«Donald en el País de las Matemágicas» o el aprovechamiento didáctico de una película

José del Río Sánchez

1. Introducción

No abundan demasiado las películas didácticas en Matemáticas y, a veces, su calidad es bastante discutible. Walt Disney produjo una película en 16 y 35 milímetros titulada *Donald en el País de las Matemágicas* que ahora está disponible en los vídeoclubes dentro del volumen 5 del Canal Disney, distribuida por Filmayer Vídeo (Mártires de Alcalá, 4; 2815 Madrid; Tfno. 2489205). Se trata de un film corto (25 minutos), muy rico en contenidos didácticos, que puede ser utilizado como mera motivación del apetito matemático de los alumnos pero también como fuente de una variada gama de actividades complementarias. En los párrafos que siguen describo una experiencia de este segundo tipo, en la que se trabaja, de una manera asequible, con el bello pero difícil tema del Número de Oro.

2. Redacción y encuesta

En uno de los primeros días del curso pasado, hice que los alumnos de 1.º de BUP viesen esta película y, a continuación, en la misma clase, les pedí que redactaran sus impresiones en una hoja y también que escribieran, al final, dos o tres preguntas sobre aspectos de la película que no hubieran entendido o que, habiéndolos entendido, quisieran saber más sobre ellos. Los resultados, a tenor de la experiencia, demuestran que la curiosidad de los alumnos es tan amplia como interesante.

Resumo a continuación sus variadísimas preguntas, agrupándolas en cuatro temas genéricos y expresándolas con sus mismas palabras:

A) *El rectángulo de oro*

1.—¿Quién lo inventó?

2.—¿Por qué se llama así?

3.—¿Qué significó la estrella de cinco puntas y el rectángulo de oro para los antiguos?

4.—¿Cómo sale la espiral de los rectángulos áureos?

5.—¿Cómo se descomponen en rectángulos áureos los objetos? ¿Cómo se acopla el rectángulo áureo en formas no rectangulares, como templos, estatuas...?

6.—¿Cómo se relaciona el rectángulo de oro con el cuerpo humano?

7.—¿Qué tienen en común los números con las figuras?

B) *Los juegos*

8.—¿Hay alguna fórmula para acertar siempre en el billar?

9.—¿Influye la fuerza del tiro en el billar?

10.—¿Qué tienen que ver las matemáticas con el ajedrez?

11.—Quiero saber más sobre las matemáticas y los juegos.

C) *La historia*

12.—¿Cómo fueron acogidas las matemáticas de Pitágoras?

13.—¿Cuándo y dónde se utilizaron por primera vez las matemáticas?

14.—¿Cómo tuvo Pitágoras la idea de pensar en las matemáticas?

D) *Aplicaciones de las matemáticas*

15.—Quiero conocer algún invento basado en las matemáticas.

16.—¿Cuál es la ley que hace que los planetas estén colocados como están?

17.—¿Cómo se construye la lira?

18.—¿En qué se diferencia la matemática pura de la aplicada?

19.—¿En qué ciencias se usan las matemáticas?

20.—¿Se seguirán descubriendo más matemáticas?

Se me ocurrió que estas 20 preguntas me podían servir para programar actividades de clase encaminadas a satisfacer la curiosidad despertada ya por la película. Tenía dos posibilidades de organización: tomarlas como centro de interés y desarrollar en torno a ellas los contenidos del programa habitual o utilizarlas como fuente de actividades complementarias. Opté por esta última posibilidad y les dediqué una sesión de clase cada quince días con alumnos de 1.º de BUP. A continuación, describo brevemente mi experiencia.

3. ¿Quién inventó el rectángulo de oro? ¿Por qué se llama así? ¿Qué significó la estrella de cinco puntas y el rectángulo de oro para los antiguos?

Contesté a estas preguntas mediante una exposición de los conocimientos adquiridos por mí en un rastreo por los libros de BOYER (1986), CASTELNUOVO (1963), GHYKA (1983), Grupo GAUS (1985) y PEDOE (1979).

Luego me di cuenta de que hubiera sido mejor plantear una investigación por equipos (adaptando un poco el esquema de RODRÍGUEZ ROJO, 1987) utilizando los alumnos esa misma bibliografía y explorando también en la realidad actual dónde se encuentra la estrella de cinco puntas y qué significado tiene (signos militares, políticos, publicidad...).

4. ¿Cómo sale la espiral de los rectángulos áureos?

Es curiosa esta pregunta, no sólo por el interés que tiene en sí misma, sino por la siguiente circunstancia: ningún alumno me preguntó cómo se construía un rectángulo áureo o cómo se reconocía si un rectángulo era áureo o no; sorprende que se pregunte por la construcción de la espiral y no del rectángulo que la engendra. ¿O es que la construcción de ese rectángulo queda clara en la película?

Pasé de nuevo esta secuencia de la película a mis alumnos y les pedí, a continuación, que dibujasen un rectángulo áureo. Nadie fue capaz de hacerlo. Repetí la experiencia y les hice la misma proposición. Surgió en seguida en todos la siguiente pregunta: ¿Cómo se dibuja un pentágono regular?

Les indiqué dos métodos «empíricos»:

a) Con un transportador de ángulos, medimos sobre una circunferencia un arco AB de 72° y luego lo llevamos con el compás sobre ella (fig. 1). Cabe exactamente 5 veces. Unimos estos puntos y ya tenemos construido el pentágono regular. ¿Por qué sucede esto?

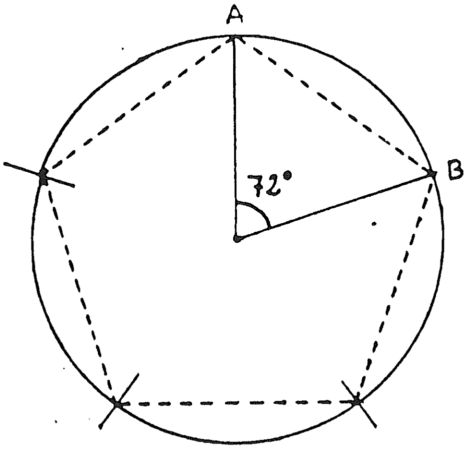


Fig. 1.—Construcción de pentágono regular con compás.

b) Partimos de una tira de papel de 4 ó 5 cm. de ancho, hacemos un nudo, aplastamos, cortamos lo sobrante, y el nudo plano resultante $ABCDE$ nos sirve para trazar el contorno de un pentágono regular (fig. 2). (Los alumnos ante la evidencia que tenían en sus manos, no dudan de que este polígono fuese regular. Preguntarles la razón teórica de este hecho hubiera resultado demasiado arriesgado.)

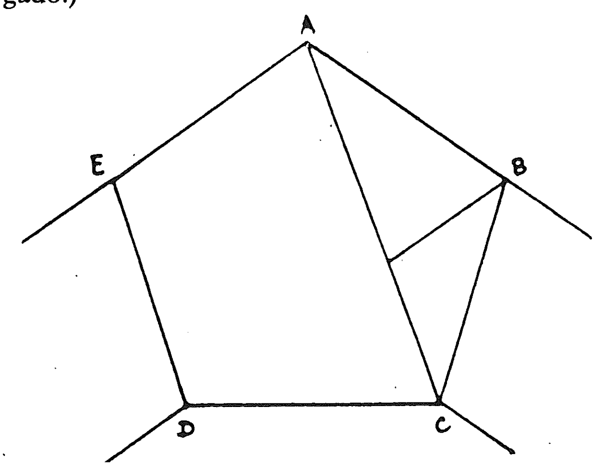


Fig. 2.—Construcción de un pentágono regular con una tira de papel.

Una vez que tenían dibujado su pentágono regular, ya trazan fácilmente la estrella correspondiente y luego, tal como muestra la película, construyeron los rectángulos áureos «abriendo» (con el compás) los lados de los triángulos que aparecen en la estrella (fig. 3).

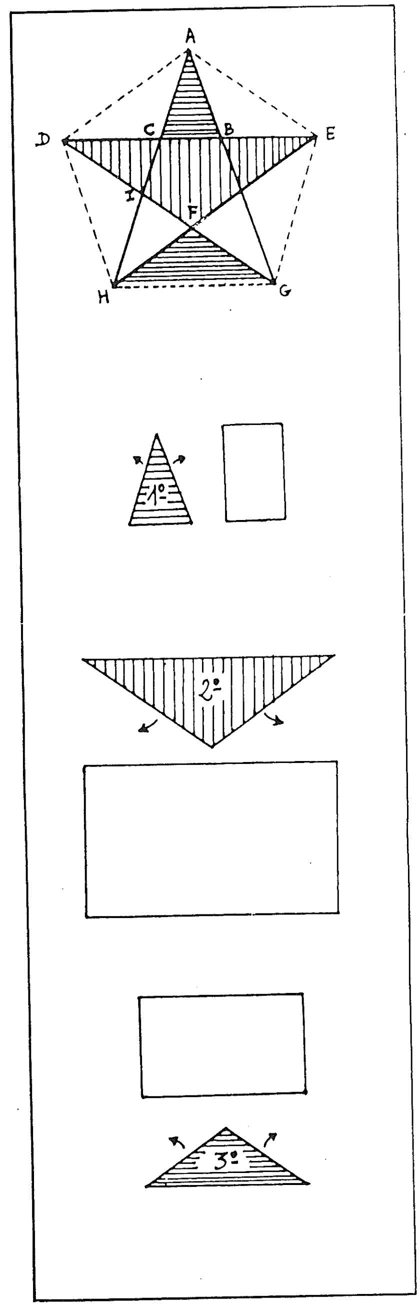


Fig. 3.—Rectángulos áureos.

Proyectamos de nuevo la película y la paramos en la imagen de la espiral. Fijándose en ella, los alumnos fueron capaces de descubrir su proceso de construcción (fig. 4).

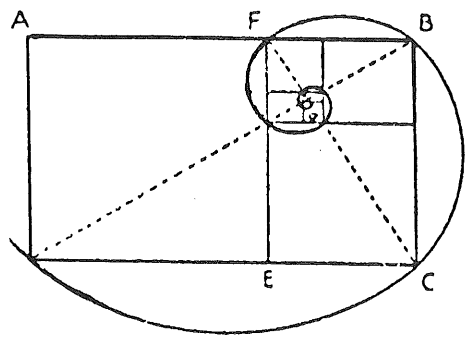


Fig. 4.—Espiral.

Les hice notar que esta espiral se encuentra frecuentemente en la naturaleza, como muestra la película, pues es una forma de crecimiento armónico de la materia viva (GHYKA, 1983).

Aproveché esta situación para tratar de buscar un criterio que nos sirviera para decidir si un rectángulo es áureo o no, y procedí de la siguiente manera:

Como cada alumno había tomado un triángulo distinto en la estrella, también fueron distintos los rectángulos obtenidos. Les pregunté: ¿Qué es lo que tienen en común todos esos rectángulos?

Contestaron: que tienen la misma forma.

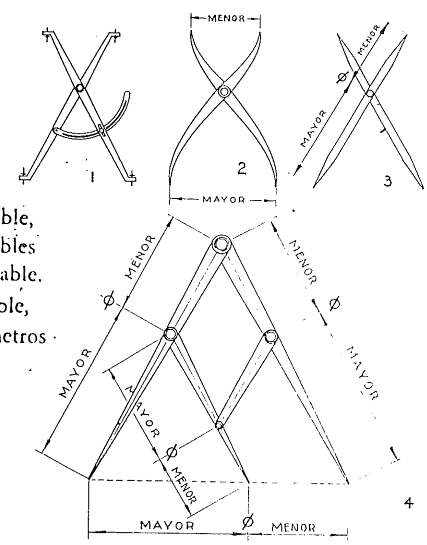
¿Y qué determina la forma de un rectángulo?, seguí preguntando. Respondieron: sus lados, las dimensiones de sus lados. Hice que los midieran y les pregunté: ¿Qué es lo común a esas distintas parejas de longitudes, de números? ¡Su cociente!, dijeron. En efecto, el cociente entre la longitud mayor y la menor eran números que oscilaban entre 1,45 y 1,75 en todos los casos. Estas diferencias fueron atribuidas al método de construcción y empezamos a discutir sobre cuál sería el número más representativo de esa «tabla». Las opiniones se decantaban hacia «el valor medio» y hacia el número que «más se repite». Ambos vinieron a coincidir en 1,6 aproximadamente, y con ese valor nos quedamos. De este modo habíamos descubierto un criterio empírico para determinar si un rectángulo era áureo: el cociente entre la longitud mayor y la menor ha de ser 1,6. (Este tratamiento permite conectar con el tema de la semejanza de figuras y con las medidas estadísticas de centralización.)

5. ¿Cómo se descomponen en rectángulos áureos los objetos?

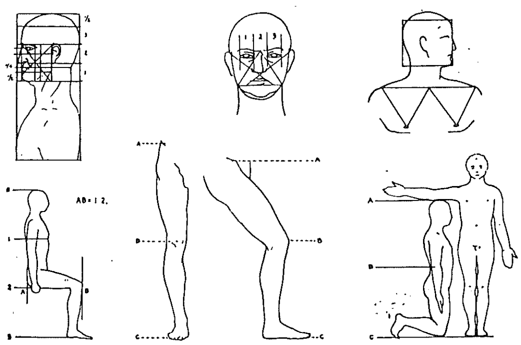
La pregunta es muy amplia y una contestación completa requeriría un tratado de Estética, como, por ejemplo, el de Matila C. GHYKA (1983). Me conformé con proponer a mis alumnos que, en fotografías de edificios, de cuadros, de cerámicas, etcétera..., tratasen de localizar algún rectángulo áureo, uniendo puntos o enmarcando aspectos significativos de la obra, como hace la película con el Partenón, con la Gioconda o con la catedral de Notre-Dame. Muy útil en esta tarea les fue el compás áureo, que construyeron con dos palitos afilados (de helado, por ejemplo) unidos de modo que la razón sea 1,6.

Les hice también otra pregunta relacionada con ésta y que, sin duda, completa la formulada antes sobre el significado del rectángulo de oro: ¿Por qué los artistas emplean en sus obras el rectángulo de oro con relativa frecuencia?

Pegué en una pared de la clase 6 cartulinas rectangulares grandes, numeradas, del mismo color, cuyas razones entre sus lados eran, respectivamente, 1, 1'2, 1'4, 1'6, 1'8 y 2, y les pedí que, en votación secreta y sincera, escogieran la que más le gustaba. La mayoría se decidió por la de razón 1'6. Luego, ellos sacaron las conclusiones de este hecho.



1. Compás áureo doble, de puntas extensibles y con tornillo fijable.
2. Compás áureo doble, curvo, para diámetros o calibres.
3. Compás áureo doble, recto.
4. Compás áureo de tres puntas.



Cánones y proporciones humanas de LEONARDO en base a medidas iguales, por comparación.

6. ¿Cómo se relaciona el rectángulo de oro con el cuerpo humano?

Yo creí que, en la película, quedaba claro este aspecto, pero observé que no era así, puesto que los alumnos creían que había que enmarcar en un rectángulo áureo el cuerpo humano o alguna de sus partes. Les expliqué que esto no era necesario y que bastaba con medir longitudes: del ombligo a la cabeza, del ombligo a los pies, de las rodillas a los pies, etc., y luego hallar sus cocientes. Aclarado esto, les pedí que recogieran fotografías de personas y/o esculturas y que, en ellas, corroboraran o rechazaran las hipótesis que hacía la película sobre las proporciones del cuerpo humano, y que tratasen de encontrar otras.

7. ¿Qué tienen en común los números con las figuras?

Esta pregunta me sorprendió enormemente por su profundidad: buscar la relación, lo que hay de común, entre números y figuras, entre números y realidad, es uno de los cometidos más importantes de la Geometría, y en general, de todas las ciencias.

En una actividad anterior, habíamos comprobado experimentalmente, midiendo, que la razón entre los lados de un rectángulo áureo era 1'6, aunque algunos alumnos hubieran obtenido 1'56, 1'62, 1'57, 1'63, etc. ¿Sería posible calcular la razón exacta sin necesidad de medir los lados del rectángulo áureo?

Pedí a los alumnos que analizaran los tres triángulos que utiliza la película para obtener el rectángulo áureo (fig. 3): el primero es un triángulo isósceles cuyos ángulos miden 36°, 72° y 72° respectivamente; el segundo es también isósceles, sus ángulos miden 36°, 36° y 108°, y junto con el triángulo *FEG,* que tiene a su derecha, constituye otro triángulos isósceles semejante al primero; el tercero es del mismo tipo que el segundo y también junto con el triángulo *FHI,* que tiene a su izquierda, forma uno semejante al primero.

¿Qué relación existe entre los lados de un triángulo isósceles de 36°, 72°, 72°?

El siguiente razonamiento, realizado por mí sobre una transparencia, y, al mismo tiempo, por los alumnos osbre su cuaderno no fue comprendido por la mayoría (fig. 5):

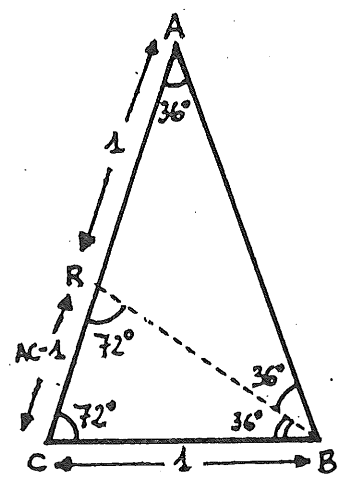


Fig. 5

«Tomemos como segmento unidad la base *BC* del triángulo. Al trazar la bisectriz *BR* del ángulo *B,* el triángulo *RBC* obtenido es semejante al total, *ABC,* puesto que son respectivamente iguales sus tres ángulos. Por lo tanto, deberá verificarse:

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CR}};$$

como, además, por la construcción de la bisectriz, resultan ser isósceles los triángulos *ARB* y *RCB,* se verifica también que: $BC = BR = 1$ y que $CR = AC - 1$. Sustituyendo arriba se obtiene:

$$\frac{\mathrm{AC}}{1} = \frac{1}{\mathrm{AC}-1}\ ;\ \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AC} - 1 = 0\ ;\ \mathrm{AC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Luego la razón exacta entre los lados del rectángulo de oro construido a partir de este triángulo es $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180...$

Si partimos del segundo triángulo, *DEF*, como $EF = EC$, la relación entre *DE* y *EF* vuelve a ser $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puesto que el triángulo total *DEG* es semejante al *ABC* que acabamos de estudiar. Y lo mismo sucede, si partimos del triángulo *FGH*.

En resumen, la razón entre el lado mayor y el menor de un rectángulo áureo es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; y esta propiedad sirve para definir y caracterizar a los rectángulos áureos.

El número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ fue llamado por Leonardo da Vinci Número de Oro, y Divina Proporción por su amigo Lucca Pacioli quien escribió un libro exaltando las propiedades tanto geométricas como aritméticas. Se suele representar por la letra Φ y, cuando la razón entre dos segmentos es el número de oro, se dice que el menor es la sección áurea del mayor.»

Finalmente, les presenté una transparencia con la fig. 6 y les pedí que, a partir de ella, interpretándola, aprendieran a construir el rectángulo de oro. Aunque con ayuda, al final, todos lo consiguieron. Constatamos, así, que habíamos cerrado el ciclo que iba de la figura (el rectángulo de oro) al número y de éste a la figura de nuevo.

No pudimos realizar ninguna actividad más por falta de tiempo, pero la experiencia resultó muy positiva tanto para mí como para los alumnos y creo que puede ser trasladada formalmente a cualquier otro nivel educativo entre los 12 y 16 años.

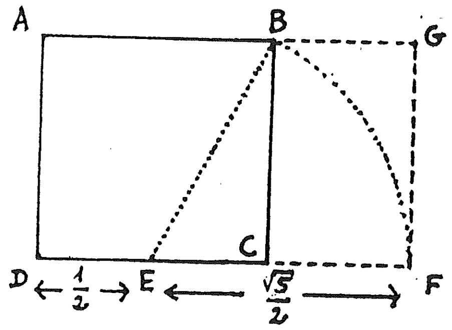


Fig. 6

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C. y TRILLAS, E., 1984, *Lecciones de Álgebra y Geometría* (Gustavo Gili, Barcelona).

BOYER, C. B., 1986, *Historia de la Matemática* (Alianza Editorial, Madrid).

CASTELNUOVO, E., 1963, *Geometría intuitiva* (Labor, Barcelona).

GHYKA, M. C., 1983, *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes* (Poseidón, Barcelona).

Grupo GAUSS, 1985, *Geometría activa* (ICE, Salamanca).

PEDOE, D., 1979, *La Geometría en el arte* (Gustavo Gili, Barcelona).

RODRÍGUEZ ROJO, M. y otros, 1987, «Aportación teórico-práctica a la Investigación por Equipos en las EUMs», *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado,* núm. 0, pp. 77-100.