

# Poliedros flexibles

Ceferino Ruiz Garrido

Mi primer contacto con los poliedros flexibles fue en el Seminario de Nicolás Bourbaki, en febrero de 1978, cuando N. H. KUIPER<sup>1</sup> sorprendió a la audiencia con un enorme poliedro de aluminio que resultaba ser flexible. Allí planteó, entre otras, las siguientes preguntas: ¿Cuál es el número mínimo de vértices para una esfera poliédrica flexible?

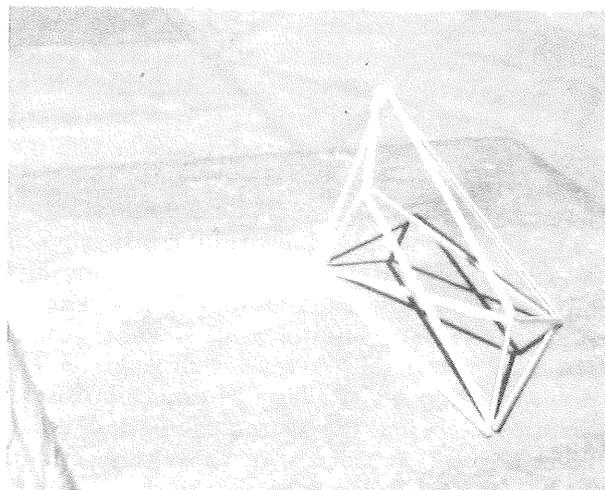
Por esfera poliédrica quiso referirse a los poliedros usuales para excluir a otros poliedros «raros», como pueden ser las traingulaciones sobre toros, botellas de Klein, etc... Por eso, en lo que sigue, llamaremos simplemente poliedros a las esferas poliédricas. Hagamos una reflexión sobre la situación en la que se encontraba el problema. La cuestión de saber si existe algún poliedro que sea flexible se remonta al libro II de los *Elementos* de Euclides. Un poliedro flexible, que algunos han dado en llamar flexaedro, es un poliedro  $P$  del espacio euclideo, para el que existe una familia

uniparamétrica continua de poliedros  $P_t$ , con  $P_0 = P$ , de manera que, para cada  $t \neq 0$ ,  $P_t$  es isométrico a  $P$ , pero no se obtiene de  $P$  por una isometría del espacio euclideo. En 1813, A. L. CAUCHY<sup>2</sup> demostró que todo poliedro convexo es rígido, es decir, no es flexible, pero dejó abierta la *conjetura de Cauchy-Euler*, en la que se establecía que todo poliedro de caras rígidas es inflexible. Hubo que esperar más de siglo y medio para que la conjetura fuera refutada por R. Connelly.

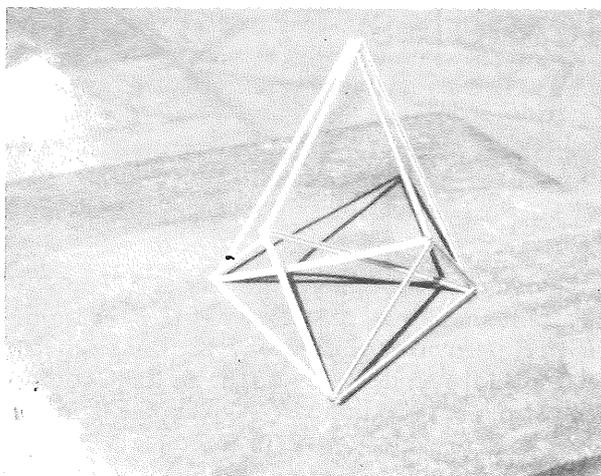
Entre los polígonos, tanto en el plano como en el espacio, los únicos que son rígidos son los triángulos, pues los de cuatro o más lados son siempre flexibles. Por tanto, para garantizar la rigidez de las caras del poliedro, cuyo número,  $C$ , está determinado por el número,  $V$ , de vértices,  $C = 2V - 4$ , podemos suponer que todas ellas son triángulos, aunque eventualmente algunos de ellos estén en un mismo plano formando otro tipo de polígonos. Así podemos considerar únicamente el esqueleto, formado por los vértices y las aristas

<sup>1</sup> KUIPER, N. H., «Sphères Polyhédriques Flexibles dans  $E^3$  (d'après Robert Connelly)», *Séminaire N. Bourbaki*, exposé 514, 1977-78.

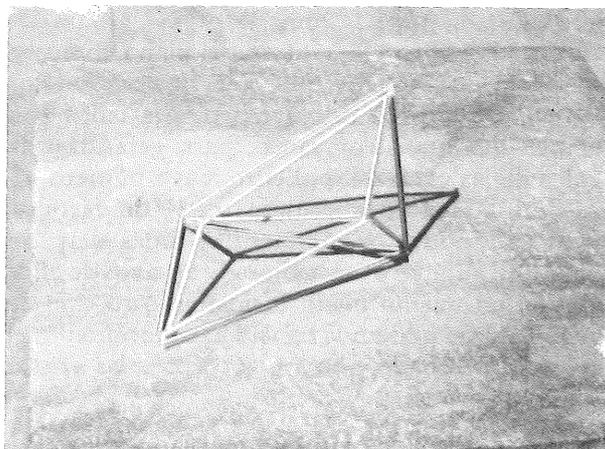
<sup>2</sup> A. L. CAUCHY, «II.<sup>a</sup> Mémoire sur les polygènes et les polèdres», *J. Ecole Polytechnique*, 19 (1813), 87-98.



Octaedro de Bricard, tipo I.



Octaedro de Bricard, tipo II.



Octaedro de Bricard, tipo III.

que los unen, siendo el número de estas últimas  $A = 3V - 6$ , por la fórmula de Euler:  $C + V = A + 2$ . Para encontrar un poliedro flexible puede comenzarse con la búsqueda de un esqueleto flexible. Este esqueleto debe tener, al menos 6 vértices, pues con 4 vértices corresponde al esqueleto de un tetraedro, que es rígido y convexo, y con 5 es el de dos tetraedros unidos por una cara, que por ser rígido cada tetraedro, el poliedro es rígido. En el caso de 6 vértices, tales que en cada uno de ellos tienen que coincidir 4 de las 12 aristas, se obtiene el esqueleto de un octaedro (se han evitado los vértices rígidos en que sólo confluyen tres aristas).

En 1897, R. BRICARD<sup>3</sup> encontró todos los octaedros flexibles, pero sus tres tipos de *octaedros articulados* no son propiamente los esqueletos de poliedros, ya que sus caras se cortan transversalmente lo que hace que si quisiéramos proyectarlo en una esfera, los puntos de los cortes no tendrían determinada su imagen en dicha proyección; es decir, son inmersiones poliédricas de la esfera, pero no son inyectivas. El primer tipo corresponde a octaedros que tienen un eje de simetría; el segundo a los que poseen un plano de simetría que pasa por dos vértices opuestos; y el tercero, de más difícil descripción, corresponde a octaedros en los que todos los ángulos tetraedros tienen sus caras opuestas iguales o suplementarias dos a dos. Aunque los resultados de Bricard no resolvieron la conjetura, posteriormente han sido esenciales para su resolución, pues en ellos se basa el razonamiento.

Después de los trabajos de Bricard, el problema estuvo parado durante largo tiempo, hasta que R. CONNELLY<sup>4</sup> retomara el tema de la flexibilidad, en 1976. Desde entonces hasta ahora ha evolucionado mucho el problema. La idea de Connelly consiste en tomar un octaedro de Bricard adecuado de entre los del primer tipo. La razón por la que los octaedros de este tipo no son rígidos es que tienen un eje de simetría. Concretamente, si se tiene un cuadrilátero,  $ABCD$ , que tenga iguales los lados opuestos, cuyos vértices no han de estar necesariamente en un plano, la recta que une los puntos medios de las diagonales es la perpendicu-

<sup>3</sup> R. BRICARD, «Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé», *J. Math. Pures Appl.* (5), 3 (1897), 113-148.

<sup>4</sup> R. CONNELLY, «A counter-example to the rigidity conjecture for polyhedra», *Publ. Math. IHES*, 47 (1978), 333-338.

lar común a ambas y, por tanto, un eje de simetría del cuadrilátero (fig. 1). Si tomamos un punto cualquiera  $E$ , que no esté en ese eje, al unirlo con los cuatro vértices del cuadrilátero resulta una especie de pirámide lateral que lo tiene por base. Dicha pirámide es flexible. Fijando dicho eje, al realizar una flexión de esta pirámide lateral, el punto  $F$ , simétrico del vértice  $E$  de la pirámide, respecto del eje, se mueve también, manteniendo constantes sus distancias a los vértices del cuadrilátero, que son iguales a las distancias del punto  $E$  a dichos vértices. Por tanto, el esqueleto octaédrico  $A, B, C, D, E, F$  es flexible, lo que ocurre es que en el correspondiente poliedro, algunas caras se cortan (fig. 2). Para construir su octaedro, Connolly parte de un paralelogramo del plano,  $ABCD$ , y toma el punto  $E$  también en el plano, pero fuera de las diagonales, siendo  $F$  su simétrico respecto del centro del triángulo. Al unir  $E$  y  $F$  con  $A, B, C$  y  $D$  (fig. 3), se tiene un octaedro plano articulado, que será flexible, cuando se tome la arista  $EC$  sobre  $FD$ , y  $EB$  bajo  $FA$  (fig. 4), o bien, cuando se sustituya alguna de estas aristas por una curva (fig. 5) que haga una especie de puente a la altura

de uno de los puntos,  $P$  o  $Q$ , de intersección de las aristas  $EC$  con  $FD$  y  $EB$  con  $FA$ , respectivamente. A continuación, sobre los triángulos  $ABE$ ,  $EBC$  y  $CDE$  monta pirámides laterales de base triangular, y bajo los triángulos  $ABF$ ,  $FDA$  y  $FDC$  coloca otras pirámides similares. Finalmente, sitúa las caras de los triángulos  $AED$  y  $CFB$ . El poliedro resultante sólo tiene  $P$  y  $Q$  como puntos dobles. Para que este poliedro pueda realizar una verdadera flexión, es necesario construir un hueco en alguno de los diedros de las aristas citadas, a la altura de los puntos  $P$  o  $Q$  (fig. 6), para que uno de estos diedros

Fig. 1

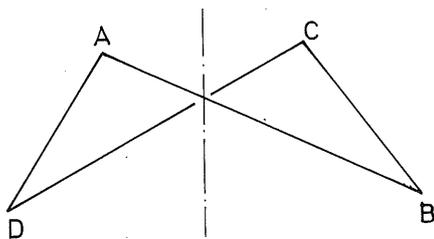


Fig. 2

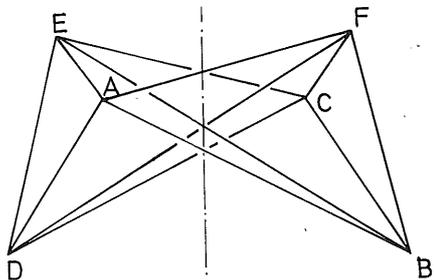


Fig. 3

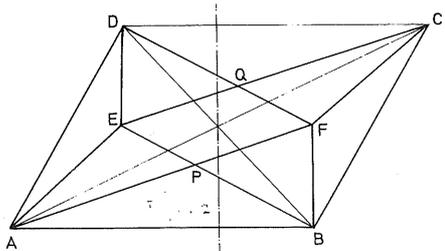


Fig. 4

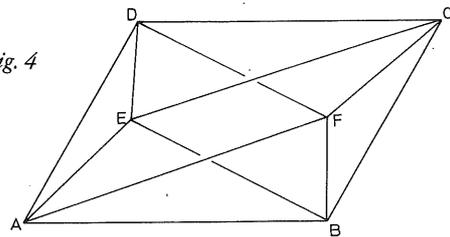


Fig. 5

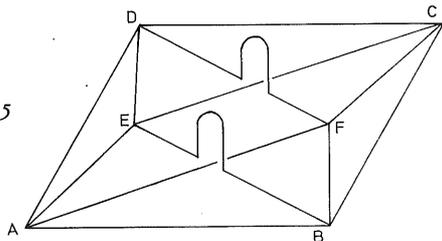
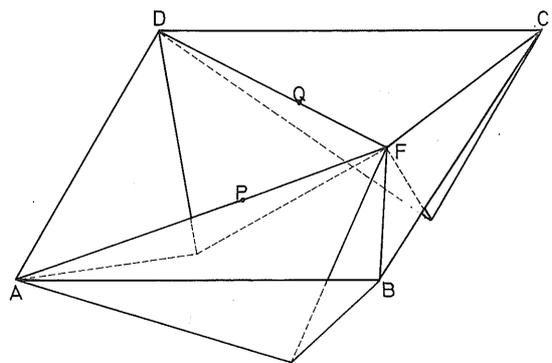
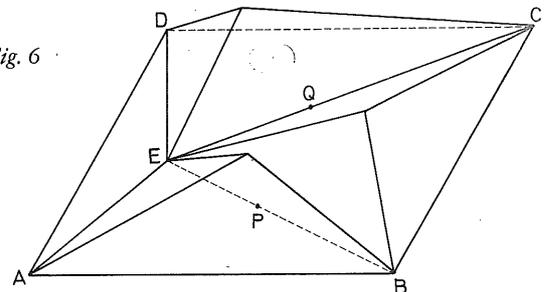


Fig. 6



pueda entrar en el otro. Esto lo consigue Connelly al realizar su *hueco* poliédrico que también se basa en un octaedro de Bricard muy particular. Es del mismo tipo que el anterior, pero ahora el cuadrilátero de partida tiene los cuatro lados iguales, por lo que, además del eje, posee dos planos de reflexión que se cortan perpendicularmente a lo largo del eje. Si el cuadrilátero de partida es el  $A'B'C'D'$  y el vértice considerado,  $E'$ , se encuentra en uno de esos planos de simetría, pero fuera del eje, resulta que  $F'$  es simétrico de  $E'$ , tanto respecto al eje, como al otro de los planos. De esta forma, el octaedro resultante tiene simultáneamente las propiedades de los octaedros del primer y segundo tipos, y además un nuevo plano de simetría. En este octaedro, como en todos los del segundo tipo, se presenta la dificultad de que dos de las aristas se cortan en cualquier instante de la flexión (en la fig. 7 las aristas son  $C'E'$  y  $A'F'$ , que se cortan en  $R$ ), por lo que realmente no es un octaedro articulado constructible, pero eso no importa, ya que para su trabajo prescinde de una de ellas (en la fig. 7, la  $A'F'$ ). Justamente, al eliminar una de esas aristas, así como las dos caras que en ella inciden, lo que queda es el esqueleto de una superficie poliédrica que realiza una flexión con un plano de simetría, pudiendo acoplarse a unos huecos triangulares, realizados con las medidas iguales a las aristas del hueco poliédrico, en las caras de uno de los diedros y haciendo coincidir el plano de simetría del hueco con el bisector del diedro. El resultado es un diedro con un hueco, como en la fig. 8, en el que

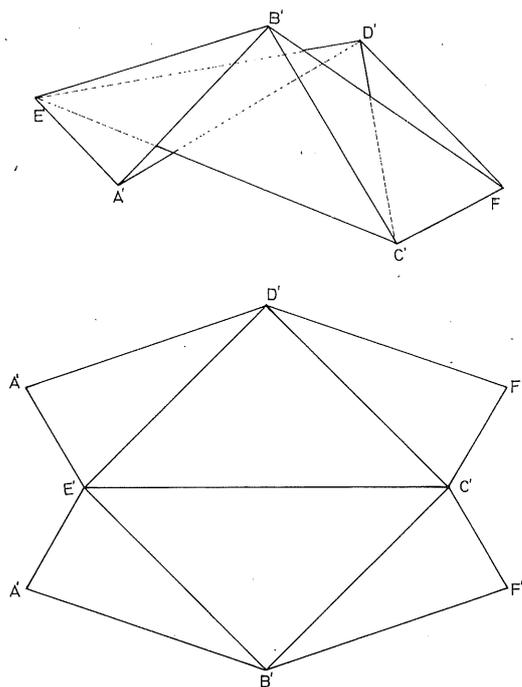


Fig. 8.—El hueco de Connelly y su desarrollo.

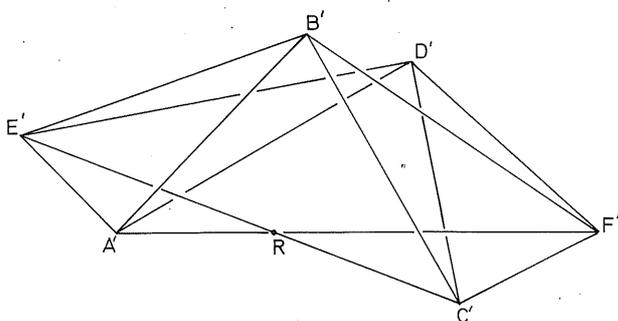


Fig. 7.—El esqueleto del hueco de Connelly.

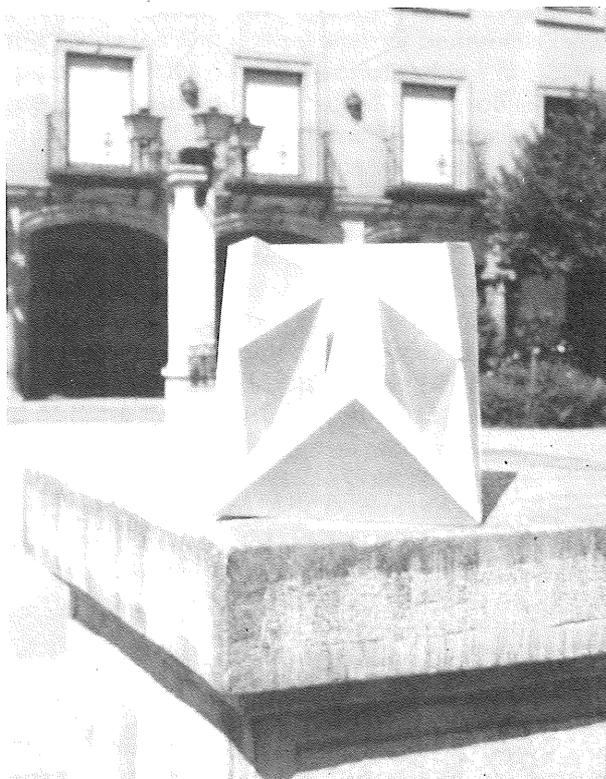


Foto 4.—El poliedro de Connelly.

puede introducirse transversalmente, otro diedro. Del tamaño del hueco y de la amplitud del diedro que se desea introducir en él, dependerá la amplitud de la flexión. El resultado es el *Poliedro flexible de Connelly*, que tiene 18 vértices, 54 aristas y 32 caras. La versión en aluminio mostrada por Kuiper, que ha sido el más difundido de los poliedros flexibles, incluía dos de estos huecos poliédricos, por lo que tenía 24 vértices, para hacer con ellos más vistosa la exposición, ya que así puede moverse el poliedro a ambos lados del plano que contiene el rectángulo de partida.

A partir de aquí, mi trabajo consistió en eliminar aquellas pirámides triangulares que no eran estrictamente necesarias para la flexión, por ejemplo, si se ha colocado el hueco en el diedro *EB*, las pirámides montadas sobre *ECD* y *FCD*, pueden suprimirse y sustituirse por caras, ya que al mover el poliedro estas caras se separan. También agrandando el hueco poliédrico hasta cubrir toda la arista del diedro en que se ha colocado y haciendo coincidir sus vértices con los de las caras en que ha sido colocado el hueco, así como deformando las magnitudes del paralelogramo de partida cuanto sea necesario, pueden suprimirse nuevos vértices que no intervienen de modo efectivo en la flexión. Con esta filosofía llegué a obtener un poliedro flexible con 11 vértices (foto 5) y luego con 10 (foto 6) quedando, en este último, un solo vértice que no interviene en la flexión por incidir solamente tres aristas en él. Todos los intentos que realicé para eliminar ese vértice rígido fueron vanos.

Ya corría la primavera de 1978 cuando en una entrevista con N. H. Kuiper, en el IHES, mostré estos resultados. En aquella entrevista participó K. Steffen quien varios días después me enviaba una nota con el desarrollo de su poliedro con 9 vértices (foto 7).

La idea de STEFFEN<sup>5</sup> se basa en partir de dos discos poliédricos iguales, del mismo tipo que los utilizados por Connelly en su hueco, y unirlos adecuadamente por dos aristas consecutivas. El resultado es una superficie poliédrica que tiene en el borde un cuadrado alabeado. Se observa que las dos estructuras poliédricas, que se han unido, pueden flexionar independientemente la una de la otra, siempre que se tomen las medidas adecuadas

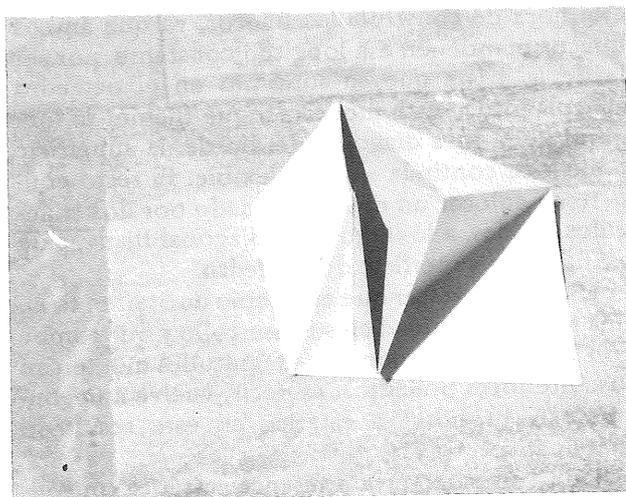


Foto 5.—Poliedro con 11 vértices.

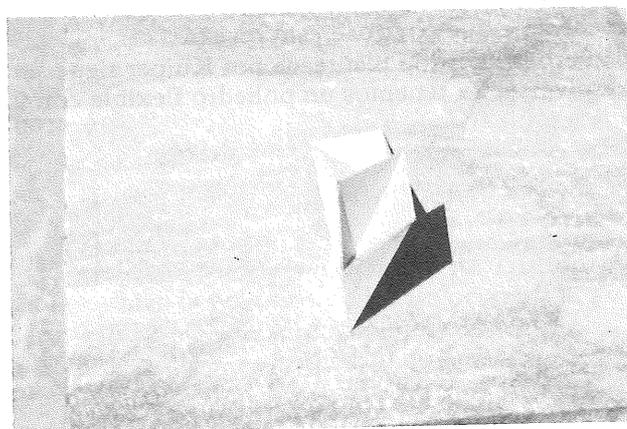


Foto 6.—Poliedro con 10 vértices.

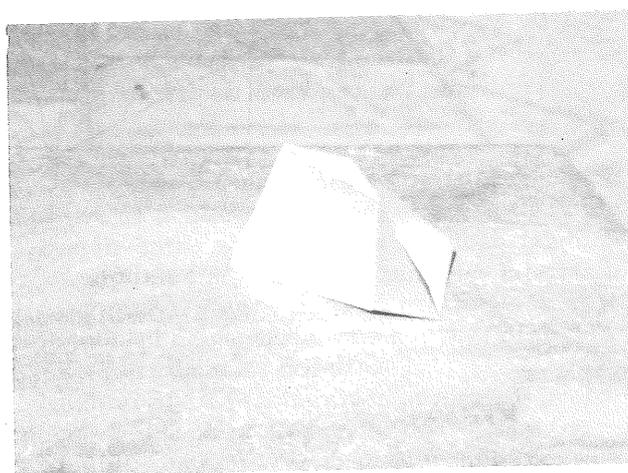


Foto 7.—Poliedro con 9 vértices.

<sup>5</sup> R. CONNELLY, «A Flexible Sphere», *Math. Intelligencer*, 1 (1979), 130-131.

a la hora de construir los huecos, ya que ambos huecos mantienen esa longitud constante, por ser la de la arista que se suprimió en el octaedro articulado. De este modo, aunque fijemos la longitud de la otra diagonal del borde, la superficie poliédrica continúa siendo flexible. El resto consiste en colocar un diedro formado por dos triángulos iguales, a lo largo de la diagonal fijada, para así cerrar la superficie del poliedro.

Hay que destacar que el ingenio de Steffen tiene una gran simplicidad en su desarrollo y que rompe con las desproporcionadas magnitudes que tenían los anteriores poliedros, es decir, vuelve a encontrarse la proporción estética en este resultado matemático.

Para comparar esta diferencia estética, puedes realizar con cartulina un poliedro flexible de Steffen sirviéndote del desarrollo que aparece en la fig. 9 y construir el poliedro de 10 vértices utilizando el recortable que contiene esta revista.

Pero la cuestión planteada por Kuiper sigue sin resolverse. Ya tenemos un poliedro flexible con 9

vértices y también se sabe que con 7, o menos, no puede construirse. Queda pues por dar respuesta a la pregunta: ¿Existe algún poliedro flexible con 8 vértices?

Todos los poliedros flexibles que conozco, incluido otro construido por P. Deligne con 11 vértices, que también parte del mismo principio y que puede verse en el vídeo de J. BRETTE y P. HUET<sup>6</sup>, tienen la propiedad de que a lo largo de la flexión conservan el volumen del espacio que encierran. Esto hace que se plantee la siguiente interrogante: ¿Existe algún poliedro flexible que varíe su volumen a lo largo de la flexión?

Sería para mí una gran satisfacción recibir del lector de este artículo la respuesta a alguna de las preguntas planteadas.

<sup>6</sup> J. BRETTE y P. HUET, *Poliédros flexibles*, IREM de la Univ. París, 7 (1979).

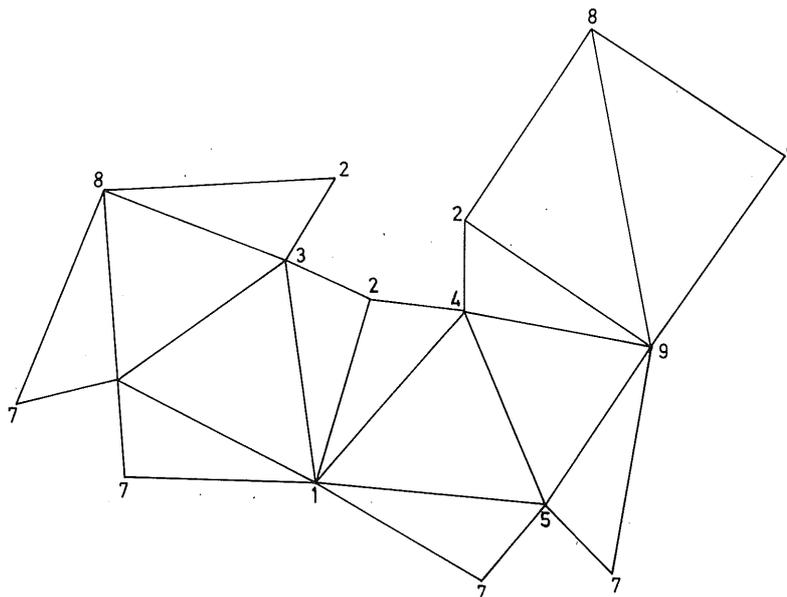


Fig. 9.—Desarrollo del poliedro de Steffen.