Funciones, simetría y frisos

Claudi Alsina Català
y
Jaume Ll. García-Roig

La interdisciplinariedad en la enseñanza es una necesidad metodológica si se pretende ofrecer una visión global, interactiva y plural de los diversos campos del saber que hoy inciden en la formación académica. En el caso de las Matemáticas no sólo cabe atender a la incidencia de éstas en las otras asignaturas, y viceversa, sino pensar en *la propia interdisciplinariedad entre las diversas ramas matemáticas.* Es muy bello, por ejemplo, que el estudio de una curva sea motivado por un análisis físico realizado en un laboratorio y luego ver cómo la misma curva tiene una lectura interesante en Ciencias Sociales. Pero sería un grave error no integrar en el estudio de la curva las aportaciones aritméticas, geométricas, analíticas..., etc.

En el presente artículo planteamos una integración de la Geometría en el estudio de funciones, es decir, *analizar las gráficas de funciones como figuras geométricas.* Con vistas a simplificar nuestra exposición consideraremos funciones f con dominio e imagen en los números reales y denotaremos por grafo *(f)* la gráfica en el plano.

1. La simetría de una función

Traslaciones, simetrías y giros son los movimientos rígidos del plano. Un primer estudio interesante puede ser, dada una función f, ver cómo es posible que su gráfica quede invariante por tales transformaciones, es decir, encontrar el grupo de simetría de la gráfica de la función:

a) *Gráficas y traslaciones*

Fijado un vector (a, b) no nulo queda definida la traslación

$$T(x, y) = (x + a, y + b).$$

Que una gráfica de una función f quede invariante por T equivale a la condición $T[graf(f)] = graf(f)$, es decir,

$$f(x + a) = f(x) + b,$$

para todo real x. Esta ecuación [1] equivale a decir que f sea *periódica en la dirección* (a, b) y obviamente debe ser $(a, b) \neq (0, 1)$.

Ejemplos típicos de este caso son las funciones sin x, cos x con $(a, b) = (2\pi, 0)$.

b) Gráficas y simetrías axiales

Fijada una recta r de ecuación $y = ax$ queda definida la simetría axial

$$S(x, y) = (Ay + Bx, Ax - By)$$

donde $A = 2a/(1 + a^2)$ y $B = (1 - a^2)/(1 + a^2)$. En el caso $a = 0$ resulta ser $S(x, y) = (x, -y)$ y no puede existir ninguna gráfica de función invariante por dicha simetría dado que, por definición, a cualquier punto del dominio sólo le puede corresponder una única imagen. Si $a \neq 0$ sí que puede darse esta simetría. Concretamente $S[graf(f)] = graf(f)$ equivale a la ecuación funcional

$$f[Af(x) + Bx] = Ax - Bf(x).$$

Así, por ejemplo, si $a = 1$ la condición [2] se reduce a,

$$f[f(x)] = x,$$

es decir, f es una función biyectiva igual a su inversa que se denomina *involutiva.* Éste es el caso de las funciones x, $-x$, $1/x$.

Cuando el eje de simetría es el eje OY resulta la condición

$$f(-x) = f(x),$$

conocida popularmente por la denominación de *paridad.* Tal es el caso de x^2, $\cos x$, $|x|$,...

c) *Gráficas y giros*

Los únicos giros compatibles con la definición de función continua son obviamente los de 180° y en este caso de simetría central resulta la condición

$$f(2m - x) = 2n - f(x),$$

si (m, n) es el centro de giro. En el caso de centro $(0, 0)$ resulta la conocida condición de *imparidad*

$$f(-x) = -f(x)$$

Tal es el caso de x^3, $\sin x$,...

Este apartado puede presentarse cómodamente con transparencias y retroproyector. En una transparencia se indicarán los dos ejes y la diagonal. En otras transparencias se dispondrán de las gráficas de x^2 y $\sin x$. Mediante una transparencia sin dibujar se podrán ensayar la traslación, simetría y giro de la totalidad o partes de x^2 y $\sin x$ e ir dibujando las gráficas así generadas. Puede ser instructivo insistir sobre la relación entre seno y coseno vía traslación y hallar las gráficas de funciones inversas vía la simetría en la diagonal.

2. Funciones friso

En la geometría clásica un *grupo de friso F* es cualquier subgrupo del grupo de isometrías del plano cuyos elementos dejan invariante una recta r y tal que todas las traslaciones contenidas en F son generadas por una sola traslación T diferente de la identidad. Así un *friso* será cualquier figura plana que queda invariante por un grupo de friso F. Es bien conocido que existen exactamente *7 tipos de frisos* (fig. 1).

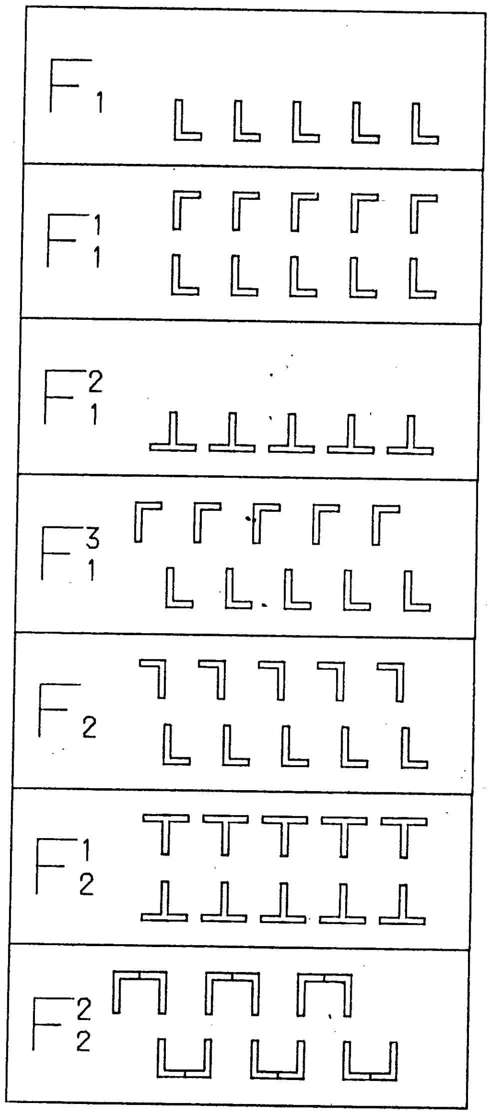

Fig. 1.—Tipos de frisos.

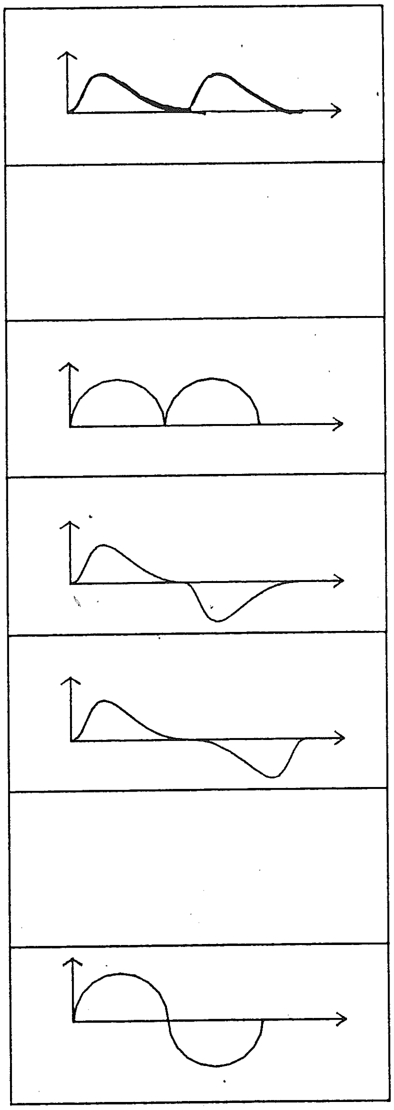

Fig. 2.—Funciones friso con recta de friso el eje OX.

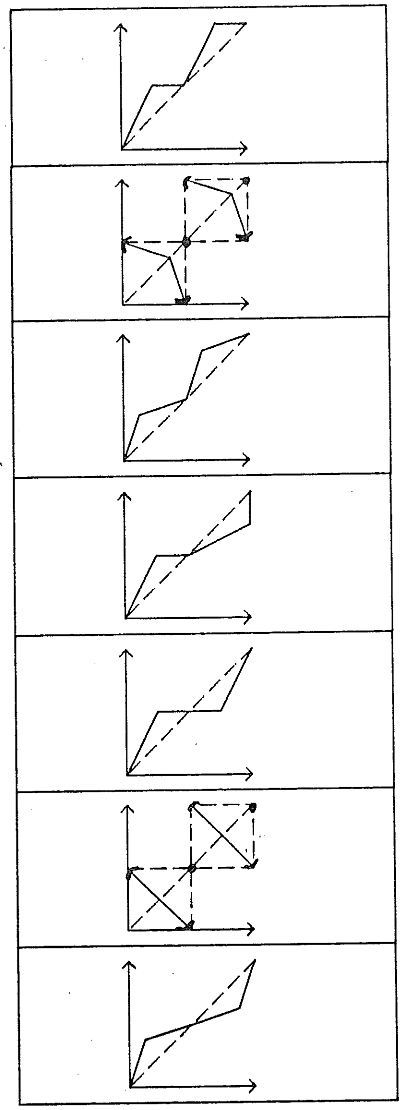

Fig. 3.—Funciones friso con recta de friso una recta distinta a los ejes.

Fijada la recta r si T indica la traslación en la dirección de r, S la simetría respecto de r, S' una simetría de eje perpendicular a r, G el giro de 180º alrededor de un punto de r y L la simetría con desplazamiento $L = 1/2\ T \cdot S$, entonces los 7 tipos de frisos vienen generados por

$$F_1 = \langle T \rangle,\ F_1^1 = \langle T, S \rangle,\ F_1^2 = \langle T, S' \rangle,\ F_1^3 = \langle T, L \rangle$$
$$F_2 = \langle T, G \rangle,\ F_2^1 = \langle T, G, S' \rangle,\ F_2^2 = \langle T, G, L \rangle.$$

Un estudio sugestivo consiste en analizar *funciones friso,* es decir, aquellas funciones reales (definidas en toda la recta real) cuya gráfica es un friso. Para este objetivo hay que distinguir tres situaciones:

Caso 1.º Con recta de friso el eje $0Y$ no pueden existir funciones friso.

Caso 2.º Con recta de friso el eje $0X$ sólo pueden existir 5 tipos funciones friso al estar excluida la simetría respecto de $0X$ (fig. 2).

Caso 3.º Con recta de friso una recta diferente de los ejes cartesianos sí que pueden darse los 7 tipos. Es de destacar que recientemente hemos demostrado que ¡una función simétrica y periódica nunca puede ser continua! (fig. 3).

A nivel didáctico puede ser interesante proponer los dibujos de las funciones friso exigiendo a priori propiedades globales del friso. Así si se exige continuidad o diferenciabilidad la pieza generadora del friso debe cumplir ciertas condiciones cuya investigación puede tener interés cara a consolidar estas condiciones de regularidad, trabajando siempre a nivel visual y gráfico. Por supuesto en una primera aproximación al tema, como simple trabajo de gráficas de funciones, cabe recortar en cartón un trozo de función y con dicha plantilla dibujar los frisos correspondientes. Otra posibilidad es recortar dichos frisos en papel plegado en forma de acordeón o utilizar dos espejos pequeños iguales y paralelos donde al colocar un trozo de función se «verá» todo el friso. En este caso puede ser curioso ver cómo debe ser el trozo generador para que dé lugar a los distintos frisos.

REFERENCIAS

ALSINA, C. y GARCÍA-ROIG, J. Ll., *On symmetric periodic functions* (1987). (Pendiente de publicación.)

ALSINA, C. y TRILLAS, E., *Lecciones de Álgebra y Geometría,* Ed. Gustavo Gili, Barcelona (1983).

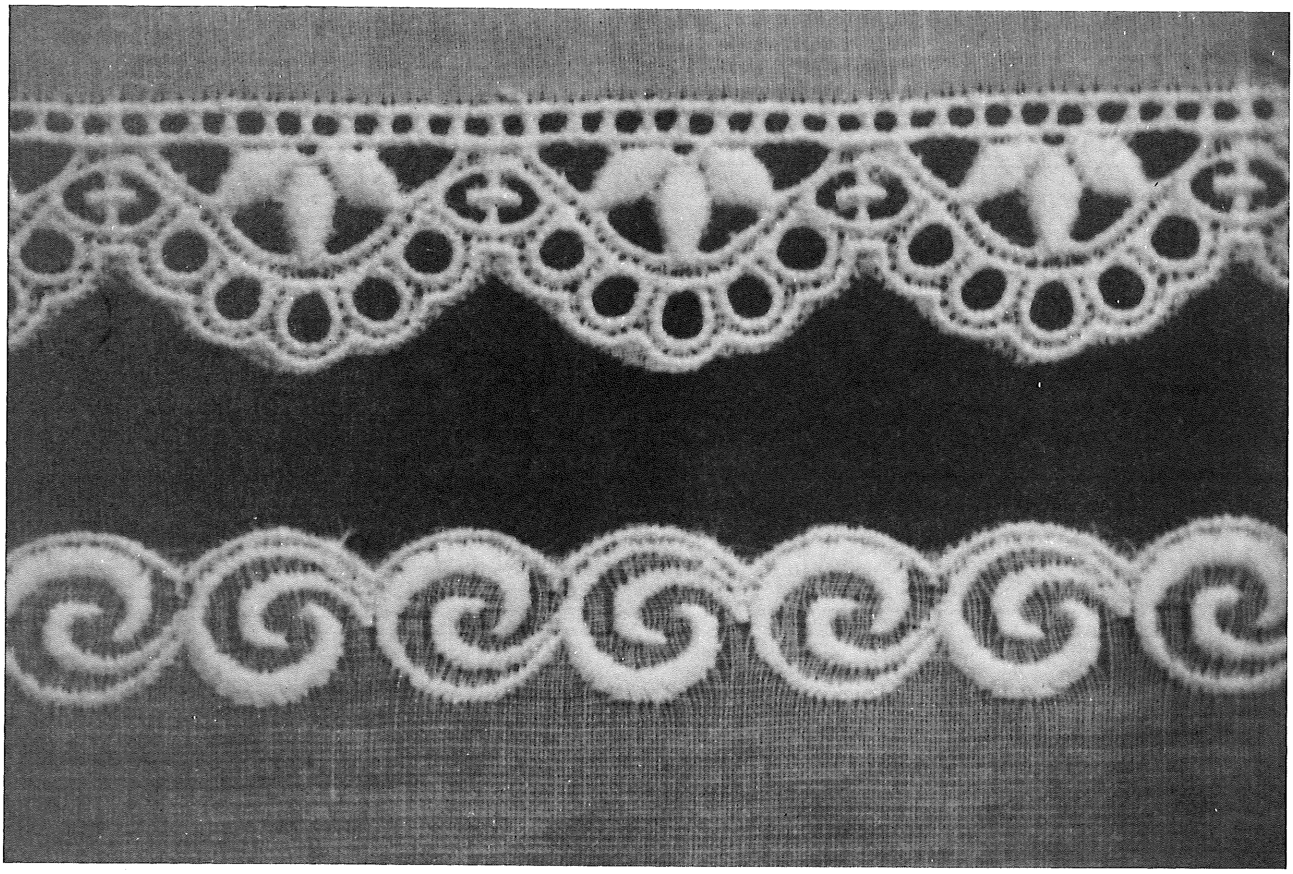

Foto: Pilar Moreno