suma+
ARTÍCULOS
Marzo 2015
78
pp. 37-45

Consecuencias de la falta de rigor en la definición de punto de inflexión

AUREL MUNTEAN

Un somero análisis de la bibliografía utilizada por los estudiantes de Bachillerato e incluso de Universidad, pone de manifiesto que existen todavía lagunas en la definición del concepto de punto de inflexión, así como errores de procedimiento para hallar estos puntos, que en ocasiones pueden generar confusión.

Mediante varios ejemplos y contraejemplos, el artículo demuestra que las dificultades que surgen en la distinción entre los puntos de inflexión y los puntos angulosos son fácilmente superables a nivel de Bachillerato.

Palabras clave: Investigación didáctica, Cálculo diferencial, Punto de inflexión, Punto anguloso, Bachillerato.

Consequences of the Lack of Rigour in the Definition of Point of Inflection

A shallow analysis of the bibliography used by the students of secondary school and even of University, it reveals that lagoons still exist in the definition of the concept of an inflection point as well as mistakes of procedure used to find these points and that in occasions can generate confusion.

By means of several examples and counterexamples, the article demonstrates that the difficulties that arise in the distinction between the points of inflexion and the angular points are easily surmountable to level of secondary school.

Key words: Didactic investigation, Differential calculus, Inflection point, Angular point, Secondary school.

El presente artículo está enfocado a destacar, a través de ejemplos, algunas sutilezas que presentan los puntos de inflexión y que pasan desapercibidas por los libros de texto de Bachillerato y algunos textos universitarios, causando confusión en los estudiantes e incluso en los profesores.

Tras realizar un análisis comparativo de la diversidad de definiciones del concepto de punto de inflexión proporcionadas por los libros de texto universitarios, en base al criterio de influencia sobre profesores como fuente de contenido curricular, y extrayendo una serie de observaciones, llegamos, finalmente, al diseño de una definición propia y de un procedimiento práctico a seguir para hallar dichos puntos.

Motivación para investigar un concepto clásico

Reflexionando sobre el concepto de punto de inflexión y el uso de un algoritmo para hallar tales puntos, como docentes nos preguntamos:

> ¿Podemos confiar en la definición que enseñamos?
> ¿Usamos el algoritmo apropiado?
> ¿Se podría haber escogido otro?

Artículo recibido en *Suma* en julio de 2013 y aceptado en enero de 2015

A la hora de escoger la definición adecuada para poder fijar con claridad y precisión el concepto de punto de inflexión tan diferentemente reflejado en la bibliografía matemática, consideramos necesario clarificar previamente dicho concepto que, por así decirlo, resulta dudoso para estudiantes e incluso profesores.

Distintos autores definieron ese concepto clásico o trataron de hacerlo, aunque en ocasiones de forma confusa. Explicaremos por qué tratando de clarificarlo todo lo minuciosamente que nos sea posible.

Trabajos que abordan el concepto

Dada la gran cantidad de materiales impresos o disponibles electrónicamente que abordan la cuestión, las citas mencionadas a continuación no resultarán exhaustivas. Es preciso, entonces, hacer algunas aclaraciones previas sobre los trabajos referenciados a fin de no generar equívocos en los lectores.

Buscando respuesta a las preguntas planteadas, definiciones precisas, válidas y fiables para el estudio del concepto que nos ocupa, las formulaciones más interesantes provienen de los libros de texto universitarios.

Las propuestas de definición del concepto de punto de inflexión que se encuentran en los libros de texto universitarios en castellano son numerosas y se caracterizan por alinearse con propuestas de otros autores.

El marco bibliográfico referencial que utilizamos para orientar nuestra posición valorativa de lo que es una conceptualización adecuada del término al que nos referimos se deriva de los trabajos clásicos de Piskunov (1969), Courant y Fritz (1999), Leithold (1998), Thomas y Finney (1998).

Para contrastar y explicar nuestros argumentos, las definiciones demasiado simplificadoras y que no aportan elementos de interés para su discusión en el tema objeto de estudio no han sido recogidas, ya que suelen tener enfoques parciales y referirse a determinados aspectos o partes de la cuestión.

Definiciones imperfectas debido a un requisito insuficiente

Detengámonos por un momento a reflexionar sobre la definición de ese concepto clásico: ¿qué entendemos por punto de inflexión? La siguientes son algunas definiciones propuestas por distintos autores en libros de texto universitarios:

> Definición 1. Un punto de una curva se llama punto de inflexión si en él la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa (Stewart, J., 2001, p. 298).

> Definición 2. Los puntos x en los que una función f pasa de cóncava a convexa o viceversa se llaman puntos de inflexión de f (Fernández Novoa, 2001, p. 258).

> Definición 3. Se dice que un punto $x_0 \in D_f$ es un punto de inflexión de f si la curva si cambia de concavidad en x_0 (Pérez Carrió et al., 2004, p. 256).

> Definición 4. Un punto de inflexión de f es un punto $x_0 \in Dom(f)$ donde la curva cambia de concavidad (pasa de cóncava a convexa o viceversa), es decir, la curva es convexa en $(x_0 - \partial, x_0)$ y cóncava en $(x_0, x_0 + \partial)$ o viceversa, para algún $\partial > 0$ (García López et al., 1998, p. 308).

Conclusión 1. Consideramos que esas cuatro caracterizaciones de un punto de inflexión por el cambio de curvatura son definiciones demasiado liberales e imprecisas, ya que desde nuestra perspectiva no basta con cambiar de concavidad en un punto para que dicho punto sea de inflexión. Veremos que hay funciones para las que esto es cierto y funciones para las que no.

Una definición clara e inequívoca debería tocar aspectos referentes a la continuidad y la derivabilidad en dicho punto y si en él la gráfica de la función debe tener una recta tangente.

Ilustramos mediante contraejemplos las carencias de estas definiciones. Lo que iremos señalando nos permitirá proponer una definición más rigurosa e inequívoca.

La hipótesis de continuidad debe ser tenida en cuenta

Contraejemplo 1

Consideremos la función de variable real:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & si\ x\leq 0 \\ -\sqrt{x}, & si\ x>0 \end{cases}$$

cuya primera y segunda derivadas son:

$$f'(x)=\begin{cases} -2x, & si\ x<0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & si\ x>0 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} -2, & si\ x<0 \\ \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}, & si\ x>0 \end{cases}$$

Es obvio que esta función es cóncava en $(-\infty,0)$ y convexa en $(0,+\infty)$. Por lo tanto, según todas las definiciones anteriormente citadas, el origen sería un punto de inflexión, aunque la función ni siquiera es continua en ese punto (véase la figura 1).

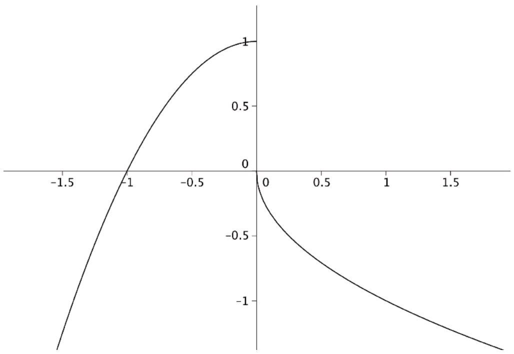

Imagen 1

Conclusión 2. Este ejemplo pone de manifiesto que la continuidad de la función es completamente imprescindible para que dicha función tenga puntos de inflexión.

Punto anguloso *vs* punto de inflexión

Contrejemplo 2

Consideremos la siguiente función continua:

$$f'(x)=\begin{cases} x^2, & si\ x\leq 0 \\ arctg(x), & si\ x>0 \end{cases}$$

cuya primera y segunda derivadas son:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & si\ x<0 \\ \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)}, & si\ x>0 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 2, & si\ x<0 \\ \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}, & si\ x>0 \end{cases}$$

Para hallar las derivadas laterales de la función en *x=0* resulta más cómodo hacer uso de una consecuencia del teorema de Lagrange:

$$f'\left(0^-\right)=\underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{Lim} f'(x)=0$$

$$f'\left(0^+\right)=\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim} f'(x)=1$$

Esta función es convexa en $(-\infty,0)$ y cóncava en $(0,+\infty)$ y cumple las definiciones 1, 2, 3 y 4. Sin embargo, el origen no es un punto de inflexión, sino un punto anguloso. En él, la gráfica de la función posee dos semitangentes (imagen 2): $y = 0$ (semieje negativo) e $y = x$ (bisectriz del primer cuadrante).

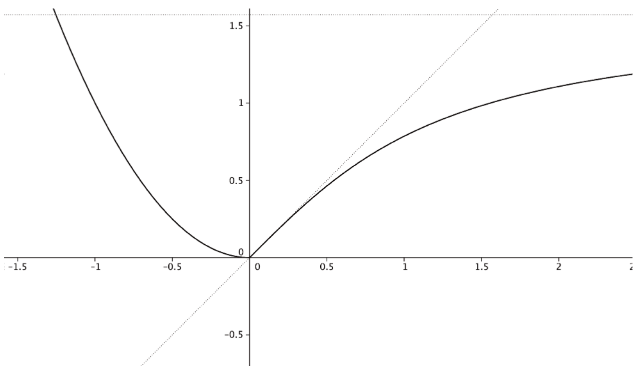

Imagen 2

Contraejemplo 3

La siguiente función de variable real es continua::

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & si\ x\le 0 \\ \sqrt{x}, & si\ x>0 \end{cases}$$

Su primera y segunda derivadas:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & si\ x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & si\ x>0 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 2, & si\ x<0 \\ -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}, & si\ x>0 \end{cases}$$

Aplicando una consecuencia del teorema de Lagrange, deducimos que:

$$f'\left(0^-\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=0$$
$$f'\left(0^+\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=+\infty$$

Esta función es convexa en $(-\infty,0)$ y cóncava en $(0,+\infty)$ y cumple las definiciones 1, 2, 3 y 4. Sin embargo, el origen no es un punto de inflexión, sino un punto anguloso. En él, la gráfica de la función tiene dos semitangentes perpendiculares: el semieje negativo *OY* y el semieje positivo *OY* (imagen 3).

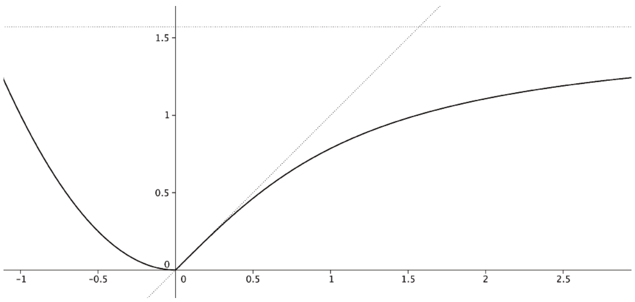

Imagen 3

Contraejemplo 4

También la función siguiente es continua en todo su dominio de definición.

$$f(x)=|x^2-1$$

Sus correspondientes derivadas:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & si\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ -2x, & si\ x\in(-1,1) \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 2, & si\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ -2, & si\ x\in(-1,1) \end{cases}$$

Las derivadas laterales de la función en $x=-1$ son:

$$f'\left(-1^-\right)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f'(x)=-2$$
$$f'\left(-1^+\right)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f'(x)=2$$

Nos encontramos con que, en $x=-1$, esta función pasa de convexa a cóncava y, sin embargo, ese punto no es un punto de inflexión, sino un punto anguloso. Algo parecido sucede en $x=1$, solo que aqui la función pasa de cóncava a convexa:

$$f'\left(1^-\right)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=-2$$
$$f'\left(1^+\right)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x)=2$$

No obstante, ese punto tampoco es un punto de inflexión, sino que se trata de un punto anguloso (imagen 4).

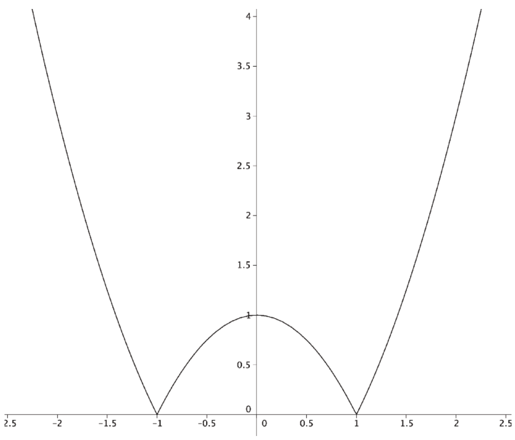

Imagen 4

Contraejemplo 5

Vamos a construir una función que destacará por sus infinitos puntos angulosos. Para ello, tomemos la función «distancia al entero más próximo», que se define, dado $n \in Z$, mediante la expresión:

$$dempt(t)=\begin{cases} t-n, & si\ t\in\left[n,n+\frac{1}{2}\right] \\ n+1-t, & si\ t\in\left(n+\frac{1}{2},n+1\right] \end{cases}$$

Definimos ahora $G:\mathrm{R}\to[0,1/2]$ mediante $G(x)=demp(x^2)$. Por una parte, esta función es continua en todo R al ser la composición de dos funciones continuas: la función x^2 y la función *dempt(x)*. Por otra, es una función par y su gráfica es simétrica con respecto al eje de ordenadas. En consecuencia, será suficiente estudiar la función restringida al intervalo $[0,+\infty)$ y que puede definirse de la siguiente forma para $n \in Z$:

$$g(x)=\begin{cases} x^2-n, & si\ x\in\left[\sqrt{n},\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right] \\ n+1-x^2, & si\ x\in\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}},\sqrt{n+1}\right] \end{cases}$$

Esta función *g(x)* es derivable en:

$$\mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{n},\sqrt{n+\frac{1}{2}}\ n\in\mathbb{N}\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\sqrt{\frac{p+1}{2}}\middle|p\in\mathbb{N}\right\}$$

Sus primeras derivadas vienen dadas por:

$$g'(x)=\begin{cases} 2x, & si\ x\in\left(\sqrt{n},\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right) \\ -2x, & si\ x\in\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}},\sqrt{n+1}\right) \end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases} 2, & si\ x\in\left(\sqrt{n},\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right) \\ -2, & si\ x\in\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}},\sqrt{n+1}\right) \end{cases}$$

En consecuencia, en todos los puntos del tipo:

$$x'_n=\sqrt{n+\frac{1}{2}},\ n\in\mathbb{N}$$

la gráfica de *g(x)* pasa de convexa a cóncava. Y pasa de cóncava a convexa en los puntos del tipo:

$$x''_n=\sqrt{n+1},\ n\in\mathbb{N}$$

Obviamente, esta función cumple las definiciones 1, 2, 3 y 4 en un conjunto infinito numerable de puntos angulosos, y aún así carece de puntos de inflexión. Nuestro análisis se confirma observando la gráfica de la función *g(t)* en $[0,+\infty)$ (imagen 5).

Conclusión 3. Por medio de los contraejemplos anteriores vemos que se tiene que imponer la condición de que la función tenga derivada finita (función derivable) o infinita (función no derivable) en el punto, para que dicho punto sea un punto de inflexión.

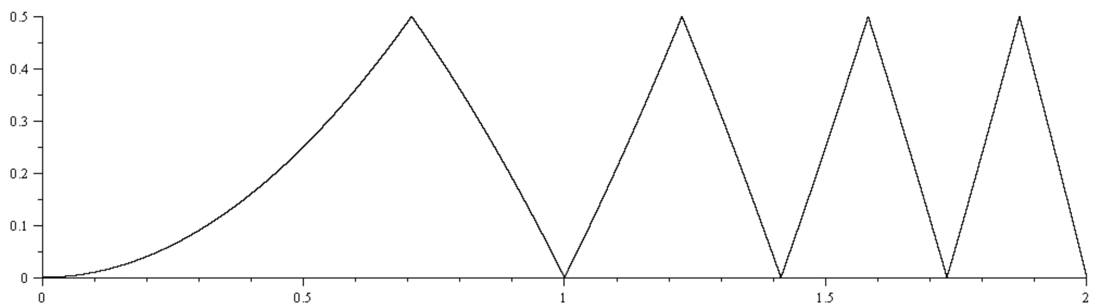

Imagen 5

La derivabilidad no es imprescindible

Veamos ahora otras definiciones de punto de inflexión:

> Definición 5. Un punto de inflexión de una función derivable es un punto en el que la tangente atraviesa la gráfica de la función (Riaza y Álvarez, 1996, p. 308).

> Definición 6. Sea *f* una función definida en un intervalo abierto *I*, y sea $a \in I$ en el que *f* es derivable. Tiene sentido considerar la recta tangente a *f* en *a*, de ecuación $y=g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$. Se dice que *a* es un punto de inflexión de *f* si existe ∂ tal que si $x \in (a-\partial, a)$, entonces $f(x)-g(x) \geq 0$; y si $x \in (a, a+\partial)$, entonces $f(x)-g(x) \leq 0$,o viceversa (Galindo Soto et al., 2003, pp. 177-178).

Contraejemplo 6

Consideremos la siguiente función de variable real continua en todos los puntos:

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$$

Su primera y segunda derivadas son:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & si\ x \neq 0 \\ +\infty, & si\ x=0 \end{cases}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}},\ \forall x \in R-\{0\}$$

Lo que tiene de original esta función es que no es derivable en $x=0$, por lo que no cumple las definiciones 5 y 6. Sin embargo, *f* presenta en el origen un punto de inflexión con tangente vertical. ¡Y ni siquiera es una función tan rara! (imagen 6).

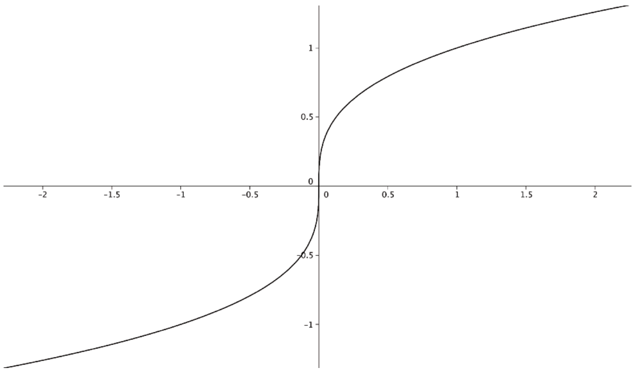

Imagen 6

Contraejemplo 7

La función:

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x}, & si\ x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & si\ x>0 \end{cases}$$

es continua y tiene por primera y segunda derivadas:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & si\ x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & si\ x>0 \end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{4x\sqrt{-x}}, & si\ x<0 \\ \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}, & si\ x>0 \end{cases}$$

Utilizando la definición de las derivadas laterales obtenemos:

$$f'(0^-)=\underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{Lim}\frac{-\sqrt{-x}}{x}=\underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{Lim}\frac{\sqrt{-x}}{-x}=$$
$$=\underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{Lim}\frac{-\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}\sqrt{-x}}=\underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{Lim}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$$

$$f'(0^+)=\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim}\frac{\sqrt{x}}{x}=\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=$$
$$=\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{Lim}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

En consecuencia, y aunque no es derivable en el origen, esta función presenta exactamente en él un punto de inflexión con tangente vertical (imagen 7).

Conclusión 4. La derivabilidad de la función no es una condición necesaria para que dicha función tenga un punto de inflexión. Hay casos en que la función es continua en un punto y tiene un punto de inflexión en ese punto, aunque la función no sea derivable en él. Este es precisamente el caso de funciones con derivada infinita.

Una conceptualización adecuada de punto de inflexión

Definiciones adecuadas de punto de inflexión se encuentran en trabajos clásicos:

> Definición 7. Un punto donde la gráfica de una función tiene una recta tangente y donde la concavidad cambia se llama punto de inflexión (Thomas y Finney, 1998, p. 211).

> Definición 8. El punto *(c,f(c))* es un punto de inflexión de la gráfica de la función *f* si la gráfica tiene una recta tangente en ese punto, y si existe un intervalo abierto *I* que contiene a *c* tal que si *x* está en *I*, entonces:
>
> $f''(x) < 0$ si $x < c$ y $f''(x) > 0$ si $x > c$; o bien:
>
> $f''(x) > 0$ si $x < c$ y $f''(x) < 0$ si $x > c$
> (Leithold, 1998, p. 233)

Estas definiciones nos sirven de pauta para la reformulación del concepto de punto de inflexión, que proponemos a continuación, atendiendo las consideraciones precedentes:

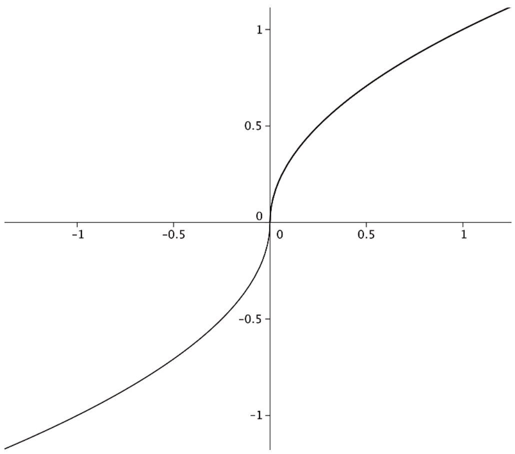

Imagen 7

> Definición 9. Sean $I \subset R$ un intervalo, $f : I \longrightarrow R$ y $x_0 \in Int(I)$. Al punto x_0 le llamaremos punto de inflexión de la función f si se cumplen las siguientes condiciones:
>
> 1) f es continua en x_0
> 2) $\exists f'(x_0) \in \overline{R}$
> 3) en x_0 la función cambia de concavidad

Obsérvese que la segunda condición de nuestra propuesta de definición expresa, en un lenguaje formal, la condición de que, en el punto de inflexión, la gráfica de la función debe admitir una recta tangente, independientemente de que su dirección sea horizontal, oblicua o vertical.

Según esta propuesta, la función representada en la figura 7 posee un punto de inflexión en $x = 0$ pese a tratarse de un punto cuya tangente es vertical y tiene pendiente infinita.

Procedimiento práctico con un enfoque diferente

El valor añadido de todo lo anterior: ¿Cómo evitar errores de procedimiento en el cálculo de los puntos de inflexión?

Un procedimiento frecuentemente empleado para hallar los puntos de inflexión es el siguiente:

a) Calculamos la segunda derivada $f''(x)$.

b) Resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$ y obtenemos los posibles puntos de inflexión.

c) Estudiamos el signo de la segunda derivada $f''(x)$ alrededor de los valores obtenidos anteriormente.

d) De los puntos hallados en (b), aquellos donde la segunda derivada cambia de signo son los puntos de inflexión de f.

Conclusión 5. El procedimiento anterior no es correcto, ya que los puntos de inflexión pueden presentarse en las siguientes situaciones:

$$\left(\exists f'(x_0)\right) \wedge \left(\nexists f''(x_0)\right) \text{ o bien } f''(x) = 0.$$

El procedimiento correcto que nos permite dar, finalmente, respuesta al asunto que nos ocupa es un resultado clásico del Cálculo de Piskunov:

Teorema 1. Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva. Si $f''(a) = 0$ o $f''(a)$ no existe, y la derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el valor $x = a$, entonces el punto de la curva de abscisa $x = a$ es el punto de inflexión (Piskunov, 1969, p. 191).

En las palabras de Thomas y Finney (1998, p. 211), «un punto de inflexión de una curva es un punto donde y'' es positiva en un lado y negativa en el otro. En tal punto, y'' es cero o no está definida».

Esta es la idea que vamos a utilizar para encauzar el procedimiento.

Contraejemplo 8

Sea la función:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}$$

Esta función es continua en todo R, siendo sus dos primeras derivadas

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right],\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}\right],\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

Las derivadas de esta función en $x = -1$ y en $x = 1$ son las siguientes:

$$f'(-1)=\underset{x\to-1}{Lim}\,f'(x)=+\infty$$
$$f'(1)=\underset{x\to-1}{Lim}\,f'(x)=+\infty$$

Mediante la tabla siguiente indicamos la variación de la función:

x	(−∞, −1)	x = −1	(−1, 0)	x = 0	(0, 1)	x = 1	(1, +∞)
f(x)	crece	$-\sqrt[3]{2}$	crece	0	crece	$\sqrt[3]{2}$	+∞
f'(x)	+	+∞	+	+	+	+∞	+
f''(x)	+	$\nexists$	–	0	+	$\nexists$	–
Curvatura y puntos de inflexión	∪	P. I.	∩	P. I.	∪	P. I.	∩

En consecuencia, f presenta en $x = -1$ y en $x = 1$ dos puntos de inflexión con tangente vertical.

Además, como la ecuación $f''(x) = 0$ posee una única solución $x = 0$, y la función pasa de cóncava a convexa en ese punto, podemos concluir que la función dada posee tres puntos de inflexión.

Aplicando el procedimiento mencionado antes tan solo habríamos obtenido el punto de inflexión del origen de coordenadas (véase la imagen 8).

Conclusiones

A pesar de que el concepto de punto de inflexión es clásico y muy estudiado, consideramos que merece le pena echar una mirada reflexiva sobre algunas de sus sutilezas, ya que, aun admitiendo que sus distintas definiciones han sido establecidas a partir de unas consideraciones geométricas intuitivas y adecuadas, las deficiencias que presentan todavía causan confusión en los estudiantes e, incluso, en algunos profesores.

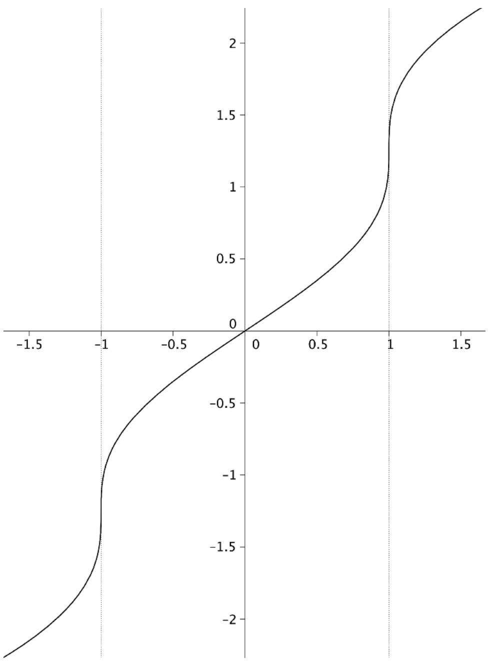

Imagen 8

Desde una perspectiva educativa más amplia creemos que este trabajo podría resultar de interés para profesores, a modo de ejemplo, para analizar distintos tópicos cuando se trata de juzgar la elección de materiales recomendados para cubrir la demanda cognitiva que exigen, sobre todo, los estudiantes con altas capacidades matemáticas.

Referencias bibliográficas

Fritz, J. (1999), *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, vol. 1, Editorial Limusa, México.

Fernández Novoa, J. (2001), *Análisis matemático I*, U.N.E.D., Madrid.

Galindo, F.; Sanz, J.; Tristán, L. A. (2003), *Guía práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real*, Editorial Thomson, Madrid.

García López, A.; García, F.; Gutiérrez, A.; Villa Cuenca, A. (1994), *Cálculo I: Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*, ditorial CLAGSA, Madrid.

Leithold, L. (1998), *El Cálculo*, Oxford University Press, México

Pérez Carrió, A.; Reyes Perales, J. A.; García Alonso, F. L. (2004), *Fundamentos de matemática aplicada*, Editorial Club Universitario, Alicante.

Piskunov, N. (1969), *Cálculo Diferencial e Integral*, tomo 1, Editorial MIR, Moscú.

Riaza, R.; Álvarez, M. (1996), *Cálculo infinitesimal*, volumen I, Sociedad de Amigos E.T.S. Ingenieros Industriales, Madrid.

Stewart, J. (2001), *Cálculo de una variable*, Ed. Thomson, México.

Weir, M. D. (1998), *Cálculo: una variable*, Pearson Educación, México.

Aurel Muntean
IES Cañada Real de Galapagar, Madrid
<aurelmuntean@yahoo.com>