suma+
Secciones
Marzo 2015
78
pp. 73-81

Calcular con números y no con dígitos

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce

Ell@s tienen la palabra

Tal como comentamos en las entregas previas de esta sección dedicada a las Matemáticas en Primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación: ¿qué actividades podemos proponer para generar este ambiente de clase?, ¿qué preguntas podemos formular para fomentar las discusiones?, ¿qué modelos podemos presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus razonamientos?

En esta novena entrega, continuamos haciendo propuestas en este sentido. Analizamos el papel de los algoritmos estándar, los efectos negativos de su presentación prematura y el problema que representa su poca transparencia, cosa que no permite que ell@s tomen la palabra para explicar por qué funcionan ni los puedan adaptar según las necesidades de un cálculo concreto. Se propone que, para conseguir un desarrollo efectivo de las competencias en Matemáticas, es necesario un cambio radical que implica tomar dos decisiones importantes: retrasar la presentación de los algoritmos y substituir los algoritmos estándar, que se basan en calcular con dígitos, por algoritmos alternativos basados en números y que puedan ser construidos por los propios alumnos. Esto implica, dicho en pocas palabras,

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2014 y aceptado en enero de 2015

desarrollar el currículum de Aritmética al margen de los algoritmos estándar, trabajar y discutir realizando operaciones con números no demasiado grandes, dar elementos para poder decidir qué cálculos, por el tamaño de los números involucrados, son propios de la calculadora y definir qué habilidades, estrategias y propiedades es necesario dominar, para poder ser eficaces en este tipo de cálculo.

> David, el otro día un alumno me presentó una hoja con sumas. En todas ellas anotaba las que llevaba menos en una: 45+39. Pregunté por qué no había anotado las que llevaba y me contestó: «es que he sumado 45 más 40 y le he restado una». Le dije que estaba muy bien, ¿qué te parece?
>
> Josep Maria Batet, maestro de la escuela Orlandai, 1985

La ruptura en la propuesta de enseñanza del cálculo

En niveles iniciales de Primaria los alumnos se enfrentan de manera habitual a situaciones que requieren un cálculo. Generan estrategias personales que les permiten encontrar la solución. Utilizan estrategias que pueden ir desde contar con los dedos hasta utilizar hechos conocidos para deducir otros de los que no están seguros (por ejemplo, para calcular 4+3, recuerdan que el doble de cuatro es 8 y «borran» 1)[1]. Calculan inmersos en un ambiente de resolución de problemas, partiendo de contextos, llegan a la solución y pueden explicar cómo han conseguido el resultado.

Sin embargo, cuando aparecen los números de dos cifras, renunciamos a este modelo y procedemos a la presentación, a todas luces prematura, del algoritmo estándar. ¿Por qué, después de promover que los alumnos resuelvan sumas y restas de dígitos con estrategias emergentes, en el momento de atacar sumas tipo 32+45, o incluso 17+8, prescindimos de lo que tienen para decir los alumnos y pasamos los maestros a explicarles cómo se hace? Sin duda alguna, por el peso de la tradición, los textos escolares, los cuadernos de cálculo o las demandas de los padres. Invertimos el orden utilizado hasta el momento convirtiendo las Matemáticas en la asignatura del silencio: ¿qué sentido tiene preguntar cómo lo ha hecho cuando el reto consiste en reproducir un algoritmo?

«Invertimos el orden utilizado hasta el momento convirtiendo las Matemáticas en la asignatura del silencio: ¿qué sentido tiene preguntar cómo lo ha hecho cuando el reto consiste en reproducir un algoritmo?»

Desde hace unos 20 años existen propuestas muy interesantes que abogan por eliminar este cambio abrupto en la manera de trabajar en la clase de Matemáticas con la única excusa de que los números involucrados son un poco más grandes. Estas propuestas se basan en una característica fundamental que pueden poseer los algoritmos: la transparencia.

Los algoritmos estándar no son transparentes: responden a una serie de instrucciones que hay que seguir, que se aprenden y se reproducen paso a paso para obtener un resultado. Estos procedimientos se pueden ejecutar sin comprender por qué funcionan y prueba de ello son los errores típicos que cometen los alumnos en el momento que se cambia alguna de las variables.

Un ejemplo de ello podría ser el «me llevo una» de la suma. La imagen 1 recrea una situación que hemos visto en el aula: un alumno que controlaba perfectamente el algoritmo para sumar números de dos cifras cometió el error que vemos en la suma de la derecha la primera vez que tuvo que realizar una suma de números de tres cifras.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 45 \\ +78 \\ \hline 123 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 368 \\ +417 \\ \hline 875 \end{array}$$

Imagen 1

Aprender un algoritmo no transparente no aporta elementos para solucionar situaciones ligeramente diferentes o para generalizar su aplicación. En este caso, la interpretación del alumno del algoritmo fue que «las que se llevan» se apuntan sobre la cifra que está más a la izquierda. Y así lo hizo, demostrando que no tenía ni idea de qué representaba ese 1 que escribía en la parte superior.

Pero también podríamos poner ejemplos de errores en restas, multiplicaciones y divisiones como los que se ven en la imagen 2 y que seguramente todos los maestros hemos visto en las producciones escritas de nuestros alumnos.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9\;\;\;} \\ 704 \\ +\,1\cancel{3}7 \\ \hline 667 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 258 \\ \times\ 14 \\ \hline 1132 \\ 258 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 317 & \underline{|\,3\;\;} \\ 017 & 15 \\ 2 & \end{array}$$

Imagen 2. Muestra de errores de ejecución en los pasos de los algoritmos estándar

Los algoritmos en columnas

La cuestión central es que cuando aparecen los números de dos o tres cifras podemos continuar construyendo el cálculo tal como lo hacíamos cuando ell@s tenían la palabra. Existen algoritmos que permiten seguir esta filosofía de construcción del conocimiento junto con los alumnos, pero esos algoritmos no son los estándar.

Estamos hablando de algoritmos alternativos que, tal como explicaremos más adelante, calculan utilizado números y no dígitos, lo cual les da trasparencia y permite a los alumnos tomar decisiones sobre la manera en que lo ejecutan, flexibilizar su uso y discutir sobre la manera en que lo han llevado a cabo.

Si en lugar de empezar por explicar el algoritmo estándar, proponemos un problema en contexto que implique la operación que queremos introducir, podrá emerger alguno de los algoritmos alternativos de los que estamos hablando.

Para poner un ejemplo retomaremos una situación como las que desarrollamos en una entrega anterior de esta sección titulada «Calcular usando el contexto del dinero» (*Suma*, nº. 72). Si preguntamos cuántos euros hay entre dos monederos, uno con 35€ y otro con 28€ y les damos a los alumnos billetes de 10€ y monedas de 1€ para que representen la situación, habrá una parte importante de la clase que solucionará el problema juntando billetes por un lado, monedas por otro y darán la respuesta correcta: 63€.

La explicación que hacen los alumnos de la manera en que resuelven el problema se puede representar por escrito de maneras diversas. Por ejemplo, la siguiente:

$$35+28=\left\{\begin{matrix}30+20=50\\8+5=13\end{matrix}\right\}=50+13=63$$

Imagen 3

Para que este tipo de explicaciones emerjan hay ciertas habilidades básicas que los alumnos deben dominar: descomponer números, sumar con fluidez unidades y decenas por separado y luego calcular mentalmente sumas del tipo: 30+17, 40+9, 90+11…

Registros como los que aparecen en la imagen 3 pueden ser reorganizados colocando los números en vertical (imagen 4), lo que nos lleva al algoritmo en columnas[2] que ya presentamos en «Calcular

$$\begin{array}{r} 35 \\ +\,28 \\ \hline 50 \\ 13 \\ \hline 63 \end{array}$$

Imagen 4

usando el contexto del dinero», tanto para el caso de la suma como para el de la resta.

...tenemos que tomar una decisión importante y previa sobre si los algoritmos estándar deben continuar siendo el eje principal de la Aritmética.

La presentación de este algoritmo[3] no implica ningún tipo de aprendizaje nuevo, ya que solamente es una variante de la representación análoga que aparece en la imagen 3. De esta manera, el algoritmo aparece delante de los alumnos simplemente como el punto final de un proceso que pueden aplicar ante cualquier situación de suma o resta, entendiendo perfectamente cómo y por qué funciona. Creemos que una característica fundamental de este algoritmo y que le da la transparencia antes mencionada es que trabaja con números y no con cifras: no se suma 3 + 2, sino 30 + 20, y no aparece ningún «me llevo 1».

Al trabajar con algoritmos basados en números establecemos conexiones continuas con el aprendizaje del sistema de numeración posicional. ¿Qué sentido tiene, introducir en un momento en el que se está consolidando el sistema de numeración, un instrumento de cálculo como el algoritmo estándar, que trabaja con cifras? ¿Con qué elementos de decisión contarán nuestros alumnos, cuando trabajando el sistema de numeración les exigimos que entiendan que el 3 del 37 vale por 30 y en los algoritmos estándar vale por 3?

En el caso de multiplicaciones y divisiones el proceso sigue un camino paralelo partiendo siempre de situaciones en contexto. Veamos unos ejemplos.

En la imagen 5 vemos cómo se puede multiplicar en columnas 35 × 8 (una multiplicación que puede provenir de un problema como, por ejemplo, cuánto cuestan 8 entradas de 35 € para un concierto): se descompone 35 = 30 + 5, después se multiplica 30 × 8 = 240 y 5 × 8 = 40. Por último, se suman 240 + 40 = 280.

30+5

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ \ 8 \\ \hline 240 \\ 40 \\ \hline 280 \end{array}$$

Imagen 5

En la imagen 6 vemos a Tània, una alumna de la escuela «La Sínia» de Vic (Barcelona) reparte 326 galletas en grupos de 24. Primero, completa 10 grupos, y le quedan 86 galletas por repartir (86 = 326 – 240). Después, completa 2 grupos más, y le quedan 38 galletas por repartir (38 = 86 – 48). Cuando se hizo la fotografía estaba calculando cuántas galletas le quedarían después de completar un último grupo y poder concluir que 326 : 24 tiene un cociente de 13 (10 + 2 + 1) y un residuo de 14 (38 – 24).

Para poder llevar a cabo este tipo de trabajo, es necesario reflexionar sobre las habilidades, conceptos y propiedades que se movilizan y que, por tanto, deben trabajarse explícitamente con los alumnos.

Un ejemplo de estas habilidades básicas es lo que conocemos como regla del cero, que permite extender el conocimiento de las tablas de multiplicar a operaciones en las que hay una unidad seguida de ceros. Si mucho antes de trabajar con cualquier algoritmo los alumnos investigan cuántos euros son 4 billetes de 50 € o 6 billetes de 20 €, detectarán patrones que les permitirán deducir 6 × 20 del resultado que ya conocen de 6 × 2.

Otra habilidad básica es la propiedad distributiva, que surge espontáneamente ante situaciones multiplicativas como la siguiente: ¿cuántos caramelos hay en 13 bolsas que contienen 6 caramelos cada una?

Al plantear esta situación al grupo seguramente aparezca algún alumno que proponga calcular por un lado cuántos caramelos hay en 10 bolsas, cuántos hay en 3 bolsas y sumar el total de caramelos.

A partir del ejemplo de la división podemos resaltar la flexibilidad de este tipo de algoritmos y que consideramos una característica muy valiosa desde el punto de vista didáctico. Tània decide comenzar haciendo 10 grupos, pero podría haber comenzado haciendo solamente 2 y acercarse al resultado final más lentamente, aunque con igual corrección. También podría haber conseguido el resultado en una etapa menos si cuando le quedaban 86 galletas hubiera formado ya 3 paquetes.

De esta manera, respetando el ritmo de los alumnos, se transforma el objetivo de ejecutar con precisión un procedimiento oscuro como es el de la división, en ir paulatinamente haciendo más eficiente el registro de un procedimiento de reparto. Aprenden comparando y valorando estrategias de compañeros. En el fondo, la ejecución de algoritmos se convierte en la resolución de un problema: ¿cómo puedo calcular esto?

Presentación prematura de algoritmos

Se habla mucho actualmente de cambios en la enseñanza de las matemáticas, de trabajar en un ambiente de resolución de problemas, de adquisición de procesos o competencias como, por ejemplo, conexiones, comunicación, búsqueda de patrones, etc. En este sentido, creemos que, para cambiar a fondo la enseñanza de la aritmética, tenemos que tomar una decisión importante y previa sobre si los algoritmos estándar deben continuar siendo el eje principal de la Aritmética.

Las corrientes actuales (o no tan actuales, ya que hace casi 20 años que están funcionando en otros países) apuestan por la utilización de algoritmos alternativos basados en números. Nuestra opinión coincide con esta idea porque en el mundo de los algoritmos estándar, ell@s no tienen la palabra.

Construir el cálculo implica partir de hechos conocidos para encontrar el resultado de una operación cuyo resultado no se conocía. Si los alumnos comunican sus soluciones para que sean comprensibles para los demás, estructuran su pensamiento de manera más profunda que la mera realización del cálculo propuesto.

Imagen 6

Presentamos dos ejemplos recogidos de Bernat, un alumno de primero de primaria, en dos momentos distintos del curso.

En el ejemplo que aparece en la imagen 7 la estrategia que utilizó para sumar 25 + 15 pasa por la representación gráfica: «escribe» el 25 (dos palos y cinco puntos que representan decenas y unidades) y el 15 (un palo y cinco puntos), agrupa las decenas, agrupa las unidades y obtiene el resultado final que anota a la derecha del signo « = ».

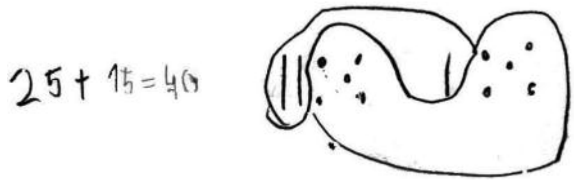

Imagen 7

El segundo ejemplo (imagen 8) corresponde a dos sumas en las que la transcripción simbólica del proceso refleja la riqueza de las estrategias utilizadas.

En la primera, suma las decenas y anota el resultado (60), después quiere sumar 8 + 3, pero como no lo sabe de memoria lo soluciona partiendo de un hecho conocido (8 + 2) y añadiendo 1.

En la segunda, después de sumar de las decenas, para sumar las unidades calcula 5 + 5 y le añade 2.

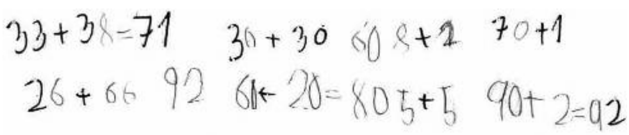

Imagen 8

Cuando alguien pregunta cómo la maestra ha conseguido estos resultados la respuesta es: trabajando a fondo las descomposiciones de dígitos, el sistema de numeración, discutiendo las estrategias de suma de números de una cifra con números de dos cifras, pero sobretodo: no explicando el algoritmo estándar de la suma hasta segundo curso.

...tenemos que tomar una decisión importante y previa sobre si los algoritmos estándar deben continuar siendo el eje principal de la Aritmética.

Registros similares podemos observar en alumnos de segundo ciclo cuando buscan el resultado de una multiplicación (imagen 9).

El único secreto para que estas estrategias aparezcan en las discusiones de clase es la propuesta de situaciones en contexto que inviten a la comunicación y que involucren el trabajo con números de tamaño «razonable», pero nuevamente y, sobre todo, que no conozcan previamente el algoritmo correspondiente.

Dinámicas asociadas con la práctica de los algoritmos

Tal como comentábamos en otro artículo de esta sección (*Suma*, nº. 76) con relación al algoritmo tradicional para calcular el máximo común divisor de dos números, la primera dinámica negativa que viene asociada a la práctica de los algoritmos tiene relación a la enorme cantidad tiempo que se dedica a este aspecto.

Los algoritmos estándar, al no estar apoyados en la comprensión sino en la ejecución mecánica de unos pasos desprovistos de justificación precisan de una ejercitación periódica para ser automatizados y

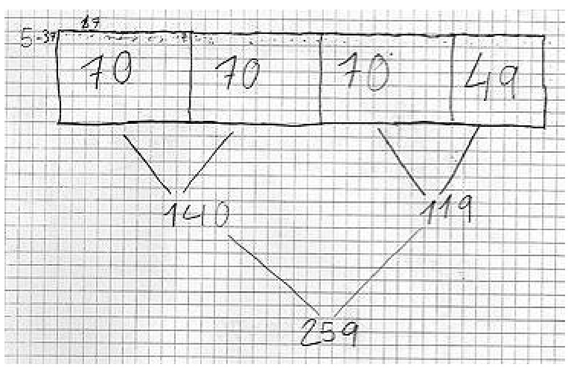

Imagen 9. ¿Cuántos cuadritos ocupa un rectángulo de 37x7?

recordados. Los algoritmos basados en números, también requieren de una cierta práctica, especialmente al inicio, pero el proceso de construcción deja anclajes sólidos que hacen innecesaria la cantidad de repeticiones sistemáticas que requieren los algoritmos estándar.

...no podemos mantener las listas interminables de práctica repetitiva, ni mantener en estos listados operaciones con números tan grandes que nunca haríamos sin usar calculadora.

Si substituimos los algoritmos estándar por aquellos basados en números, aunque también necesiten práctica debemos evitar las viejas dinámicas: no podemos mantener las listas interminables de práctica repetitiva, ni mantener en estos listados operaciones con números tan grandes que nunca haríamos sin usar calculadora, ni mantener la propuesta de las mismas tareas de ejercitación para todos los alumnos independientemente de su grado de dominio del algoritmo, etc.

Deberíamos modificar la propuesta de actividades de práctica y también la manera de corregirlas. No se trata simplemente de valorar si los alumnos han llegado al resultado correcto y mucho menos, si han hecho determinados pasos ya que el carácter flexible de los nuevos algoritmos implica que pueden haber llegado al resultado correcto siguiendo diferentes caminos. Las nuevas actividades de práctica deberían concluirse con una discusión grupal sobre las estrategias utilizadas, valorando la eficiencia de las distintas propuestas y avanzando hacia la optimización de un registro escrito que permita comunicar el procedimiento seguido.

Los algoritmos estándar respondían a una necesidad de cálculo de una época en la que no había calculadoras, por lo tanto la ejecución veloz de operaciones con números de muchas cifras era una habilidad necesaria para algunos trabajadores. Si optamos por un cambio a fondo en Aritmética, también debemos redefinir qué rango de números es el adecuado para trabajar en el aula. Creemos que con sumas y restas de hasta tres cifras, multiplicaciones de números de hasta cuatro cifras por números de hasta dos cifras y divisiones en que el divisor tiene una cifra, podemos desarrollar completamente el currículum de aritmética. En relación a las divisiones por dos cifras, plantear alguna división entre 15 o 24 puede tener sentido para enfrentar a los alumnos al reto de resolverlas aprovechando su experiencia en la realización de las divisiones por una cifra, pero plantear una división del tipo 7429 : 53, no aporta nada interesante y ocupa un tiempo precioso del que carecemos.

El momento de los algoritmos basados en dígitos

En nuestra opinión, antes del final de la etapa de Primaria, cuando los alumnos ya dominan los algoritmos basados en números que han construido junto con sus compañeros para resolver las diferentes operaciones aritméticas, deberían tener la oportunidad de conocer los algoritmos basados en dígitos que forman parte de nuestra cultura.

Esta presentación no necesariamente ha de restringirse a los algoritmos estándar sino que pueden incluirse otros algoritmos aritméticos históricos. De todas maneras, creemos que tiene sentido, desde un punto de vista cultural, resaltar entre ellos al algoritmo que seguramente aprendieron y quizás aun utilizan sus padres.

Cuando destacamos la importancia de dar oportunidad a los alumnos para que decidan qué procedimiento utilizar para resolver un cálculo incluimos a los algoritmos estándar como parte de sus alternativas. No tenemos ningún inconveniente en admitirlos en clase, ya que desde el punto de vista aritmético son óptimos. Simplemente nos resistimos a exigir a todos los alumnos que los utilicen como opción primera y única.

Otros algoritmos basados en números

En la redacción de este artículo hemos ejemplificado los algoritmos basados en números en el modelo de los algoritmos en columna propuesto por el Instituto Freudenthal. Sin embargo, en nuestro país conviven otros tipos de propuestas que presentan otros algoritmos basados en números con similares ideas de fondo. Mencionaremos dos ejemplos:

La propuesta de Antonio Martín Adrián[4]: «los algoritmos tradicionales están muertos sólo hace falta enterrarlos».

La propuesta de Jaime Martínez Montero[5]: «algoritmos ABN: por unas matemáticas sencillas, naturales y divertidas».

Los algoritmos como estructuradores del currículum

Podríamos afirmar que, a pesar de los cambios importantes que se han producido en las escuelas de Primaria en aspectos metodológicos, los algoritmos estándar continúan siendo los contenidos estructuradores del programa. Prueba de ello está en que la pregunta más formulada en los asesoramientos que piden las escuelas es: «¿cómo planteamos la resta con llevadas?», seguida por «¿cómo explicamos la división por dos cifras?». En ambos casos la pregunta se orienta a la demanda de estrategias para ayudar a los alumnos a que entiendan un algoritmo concreto en lugar de hacia modelos que permitan a los alumnos interiorizar los conceptos de resta o de división.

Ya en la séptima entrega de «Ell@s tienen la palabra» comentábamos el protagonismo excesivo de la ejercitación de rutinas en nuestras clases y los riesgos de anteponer el dominio de un algoritmo al estudio del problema que ese algoritmo pretende resolver. Sin embargo, la cosa va más lejos, puesto que los algoritmos extienden su sombra metodológica a otros aspectos de la Matemática escolar. Pese a todo el tiempo dedicado a ellos, la Matemática, lejos de ser vista como una manera de pensar, se convierte en un conjunto de recetas y trucos que relegan a un segundo (o tercer) plano los conceptos involucrados: «multiplicar por 100 es agregar dos ceros», «convertir metros en quilómetros es correr la coma 3 lugares», «calcular el máximo común divisor de dos números es multiplicar sus factores comunes elevados al mínimo exponente», «dividir fracciones es multiplicar en cruz los numeradores y los denominadores», «calcular el área de un rombo es multiplicar las diagonales y dividir entre 2», «calcular el 25% de un número es multiplicar por 25 y dividir entre 100» …

Ya sea por la inconveniencia de anteponer el mecanismo a la operación o por dar una visión distorsionada de la actividad matemática creemos que los algoritmos estándar y los algoritmos en general no deberían dictar la planificación de nuestros cursos de Matemáticas en Primaria.

Reflexión final

Hemos intentado defender nuestra posición respecto a la necesidad de replantearnos a fondo el papel de los algoritmos estándar.

Porque cuando limitamos el trabajo con las operaciones aritméticas al trabajo con estos algoritmos nuestr@s alumn@s no tienen la palabra.

Porque dan una idea equivocada de la naturaleza de la Matemática.

Porque para que los alumnos los ejecuten con acierto perdemos demasiado tiempo en practicar (y no en comprender) unas habilidades que la sociedad actual resuelve utilizando su *smartphone*.

Por otro lado, creemos inconveniente limitar el trabajo aritmético al uso de algoritmos, ya sean estándar o alternativos. Los alumnos han de ser conscientes que los algoritmos son una de las formas de calcular, pero que existen otras (para sumar 45 + 39, por ejemplo, pueden operar saltando sobre la recta numérica[6] realizando 45 + 30 + 5 + 4 o, como hacía el alumno de la escuela Orlandai del que se hablaba al inicio del este artículo: sumar 45 + 40 y restar 1).

Lo importante es dotarlos de diferentes estrategias para que puedan decidir, según la operación, qué estrategia es la más eficiente o, incluso, que puedan decidir si es una operación para realizar con calculadora.

Para profundizar

Barba D. & Calvo C., 2012, Algoritmos Antiguos de Cálculo, *Cuadernos de Pedagogía*, nº. 421, 62-65.

Barba D. & Calvo C., 2010, La división: mucho más que un algoritmo, *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, nº. 54, 41-54.

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako (Barcelona)
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 En el vídeo <http://youtu.be/BQKLNrURFHs> varios alumnos de 5 y 6 años explican cómo calculan 4+3.

2 Este es el nombre que se les da en Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.) (2001): *Children Learn Mathematics*, Freudenthal Institute, Utrecht University.

3 Este procedimiento claramente puede recibir el nombre de algoritmo, pues se tata de una serie de instrucciones precisas que se siguen de manera inequívoca para que a partir de dos números se consiga un tercer número que será el resultado de la operación.

4 Nos podemos acercar a la propuesta de Martín a partir de su conferencia TEDx La Laguna disponible en <http://youtu.be/R4JwZ-z-4qw>.

5 Nos podemos acercar a la propuesta de Martínez a través de su blog <http://algoritmosabn.blogspot.com.es/>.

6 Más información sobre la estrategia de saltos en la primera entrega de «Ell@s tienen la palabra» (*Suma*, nº. 70).