig. 4-b.—Figuras de Dudeney.

recer, en los libros de texto, en los materiales para el aula, tímidas referencias al Tangram. Así, por ejemplo, entre otros, se encuentran actividades con el Tangram en:

— Libro de 6.º de EGB de la Editoriala Barcanova que introduce la medida de superficie con el juego.

— Libro de 5.º de EGB de Teide (Colección Graó) para el estudio de polígonos, áreas y perímetros.

— Libro para ciclo superior de EGB Matemáticas 1 de la Colección «en Acción» de la Editorial SM, para clasificar polígonos e introducir el concepto de equivalencia de figuras.

— Volumen III de Logo: Metodología y recursos educativos, publicado por el MEC (dentro del Programa de nuevas Tecnologías, Proyecto Atenea), utiliza las figuras del Tangram con ordenador.

Sugerencias

Exponemos aquí unas breves propuestas de temas que se pueden desarrollar con la ayuda del Tangram:

— Reconocimiento de figuras geométricas: triángulos, cuadriláteros...

— Equivalencia de figuras (nótese que todas las figuras hechas con las siete piezas del Tangram son equivalente. No obstante es conveniente hacer uso al principio de un número menor de piezas).

— Áreas de figuras: triángulo, cuadrado, rectángulo, trapecio, paralelogramos, etc...

— Introducción a la semejanza.

— Estudio de las transformaciones geométricas, en particular de la simetría. La existencia del romboide, figura no simétrica, propicia la comprensión y el estudio de figuras simétricas. En C. PELLEGRINO[3] sugiere actividades con un Tangram de «doble-cara», es decir, que cada pieza sea de un color por cada cara, por ejemplo, negra por un lado y roja por el otro. Entonces se pueden clasificar las figuras en monocromáticas (fig. 5), aquellas que sólo admiten solución de un color (hay tantas figuras negras como grises), y bicromáticas. Asimismo, propone el estudio del teselado del plano utilizando las piezas, o figuras, del Tangram como teselas.

BIBLIOGRAFÍA

En tiendas de juguetes, grandes almacenes, etc..., se pueden encontrar diversas versiones del Tangram de siete piezas, por ejemplo las fabricadas por las casas Cayro y Ocydesa. Existen, además, otros modelos de Tangram diferentes, con más piezas o recortadas a partir de un círculo o un óvalo.

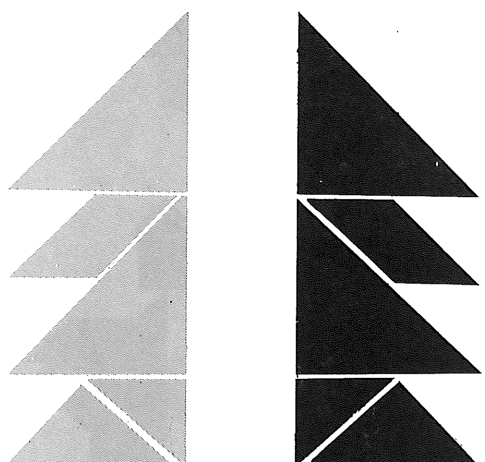


Fig. 5.—Figuras monocromáticas.

[3] Actas del Congreso «Gioco e Matematica», Bolonia, 1986.

La importancia de los Recursos en la clase de Matemáticas

Luis Rico Romero

Que el panorama de la Educación Matemática en nuestro país está experimentando cambios considerables es algo palpable, si bien los especialistas saben cuántas horas de trabajos y esfuerzos cuesta. Un objetivo claro en este momento consiste simplemente en homologarse, también en este Área de Conocimiento, con los países de la Comunidad Europea en la que aspiramos a desempeñar un papel culturalmente activo. Por esto debemos alegrarnos cuando en un espacio de tiempo inferior a un mes aparecen cuatro libros diferentes, sobre una misma temática pero escritos desde perspectivas distintas. Nos referimos, y por orden alfabético, a:

C. ALSINA; C. BURGUÉS y J. M. FORTUNY, *Materiales para construir la Geometría,* 168 págs. Editorial Síntesis, Serie: Matemáticas, Cultura y Aprendizaje, 1988, ISBN: 84-7738-011-2, Madrid.

CASCALLANA, M. T., *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos,* 228 págs. Editorial Santillana, Aula XXI, 1988, ISBN: 84-294-2789-9, Madrid.

HERNÁN, F. y CARRILLO, E., *Recursos en el aula de matemáticas,* 171 págs. Editorial Síntesis, Serie: Matemáticas, Cultura y Aprendizaje, 1988, ISBN: 84-7738-032-5, Madrid.

VALLÉS, *Didáctica de la Matemática en el Ciclo Inicial,* 263 págs. Editorial Onda, 1988, ISBN: 84-7552-198-3, Barcelona.

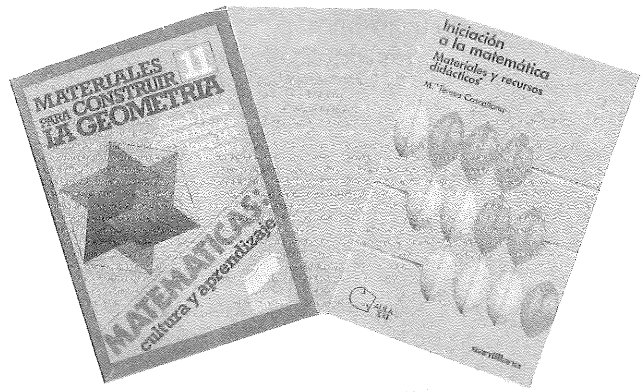
Los cuatro volúmenes tienen algunas características en común: hablan del material para la enseñanza de la matemática y de los recursos que un profesor de matemáticas puede utilizar en el aula; son libros dirigidos al profesor; están escritos con un lenguaje directo que permite una lectura fácil; nos dicen cosas que podemos hacer ya en clase; y cada uno en su línea, nos presentan una filosofía de trabajo en matemáticas. Aquí es donde comienzan las diferencias y lo que hace interesante la lectura de los cuatro manuales, ya que, aun cuando coincidan en algunos de sus tópicos, las reflexiones que hacen sobre el material y el encuadre que se da en cada caso es totalmente distinto, sin que ninguno de ellos agote el tema. Pasemos a hacer un breve comentario de cada uno de ellos.

En *Materiales para construir la Geometría* lo que puede llamar la atención más de inmediato son las 120 fichas, describiendo cada una un material distinto para trabajar en geometría, acompañado de una lista de actividades posibles a realizar que definen el interés didáctico del material presentado. Sin embargo, los autores no se han limitado a elaborar un extenso catálogo de materiales, que abarcan desde la sufrida pizarra hasta el «Hacha india», las «curvas bordadas» o el «Harmonógrafo». Además de recordarnos otras utilizaciones del material más conocido, recordarnos bastantes materiales que teníamos olvidados y presentarnos algunos otros que no conocíamos, nos ofrecen una clasificación muy sugerente para todos estos materiales. Las ideas de geometría visual, geometría construida, geometría dibujada, geometría medida y geometría lúdica presentan por sí mismos todo un plan de trabajo. Las fichas de actividades y la descripción de talleres a desarrollar a partir del material ofrecen una visión didáctica seria y bien fundada para recuperar el aprendizaje de la geometría en nuestras aulas.

Iniciación a la Matemática presenta una opción distinta. Su autora selecciona diez materiales conocidos: ábaco, tangram, regletas, balanza, etc., y cinco familias de juegos: números, cálculo, simetrías, formas geométricas y probabilidad, y sobre cada una de estas quince ideas hace un desarrollo didáctico en cuatro etapas. Cada uno de ellos lleva: Descripción; Actividades de construcción; Actividades de Aplicación y Orientaciones prácticas para su empleo.

Las quince ideas elegidas tienen la ventaja de ser ideas importantes, de bastante peso en el currículo de matemáticas y ejemplificadas con materiales muy difundidos y conocidos por el profesor en ejercicio. En cada caso se nos recuerdan las actividades más destacadas de cada material con bastante detalle y un acompañamiento muy cuidado de gráficos e ilustraciones. Si algo echamos en falta es el escaso empleo de actividades creativas y de empleo no estándar de los materiales presentados. Una presentación al comienzo sobre características del pensamiento infantil y el papel de la matemática en los procesos cognitivos proporcionan el marco teórico que va a servir a la autora para encuadrar los distintos materiales.

Recursos en el Aula de Matemáticas es un libro singular, cuya lectura resulta atrayente y que no está escrito para organizar el material sino para ejemplificarnos exhaustivamente cuántas ideas matemáticas pueden desarrollarse si se echa imaginación, creatividad, intuición e interés tomando un material como pretexto.



Por supuesto, la selección de los materiales no es arbitraria ni las actividades que se sugieren son inocentes, ya que todas ellas tienen una misión declarada: convencernos de que el aprendizaje de las matemáticas puede ser una actividad apasionante y que, por tanto, la enseñanza debe estar al servicio de las capacidades del individuo y su potenciación; que ya es hora de olvidarnos de esa visión pacata de la ciencia como algo válido sólo para elites e iniciados.

Los autores saben que articular estas ideas en un proyecto didáctico es el reto de nuestra época, y que tampoco es algo sencillo. El libro que nos ofrecen es un eslabón más, y valioso, en esta cadena.

Didáctica de la Matemática en el Ciclo Inicial es una buena guía didáctica relativa a los principales tópicos de matemáticas en el Ciclo Inicial: Geometría, Lógica, Cantidad, Cálculo, Numeración y Medida, con algunas consideraciones sobre Problemas, Combinatoria, Probabilidad y Estadísticas. Cada uno de los conceptos que se presentan sobre estos diferentes apartados consta de unas Orientaciones Didácticas y unas Actividades sugeridas, en donde el empleo de materiales y las sugerencias de trabajo para los alumnos son múltiples y variados. El principio de actividad, el hecho de que el proceso de aprendizaje lo hace el propio alumno siguiendo una determinada secuencia y reflexionando sobre lo realizado está extensamente documentado y se aprecia la experiencia en el aula del autor. Compartir los logros conseguidos con los propios alumnos después de una planificación reflexiva y cuidada es un tipo de actuación que debemos intensificar dentro de la comunidad de Educadores Matemáticos, y uno de los méritos de este libro es haber logrado ese objetivo.

I CIBEM

S E V I L L A - 9 0

I CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA

(24-30 de Septiembre)
SEVILLA-1990

PRIMER ANUNCIO

El I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática se celebrará en Sevilla del 24 al 30 de Septiembre de 1990, organizado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», en representación de la Federación Española de Profesores de Matemáticas.

Cuenta con el apoyo de la Conferencia Interamericana de Educación Matemática, y de la Asociación Portuguesa de Profesores de Matemáticas.

Los idiomas oficiales del Congreso serán el portugués y el español, y en el se discutirán y desarrollarán los temas más actuales del área cultural iberoamericana en Educación Matemática.

El segundo anuncio, más detallado, sobre la organización y programación del I CIBEM, se enviará a todos los interesados, en el primer trimestre de 1989, que deberán solicitarlo enviando a la S.A.E.M. «Thales», debidamente cumplimentada la parte inferior de este primer anuncio.

I CIBEM

APELLIDOS ______________________ NOMBRE ______________

NACIONALIDAD ______________________

DIRECCION ______________________________________

PAIS ______________________ TELEFONO ______________

DATOS LABORALES.

PROFESOR DE (Indique nivel) ______________________

CENTRO DE TRABAJO ______________________

DIRECCION ______________________________________

Desea recibir el Segundo Anuncio sobre el I CIBEM

Remitir el anterior Boletín a la Dirección:

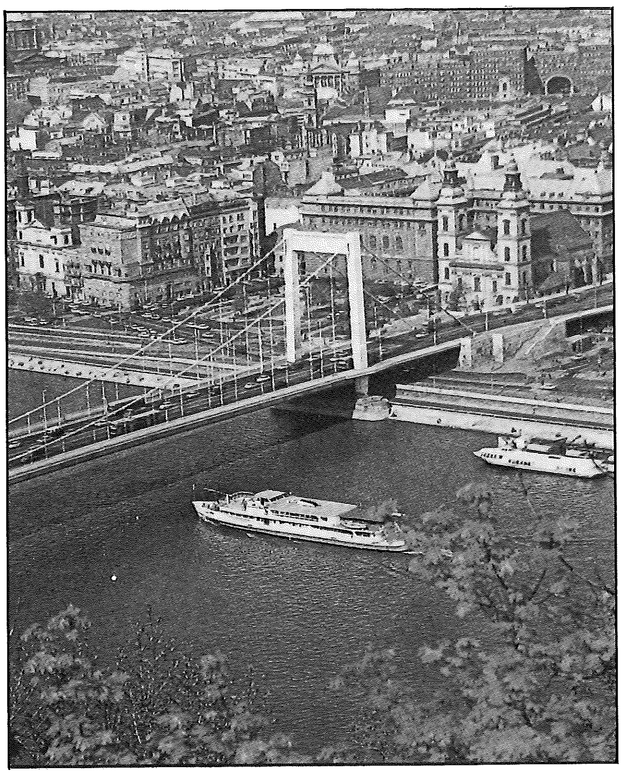
I CIBEM
SAEM «THALES» - Facultad de Matemáticas
Apdo. 1160
41080 Sevilla (España)

COLABORA: AREA DE CULTURA
AYUNTAMIENTO DE SEVILLA.

ICME-6

Claudi Alsina

Budapest ha sido la sede del Sexto Congreso Internacional de Educación Matemática (27 julio-3 agosto, 1988). Dos mil seiscientos participantes provenientes de todos los países del mundo han hecho posible de nuevo que este macrocongreso de periodicidad cuatrianual vibre otra vez al son de las *nuevas* tendencias, innovaciones y críticas. Sirva el presente artículo como breve crónica del evento.



1. Sesiones plenarias

El centro de convenciones de Budapest ha acogido en su desorbitante auditorio las cinco conferencias plenarias de F. Nebres, G. Verguand, L. Locásy, A. Ershov y J. P. Kahane, versando las mismas sobre la Matemática en la escuela de los noventa en países en desarrollo, psicología de la educación matemática, matemática algorítmica, la computarización y la figura de George Pólya. Rasgos comunes a destacar en estas presentaciones son la preocupación por el impacto de las nuevas tecnologías en la educación matemática, los cambios curriculares, las influencias económicas en el desarrollo educativo..., etc.

2. Grupos de acción

Los trabajos paralelos de los grupos de acción se correspondieron con las problemáticas en los diferentes niveles educativas: 4-8, 7-12, 11-16, 15-19, más los niveles universitarios, de formación de profesores y de adultos. Los grupos de acción basaron su desarrollo en la exposición de experiencias realizadas en cada nivel y las consecuentes discusiones y preguntas. Palabras claves en dichos grupos fueron: aprendizaje a largo plazo, errores, tecnologías, problemas, revitalización, impacto cultural, influencia, currículum...

3. Grupos temáticos

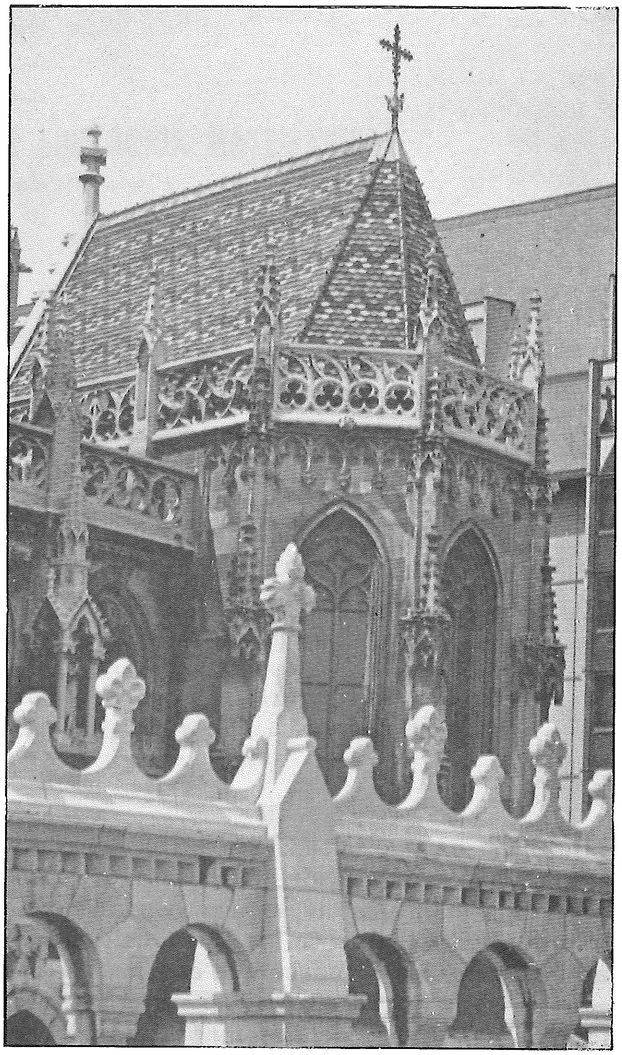
Los temas escogidos en esta ocasión fueron todos ellos de rabiosa actualidad: la profesión de enseñar; computadores y la enseñanza de la Matemática; resolución de problemas, modelización y aplicaciones; evaluación y la práctica de enseñar e investigación en didáctica; Matemáticas y otros temas; Currículum para el año 2000. Merece especial recuerdo la provocadora conferencia de Margaret Brown sobre «Enseñantes como Trabajadores y Enseñantes como Aprendices» o las palabras claras e inspiradas de G. Howson sobre los condicionantes políticos y, demográficos, sociales y tecnológicos que afectarán a la educación matemática del 2000.

4. Áreas tópicas

La oferta de tópicos monográficos fue amplia: vídeos y películas; visualización; competiciones; problemas de estudiantes con limitaciones; educación comparativa; probabilidad y estadística, demostraciones, justificación y convicción; lenguaje y Matemática; estudiantes de gran habilidad; juegos y recreaciones; mujeres y matemáticas; teoría de la educación matemática; espacios y geometría; información y documentación, cooperación entre teoría y práctica en la educación matemática. Estos tópicos tuvieron un carácter más informativo y elaborado y en algún caso presentaron tendencias realmente alternativas: tal es el caso de los temas de visualización en general.

5. Presentaciones nacionales

Por invitación del Comité Internacional de Programa de la Conferencia tuvieron lugar presentaciones panorámicas de la situación de la educación matemática en Argentina, Bulgaria, Malawi y España. A este cronista le correspondió el honor de realizar la presentación española que se basó en el documento «La Educación Matemática en España» fruto de la colaboración de muchos colegas y cuyo texto será publicado en el boletín del ICMI.



6. Matemáticas, Educación y Sociedad

El quinto día de congreso fue dedicado monográficamente a este tema con análisis rigurosos, apocalípticos y esperanzados en torno de los contextos culturales y proyecciones sociales que la Matemática de nuestros días presenta. Quizá la pregunta de J. Kilpatrick: ¿Saben los educadores matemáticos lo que están haciendo? fuese de las más inquietantes. Y el *NO,* como respuesta, el gran reto para actuaciones futuras.

7. Posters y comunicaciones

204 comunicaciones y 216 presentaciones-poster vinieron a rellenar un programa absolutamente denso y compacto. Unos cientos de experiencias explicadas oralmente o presentadas gráficamente o en forma de taller hicieron evidente, una vez más, el enorme capital creativo que hoy posee la educación matemática en todos los niveles y en todos los lugares de la Tierra. Uso de computadoras y nuevos currícula en el eje de este apartado.

8. Programas especiales

Asambleas de grupos internacionales sobre Historia y Pedagogía de las Matemáticas; Organizaciones de mujeres; Psicología de la Educación Matemática; exhibiciones de vídeos, películas, libros y materiales; anuncios de congresos como el I^er^ Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (Sevilla 1990) y un largo etcétera de programas especiales se desarrolló en horas complementarias a las sesiones ordinarias. Una exposición bibliográfica española estuvo presente en Budapest.

El aplauso más largo y emocionado del congreso se lo llevó Paul Erdös al término de su conferencia «Problemas fáciles de plantear pero muy difíciles de resolver», memorable exposición que sólo Erdös desde su larga vida de ingenio y maestría podía ofrecer.

9. El congreso se divierte

La enumeración sistemática de los contenidos del ICME-6 hace ya intuir la complejidad de su organización y la densidad de su horario. Feliz contrapunto al agotamiento psíquico fueron la recepción gubernamental, el día de excursión o el aire refrescante del Danubio a las puertas de una universidad un tanto incómoda de asientos y estructura.

10. Visión global del ICME-6

El lector ya puede intuir que las ofertas del congreso permitían a cualquier participante encontrar su propio programa de acuerdo con sus intereses. Es difícil por ello, y sin los «proceedings» publicados, hacer una globalización de conclusiones. Sin embargo este cronista cree que sí hay algunas ideas que han presidido las diversas aportaciones del congreso:

a) El impacto tecnológico jugará un papel decisivo en la educación matemática de nuestros días.

b) El cambio de currículum y las reformas son comunes a casi todos los países.

c) Existe una preocupación prospectiva notable; a las respuestas para la escuela de los noventa se formulan ya directrices para la situación del 2000.

d) Los procesos de visualización de todo tipo van tomando cuerpo como medios alternativos a la presentación formal usual.

e) No existe ninguna fórmula mágica de replanteo educativo: nadie cree ya en los cambios globales (como en su día representó la teoría de conjuntos) sino en las adaptaciones, retoques y énfasis diversos.

f) Existe más preocupación por el profesorado de Matemáticas. Si hace años las características psicológicas, formativas..., etc., de los alumnos centraron la atención, hoy se habla más del reciclaje, la evaluación, la formación..., del profesorado.

g) La terminología «educador matemático» está superando otras denominaciones anteriores y, más allá del término, la preparación de este educador parece exigir ciertos cambios que superen las actuales «maestrías-licenciaturas».

h) La investigación en Didáctica de la Matemática parece consolidarse con luz propia: una rama del conocimiento con todas sus características peculiares y posibilidades enormes cara el futuro inmediato.

[...]

Cuando el congreso se acaba los educadores matemáticos llevan consigo dos identificadores colgados en su chaqueta: el del ICME-6 y otro que dice ICME-7, Quebec, 1992.

EXPOSITION
ITINERANTE

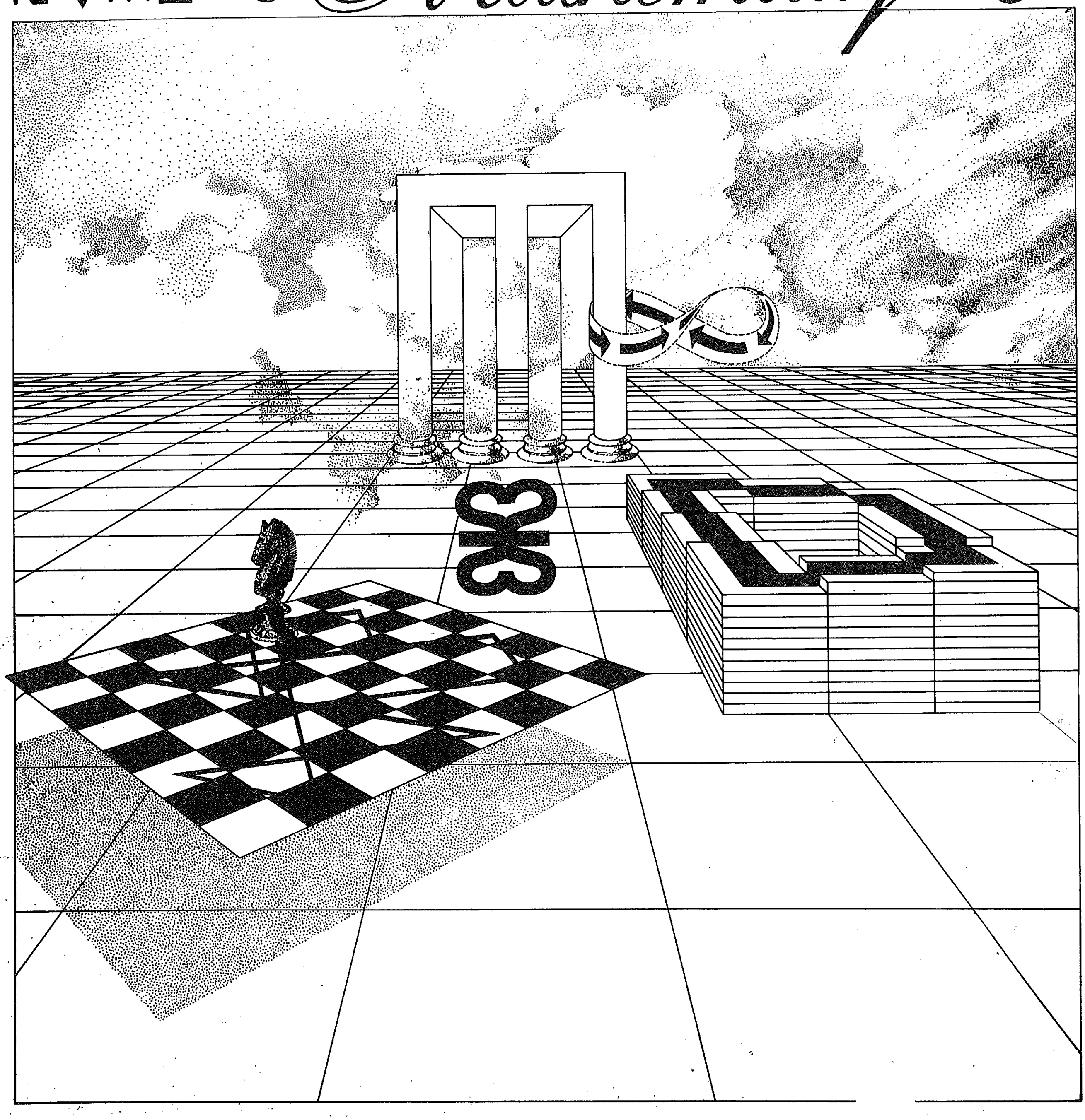
co-production

IREM - APMEP

Cité des Sciences
et de l'Industrie

la Villette

Horizons Mathématiques



Exposición itinerante «Horizontes Matemáticos». Presentación

Florencio Villarroya

Concebida por un equipo de investigadores y de enseñantes de matemáticas del centro de Francia (Orléans, Tours, Bourges), agrupados en los IREM (Instituto para la investigación de la enseñanza de las matemáticas) y en la APMEP (Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública), ha visto realizada su versión definitiva en 1984 por la Cité des Sciences et de l'Industrie de LA VILLETTE, en París, como punto de partida de la creación del espacio matemáticas en La Villette.

A través de diferentes manipulaciones, imágenes y textos, la exposición pretende varios objetivos:

— Permitir a todo tipo de público, niños y adultos, «hacer matemáticas con placer».

— Favorecer la reunión entre investigadores y enseñantes y la gran mayoría de público no especialista.

— Mostrar que las matemáticas son una ciencia en plena evolución.

— Ofrecer a los enseñantes instrumentos pedagógicos variados.

HORIZONTES MATEMÁTICOS, por el carácter concreto, lúdico, interactivo de las actividades que propone, permite un modo nuevo de aproximarse a los conocimientos científicos, accesible a todos.

La Exposición tiene, esencialmente, una función «didáctica» que predomina ampliamente, excluyendo toda función «mundana» como la que se puede encontrar a veces en las exposiciones artísticas. Por ello atrae a un público fuertemente ligado con las clases medias y que mantiene con las matemáticas una fuerte relación de rentabilidad inmediata.

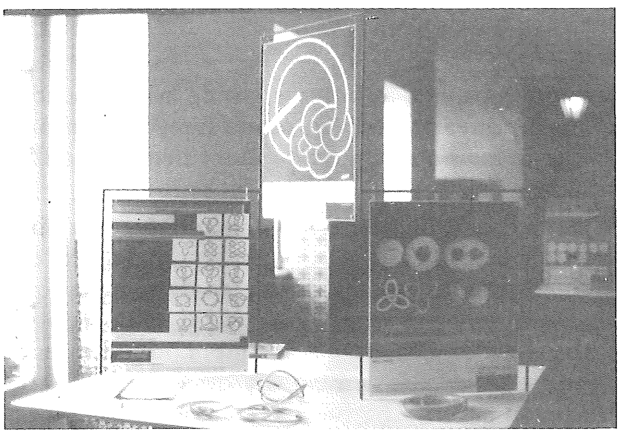
Por otro lado, las matemáticas, nacidas y desarrolladas en países con culturas muy diferentes, constituyen un tema universal que permite que esta exposición tenga un gran éxito en todos los países que visita.

En una superficie de 200 m^2, la exposición propone más de 60 manipulaciones reagrupadas entorno a diez temas que evocan algunos de los grandes problemas de las matemáticas.

La Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, en colaboración con distintas entidades e instituciones, es la encargada de presentar esta exposición en España.

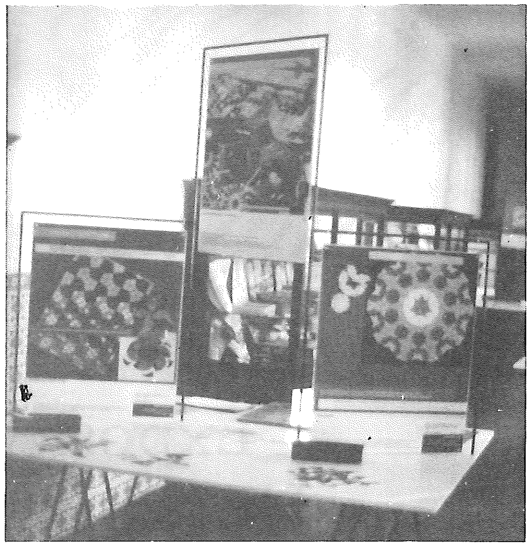
Breve descripción de los 10 kioskos:

— *Anamorfosis y perspectivas*
Anamorfosis cilíndricas y puzles. Hombre sentado. Sator, arepo, ópera, rotas.
Perspectivas cónicas y puntos de vista.
La mirilla de Durero.
Un cubo visto de lejos.



— *Nudos*
Clasificación de nudos. ¿Qué nudo es éste?
Cómo hacer un nudo.
Metamorfosis: del nudo chino al turco.

— *Apilamientos y simetrías*
Apilad los discos: ¿cuál es el apilamiento más denso?
El problema de Hilbert de las 13 esferas.
Granos de café y granos de arena.
Caleidoscopios esféricos e hiperbólicos. Mosaicos hiperbólicos.



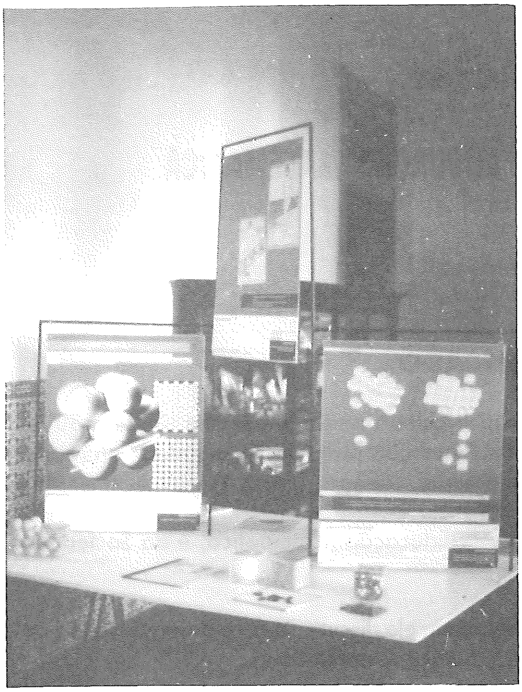
— *Dibujos y repeticiones*
Mosaicos islámicos y caleidoscopios.
Los mosaicos de Escher.
Pavimentaciones no periódicas de R. Penrose.
Fractales y curvas del Dragón.

— *Curvaturas y superficies*
Paraboloide hiperbólico.
Curvaturas y superficies regladas.
El tapón universal.
¿Cuál es el camino más corto?
La Tierra vista desde un satélite.

— *Formas y estructuras*
El teorema de los 4 colores. Pintar con el menor número posible de colores.
La fórmula de Euler-Poincaré.
Apilamientos de pirámides.
Construye tus propios poliedros.

— *Grafos y caminos*
Euler: los puentes de Königsberg.
El vigilante nocturno. Laberintos.
Un cubo y una serpiente hamiltonianos.
Arrinconar a la reina.

— *Azar y sondeos*
¡Nadie juega a suertes como el azar!
La curva «campana de Gauss».
El aparato de Galton.
¿Estamos seguros de los sondeos? —Haz tu propio sondeo.
Los azares de la vida: ¿chico o chica?
Si es más grande que tú, pierdes.



— Matemáticas y física
Caída de cuerpos. —Bolas y tobogán.
Circuitos automovilísticos. ¿Cuál es el mejor?
Llenado, curvas y recipientes.
Encontrar una línea o una superficie mínima: la naturaleza es perezosa.

— Puzzles y Pitágoras
Superficies equidescomponibles. —2 superficies y 3 formas.
Tangram chino.
Puzzle pitagórico. —Comprueba la fórmula: «cuadrado + cuadrado = cuadrado».
Pitágoras, Diofanto, Fermat: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Descripción técnica

— La exposición se dirige a todos los públicos a partir de 10/12 años.
— El área de la exposición debe de ser de 200 a 250 m^2 para los 10 kioskos.
— Cada kiosko tiene una base de 1,5 × 2 m. y mide 2 m. de altura.
— No se necesita ninguna iluminación especial.

Países visitados por la Exposición

En Francia, más de 60 ciudades desde 1984.
1985/88: más de 10 países ya visitados (Togo, Benin, Costa de Marfil, Malí, Mauritania, Burkina-Faso, Niger, Guinea, Senegal, Camerún...).
1986/88: Alemania Federal, Portugal y Brasil, Sudeste Asiático.
1988/89: Europa del Este, India, Italia, España...

Ciudades españolas que visitará

Desde el pasado 19 de septiembre se exhibe en Pamplona, primer enclave de Horizontes Matemáticos en España. Desde ahí recorrerá prácticamente todas las Comunidades Autónomas en donde las distintas Sociedades de Profesores de Matemáticas irán anunciando su llegada y organizando las visitas de los escolares. El recorrido se hará durante todo el curso 88-89.

I CIBEM
S E V I L L A - 9 0

I CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇAO MATEMATICA

(24-30 de Setembro)
SEVILLA-1990

PRIMEIRO COMUNICADO

O I Congresso Iberoamericano de Educação Matemática celebrar-se-á em Sevilla do 24 a 30 de Setembro de 1990, organizado pela Sociedade Andaluza de Educação Matemática «Thales», en representação da Federação Espanhola de Professores de Matemáticas.

Conta com o apoio da Confederação Interamericana de Educação Matemática, e da Sociedade Portuguesa de Professores de Matemáticas.

As linguas do Congresso serão o português e o espanhol, e em ele discutir-se-ão e desenvolver-se-ão os temas mais actuais da àrea cultural iberoamericana na Educação Matemática.

O segundo aviso, mais detalhado, sobre a organização e programação do I CIBEM, será enviado a todos os interessados, no primeiro trimestre de 1989, que deverao solicitá-lo enviando à S.A.E.M. «Thales», devidamente preenchido, a parte inferior deste primeiro comunicado.

I CIBEM

APELLIDOS ______________________ NOMBRE ______________

NACIONALIDAD ______________________

DIRECCION ______________________________________

PAIS ______________________ TELEFONO ______________

DATOS LABORALES.

PROFESOR DE (Indique nivel) ______________________

CENTRO DE TRABAJO ______________________

DIRECCION ______________________________________

Desea recibir el Segundo Anuncio sobre el I CIBEM

Remitir el anterior Boletín a la Dirección:

I CIBEM
SAEM «THALES» - Facultad de Matemáticas
Apdo. 1160
41080 Sevilla (España)

COLABORA: AREA DE CULTURA
AYUNTAMIENTO DE SEVILLA.

Reseñas

Editan: Arthur F. COXFORD y Albert P. SHULTE: *The ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook National Council of Teachers of Mathematics.*

Un alumno escribía: «El Álgebra es bastante pesada y sin embargo, muy educativa, el 90 por 100 de las veces es muy frustrante, hay que emplear muchas horas y no consigues entender casi nada». Así comienza el *Yearbook* del 88 editado por el «national Council of Teachers of Mathematics» [1].

Desde que en 1985 el NCTM publicó como libro del año *The Secondary School Mathematics Curriculum,* se propuso como objetivo ir recorriendo temas concretos del currículum de matemáticas. En el prólogo del libro podemos leer que la elaboración y posterior edición del presente libro es un reconocimiento, por una parte, del hecho de que el Álgebra es una de las partes de las Matemáticas que más tiempo ocupa en los currícula de la enseñanza secundaria, y por otra, a que investigaciones recientemente realizadas han puesto de manifiesto que el aprendizaje del Álgebra presenta especiales dificultades entre la mayoría de los alumnos.

El libro está dividido en cinco partes, en las que se abordan diferentes aspectos relacionados con la enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

La *primera parte* del libro tiene como objetivo presentar algunos de los errores más frecuentes entre los alumnos (interpretación de las incógnitas como números desconocidos y no como variables, ausencia del concepto de función, mal manejo de las reglas algebraicas...) y analizar algunas de las causas que más directamente pueden influir en la existencia y persistencia de estos errores.

En los capítulos incluidos en la *segunda parte* se estudian algunos de los conceptos aritméticos que por su repercusión en el aprendizaje del Álgebra los alumnos deberían tener asimilados previamente, dándose sugerencias para su enseñanza; por ejemplo: sugiere que se trabaje la proporcionalidad a partir de la razón de una propor-

[1] Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de América.

ción; que se trate la igualdad como una equivalencia y no como unión de una operación y su resultado. Para trabajar las propiedades de operaciones numéricas se cuenta una experiencia basada en el uso de la calculadora.

En las *partes tercera y sexta* del libro se presentan ideas concretas de aula para la enseñanza de los temas más usuales del Álgebra: ecuaciones, sistemas, polinomios, desigualdades, funciones, problemas con enunciado... Es importante señalar que estos temas se abordan en más de un capítulo y desde enfoques didácticos distintos, pudiendo encontrarse experiencias que están en un contexto más matemático —resolución de ecuaciones como situaciones de equilibrio siguiendo el principio «hacer lo mismo en amos lados»— y otras donde el contexto es más práctico y relacionado con el mundo real —resolución de ecuaciones en problemas concretos por medio de tanteos, confección de tablas y otros—. Asimismo estos temas se presentan desde niveles diferentes estando algunos encaminados a los principios del aprendizaje del Álgebra (ciclo superior de la EGB y 1.º, 2.º de BUP) y otros para cursos más avanzados (3.º de BUP y COU).

La *cuarta parte* centra su atención en los problemas con enunciado. Presentando algunas de las dificultades más usuales entre los alumnos y dándo sugerencias para la mejora de su enseñanza, en esta parte cabe destacar el capítulo 12 donde se defiende la idea de la introducción del Álgebra a través de este tipo de problemas y a partir de aquí ir trabajando los aspectos más manipulativos y operativos.

La *parte quinta,* capítulos 15-24. Plantea el uso de microordenadores como herramientas para la enseñanza del Álgebra, se cuentan experiencias concretas para: cálculo de raíces de polinomios, representación de funciones, logaritmos..., muchos de ellos incluyen los programas de ordenador utilizados.

Cabe destacar que en muchas de las ideas que se plantean a lo largo del libro es frecuente el uso de calculadoras (de 4 operaciones y científicas) no sólo como instrumento para ahorrar cálculos, sino como herramienta fundamental para el aprendizaje de conceptos.

Echamos en falta algún capítulo que dirija su atención al Álgebra como Lenguaje, aspecto éste que ha sido estudiado por varios autores (Freudenthal lo hace en el capítulo 16 de su libro *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*), poniendo de manifiesto que las reglas del Álgebra son mucho más estrictas que las de cualquier lenguaje, donde pequeñas modificaciones en una oración no influyen en su significado mientras que en el Álgebra esto no es así: $(6 - x \neq x - 6)$. Lo que corrobora que la enseñanza-aprendizaje del Álgebra es una tarea en la que hay muchos aspectos a tener en cuenta.

Como resumen, podríamos decir que este libro está pensado para los profesores que en sus aulas enseñan Álgebra, tanto en los primeros años de la enseñanza secundaria, como en los años anteriores a la universidad. Pensamos que de su lectura se pueden sacar ideas prácticas y variadas para utilizar en nuestras clases.

Grupo Azarquiel

Efrain FISCHBEIN: *Intuition in Science and Mathematics. And Educational Approach,* 225 págs. Mathematics Education Library. D. Reidel Publishing Company, 1987, ISBN: 90-277-2506-3 Dordrecht, Holland.

«La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad.» (Courant/Robbins, *¿Qué es la Matemática?*.) La cita con la que comenzamos supone una síntesis elegante de los rasgos distintivos que algunos matemáticos, preocupados por el sentido y significado de su disciplina, suelen atribuir a las matemáticas. Sin embargo no todos ellos tienen el mismo peso real en la producción científica, libros y revistas, dedicados a la matemática. Todo educador matemático conoce algunos libros de lógica e incluso lógica matemática, ha trabajado con más de un manual de análisis, ha utilizado argumentos de tipo constructivo y es capaz de reconocer y utilizar generalidades o particularizaciones en sus razonamientos. Nada de esto ocurre con la intuición: ¿dónde hay libros de matemáticas que hablen de la intuición?, ¿cuándo se utiliza la intuición como criterio en un argumento?, ¿qué aplicaciones matemáticas tiene la intuición? Todos parecen estar de acuerdo en que hay una parte oscura, antes de que se organicen las ideas, de la que surgen los motivos sobre los que trabajar; y a la que en términos generales se le llama intuición. Parece también que, por motivos principalmente retóricos, conviene hablar de intuición cuando se caracteriza la matemática como forma de pensamiento. Pero igual se supone que la matemática no debe decir nada sobre la intuición, que en todo caso es materia como mucho para filósofos y ensayistas en general. Puede que la Matemática no tenga mucho que decir, salvo reconocer que es una de sus fuentes de inspiración, pero la Educación Matemática sí debe tener que decir y mucho sobre este concepto; si se tratase de una simple figura retórica, lo mejor es prescindir de ella.

El libro que presentamos viene a poner claridad sobre este término, elaborar y organizar los conceptos relacionados con la intuición y poner de manifiesto el papel real que desempeñan las intuiciones en la comprensión, formación y adquisición de conocimiento matemático. La obra está dividida en dos partes. La primera de ellas está dedicada a elaborar una teoría sobre la intuición. Después de enumerar y comentar la visión que distintas escuelas filosóficas han tenido sobre la intuición (principalmente Descartes y Spinoze), el autor elabora el concepto de intuición a la que define como «un tipo de cognición caracterizado por las siguientes propiedades: auto-evidencia e inmediatez; certeza intrínseca; estabilidad o perseverancia; coercitividad; estatus teórico; extrapolabilidad de información; globalidad e implicitud». El análisis de cada una de estas características es profundo, extenso y detallado, pero quizá lo más importante para el educador matemático consiste en que dicho análisis está elaborado sobre ejemplos de conocimientos matemáticos. El carácter intuitivo de muchas de las nociones que consideramos básicas en matemáticas y la dificultad que supone el argumentar sobre las mismas, si prescindimos de este soporte intuitivo; es una reflexión seria sobre los fundamentos y las limitaciones de nuestro conocimiento. La segunda parte está dedicada a los factores que conforman la intuición. Para ello, en primer lugar estudia las relaciones entre experiencia e intuición, destacando que «la experiencia desempeña un papel fundamental en la formación de intuiciones llegando a producir a largo plazo un sistema estable de representaciones que implican programas estructurados de acciones y expectativas». Como ejemplo destacado de la practicidad de los significados intuitivos estudia el caso de los números negativos. La conclusión de que los números negativos deben servir como un primer ejercicio y ejemplo de estudio formal de un concepto, por su carencia de base intuitiva es una consecuencia sorprendente de un análisis detallado de la fundamentación del concepto de número entero.

Continúa con una clasificación detallada de los tipos de intuiciones atendiendo a dos criterios fundamentales: según el papel que desempeñan las intuiciones en primer lugar, y en segundo lugar según los orígenes de la intuición.

El papel de los modelos en el conocimiento intuitivo y su empleo en matemáticas constituyen otra parte considerable de este trabajo. Se clasifican los modelos en tipos; se estudia el papel de las analogías en la construcción de modelo; se estudian el empleo de modelos analógicos en matemáticas y se señala su papel en la formación de nociones falsas. Los modelos paradigmáticos y los diagramas constituyen una parte muy interesante de este trabajo con una consideración especial sobre la representación gráfica de una función.

Finalmente estudia algunos mecanismos que se han identificado como participantes en la formación de intuiciones. Los conflictos y compromisos que pueden establecerse sobre la base de las intuiciones cierran la amplia y completa reflexión teórica que este libro realiza. El libro está escrito en un estilo preciso y directo, resulta de lectura fácil y agradable, tiene gran riqueza de ejemplos, en su casi totalidad matemáticos, y proporciona múltiples consideraciones didácticas para el profesor de matemáticas. No creemos que el libro agote el tema: más bien nos proporciona una base sobre la que comenzar el trabajo para comprender la enorme complejidad que encierra el concepto de Intuición en el campo de la Educación Matemática. También nos ofrece un modelo de cómo realizar un análisis profundo sobre un concepto básico, integrando información procedente de muy diversas disciplinas formales —Psicología, Matemáticas, Pedagogía y Filosofía— señalando un camino que está aún por recorrer con la mayor parte de las nociones importantes de Área Didáctica de la Matemática.

En la larga lista de libros necesarios para la Educación Matemática que esperan ser traducidos al castellano para su difusión y uso por el profesorado, este que comentamos es uno de los que nos parece debiera tener prioridad.

Luis Rico Romero

La Olimpiada Thales al encuentro de los escolares

José Romero Sánchez
Coordinador Regional Olimpiada

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» en un intento de conseguir una mayor apertura del alumnado de EGB hacia actividades que permitan mejorar la imagen tradicional de la asignatura, presentando otros aspectos: lúdico e imaginativo de la Matemática; está organizando desde el curso 1984-85 las Olimpiadas Matemáticas «Thales».

La Olimpiada Thales está dirigida a los alumnos de octavo de EGB que cursan sus estudios en centros de la Comunidad Autónoma de Andalucía. Consta de dos fases:

a) Una primera provincial, donde se seleccionan varios escolares que destacan sobre los demás.

b) Una segunda regional, en la que participan los ganadores provinciales. Hasta la fecha se han celebrado cuatro, siendo el lugar de celebración, respectivamente, Sevilla, Málaga y en dos ocasiones El Rocío (Huelva).

Objetivos

Los objetivos de la Olimpiada «Thales» se centran:

— Mejorar la enseñanza y al aprendizaje de las Matemáticas.

— Apoyar la renovación en la forma de hacer Matemáticas en los colegios, con el fin de que en ellos la actividad sea creativa y lúdica.

— Desarrollar capacidades de intuición, razonamiento, imaginación, deducción...

— Impulsar y motivar a los profesores y alumnos.

— Proponer problemas que puedan servir de ayuda a muchos de los profesores interesados en este cambio.

Finalistas, acompañadas por sus profesores y organizadores de las Olimpiadas "Thales", en El Rocío (Huelva). Curso 1987-1988.

Historia

Primera Olimpiada: Fase Provincial 720 niños procedentes de 150 colegios. Fase Regional 24 niños.

Segunda Olimpiada: Fase Provincial 2.096 niños procedentes de 342 colegios. Fase Regional 56 niños.

Tercera Olimpiada: Fase Provincial 3.500 niños procedentes de 415 colegios. Fase Regional 40 niños.

Cuarta Olimpiada: Fase Provincial 5.000 niños procedentes de 625 colegios. Fase Regional 40 niños.

V Olimpiada Matemática «Thales»

Participantes: Podrán inscribirse todos los alumnos matriculados en 8.º de EGB en el presente curso 1988-89 en Andalucía.

Fases

Provincial. A celebrar a mediados de febrero 1989 en todas las provincias andaluzas.

Regional

A celebrar en Granada durante los primeros días de abril 1989. A esta fase acudirán cinco representantes de cada una de las provincias andaluzas.

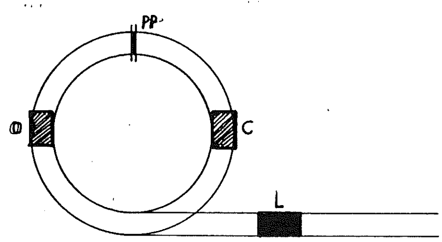
Problemas: Todos los participantes resolverán en cada fase ocho ejercicios. A modo de ejemplo dos de los ejercicios propuestos en la IV Olimpiada.

1.º Una máquina trituradora de fracciones hace lo siguiente: Si una fracción F entra en la máquina, la procesa y sale la nueva fracción

$$\frac{(1-F)}{(1+F)}.$$

Por ejemplo, entra 1/2 y sale 1/3. Ahora bien, si entra 2/3 a la máquina, y si la fracción que sale entra nuevamente, y ésta se sigue procesando hasta completar 1.000 procesos, ¿cuál es la fracción que sale nuevamente?

2.º La figura te muestra una vía muerta circular de la estación de Córdoba.



O representa un vagón de ovejas, *C* un vagón de caballos, *L* una locomotora y *PP* un puente metálico sobre la vía férrea.

Un maquinista tiene problemas a la hora de intercambiar las posiciones de los vagones con caballos y ovejas, y, al final, volver a colocar la locomotora en la vía principal.

Se me olvidaba decirte, además, que la altura del puente *PP* es pequeña y sólo puede pasar la locomotora y no los vagones. Ayuda al maquinista a resolver esta situación.

REVISTA SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Nombre y Apellidos:

Calle:

Población: C.P.:

Provincia/País: Tfno.: ( )

Profesión: D.N.I./C.I.F.

Centro de trabajo: Nivel:

Firmado: Fecha:

Firma:

Deseo suscribirme por: ☐ un año (3 números) ☐ números a partir del número ______

Cuyo importe haré efectivo mediante:
☐ Cheque bancario adjunto
☐ Domiciliación bancaria
☐ Giro Postal N.º________ Fecha______
☐ Contra reembolso
☐ Transferencia a c.c. 6719644, Caja Postal, Urb. Camino de Ronda, Granada

Estado español: Particulares: 2.500 Pts.
Centros: 3.000 Pts.
Europa: 40 $ ídem.
Resto del mundo: 55 $ ídem.

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista **«SUMA»** correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.
(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja:

Agencia:

Calle:

Población: C. Postal:

Provincia:

N.º Cuenta/Libreta:

Titular:

Firmado: Fecha:

Firma:

Agradeceríamos el envío de dirección postal de Centro/Institución o persona interesada para enviarle información sobre la presente publicación

Nombre y Apellidos/Centro:

Dirección: C.P.:

Provincia: País:

Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ningua Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a Revista SUMA, Apdo. de Correos 1017, 18080 Granada (España).
La suscripción le será renovada al finalizar el período inicial indicado si no nos comunica, por escrito, su deseo de causar baja.

Domiciliación Bancaria

Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirles la domiciliación bancaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso rellene con letra clara los datos bancarios que aparecen en el boletín.

III CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE LA DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS Y DE LAS MATEMÁTICAS

Santiago de Compostela 21 a 23 de septiembre de 1989

ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
Revista de investigación y experiencias didácticas

LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA Y EL TRABAJO EN EL AULA

Presentación

Una de las sugerencias en que más han insistido últimamente los subscriptores de *Enseñanza de las Ciencias,* así como los asistentes al 2° Congreso celebrado en septiembre de 1987, ha sido, sin duda, la necesidad de aproximar la investigación didáctica al trabajo del aula. No basta —se señala acertadamente— con poner en evidencia la existencia de graves errores conceptuales, analizar críticamente la visión del trabajo científico que la escuela transmite o denunciar las actitudes negativas hacia la ciencia que la enseñanza a menudo genera: es también necesario elaborar propuestas positivas de actuación en la clase. Dicho de otro modo: cabe esperar que la investigación didáctica abra y fundamente perspectivas de innovación. De hecho, el trabajo de numerosos equipos internacionales de investigación está traduciéndose hoy en la elaboración y experimentación de materiales de enseñanza/aprendizaje.

Hemos considerado, pues, conveniente, centrar este 3er. Congreso en la presentación de *propuestas concretas de trabajo en el aula, fundamentadas en la investigación didáctica* y dirigidas a cualquier nivel de enseñanza incluido el de Formación del Profesorado.

Avance de programa

De acuerdo con la idea que preside la presente edición del Congreso, su estructura será distinta a la de los celebrados hasta aquí: su núcleo central estará constituido por *Talleres* relativamente extensos (dos sesiones de dos horas) que permitan a distintos grupos presentar sus propuestas «en acto», es decir, en forma de auténticas sesiones de trabajo. De este modo, los asistentes a los talleres podrán vivenciar las propuestas y proceder posteriormente a su análisis crítico y discusión.

Para completar la presentación de propuestas de innovación se organizará una *exposición de materiales didácticos* que intentará recoger, junto a las que puedan aportar los asistentes al Congreso, las más relevantes en el ámbito internacional.

Se podrán presentar también trabajos de investigación e innovación en la didáctica de las ciencias y de las matemáticas en forma de *Posters,* para cuya discusión se organizarán sesiones específicas de trabajo.

Calendario para la preinscripción y propuestas de talleres, comunicaciones y materiales para la exposición

La preinscripción habrá de realizarse antes del 30 de enero de 1989, remitiendo el boletín que se reproduce más abajo.

Quienes deseen presentar una comunicación (en forma de póster) habrán de enviar junto al boletín de preinscripción un resumen de dos hojas grandes (destinadas a ser reproducidas directamente, previa reducción) en las que la superficie escrita ocupe 23 por 31 cm., destinando 6 cm. de la primera para el título, nombre de los autores y lugar de trabajo. Se encarece que la necesaria selección de referencias bibliográficas (¡no una simple lista bibliográfica final!) se ajuste a las normas establecidas para el envío de originales a *Enseñanza de las Ciencias.*

Quienes deseen proponer un taller pueden utilizar hasta cuatro hojas de las dimensiones arriba indicadas, de forma a dar una idea lo más clara posible del contenido del taller (tema, tipo de actividades...) y de su fundamentación.

En hoja aparte se indicará el número mínimo y máximo de asistentes al taller, así como el material audiovisual que se precisa (retroproyector, proyector de diapositivas, vídeo). El resto del material necesario para el desarrollo del taller habrá de ser aportado, en principio, por los organizadores del mismo. Rogamos igualmente que se indique la posibilidad o no de hacer más de una presentación del taller (para el caso en que las peticiones de asistencia así lo recomendaran).

Importante:

Sólo podrán ser aceptadas las propuestas de comunicaciones y talleres debidamente fundamentadas, que sean presentadas en el formato indicado, con *original en impresión de calidad* y dos copias, para hacer posible su reproducción en un volumen, que ha de enviarse a los congresistas con la debida antelación para permitirles la preparación del Congreso.

Cuando varias preinscripciones incluyen una misma propuesta de comunicación o taller, ello se indicará explícitamente en cada preinscripción, pero se enviará exclusivamente un solo original y dos copias. Es necesario igualmente dejar bien claro, cuando un trabajo es de varios autores, quién o quiénes se preinscriben para asistir al Congreso.

Quienes deseen presentar materiales didácticos para la exposición prevista, habrán de remitir un ejemplar de los mismos. Por otra parte, consideramos que para facilitar un mejor conocimiento de los materiales expuestos, sería útil poner a disposición breves presentaciones de dichos materiales. Invitamos, pues, a los autores a que elaboren dichas presentaciones (incluyendo un boletín de solicitud de los materiales) y llevar al Congreso cuantas copias de la presentación se consideren convenientes.

Selección de talleres, comunicaciones y solicitudes de asistencia

Antes del 30 de marzo de 1989 se comunicará el resultado de la selección de talleres y pósters propuestos, así como el de solicitudes de asistencia (atendiendo a criterios de implicación en tareas de investigación e innovación didáctica).

Inscripción definitiva

La inscripción definitiva deberá realizarse antes del 15 de mayo de 1989, mediante el pago de los derechos de inscripción. Estos derechos han sido fijados, atendiendo a los costos de organización y a las ayudas previstas, en 12.000 ptas. (10.000 para los subscriptores de *Enseñanza de las Ciencias*).

Algunos aspectos organizativos de interés

El volumen con los resúmenes de los talleres y pósters se enviarán a los congresistas durante el mes de julio, para hacer posible su estudio con la debida antelación. Al mismo tiempo se remitirá un formulario para organizar la asistencia a los distintos talleres, de forma que al iniciarse el Congreso cada cual sepa los talleres a los que puede asistir.

BOLETÍN DE PREINSCRIPCIÓN AL TERCER CONGRESO INTERNACIONAL DE INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA ORGANIZADO POR ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

Rellenar con tinta negra para facilitar las fotocopias y remitir a:
Enseñanza de las Ciencias / ICE Universitat Autònoma de Barcelona / 08193 Bellaterra (Barcelona)

Datos personales

Nombre y apellidos ....

Calle o plaza .... Código postal ....

Población .... Teléfono ....

Datos profesionales y curriculares

Titulación ....

Puesto de trabajo (describir brevemente) ....

Dirección ....

¿Forma parte de algún grupo de trabajo? Sí ☐ No ☐

En caso afirmativo indicar nombre, institución a la que está asociado y principales líneas de trabajo:

....

....

¿Ha publicado previamente trabajos de investigación y/o innovación didáctica? Sí ☐ No ☐

En caso afirmativo adjuntar una selección de títulos recientes, utilizando el formato habitual de las referencias en *Enseñanza de las Ciencias.*

Propuestas de talleres, pósters y exposición de materiales didácticos

¿Hace alguna propuesta de taller? Sí ☐ No ☐

¿Hace alguna propuesta de póster? Sí ☐ No ☐

En caso afirmativo adjuntar resúmenes confeccionados en la forma descrita más arriba e indicar, en su caso, quiénes de los coautores se inscriben también al Congreso.

¿Hace alguna propuesta de exposición de materiales didácticos? Sí ☐ No ☐

En caso afirmativo adjuntar un ejemplar y, en su caso, modelo de folleto informativo que se piensa distribuir a los congresistas.

Recomendaciones

Las siguientes indicaciones tienen por objeto conseguir una paulatina normalización en el estilo de presentación de los textos. No deben ser consideradas como obstáculo o dificultades añadidas a las generalmente ya de por sí precarias condiciones en que se realizan los trabajos sino como metas a las que debemos ir tendiendo.

La propias indicaciones son susceptibles de alteración en función de los medios tecnológicos de impresión de que la redacción pueda ir disponiendo.

1. Indicaciones de carácter general

Todo texto presentado deber ser (física o conceptualmente) legible, coherente (en contenido y en notación) y manipulable —para propósitos de imprenta— por personas no versadas en el tema de que el texto trate.

Se aconseja explícitamente, a quienes envíen artículos, piensen que el lector medio no sabe tanto del tema como ellos mismos. Se puede tener consideración hacia el lector de muy diversas maneras; por ejemplo, cabe

a) redactar una introducción (no necesariamente limitada al primer párrafo) que sitúe informalmente el contenido del artículo en un contexto generalmente más conocido;

b) plantearse si el esquema «definición-teorema-demostración» no podría ser sustituido por otro más «amigable»;

c) atender al hecho incuestionable de que muchos lectores preferirán enfrentarse a textos claros y concisos antes que a ristras de fórmulas;

d) estructurar el artículo de modo que el hilo conductor no quede ahogado por divagaciones...

2. Indicaciones específicas

2.1. *Escritos*

Los escritos deberían presentarse por duplicado, en papel DIN-A4, escritos a máquina por una sola cara.

El título debe ser descriptivo y corto.

En hoja aparte, figurará un breve resumen en castellano y la traducción de éste al inglés (independientemente de la lengua utilizada en el artículo).

Es deseable que la longitud de los artículos no sobrepase las 15 páginas; sin embargo, este número jamás será un requisito de aceptación o de rechazo. (La redacción se reserva la posibilidad, en artículos más largos, de publicarlos en dos entregas de la revista si los autores muestran su acuerdo.) Se invita a los autores a ser escuetos, pero sin abusar de sobreentendidos.

Tanto la página del resumen como la primera página del artículo deben contener el nombre y apellidos y centro de trabajo de quienes lo han realizado.

Siempre deberá figurar una dirección completa a la que deba remitirse la correspondencia y, en su caso, pruebas de imprenta.

2.2. *Símbolos y unidades*

Todos los artículos deben ser coherentes en lo relativo a símbolos y a unidades. Si no son de uso común, deben aparecer adecuadamente definidos.

Los símbolos matemáticos pueden ser escritos a mano o a máquina y no deben surgir ambigüedades. Los símbolos poco usuales y las letras de un alfabeto como el griego deben ir anotadas al margen. Distíngase muy bien la letra O del número 0, la letra *l* del número 1 y de la prima, la letra *k* de la letra *kappa,* etc. Empléese una notación coherente para vectores (por ejemplo: negrita o indicación de esto con un subrayado sinuoso) o para numerar expresiones matemáticas (por ejemplo: números entre paréntesis a la derecha de la expresión).

2.3. *Referencias bibliográficas*

Toda referencia a obras previamente publicadas debe ir numerada entre corchetes ([ ]) a lo largo del texto. Al final de éste aparecerá la lista completa de citas en el mismo orden numérico.

Los artículos de revistas se citarán con la siguiente pauta:

Autor/a/es: Nombre (inicial/es) y apellido(s).

Título: (el que corresponda).

Revista: Nombre o abreviatura comúnmente utilizada para referirse a ella.

Número: (el que corresponda, subrayado).

Páginas: (número de la página inicial)-(número de la página final) ocupada(s) por el artículo.

Año: (cuatro cifras).

Los libros se citarán con la siguiente pauta:

Autor: ...

Título: ...

Editorial: ...

Lugar de edición: ...

Año de edición: ...

2.4. *Notas a pie de página*

Deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. *Listados de ordenador (programas, tablas, etc.)*

Se enviarán listados originales (evítense rigurosamente las fotocopias) que se reprografiarán para evitar errores. También se aceptarán negativos en blanco y negro de listados originales.

2.6. *Ilustraciones*

Aunque las ilustraciones interrumpirán el texto publicado, deben remitirse en hojas separadas del manuscrito con indicación de la colocación óptima. Los autores deben asegurar la calidad de los trazos, de los símbolos empleados y, en general, de todos los elementos de las ilustraciones teniendo en cuenta que éstas se someterán a reprografía directa en escala próxima a 1:2.

El número de ilustraciones no está limitado; se ruega eviten redundancias en el material gráfico.

2.7. *Fotografía en blanco y negro*

Sólo podrán publicarse fotografías remitidas con negativos. Si las fotografías requieren algún comentario, leyenda o símbolo especial, se numerarán y en folio aparte se indicará el contenido de tales adiciones.

2.8. Enviar a cualquiera de las personas que figuran en el Panel de Colaboradores o a

Revista *SUMA*
Apdo. 1017
18080 Granada.
ESPAÑA