suma+ 74
Artículos
Noviembre 2013
pp. 31-38

La pendiente de una recta

Félix Martínez de la Rosa

En este artículo se dan recursos y actividades destinados a motivar el concepto de pendiente, aclarar su relación con la gráfica de una recta y con la razón de cambio, aplicarlo en situaciones reales a través de la modelización y utilizarlo como herramienta para visualizar propiedades en otros contextos matemáticos.

Palabras clave: Pendiente, Recursos, Razón de cambio, Modelización, Visualización.

The Slope of a Line

This paper will provide resources and activities to motivate the concept of slope, clarify its relationship with the graph of a line and the rate of change, apply it to real situations through modeling and use it as a tool to visualize properties in other mathematical contexts.

Keywords: Slope, Resources, Rate of change, Modeling, Visualization.

La pendiente de una recta es un concepto matemático fundamental en la ESO y el bachillerato. Aparece de varias formas y en varios contextos a lo largo de los distintos cursos y tiene aplicaciones en otras disciplinas. En un principio se introduce en el marco de las funciones afines y lineales, y son dos las formas de definirlo,

1. Como un coeficiente: el valor de m en la ecuación $y = mx + n$
2. Como un cociente:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

   donde (x_1, y_1), (x_2, y_2), son dos puntos de la recta.

Si se dispone de conceptos trigonométricos suele emplearse la siguiente definición,

3. Como la tangente de un ángulo: el que forma la recta con la parte positiva del eje x.

En otros momentos del cálculo la pendiente aparece de nuevo en relación con la recta tangente y la derivada. Además, su interpretación como razón de cambio se utiliza en física o economía.

Cada una de las definiciones puede dar lugar a ciertos errores de tipo operativo. Si se utiliza la definición 1 a veces se confunde el valor de la pendiente

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2012 y aceptado en enero de 2013

con el de la ordenada en el origen. Con la definición 2 puede surgir el error al formar el cociente. Con la definición 3 puede haber equivocaciones al elegir el ángulo. En otro nivel se encuentran los errores de concepto.

En el artículo de Tall y Vinner (1981), acerca de las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de límites y continuidad, los autores acuñaron las siguientes definiciones:

— *Concept definition* (definición de un concepto): son las palabras que se emplean para definir formalmente un concepto.
— *Concept image* (esquema conceptual): son las estructuras cognitivas que un individuo asocia a un concepto.

Cuando se explica un concepto, los alumnos desarrollan un proceso cognitivo con el que conciben un esquema conceptual. Para ello se basan en un conjunto de imágenes mentales (formas simbólicas, diagramas o gráficas) que asocian al concepto. Pero el conjunto de objetos matemáticos, que un alumno considera ejemplos adecuados para formar esa imagen, puede que no se haya elegido correctamente y pase por alto matices importante. Esto da lugar a esquemas conceptuales incompletos e inadecuados, que propician la aparición de errores de concepto.

En el caso de la pendiente, los errores de concepto pueden aparecer si los esquemas conceptuales están formados de una manera rígida por una sola definición, sin establecer relaciones con las otras. En Azcárate, (1992) se exploran los esquemas conceptuales que los alumnos tienen de la pendiente según la definición que recuerdan, y se establecen tres perfiles: el *perfil operativo* caracteriza a los alumnos que asocian la pendiente con la definición 1, el *perfil geométrico* se corresponde con la definición 3, y el *perfil funcional* con la definición 2.

— Si se recuerda únicamente la definición 1, el alumno sabe calcular el valor de la pendiente a partir de la ecuación de la recta pero puede carecer de una imagen gráfica adecuada.
— Si se recuerda únicamente la definición 3, el alumno puede llegar a tomar la pendiente como sinónimo de la inclinación y tener así una idea imprecisa del concepto. Es frecuente también cometer el error de creer que la pendiente es proporcional a la medida del ángulo.
— El esquema conceptual adquirido a partir de la definición 2, facilita entender la pendiente como una correspondencia entre los incrementos de la variable y propicia el concepto de tasa de variación o razón de cambio. Pero si los alumnos únicamente recuerdan la fórmula, entonces pueden creer erróneamente que la pendiente depende de los puntos elegidos para calcularla

Finalmente, en Stump (1999) o en Mudaly y Moore (2011) se investigan las ideas que tienen los profesores acerca de la pendiente: modelizar situaciones reales e interpretar la pendiente en esos contextos son las principales carencias encontradas.

La comprensión del concepto de pendiente es tan importante como el procedimiento para calcularla. Entenderlo bien pasa por tener clara la conexión entre sus distintas representaciones y la relación entre la ecuación de la recta, la gráfica y el contexto. Es importante incidir en la idea de razón de cambio y obtener modelos matemáticos que muestren su utilidad en situaciones reales. Además, la pendiente es una valiosa herramienta que facilita la visualización de propiedades matemáticas. En este artículo mostramos recursos y actividades que ayudan a la consecución de estos fines.

La pendiente y el dibujo de una recta

Introducir una imagen sorprendente o paradójica es un recurso didáctico útil porque capta la atención de los alumnos y provoca su curiosidad. Existen numerosos rompecabezas en los que desaparece alguna imagen al cambiar entre sí las piezas. Uno de los más famosos es la figura 1 que se recoge en el libro de Gardner (1983).

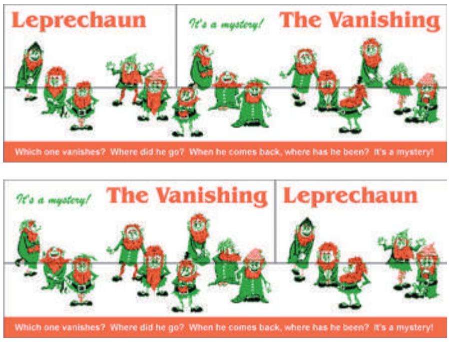

Figura 1

Se pasa de una imagen a otra intercambiando las piezas superiores: al hacerlo se crea el efecto de la aparición y desaparición un duendecillo. Si nos fijamos bien veremos que una misma cabeza no tiene asignada las mismas piernas en las dos imágenes. Por tanto las dos partes de la figura 1 están formadas por duendecillos distintos. En el enlace con la página del grupo Alquerque,

www.grupoalquerque.es/ferias/2011/archivos/falacias.html

se pueden encontrar otros rompecabezas con la misma idea. Por ejemplo, al intercambiar las dos piezas superiores de la figura 2 el número de huevos cambia.

Figura 2

Para que los alumnos entiendan bien el concepto de pendiente deben comprender su relación con la gráfica de la recta. Enlazando con las figuras anteriores, y para comprobar si mis alumnos de matemáticas de la Facultad de CC. EE. y EE. de la Universidad de Cádiz tienen asimilada esa conexión, les planteo la siguiente actividad.

Analizar las imágenes de la figura 3

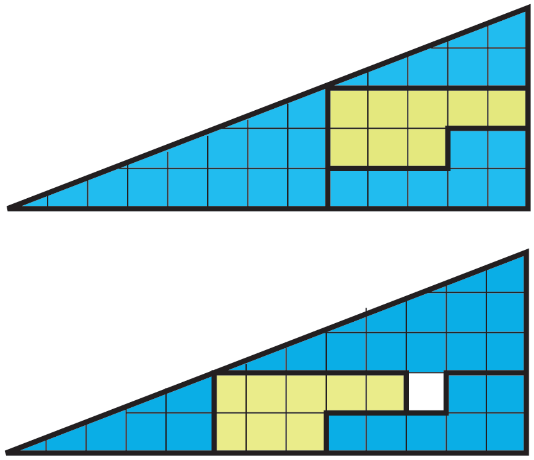

Figura 3

Se denominan triángulos de Gardner y aparentemente son iguales. Están formados por las mismas cuatro piezas. Al cambiarlas de posición aparece y desaparece un agujero.

La paradoja se aclara gracias a la pendiente. Si se usa el triángulo grande, la pendiente de la hipotenusa es 5/13, mientras que si se usan los pequeños obtenemos 3/8 y 2/5, por tanto la figura no es un triángulo (en el contorno se usan líneas gruesas para que lo parezca).

La exploración y discusión de esta actividad hace reflexionar a los alumnos y aporta grandes dosis de motivación. Además permite afianzar la idea básica de que la pendiente es la característica propia de una recta y es independiente de los puntos que se elijan para calcularla mediante la definición 2 (creer lo contrario es uno de los errores de concepto mencionados en la introducción).

La pendiente y la razón de cambio

Uno de los aspectos fundamentales de la pendiente es su interpretación como razón de cambio. Con el objetivo de saber si mis alumnos la conocen les planteo la siguiente actividad,

Representar una recta que pase por un punto P *y tenga una pendiente dada* m

La contestación es casi unánime: se halla la ecuación en la forma punto pendiente, se dan valores para obtener puntos de la recta y uniéndolos se obtiene su representación gráfica. Pero cuando se propone que hagan la actividad sin recurrir a ninguna ecuación, la mayoría no sabe hacerlo. La respuesta de esos alumnos muestra que la idea de razón de cambio no forma parte de sus esquemas conceptuales, no es algo que recuerden como importante cuando escuchan la palabra pendiente.

La figura 4 es muy útil para afianzar ese concepto.

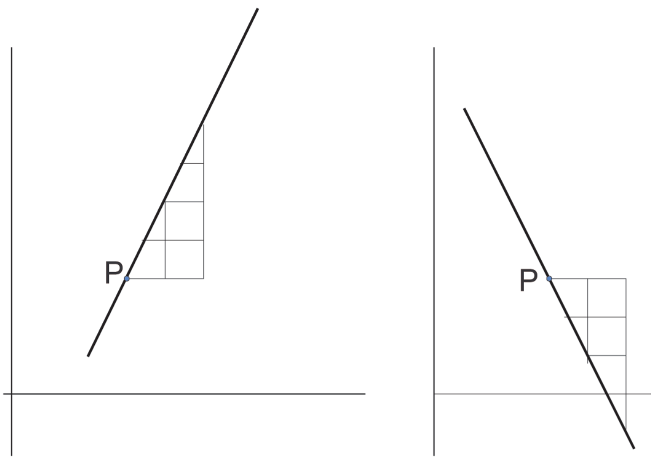

Figura 4

La imagen de la izquierda corresponde a la pendiente positiva $m=2$. Para dibujarla partimos de P y avanzamos 1 unidad hacia la derecha y 2 hacia arriba o 2 hacia la derecha y 4 arriba u otros valores con los que se mantenga la proporción (de forma análoga para el caso $m=-2$ de la imagen derecha). Con esto se obtiene un triángulo rectángulo cuya hipotenusa pertenece a la recta buscada.

La descripción con palabras del dibujo favorece la introducción de la pendiente como razón de cambio: si x aumenta una unidad, y varía en m unidades, es decir, y cambia a razón de m unidades por unidad de x.

Enlazando con el concepto de tangente de un ángulo, la actividad anterior se puede reformular de la siguiente manera,

Dibujar un ángulo con vértice en P *cuya tangente sea m*

Finalmente uno de los errores de concepto más habituales como es creer en la proporcionalidad entre ángulo y pendiente, se aclara con la figura 5.

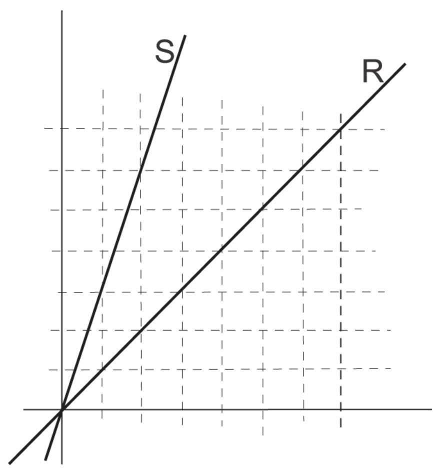

Figura 5

La pendiente de la recta R es 1 y la de S es 3. Por ser R la bisectriz del primer cuadrante su ángulo de inclinación es de 45° por lo que el de S no puede ser el triple.

Modelización de situaciones reales

La modelización de situaciones reales es una de las razones de ser de las matemáticas. Existen muchos contextos donde la pendiente como tasa de variación o razón de cambio juega un importante papel. Precisamente la formación de modelos y su interpretación constituye una de las principales carencias analizadas en los artículos de referencia y que he constatado en mis alumnos. Algunos conocidos ejemplos de situaciones que pueden ser modelizadas se exponen a continuación,

Temperatura: la temperatura de un cazo de agua puesto a calentar sube 15° C cada minuto. La temperatura inicial del agua es de 10° C. Al llegar a los 100° C la temperatura se estabiliza. Expresar con una ecuación y una gráfica esta situación.

Velocidad: un móvil está en el instante inicial a 3 metros del origen y se aleja de éste a una velocidad constante de 2 metros por segundo. Expresar la ecuación de su posición en función del tiempo.

Coste: una página de una revista tiene un coste fijo de 10 euros más un coste variable de 1 euro por palabra. Expresar en una ecuación el coste en función de cada palabra y hallar su pendiente y su gráfica.

Los aficionados al montañismo o al ciclismo definen el concepto de pendiente de un itinerario como la relación que existe entre el desnivel a superar y la distancia o recorrido horizontal. En la figura 6, se muestra el perfil de la ascensión más famosa del Tour de Francia.

En este contexto se plantea la siguiente actividad.

Explorar la figura 6 y obtener un modelo para calcular la altura de una montaña a partir de las pendientes locales

El desarrollo de esta actividad tiene dos partes. En la primera se analiza la figura 6 y los datos que ella ofrece y se da una primera solución del problema. En la segunda se eligen las herramientas matemáticas adecuadas para la creación de un modelo.

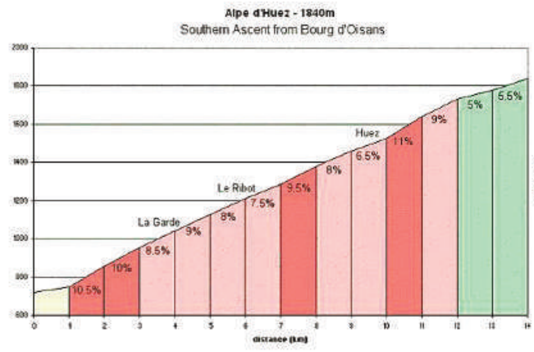

Figura 6

Parte 1. Análisis y comprensión del problema

La pendiente de una montaña se expresa como un tanto por ciento. Cuando hablamos de porcentaje siempre se hace en referencia a una cantidad (por ejemplo el 5% de *x*) pero aquí el tanto por ciento es un valor en sí mismo. En el trayecto entre el kilómetro 12 y el 13 el valor 5% describe que por cada 100 metros de recorrido horizontal se suben 5 metros. Con esa misma proporción tenemos que en ese kilómetro se han ascendido 50 metros.

Aunque la figura no es clara podemos convenir que nos encontramos aproximadamente a una altura de 760 metros al comenzar el kilómetro 1. Por tanto la altura en el kilómetro 14 se obtiene sumando a la altura inicial todas las subidas en cada kilómetro,

$$760+(105+100+85+90+80+75+95+80+ \\ +65+110+90+50+55)=1840\,\text{m}.$$

Parte 2. Modelización

El perfil de la montaña lo forman varios segmentos unidos, lo que en términos matemáticos es una función a trozos, lineal y continua que denominaremos F. Lo que buscamos es el valor $F(14)$.

Supongamos que queremos calcular la altura en el kilómetro 2. Para ello se dispone de la forma punto pendiente de la recta. Teniendo en cuenta que las unidades del eje horizontal son kilómetros y las del eje vertical son metros, el valor de la pendiente entre el kilómetro 1 al 2 es de 105 metros (es la variación vertical por cada unidad horizontal). Aplicando la fórmula tenemos,

$$F(2)=F(1)+(105)(2-1)=865 \text{ m.}$$

Es claro que repetir el proceso hasta llegar a sería tedioso. Para simplificar las operaciones, ya que la base de la montaña está dividida en intervalos de la misma longitud, podemos calcular la pendiente media,

$$\frac{10{,}5+10+8{,}5+9+8+7{,}5+9{,}5+8+}{13}$$
$$\frac{+6{,}5+11+9+5+5{,}5}{13}=8{,}3077\%$$

Esto significa que a lo largo de todo el recorrido horizontal se sube a razón de 83,077 metros por kilómetro, por tanto,

$$F(14)=F(1)+(83{,}077)(14-1)=1840 \text{ m.}$$

Con la exploración anterior ya se tienen toda la información necesaria para la modelización. Tomemos una función a trozos F lineal y continua definida en un intervalo $[a, b]$ dividido en n subintervalos de distintas longitudes $[a_i, a_{i+1}]$, siendo $a_1=a$ y $a_{n+1}=b$ (figura 7). El objetivo es crear un modelo para calcular $F(b)$ a partir de $F(a)$ y de las pendientes locales.

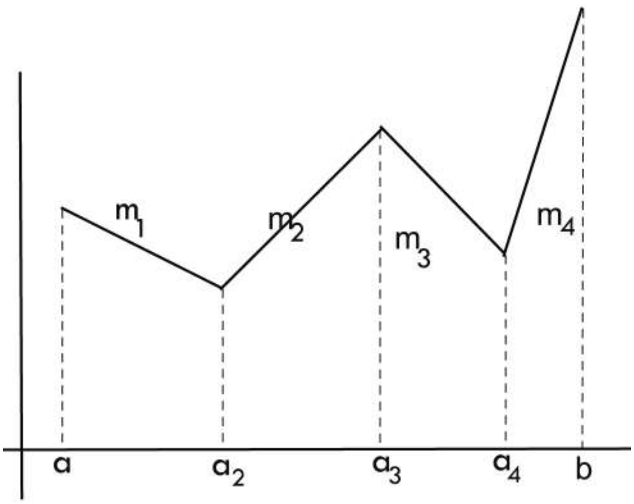

Figura 7

La pendiente media $\overline{m}$ se define como la media ponderada de las pendientes m_i, usando como peso la longitud de cada subintervalo:

$$\overline{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(a_{i+1}-a_i)}{b-a}.$$

En particular si cada subintervalo tiene la misma longitud $\frac{b-a}{n}$ la pendiente media es

$$\overline{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}$$

Por último el valor de $F(b)$ se obtiene a partir de $F(a)$y de la pendiente media, utilizando la forma punto pendiente de la recta, $F(b)=F(a)+\overline{m}(b-a)$

La pendiente como recurso para la visualización de propiedades en diferentes contextos matemáticos

En este último apartado veremos tres ejemplos de cómo la pendiente puede utilizarse para visualizar propiedades matemáticas de diversa naturaleza.

La pendiente y la sucesión de Fibonacci

Existen muchas figuras que presentan una paradoja similar a la de la figura 3. En la dirección de Internet,

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/matemagicas/pages/paradoxe/indexF.htm

puede verse un amplio muestrario de ellas. Observemos por ejemplo la figura 8.

Aquí se muestran un cuadrado y un rectángulo que tienen áreas distintas a pesar de que están formados con las mismas piezas. La exploración de la pendiente de la diagonal de la imagen de la derecha lleva a la conclusión de que no es recta y por tanto la figura no es un rectángulo.

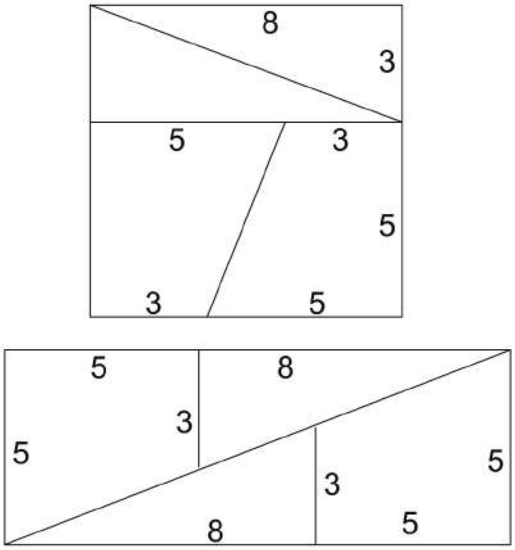

Figura 8

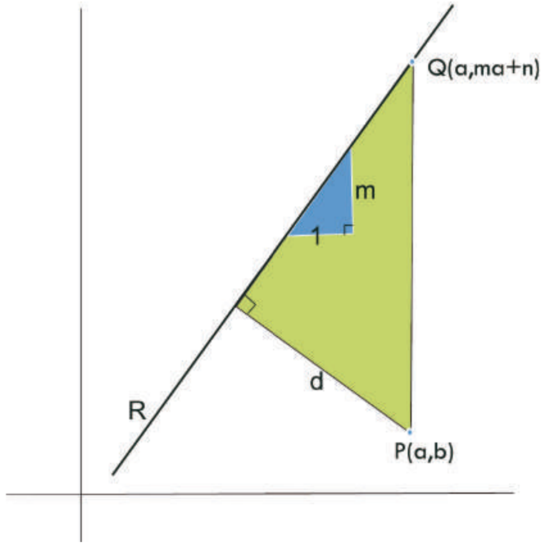

Figura 9

La característica de estas figuras es que los números utilizados forman parte de la sucesión de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … Una de las muchas propiedades de esta famosa sucesión es que el cuadrado de un término es igual al producto del anterior y el posterior más o menos una unidad. En la figura 8 el lado del cuadrado es 8 y los del rectángulo son 5 y 13 por lo que el área del cuadrado es una unidad menor. Si se emplea un cuadrado de lado 13 y un rectángulo de lados 8 y 21, el área del cuadrado es una unidad mayor.

Distancia de un punto a una recta

Utilizando la pendiente y la semejanza de triángulos visualizaremos, mediante la figura 9, la distancia entre un punto y una recta.

Aquí se ha dibujado la recta R de ecuación $y = mx + n$. El triángulo pequeño muestra la pendiente de la recta. Con el teorema de Pitágoras se calcula la longitud de su hipotenusa, $\sqrt{1+m^2}$.

La del triángulo grande es $|ma+n-b|$ y corresponde a la distancia entre los puntos P y Q, siendo el cateto d la distancia buscada. Por la semejanza entre ambos triángulos se tiene la fórmula (Eisenman, 1969),

$$\frac{d}{1} = \frac{|ma+n-b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Entre dos racionales siempre hay otro racional

Utilizando la pendiente como única herramienta, visualizaremos la propiedad de que entre dos racionales existe siempre otro racional. Tomemos los números positivos a, b, c, d, verificando que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ y observemos la figura 10 (Gibbs, 1990).

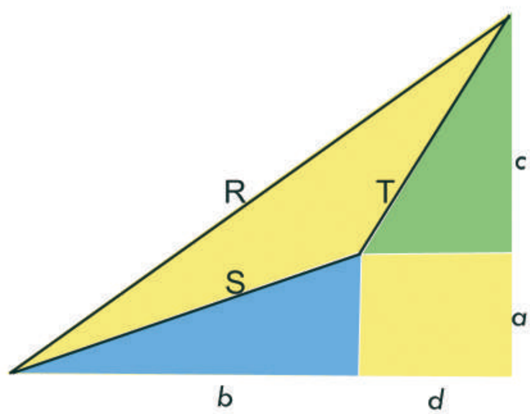

Figura 10

La inclinación de las rectas *R, S* y *T* nos lleva a establecer la relación entre sus pendientes y conseguir el resultado que se buscaba,

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Resumen final

A partir de trabajos de investigación en relación con los errores de tipo operativo y de concepto que se detectan en alumnos y profesores acerca de la pendiente (Azcárate, 1992), (Stump, 1999), (Mudaly y Moore, 2011) se analizan imágenes que pueden motivar este concepto (sección 2), afianzarlo como la característica intrínseca de una recta y aclarar su relación con la razón de cambio (sección 3), y corregir algunos errores de concepto que se han detectado. Asimismo se incide en su aplicación en otras disciplinas y en la modelización de situaciones reales (sección 4). Finalmente (sección 5) se utiliza en la visualización de propiedades en otros contextos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C. (1992), «Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de segundo de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta», *Epsilon*, n.º 24, 9-22.

Eisenman, R. L. (1969), «An Easy Way from a Point to a Line», *Mathematics Magazine*, vol. 42, nº 1, 40–41.

Gardner, M. (1983), *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar,* Labor, Barcelona.

Gibbs, R. A. (1990), «Proof without Words: The median property», *Mathematics Magazine*, vol. 63, nº 3, 172.

Mudaly, V., y D. Moore-Russo (2011), «South African teachers' conceptualizations of gradient: A study of historically disadvantaged teachers in an Advanced certificate in Education programme» *Pythagoras*, vol. 32, n.º 1, art. #25, 8 pages, <http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.25>

Tall, D., y S. Vinner (1981), «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics Education*, nº 12, 151-169.

Stump S. (1999), «Secondary Mathematics teacher's knowledge of slope», *Mathematics Education Research Journal*, vol. 11, nº 2, 124-144.

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>