

Representar cuerpos tridimensionales mediante vistas

DAVID BARBA Y CECILIA CALVO

El@s tienen la palabra

Tal como comentamos en las entregas previas de esta sección dedicada a las Matemáticas en Primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación: ¿qué actividades podemos proponer para generar este ambiente de clase?, ¿qué preguntas podemos formular para fomentar las discusiones?, ¿qué modelos podemos presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus razonamientos?

En esta sexta entrega, continuamos haciendo propuestas en este sentido, ahora centrándonos en un tema del bloque «Espacio y forma» con la misma intención de dar a nuestr@s alumn@s un papel protagonista en la construcción de su aprendizaje mediante actividades en las que ell@s tienen la palabra.

En el bloque temático de Espacio y Forma apostamos por un trabajo a través de actividades que favorezcan la formación de esquemas conceptuales robustos antes que la repetición de definiciones. Manipulando modelos, dibujándolos, moldeando plastilina, plegando papel, utilizando regla y compás, interactuando con la tecnología, interpretando imágenes, describiendo objetos estáticos y en movimiento, buscando regularidades. Después de haber tratado en la segunda

entrega de «Ell@s tienen la palabra» (*Suma*, n.º 71) con objetos tridimensionales y antes de dedicar una futura entrega a objetos planos, en la presente queremos reflexionar sobre el puente que relaciona estos dos tipos de objetos: las representaciones planas de objetos tridimensionales.

Creemos en la importancia de detenernos en este punto intermedio pues, tal como dice el marco teórico para PISA, la comprensión conceptual de las formas incluye la capacidad de tomar un objeto tridimensional y plasmarlo en un plano bidimensional, y viceversa (OECD, 2006).

Diferentes tipos de representaciones

En la escuela podemos trabajar con diversas representaciones planas de objetos tridimensionales (imagen 1). Entre estas representaciones podemos destacar los dibujos en perspectiva y los desarrollos planos de los que ya hablamos en la entrega anterior de esta sección dedicada al bloque de «Espacio y forma». Pero también podemos trabajar con diagramas de Schlegel asociados a poliedros o con proyecciones diédricas (a las que llamaremos simplemente «vistas») y que serán las representaciones en las que profundizaremos a continuación).

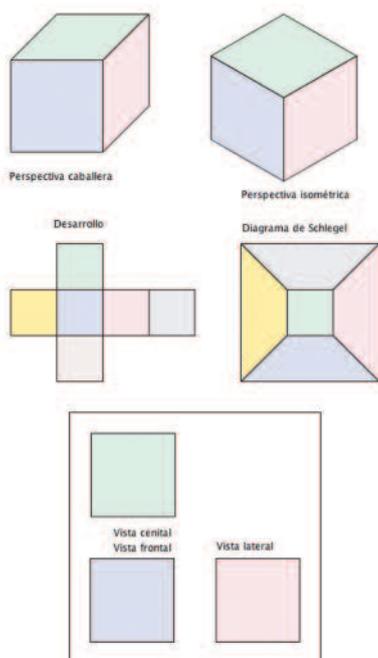


Imagen 1

Representaciones mediante vistas

Un primer acercamiento lo podemos hacer analizando cómo se ven los objetos desde seis perspectivas: delante, detrás, derecha, izquierda, arriba y abajo (imagen 2).

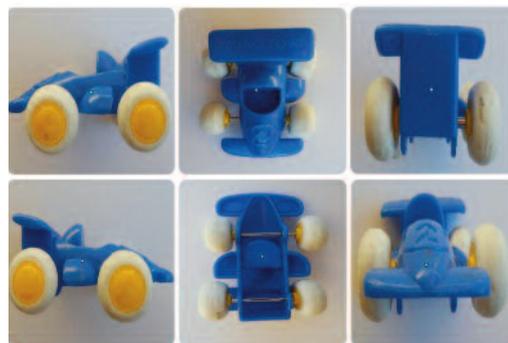


Imagen 2: Captura de pantalla del applet *Situació espacial* realizado con GeoGebra¹

Otro ejemplo de este tipo de representación lo tenemos en el applet *Guess the view*² en el que se pregunta cuál es la posición del observador que ve la figura que aparece en el recuadro de la derecha cuando mira la figura «tridimensional» de la izquierda.

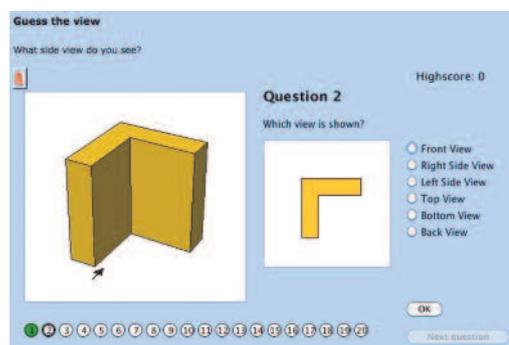


Imagen 3: Captura de pantalla del applet *Guess the view*

Ante cualquier actividad de este tipo hemos de ser conscientes de la cantidad de implícitos que requiere una correcta interpretación de las figuras tridimensionales representadas en perspectiva. Ya reflexionamos sobre estos implícitos en la entrega anterior, pero en la imagen 4 se nos pre-



senta un nuevo caso de esta situación³, si miramos el dibujo de la caja de la desde nuestro punto de vista la cara superior tiene forma de paralelogramo, sin embargo el pájaro que la sobrevuela ve un rectángulo.

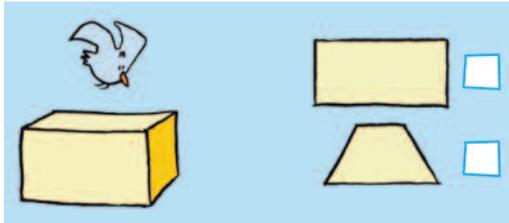


Imagen 4

En actividades como la que aparece en la imagen 5 encontramos una interesante ocasión para discutir con alumnos de 6 o 7 años las diferencias y similitudes entre las vistas enfrentadas (delante-detrás, arriba-abajo, derecha-izquierda) y analizar por qué no es necesario en la mayoría de los casos dar las dos. Por ejemplo, nuestro punto de vista nos permite deducir cuál de las tres opciones de la derecha es la que ve el niño.

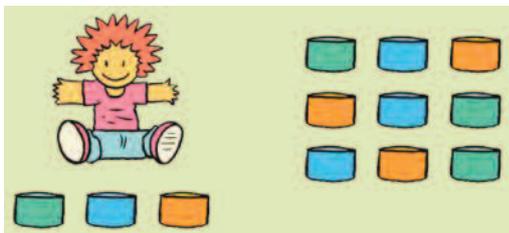


Imagen 5

En la imagen 6 tenemos otra situación relacionada con la identificación de vistas. Aunque en este caso se trata de una propuesta sobre papel, creemos que estas actividades, en una primera instancia, deben ser realizadas manipulativamente con el empleo de muñequitos y cubos encajables, un material comercializado bajo diferentes nombres (*Multicubos*, *Multilink*, *Centicubos*) que volveremos a mencionar más adelante.

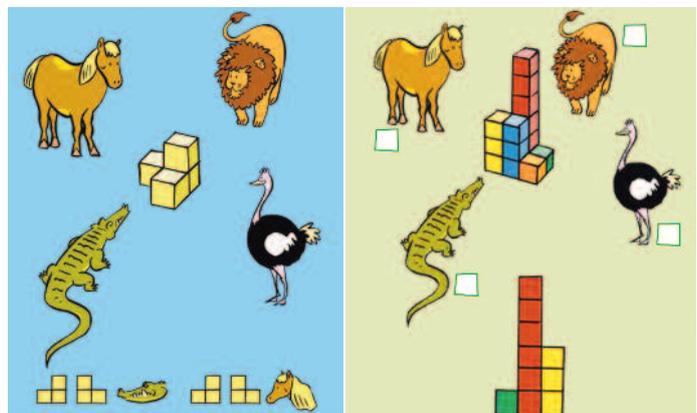


Imagen 6

Se pueden encontrar más ejemplos de este tipo en la entrada *Des d'on està tirada la fotografia?*⁴ del blog del Puntmat y entre las que destacamos la actividad *Treasure Island*⁵, que también aparece citada en Van den Heuvel & Buys (2005), un material de referencia para este tipo de reflexiones.

Algunos ejemplos

Estamos rodeados de ejemplos de uso de representaciones para transmitir información sobre objetos tridimensionales, tanto en el contexto cotidiano como en el escolar. Una parte importante de estos ejemplos está relacionada con mapas y planos.

Al planificar un paseo por la montaña nos conviene mirar un mapa con curvas o códigos de nivel que nos informe, además del recorrido, de los cambios de alturas (imagen 7).

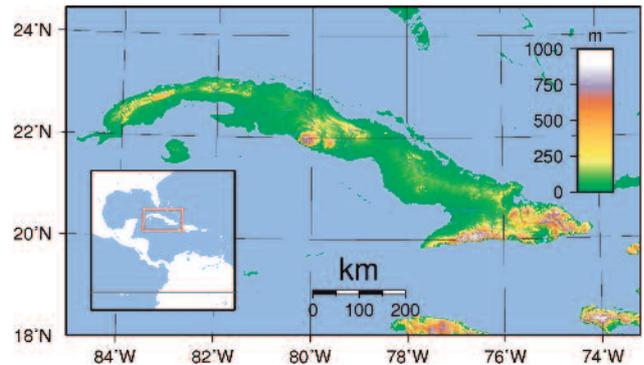


Imagen 7: Mapa topográfico de Cuba, un ejemplo de mapa con información de alturas

Las descripciones de edificios suelen usar las vistas cenital y frontal (imagen 8), pero este tipo de descripciones no se restringen al ámbito arquitectónico (imagen 9). Para otros objetos, cuando su forma lo requiere o no hay equivalencia entre las vistas enfrentadas, se agregan otras vistas complementarias (imagen 10).

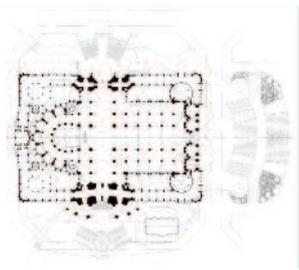
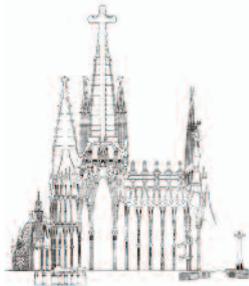


Imagen 8: Vista lateral y cenital de la Sagrada Familia



Imagen 9: Descripción de distintos tipos de árboles a partir de dos de las vistas

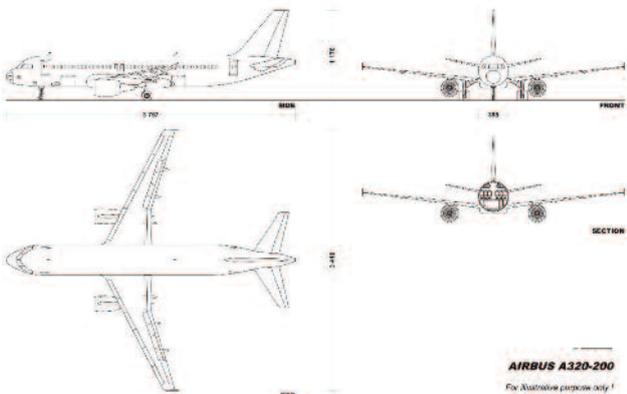


Imagen 10: Vista cenital, lateral, posterior y anterior de un avión

También podemos llevar al aula este tipo de representaciones en forma de enigmas que permitan hablar a nuestros alumnos: ¿qué aparece representado en la imagen 11?, ¿qué otros enigmas de este tipo podrías presentar a tus compañeros?

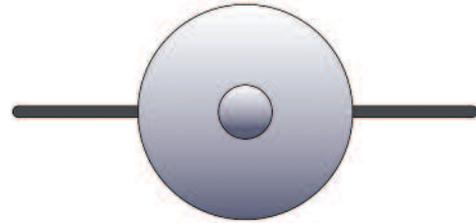


Imagen 11: Vista cenital de un hombre con sombrero mexicano en bicicleta

Los cuerpos geométricos que estudiamos en el ámbito escolar nos proporcionan un amplio abanico de posibilidades para utilizar las representaciones diédricas. ¿Qué vistas lateral, frontal y cenital genera un cono? ¿Cuántas vistas debo tener para poder distinguir una esfera de un cilindro? ¿Qué vistas coinciden entre una pirámide y un prisma de la misma base? También podemos plantear las vistas frontal, lateral y cenital de un el cuerpo geométrico y pedir que lo identifiquen (imagen 12).



Imagen 12: Captura de pantalla del applet *Solid Figures*⁶

Pero no necesariamente han de ser participar las vistas laterales para la identificación de un cuerpo geométrico, también se puede proponer hacerlo a partir de una

tomografía: una colección de imágenes resultante de sucesivos cortes del cuerpo paralelos a su base (secciones). ¿Cómo sería la tomografía de una pirámide? ¿Y la de un prisma triangular? ¿Cómo podemos distinguir si una tomografía es de una semiesfera o de un cono?⁷.

Inspirados por el material «Atelier Tours Cachées» de la editorial Nathan, también podemos proponer a los alumnos que pinten en la imagen 13 qué es lo que ve cada uno de los dos observadores, pedirles que construyan torres de cubitos encajables a partir de una o dos vistas laterales, o preguntarles si a partir de dos vistas la solución es única.

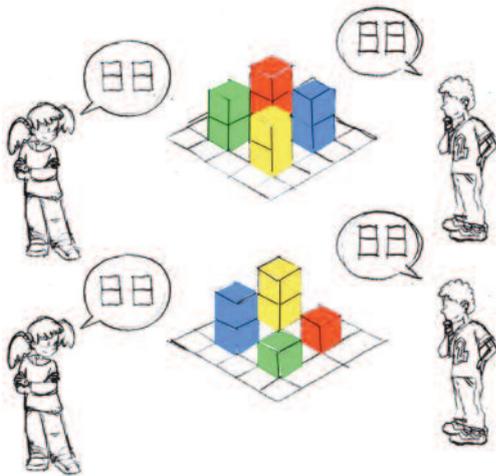


Imagen 13: Obsérvese que, en el primer caso, la torre roja podría no estar allí o tener solo un piso y que, aún así, las vistas de los dos observadores no se modificarían.

Maneras convencionales de representar un objeto mediante vistas

Ante la redundancia que pueden ofrecer las seis vistas de un objeto (imagen 2), en muchas ocasiones se eligen solo algunas de ellas. Por ejemplo, se conoce como dar «planta y alzado» cuando las vistas que se ofrecen son la cenital y la frontal, como en los casos de las imágenes 8, 9 y 10. O

«planta, alzado y perfil» cuando se agrega la vista lateral (generalmente derecha), como en la imagen 12.

Para analizar algunas características de estas maneras convencionales de representación nos centraremos en un tipo particular de cuerpos geométricos: los policubos, sólidos obtenidos por la unión de cubos iguales de manera que cada cubo tiene como mínimo en común una cara con otro cubo.

Podemos trabajar con estos objetos construyéndolos con cubitos de madera o con cubitos encajables y, sin substituir a la manipulación, también podemos construirlos virtualmente utilizando applets como el fantástico Building with blocks^{viii} del Instituto Freudenthal. En la imagen 14 vemos justamente cómo se pueden materializar, con cubitos encajables, los retos propuestos en este applet relacionados con la construcción de un cuerpo formado por cubitos a partir de las tres vistas (planta, alzado y perfil).



Imagen 14

Pero ni siquiera cuando estamos representando un policubo estas tres vistas determinan el objeto y este hecho se convierte, por tanto, en una interesante fuente de problemas de visualización. En el applet mencionado esta característica hace que se valore con mayor puntuación la solución que, cumpliendo las vistas, utilice una mínima cantidad de cubitos. También aparecen estos retos en otros ambientes alejados del uso de ordenadores. Por ejemplo, Dickson et al (1984) propusieron a alumnos de 8 a 11 años estudiar las diez posibilidades que generan las vistas que se ven en la imagen 15.

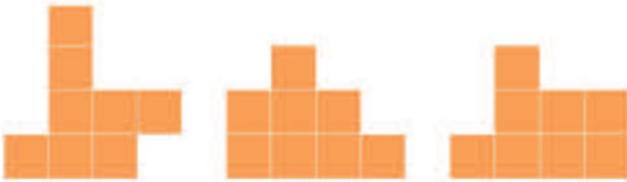


Imagen 15: Vistas cenital, frontal y lateral izquierda

Vale la pena mencionar que lo que hace que el número de soluciones de este problema sea diez¹⁰ es que se están considerando soluciones sin cubos «voladores», o sea, policubos que podrían ser construidos con cubitos de madera que se apoyan unos sobre otros. En la siguiente imagen se ve una solución no incluida entre las diez mencionadas que puede ser obtenida con herramientas digitales como en la imagen o utilizando cubitos encajables.

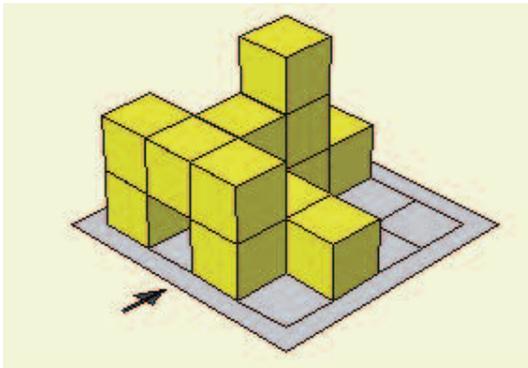


Imagen 16: Captura de pantalla del applet *Building with Blokcs*

Uno de los pocos problemas liberados de las pruebas Pisa (OECD, 2006) también se relaciona con esta cuestión: se da una vista lateral y frontal de un objeto formado por cubos (imagen 17) y se pregunta por el número de cubos empleados para crearlo. Se trata, por tanto, de un problema que no tiene un único número como respuesta sino que se pretende que el alumno ofrezca el mínimo y el máximo valor posible. Es muy interesante trabajar este problema pidiendo a los alumnos que ejemplifiquen cada valor posible para lo cual deben utilizar alguna manera de representación plana de objetos tridimensionales¹¹.



Imagen 17

Además de los cubitos encajables hay otros materiales manipulativos que se ajustan de manera notable al trabajo con representación mediante vistas de policubos. Entre éstos, destacamos *Tridío* y *Structuro*. Para complementar el trabajo manipulativo, además del mencionado *Building with blocks*, existen applets muy interesantes tanto para proponer directamente a los alumnos como para inspirar a sus maestros a materializarlos en propuestas que no requieren el uso de un ordenador. Presentamos tres ejemplos (ímagenes 18-20).

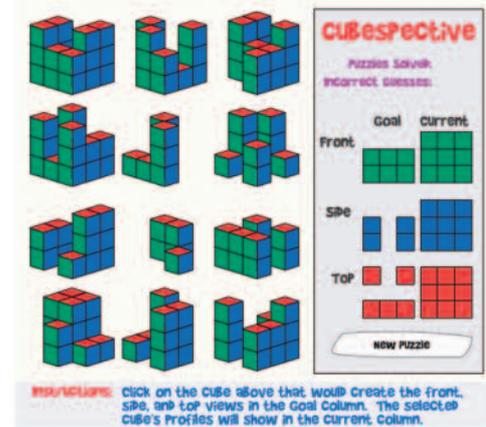


Imagen 18: Captura del applet *Cubespective*¹²



Imagen 19: Captura del applet *Point Out the View*¹³

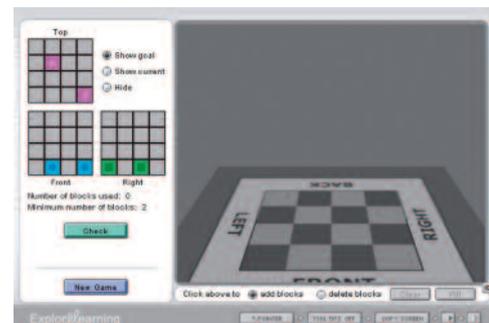


Imagen 20: Captura del applet *3D and Orthographic Views*¹⁴

Información numérica que permite representar policubos

Otra manera habitual de representar policubos (cuando no hay cubos «voladores») es dar la vista cenital complementada con información sobre la altura que alcanza cada torre de cubitos. Por ejemplo, Van den Heuvel & Buys (2005) proponen usar este tipo de representación para presentar las diferentes soluciones del problema *Four-cube houses*. Este problema consiste en construir todos los tetracubos posibles considerando que cada uno de ellos es una casa. En la imagen 21 se pueden ver cuatro ejemplos de estas casas.

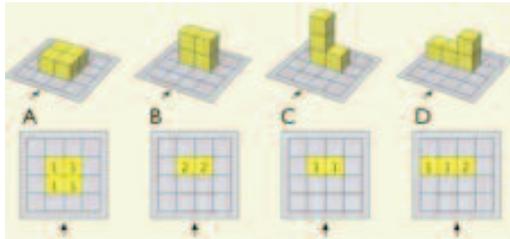


Imagen 21: Las casas A y B son claramente diferentes, aunque se trate del mismo tetracubo. Lo mismo ocurre con las casas C y D.

Este problema adquiere aun más interés cuando se pide que den precio a cada una de estas casas en función de los cuadrados de suelo que ocupan o el número de aberturas que requerirían si se ha de colocar una en cada cara de cubito que da al exterior.

Otros problemas donde se puede utilizar la representación cenital con datos de alturas son la determinación de cuadrados mágicos de 4x4 que retienen una máxima cantidad de líquidos^{xv} o en el juego de los rascacielos¹⁶.

Tal como ya comentamos para el caso de policubos con cubitos voladores no se puede usar la descripción por vista cenital con alturas, pero sí que se pueden usar las, ya mencionadas, tomografías geomé-

tricas. Para ejemplificarlo, en la imagen 24 vemos la tomografía del policubo representado en perspectiva isométrica en la imagen 22 y cuyas vistas laterales aparecen en la imagen 23.

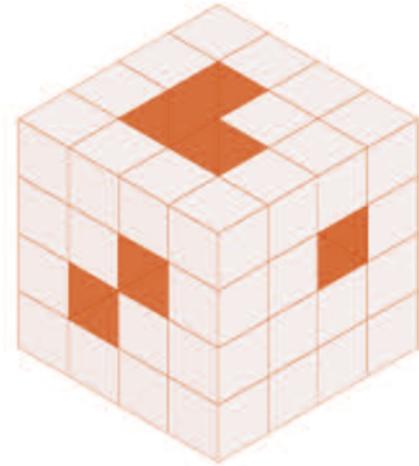


Imagen 22

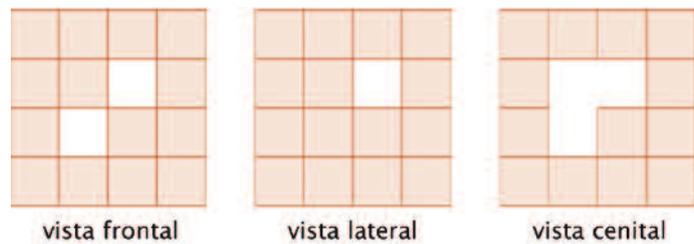


Imagen 23: Planta, alzado y perfil del policubo en la imagen 22

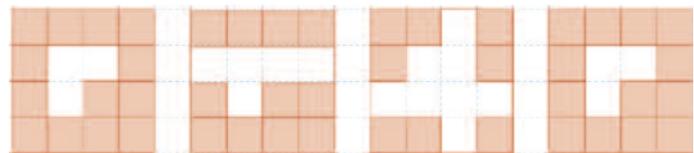


Imagen 24: Representación de las cuatro plantas que forman el policubo, empezando por la parte inferior

Reflexión final

La representación plana de objetos tridimensionales es un aspecto fundamental para facilitar la comunicación de información de estos objetos y por eso creemos en la relevancia de la propuesta presentada en las páginas anteriores.

Por otra parte, hemos relatado unas cuantas actividades donde el pensamiento exhaustivo juega un papel central para la determinación de todas las so-

luciones posibles a un problema. Apostamos por ese tipo de actividades porque en ellas l@s alumn@s tienen la palabra: han de discutir si una solución está repetida y argumentar por qué creen que no les falta ninguna.

Aunque gran parte de las actividades geométricas que se plantean en las aulas de Primaria se centra en el desarrollo de vocabulario geométrico, esta vía no lleva necesariamente a una mejora de la competencia comunicativa. Una propuesta enfocada en la descripción de objetos y en el análisis de dichas descripciones hacen que el desarrollo del vocabulario sea una necesidad comunicativa y no un fin en sí mismo.

Para profundizar

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1984) *El aprendizaje de las matemáticas.*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

OECD (2006) *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy. A Framework for PISA 2006*, Paris.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (2005). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*, Freudenthal Institute, Utrecht University.

DAVID BARBA Y CECILIA CALVO
Universitat Autònoma de Barcelona
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 *Situació espacial*: http://apliense.xtec.cat/arc/sites/default/files/MA_situacio_espacial_cub.html

2 *Guess the view*: http://www.fi.uu.nl/toepassing/00198/toepassing_wisweb.en.html

3 Esta imagen al igual que las imágenes 5, 6 y 13 fueron extraídas de Cerezo, A., Calvo, C. & Barba, D. (2013) El bloc de MATES (Editorial Barcanova). Cuando no se especifica de otra manera, las imágenes utilizadas en este artículo, o son de los autores, o tienen créditos que avalan su libre uso para fines no comerciales.

4 *Des d'on està tirada la fotografia?*: <http://puntmat.blogspot.com.es/2013/09/des-don-esta-tirada-la-fotografia.html>

5 *Treasure Island*: <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassing/03298/leerling.html>

6 *Solid Figures*: http://www.harcourtschool.com/activity/solid_figures/

7 Se pueden profundizar en este tipo de actividades en: <http://puntmat.blogspot.com.es/2013/12/tomografies-geometriques.html>

8 *Building with blocks*: <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassing/00724/>

9 Vale la pena decir que los cuerpos que aparecen en el applet no son siempre policubos. Para serlo, todos los cubitos que lo conforman deberían compartir, como mínimo, una cara y aquí esa restricción no existe.

10 Se pueden ver estas diez soluciones en: <http://puntmat.blogspot.com.es/2013/09/visualitzacio-amb-cubets-iv.html>

11 Se pueden ver respuestas de alumnos en: <http://puntmat.blogspot.com.es/2012/02/visualitzacio-amb-cubets-iii.html>

12 *Cubespective*: <http://www.theshockzone.com/games/cubespective.php>

13 *Point out the view*: <http://pbskids.org/cyberchase/math-games/point-out-view/>

14 *3D and Orthographic Views*: <http://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspDetail&ResourceID=281> y <http://www.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspDetail&ResourceID=170>

15 El enunciado del problema junto con algunas reflexiones sobre su solución se encuentran en: <http://puntmat.blogspot.com.es/2013/04/quadrats-magics-amb-retencio-de-liquids.html>

16 Las reglas de este juego junto con una variedad de applets para practicarlos se encuentran en: <http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2013/12/gratacels.html>