Posibilidades didácticas... del cubo de las caras negras

M. Fernández Reyes

I. Introducción

En congresos y todo tipo de reuniones de profesores de Matemáticas, así como en la abundante bibliografía sobre la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina, se insiste, entre otras cosas, en la conveniencia de plantear a nuestros alumnos problemas abiertos y ejercitarlos en la visualización espacial. Sin embargo, tengo la impresión de que todavía estas sanas ideas no se están llevando a las aulas con la generalidad y frecuencia que merecen. Es más, creo que, en muchos de los casos en que se hace, no se intenta aprovechar al máximo, bajo diferentes enfoques, el problema o la actividad en cuestión. Por otro lado, no conozco —aunque no afirme que no exista, claro— bibliografía que dé nortes claros de cómo hacerlo.

Lo que sigue pretende, con sincera modestia, y por si resultare de utilidad a algún lector, de una parte, exponer una forma de enseñar que me está dando resultados aceptables; de otra, animar a que sean dados a conocer trabajos similares de mayor entidad.

II. Preparación de la actividad

Hace unos días propuse a mi hijo David, alumno de 8.º de EGB, el problema del cubo de las caras negras que, por si algún lector no conoce, transcribo a continuación:

Tenemos un cubo o hexaedro de madera, pintado de negro en todas sus caras. Lo cortamos en 27 cubitos iguales. ¿Cuántos de ellos tendrán pintadas de negro tres caras, dos caras, una cara y ninguna? (Tal como aparece en Mariano Mataix, *Nuevos divertimentos matemáticos,* Marcombo, Barcelona).

Después de recomendarle que leyera detenidamente el enunciado y asegurarme, a través de sus respuestas a las oportunas preguntas, de que lo había comprendido, le hice las siguientes consideraciones:

— Debes intentar resolverlo sin mi ayuda. Tanto si lo consigues como si no, te sentirás contento, pues habrás descubierto muchas cosas y te encontrarás mejor preparado para atacar este tipo de problemas.

— Quizá te convenga plantearte previamente uno parecido, pero más sencillo.

Pasados unos minutos me dijo, más bien interrogando que afirmando: Tengo los de 3 caras negras y los de 2. Son 9 y 13'5.

Es evidente que pensó, lamentablemente condicionado por la todavía tan frecuente forma de enseñar: Éste es de dividir. ¡Y dividió!

Le contesté que no eran esos los resultados correctos, y añadí: Pero, ¿por qué no seguiste adelante?

Porque si divido entre 1 me da 27, que son todos los cubitos, y eso no puede ser. Además, si divido 27 entre 0, ¿qué hago con eso?

No consideré adecuado el momento para explicarle qué es eso de «dividir entre cero» (más bien, qué no es). Le animé diciéndole que, aunque su solución no era válida, su razonamiento me gustaba. Y añadí: Este problema no es de dividir; es más, ni siquiera es necesario saber dividir para resolverlo. Sólo necesitas imaginarte dónde están situados los cubitos de cada clase, tanto los de fuera como los de dentro, y contarlos mentalmente. Tómate el tiempo que quieras. Y, por si te sirve de ayuda, construye un cubo con una patata («papa» en Canarias) sin piel, y píntalo con un rotulador.

Construido que hubo el que dimos en llamar «cubo papal», se dispuso, influido tal vez por el nombrecito, a hacer movimientos a modo de cruces con la mano, alrededor del cubo. Cortando..., sin cortar.

Estaba ya en el buen camino. Rápidamente descubrió que:

— dando 2 cortes horizontales, podía obtener 3 porciones iguales, que convinimos en llamar «planchas»;

— con 2 cortes más, perpendiculares a la cara superior y en el sentido delante-atrás, y otros 2, también verticales, de izquierda a derecha, conseguiría partir cada plancha en 9 cubitos y, por tanto, obtendría los 27.

Me sorprendió entonces con este comentario: Sí, pero si tuviera que dividir el cubo en muchas más partes sería mucho más difícil. ¿No hay alguna manera de saber cuántos cortes tendría que dar y cómo darlos, sin tanto rollo?

Sí, le dije, pero tienes tú que descubrirla. ¿Te pones a ello o continúas con el caso de nuestro cubo hasta averiguar cuántos cubitos de cada clase salen?

Decidió que mejor esto último.

Le eché entonces un pequeño cabo haciéndole estas recomendaciones:

— Piensa sólo en la plancha de arriba; olvida de momento las otras dos.

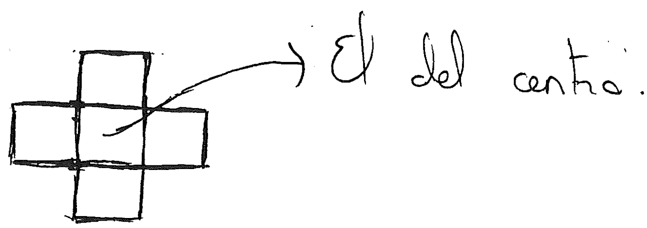
— Clasifica los cubitos por su situación. Por ejemplo, tantos «esquineros», etc.

— Si lo crees necesario, haz un dibujo de la superficie de la plancha.

Observé cómo se concentraba imaginándose la plancha. No tardó mucho en decir, lentamente, revisando mientras hablaba: Hay 4 cubitos en las esquinas, 1 solo en el centro y otros 4 que no sé cómo decir dónde están.

Dibújame las caras superiores de esos 4.

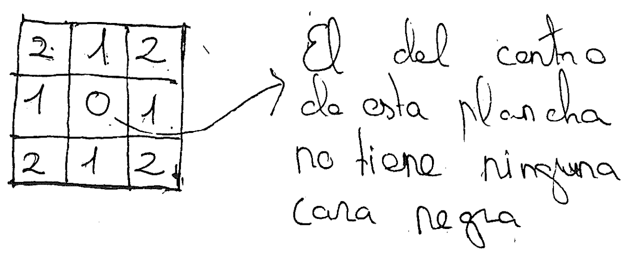
Presentó este dibujo:



El del centro

Y, como ya lo tenía pensado, dijo: Hay 4 esquineros con 3 caras negras, 4 en cruz que tienen 2 y 1 central con 1 cara negra. Y la plancha de abajo tiene que ser igual.

Imaginar la plancha central le costó un poco más. Fue rellenando un cuadriculado representativo de la plancha, que al final quedó así:



El del centro de esta plancha no tiene ninguna cara negra.

Hizo entonces el cálculo global y dio como solución: 8 de 3 caras negras, 8 de 2, 2 de 1 y 1 de 0, pero, dándose cuenta que así resultaba un total de 23, revisó y me dio finalmente la correcta: 8, 12, 6 y 1, respectivamente.

Y... si el cubo de dividiera sólo en 8 cubitos, ¿cómo serían?

Todos tendrían 3 caras negras, contestó casi inmediatamente.

Y si se dividiera en 100, preguntó.

¿Estás seguro que se puede dividir en 100? Vete pensando en esto. Buscaremos la respuesta en clase, junto con tus compañeros. También intentaremos resolver entre todos el problema que tú planteaste.

III. Repetición y ampliación de la experiencia en el aula

En clase, con las naturales diferencias inherentes al trabajo en grupo, el desarrollo de esta actividad inicial fue similar a como queda relatado.

Un número considerable de alumnos resolvió el problema casi sin ayuda mía o de sus compañeros. En general, todos mostraron interés y trabajaron con gusto. Algunos hicieron sugerencias o comentarios que me proporcionaron ideas para diseñar nuevas experiencias.

En días sucesivos, dedicamos parte del tiempo de clase a tratar las cuestiones, nacidas del problema de partida, que siguen:

1. *Descubrimiento y simbolización de una sencilla ley matemática*

Vamos a contar el número de divisiones hechas en estos cuadrados y el número de partes iguales que han resultado en cada caso.

¿Qué parece ocurrir siempre?

Y, cada uno a su modo, contestó que siempre resultaba una parte más que el número de divisiones.

Pedí, entonces, que completaran esta frase:

El número de partes es igual al número de divisiones...

No les supuso ningún esfuerzo entender que, según el código acordado (representar con d el número de divisiones hechas y con p el de partes resultantes), esto se expresa en lenguaje matemático así:

$$p = d + 1$$

Un sencillo e inocente ejercicio que me sirvió para:

— Darle carácter de descubrimiento a algo en lo que quizá no habían reparado.

— Insistir en la necesidad de tener especial cuidado al enunciar un hecho matemático en lenguaje ordinario. En este sentido, hubo en principio algunas maneras equívocas, incompletas e, incluso, totalmente carentes de sentido, de completar la frase. Al fin, todos estuvieron de acuerdo en que añadiendo *aumentado en 1* resultaba una expresión clara, entendible por cualquiera.

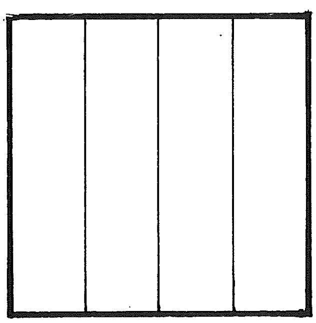
— Por último, que les resultara digerible el proceso a seguir hasta llegar a formular una propiedad matemática.

Creo que son todos aspectos importantes que se deben trabajar cada vez que tengamos ocasión.

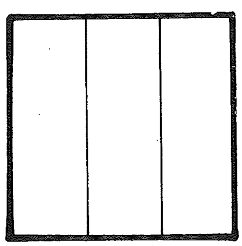
2. *¿Qué hay que hacer para que las partes, además de iguales, sean cuadrados?*

Les propuse que, aprovechando los cuadrados que tenían ya dibujados, trazaran ahora divisiones de izquierda a derecha.

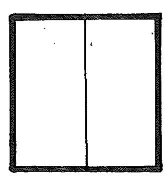
$d = 2$
$p = 3$



$d = 3$
$p = 4$



$d = 1$
$p = 2$



¿Cuántas?, dijeron casi a coro.

Las que cada uno quiera; lo único que hay que respetar es la condición de que las nuevas partes sean iguales entre sí.

Una vez revisadas las construcciones, y para no hacer excesivamente largo el ejercicio, les mostré una lámina en la que yo había dibujado diez cuadrados; unos donde las partes eran a su vez cuadrados y otros donde resultaban rectángulos no cuadrados. Fui entonces remarcando los casos de partes cuadradas y les pedí que contaran el número de divisiones hechas en una dirección y en otra. Luego, que hicieran lo mismo en los casos de rectángulos.

Después de algunas consideraciones, especialmente dirigidas a la precisión de lenguaje, escribieron, más o menos, esto:

Salen cuadrados cuando se hacen las mismas divisiones de izquierda a derecha que de arriba a abajo.

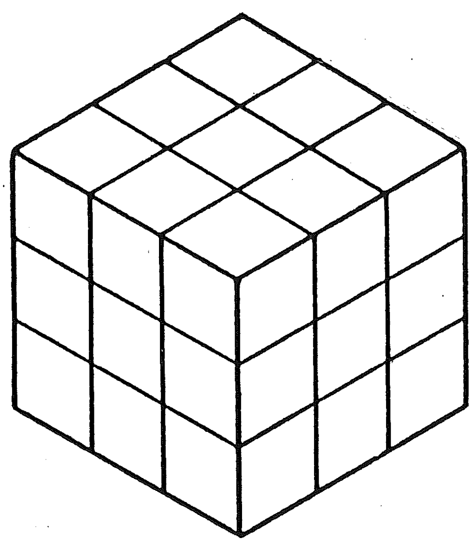
Comenté que no me gustaba mucho lo de *las mismas divisiones* y acordamos sustituir esta expresión por *el mismo número de divisiones.*

A continuación, les hice recapitular por escrito lo descubierto hasta ese momento, indicándoles que nos serviría para saltar del plano al espacio, esto es, para retomar el cubo.

3. *¿Es válido todo lo anterior para el cubo?*

Para que lo averiguaran, les pedí que rellenaran la siguiente ficha.

— ¿Cuántas divisiones horizontales se han hecho en este cubo?



— ¿Cuántas verticales en el sentido cara frontal-cara dorsal?

— ¿Cuántas verticales de izquierda a derecha?

— Si has contado bien, te ha tenido que resultar el mismo número. Recuerda que este número común lo estábamos representando por d. Completa ahora esta igualdad: $d =$

— Completa: Como el número de divisiones de cada una de las tres clases es el mismo ($d = 3$), el cubo queda partido en...

— Como es $d = 3$, el número p de planchas es ...

— $d = 3 \Rightarrow p = 4$. ¿Es ésta la traducción al lenguaje matemático de lo dicho en el punto anterior?

— En cada plancha hay ... cubitos. ¿Cuántos hay en las 4 planchas?

4. *Actividades de refuerzo y para otros fines*

— Dibujar un cubo de 8 cm. de arista. Trazar las divisiones necesarias para que quede dividido en 8 cubitos.

— Calcular el área de una cara y el área total.

— ¿Qué volumen tiene cada uno de los cubitos?

— Si las aristas interiores del cubo miden 7,999 centímetros, ¿qué cantidad de agua cabría en él?

— ¿Cuánto pesaría el cubo si fuera de plomo? ¿Y si fuera de aluminio?

— Construir tres cubos de cartulina y cuadricular sus caras de manera que resulten divididos, respectivamente, en 8, 27 y 64 cubitos.

— Para investigar en casa: ¿Pueden obtenerse menos de 8 cubitos de un cubo? ¿Pueden obtenerse 10?

5. *En busca de la fórmula de David*

Recordé a los chicos que, en palabras del propio David, la cuestión era ésta:

Si tuviera que dividir el cubo en muchas más partes sería mucho más difícil. ¿No hay alguna manera de saber cuántos cortes tendría que dar y cómo darlos, sin tanto rollo?

Hay una manera, les dije, y la vamos a averiguar. Pero antes, vamos a hacer otra cosa. Y añadí: También los matemáticos, para evitarse tanto rollo, tienen que hacer antes otras cosas.

Les pedí entonces que contaran las baldosas de la clase. Una vez me dieron el número, les dije que cada baldosa era un cuadrado de 30 cm. de lado y que calcularan su área en m^2. Finalmente, que determinaran el área del piso.

(Como era de esperar hubo algunos errores de cálculo; la mayoría, de paso de una unidad a otra. La clase del día siguiente se dedicó íntegramente a la medida.)

Esperé entonces que alguien me dijera... ¡pero hay una forma más fácil! Y, en efecto, alguien me lo dijo.

Claro, midiendo el largo y el ancho del piso, y empleando luego la fórmula del área del rectángulo, dije. Y añadí: Sabemos ya cómo dar los cortes para que resulten cubos: haciendo el mismo número d de cortes de los tres tipos. Nos falta sólo averiguar *cuántos cortes hay que dar para obtener un número determinado de cubos.* Vamos a intentar descubrir la fórmula que nos permita calcular rápidamente ese número.

Les entregué entonces cubos de cartulina con las caras cuadriculadas en 4, 9 y 16, es decir, cubos divididos en 8, 27, y 64 cubitos, respectivamente.

Acordamos luego emplear la siguiente simbología:

C = Número de cubitos resultantes.

p = Número de planchas.

d = Número de divisiones de cualquier tipo que es necesario para obtener los C cubitos.

c = Número de cubitos resultantes en cada una de las planchas.

Pasaron luego a completar la tabla que sigue:

d	p	c	C
1	2	4	$8 = 2^3$
2			
3			

Después de verificar la corrección de la tabla de cada uno, les pedí que hicieran en casa este trabajito:

— Estudiar bien el funcionamiento de la tabla y continuarla hasta $d = 10$.

— Razonar por qué el número mínimo de cubitos posible es 8. Escribir el razonamiento hecho, cuidando de que lo que escribieran respondiera exactamente a lo que pensaban. (Al día siguiente analizaríamos una por una las frases.)

— *Ídem* respecto a la pregunta ¿por qué no se puede obtener un número cualquiera de cubitos: por ejemplo, 20?

A la siguiente sesión, la mayoría presentó la tabla hasta $d = 10$ correctamente hecha.

Sin tener que insistir demasiado, conseguí que vieran claramente que de la tabla podía deducirse que, siempre, *el número de cubitos resultante es igual al cubo del número de planchas.* O, lo que es lo mismo, *el cubo del número de planchas es igual al número de cubitos.*

Y, pasando al lenguaje de los matemáticos y alevines de matemáticos, *la fórmula buscada:*

$$C = p^3, \text{ y dándole la vuelta, } p^3 = C$$

Para reforzar visualmente lo estudiado en los apartados 3 y 5, dedicamos una media hora a jugar con el «decímetro cúbico desmontable».

Uno de los juegos que más les interesó fue éste:

Les mostré el cubo completo y uno de los cubitos y les pregunté si creían que del grande podían cortarse 1.000 pequeños. La mayoría dijo que no. En cuanto a los que dijeron que sí, sospecho que acertaron porque alguien había usado el cubo desmontble para explicarles el SMD.

Procedimos entonces a comparar «cubito» con «barra», «barra» con «plancha» y «plancha» con «cubo», es decir, a determinar los factores de conversión. Y, al paso, a multiplicar. Resultado: 1.000.

Vamos a comprobar ahora si nuestra fórmula mágica funciona. Recuerden que sólo hay que contar el número de planchas... y elevarlo al cubo.

Hay 10 planchas y 10^3 es 1.000 ¡Perfecto! ¡La fórmula antirollo es buena!

Hubiera sido una lástima no aprovechar el decímetro cúbico que tenía en las manos para hacerles ver «por dentro» el por qué de la reglita, tal vez aprendida de memoria, «para pasar de dm^3 a cm^3 se multiplica por 1.000».

También hubo ocasión de ver experimentalmente, con un decímetro cúbico hueco, que 1 dm^3 tiene una capacidad de 1 litro. Y, como dato interesante, explicarles el significado del c.c. de los productos farmacéuticos.

6. *¿Qué es eso de "en función de"?*

Les dije que los matemáticos emplean a veces expresiones que nos parecen muy misteriosas y que, en realidad, significan cosas muy sencillas. Por ejemplo, nosotros hemos calculado el número de cubitos, *en función del número de planchas,* es decir, *sabiendo (conociendo) el número de planchas.* Otro ejemplo: Para calcular el área de un triángulo necesitamos conocer lo que mide un *lado cualquiera y la altura de dicho lado. Pues bien, si queremos ser un poco más «finos» decimos: El área de un triángulo se puede calcular en función* de un lado cualquiera y su altura.

¿Por qué digo en este último ejemplo «se puede calcular»? Porque también se puede calcular conociendo los tres lados, esto es, *en función de los tres lados.*

Nota histórica.—Herón de Alejandría fue un matemático griego que vivió hace un montón de siglos. No está muy claro si fue el descubridor de la fórmula que lleva su nombre o el primero que la demostró. Sea como fuere la seguimos llamando «fórmula de Herón». Es ésta:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

En la fórmula de Herón, p representa el semiperímetro, y a, b, c las medidas de los lados. Un día de éstos la usaremos.

7. *¿Se puede calcular el número de cubitos en función del número de divisiones que se le hagan al cubo?*

Podía haberles demostrado —más propiamente, ayudado a demostrar— que sí, siguiendo paso a paso este proceso:

1.º En la igualdad $20 = 2 \cdot 10$ podemos sustituir el 10 por $8 + 2$ y escribir $20 = 2\ (8 + 2)$.

2.º No pasa nada si en la igualdad $3^2 = 9$ cambio 3 por $7 - 4$. Tendría entonces que escribir la igualdad así: $(7 - 4)^2 = 9$.

3.º Recordemos que el número de planchas *(p)* es igual al *número de divisiones de cualquier clase (d) aumentado en* 1. Es decir, $p = d + 1$.

4.º ¿Cómo quedará nuestra fórmula $C = p^3$ si sustituimos p por $d + 1$, que es lo mismo que p?

Quizá así hubieran acertado a escribir

$$C = (d + 1)^3.$$

No lo sé.

Pero, preferí no ser tan explícito, a ver si ocurría lo que presentía: que concluyeran escribiendo $C = d + 1^3$.

Y así fue. Todos —todos los que llegaron a una conclusión, porque algunos, afortunadamente muy pocos, no concluyeron «ná»— cayeron en la trampa que les tendí.

Dije entonces: Me van a ayudar a demostrar que esa fórmula no es correcta. Y lo vamos a hacer de dos maneras.

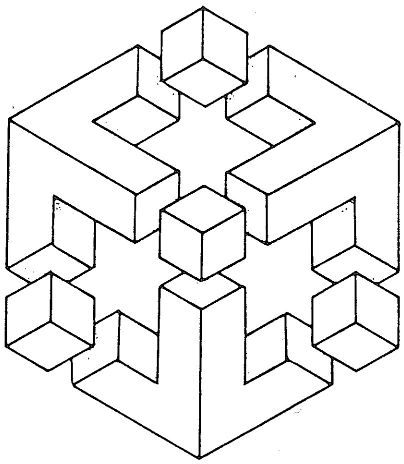
1.ª Empleando la fórmula de las planchas (número de cubitos en función del número de planchas, insistí), que ya hemos sometido a pruebas y comprobado que es buena, vamos a calcular, por ejemplo, el número de cubitos que resulta al partir un cubo en 5 planchas. Será:

$$C = p^3 \Rightarrow C = 5^3 = 125$$

Vamos a ver qué ocurre ahora con la fórmula que yo sostengo que es falsa. Hay que tener en cuenta que si el número de planchas es 5, el de divisiones de cada clase es 4. Entonces:

$$C = d + 1^3 \Rightarrow C = 4 + 1^3 = 4 + 1 = 5$$

Y, como 125 es el resultado correcto, el 5 no lo es. Por tanto, tampoco sirve vuestra fórmula. *I'm sorry,* coleguillas.



2.ª Un cubo no puede ser dividido en *menos de* 8 cubitos, Una de las formas de demostrarlo es ésta: Para obtener 8 cubitos hay que obtener 2 planchas. En consecuencia, para obtener menos de 8 habría que hacer *menos de* 2 planchas, es decir, sólo una plancha. Pero, haciendo una plancha... queda nuestro cubo tal como es; no resulta seccionado en cubitos.

Ésta es, como digo, una de las formas de demostrar que *el número mínimo de cubitos que se puede obtener es* 8. No es, desde luego, una manera muy matemática de demostrarlo. Es un rollo, ¿verdad? Pues bien, os voy a dar ocasión de que descubráis otra ley matemática. Haced esto:

1.º Recordad lo que hemos llamado *número cuadrado perfecto* y deducid lo que es un *número cubo perfecto.*

2.º Mirad la tabla que construimos al principio y fijaos en los valores de C.

3.º ¿Es 5 un *cubo perfecto*? ¿Lo son los números 2, 3, 4, 5, 6 y 7? ¿Cuál es el menor número entero distinto de 1 que es *cubo perfecto*?

4.º Completad correctamente lo que sigue y podréis presumir de haber descubierto una doble ley matemática:

Un cubo no puede ser dividido en un número cualquiera de cubitos. Sólo puede seccionarse en un número de cubitos que sea...

El menor número de cubitos en que puede partirse un cubo es..., porque 8 *es el menor número entero distinto de* 1 *que es...*

Al día siguiente revisamos todo lo hasta ese momento visto y les recordé que habíamos demostrado la incorrección de la expresión $C = d + 1^3$, pero que aún no habían obtenido la expresión correcta. Y les advertí que no se trataba de un mal razonamiento, sino que su error consistía en no haber tenido cuidado en expresar debidamente su descubrimiento.

Con ejemplos numéricos sencillos les hice comprobar que *sumarle a un número el cubo de otro* no es igual que *hallar el cubo de la suma de esos números.* Es decir, que

$$a + b^3 \neq (a + b)^3$$

Y así, llegamos por fin a la fórmula que permite calcular el número de cubitos en función del número común de divisiones:

$$C = (d + 1)^3$$

Como ejercicio para casa les propuse verificar los valores de C de nuestra tabla, empleando la nueva fórmula.

En una clase normal (de programa «oficial») aproveché que, al parecer, había quedado clara la diferencia entre $a + b^3$ y $(a + b)^3$ que, como refuerzo, les enseñé a leer respectivamente así: «a más...b al cubo» y «a más b...al cubo», haciendo una pausa larga en el lugar de los puntos suspensivos, apoveché, digo, para insistir en las diferencias entre cada una de las expresiones de diversas parejas de expresiones similares a la estudiada. Por ejemplo, entre «2 por a ... más b» y «2 por... a más b», esto es, entre $2 \cdot a + b$ y $2 \cdot (a + b)$.

Y, metido ya en harina, hablarles de la distributividad o no distributividad de una determinada operación respecto a otra, fuente tan frecuente de errores. Ejemplos:

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ (Distributividad de la potenciación respecto a la multiplicación.)

$(a + b)^m \neq a^m + b^m$ (La potenciación no es distributiva respecto a la adición.)

$\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$ (¿Es distributiva la radicación respecto a la multiplicación?)

$\sqrt{16 + 25} \neq \sqrt{16} + \sqrt{25}$ (¿Qué significa esto?)

IV. Cuestiones, problemas y sugerencias sobre otras posibilidades didácticas del cubo negro

1. Imagínate un cubo con la cara superior pintada de rojo, la lateral izquierda de verde y las otras de amarillo. Córtalo, usando tu mente a modo de sierra, en 64 cubitos. Contesta, en el orden que

creas más conveniente, a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos cubitos bicolores resultan?

b) ¿Cuántos sin pintar?

c) ¿Cuántos tienen 2 caras verdes?

d) ¿Hay cubitos verdiamarillos?

e) ¿Cuántos cortes horizontales tendrías que dar para obtener los 64 cubitos? ¿Cuántas divisiones en total?

2. Un cubo se ha dividido en 125 cubos pequeños. Empleando la fórmula de las planchas, calcula el número de éstas. Calcula, también empleando una fórmula, el número de divisiones de cada tipo que ha habido que hacer.

3. Estudia muy bien lo que sigue, porque te permitirá descubrir otra ley:

$$8 = 2^3$$
$$27 = 3^3$$
$$216 = 2^3 \cdot 3^3$$
$$9.261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Hemos visto ya que un cubo no permite que se le divida en el número de cubitos que cada uno quiera. Tiene el individuo esa manera de ser y hay que respetarla. Con los números 8, 27, 216 y 9.261, por ejemplo, es tolerante. Pues bien, fíjate en lo que ocurre cuando esos números se expresan como producto de números primos. Si deduces lo que yo —y yo no estoy equivocado, claro— estarás en condiciones de ganar siempre si juegas con un amigo a averiguar si un cubo se puede dividir en el número de cubitos que tú o él propongan. Pero..., cuidado, ganará el que no se equivoque en eso de expesar un número como producto de números primos.

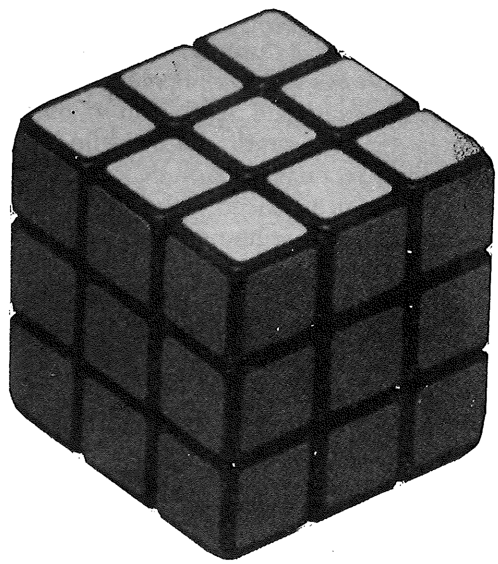
4. De nuevo con la importancia de evitar expresiones equívocas: Releyendo la cuestión anterior me di cuenta que cuando digo *y yo no estoy equivocado, claro,* alguien pudiera pensar que quiero decir que *yo no me equivoco nunca,* que soy un verdadero coco. ¿Cómo me corregirías la frasecita para que nadie tuviera esa falsa impresión?

5. Valiéndote del decímetro cúbico desmontable explícale a un compañero la simplificación de fracciones. Construye otros cubos que te permitan hacerlo con fracciones no decimales.

6. ¿No crees que usando esos mismos cubos podríamos entender muy bien por qué, por ejemplo, sumando 1/2 y 3/8 resulta 7/8? Inténtalo en clase.

7. Revisa todas tus notas y dedica un fin de semana a inventar problemas y juegos sobre el cubo de caras pintadas.

8. Desempolva y juega con el cubo mágico de Rubik. Quizá lo que has aprendido estos días te sirva para elaborar una buena estrategia.



Dedico muy cariñosamente este trabajo a mis alumnos de 8.º del Colegio Pco. "Punta del Hidalgo". Tenerife, octubre de 1988.