suma+
SECCIONES
Noviembre 2013
74
pp. 67-74

Introducción a las estrategias multiplicativas

DAVID BARBA Y CECILIA CALVO

Tal y como comentamos en las entregas previas de esta sección dedicada a las Matemáticas en Primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación: ¿qué actividades podemos proponer para generar este ambiente de clase?, ¿qué preguntas podemos formular para fomentar las discusiones?, ¿qué modelos podemos presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus razonamientos?

Continuamos haciendo propuestas en este sentido, ahora centrándonos en un tema del bloque «Numeración y cálculo» con la misma intención de dar a nuestr@s alumn@s un papel protagónico en la construcción de su aprendizaje a partir de actividades en las que ell@s tienen la palabra.

Una de las deficiencias de la enseñanza de las matemáticas en Primaria es la escasa distinción que se hace entre una operación y su algoritmo (el procedimiento que se realiza, habitualmente por escrito, para obtener el resultado de la operación). En la primera y tercera entrega de esta sección ya abogamos por un trabajo con las operaciones aditivas ligado al desarrollo de estrategias más allá de los algoritmos de suma y resta. En esta entrega haremos lo propio con las operaciones multiplicativas.

Ell@s tienen la palabra

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2013 y aceptado en septiembre de 2013

¿Qué representa una multiplicación entre números naturales?

Indudablemente la multiplicación es una manera de abreviar una suma en la que todos los sumandos son iguales (3+3+3+3 se abrevia 4x3) pero en el aula de matemáticas la expresión 4x3 debe representar mucho más que una suma. Debe representar la respuesta al conteo de todos los elementos que hay en 4 grupos de 3 elementos cada uno (figura 1), de todos los elementos distribuidos en 4 filas y 3 columnas (4×5 en la figura 2) y de todas las maneras de combinar 4 camisetas de distinto color con 3 pantalones también diferentes entre sí (figura 3).

Figura 1

Si se muestra brevemente la figura 1 y se pregunta cúantas estrellas aparecen en ella seguramente no habrá tiempo suficiente para contarlas una a una, pero sí para ver 4 grupos de 3 estrellas cada uno y obtener de ahí la respuesta cuando la imagen ya no esté disponible.

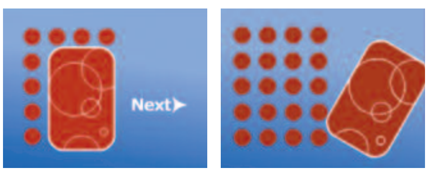

Figura 2. Captura de pantalla del *applet Arrays*[1]

En la figura 2 se pide contar los círculos en una distribución rectangular de los cuales la mayoría no pueden verse por quedar ocultos tras una tarjeta que se retirará para verificar la respuesta.

La cuestión planteada en la figura 3 permite experimentar con las combinaciones y su estructura multiplicativa.

Figura 3. Captura de pantalla del *applet Bobbie Bear*[2]

En estas actividades se aprecia la íntima relación que existe entre las situaciones multiplicativas y el conteo. Lo habitual cuando nos dan una gran cantidad de objetos para contar es que los agrupemos y recitemos 2, 4, 6, 8… o 5, 10, 15, 20… o 10, 20, 30, 40… (figura 4). Se trata de resaltar que también aquí estamos multiplicando.

En el caso de la figura 4 tenemos 6 grupos de 5 mariquitas y otro fuera: 5, 10, 25, 20, 25, 30, 31 en total.

El vocabulario que suele utilizarse en situaciones multiplicativas como las comentadas es «cuatro grupos de tres» o «cuatro veces tres». Sin embargo, cuando utiliza-

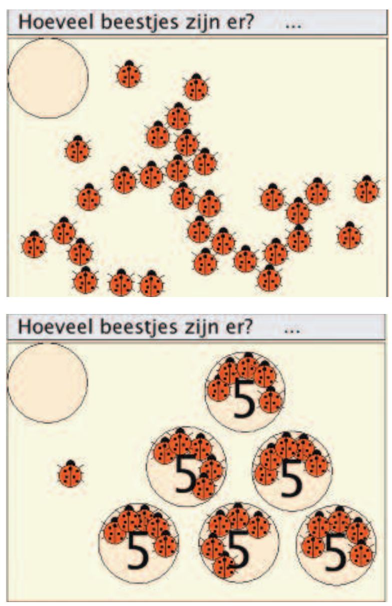

Figura 4. Capturas de pantalla del *applet Vangen*[3] que permite agrupar, para contar con más eficacia, unas mariquitas en movimiento en la pantalla metiéndolas en unos círculos que las inmovilizan

mos la expresión simbólica (4×3) se tiene tendencia a leerlo como «4 por 3» lo que puede hacer perder referentes contextuales a nuestros alumnos. Creemos que es importante no cambiar el vocabulario y quedarnos con el «4 veces 3» cuando leamos 4×3 hasta que haya un dominio suficiente del significado.

Primera aproximación a problemas de multiplicación

Es frecuente escuchar la frase: «en este curso trabajaremos la tabla del dos» cuando debería decirse «en este curso estudiaremos situaciones que implican la tabla del dos». Podría parecer un matiz de lenguaje pero va más allá: el objetivo en la primera frase nos lleva a la idea de memorizar las tablas, la segunda sin embargo conduce a un aprendizaje del concepto, centrado en situaciones de conteo de dos en dos, de cinco en cinco, o de diez en diez, que los alumnos ya dominan con anterioridad. Esto nos lleva a la conclusión que para resolver problemas de multiplicación lo primero no es memorizar las tablas correspondientes, sino al contrario.

Las situaciones planteadas pueden ser de distinta índole, un ejemplo lo tenemos en el llamado *subitising* (actividades como la que aparece en la figura 1 consistentes en mostrar imágenes durante un par de segundos y plantear una pregunta de conteo). La figura 5 presenta dos diapositivas que se mostraron brevemente a un grupo de alumnos para después de ocultarlas pedirles que explicaran qué habían visto. En relación a

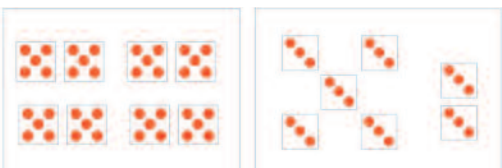

Figura 5. Dos ejemplos de *subitising* con dados

la primera, la mayoría contestó que habían visto 8 grupos de 5 puntos y unos pocos contestaron que habían visto 4 grupos de 10. Posteriormente se les preguntó cuántos puntos aparecían en total y se concluyó que 8 grupos de 5 y 4 grupos de 10 son 40.

Las tablas implican mucho más que memorización

Los lectores que ya tienen cierta edad recordarán las películas de los años 50 o 60 en las que aparecía un aula de primaria con sus elementos imprescindibles: los pupitres, el crucifijo, un par de cuadros colgados sobre la pizarra con las fotos de los que mandaban y un globo terráqueo, todo ello acompañado de una música de fondo: las tablas de multiplicar cantadas. Con el paso del tiempo han ido desapareciendo estos símbolos (en algunos lugares hasta el globo terráqueo, cosa que es una pena), pero una sigue vigente: las tablas de multiplicar cantadas o recitadas. Es cierto que ha habido muchos intentos de modernizar esta práctica cambiando la música, desde Miliki[4] hasta una versión matemática apócrifa del *Thriller* de Michael Jackson[5] pasando por las increíbles versiones de Enrique y Ana[6].

No querríamos dar la impresión equivocada de que proponemos dulcificar el aprendizaje de las tablas a partir del elemento lúdico o continuar memorizando resultados simplemente cambiando la música. Lo que proponemos es un recorrido parecido al que los alumnos de los primeros cursos de primaria realizan con la sumas básicas, un proceso de construcción de las tablas articulado alrededor del aprendizaje de unos pocos hechos básicos a partir de los cuales se deduzcan los otros resultados. Cantarlas o recitarlas puede ser un recurso más o incluso un motivo de diversión en una fiesta escolar, pero la memorización debe apoyarse en un proceso de construcción reflexiva.

El proceso de construcción del que hablamos podría comenzar con la construcción de las tablas del 2, del 5 y del 10 basándose en situaciones contextualizadas y conocimientos previos como los dobles (figura 6) o el conteo rítmico de 5 en 5 o de 10 en 10 (figura 7).

Antes de seguir, creemos importante destacar que optamos por postergar la presentación de las tablas del 0 y del 1. De hecho, la utilidad de estas dos tablas no proviene de la solución de ningún tipo de problema contextualizado («0 veces 7» o «1 vez 8») sino que llegará mucho más tarde, durante la ejecución del algoritmo de la multiplicación cuando el 1 y el 0 sean cifras de alguno de los factores involucrados.

La manera de enlazar las nuevas tablas con las anteriores puede hacerse siguiendo una dinámica de «hechos conocidos - hechos derivados». El siguiente diálogo entre un alumna que no conoce aun la tabla del 4 y su maestro nos sugiere un camino:

Maestro: ¿Cuántas ruedas tienen 7 coches?

Alumna: 28

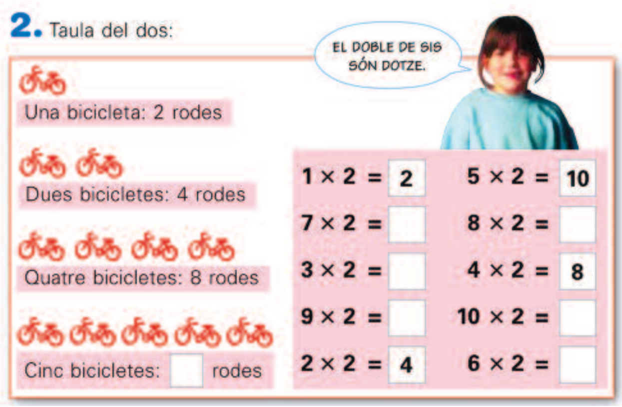

Figura 6. Ejemplo[7] de construcción de la tabla del dos a partir de la noción de dobles y del conteo del total de ruedas de unas cuantas bicicletas

Figura 7. Ejemplo de construcción de la tabla del cinco a partir del conteo de 5 en 5 y del total de dedos de unas cuantas bicicletas

Maestro: ¿Cómo lo has contado?

Alumna: Si 7 bicicletas tienen 14 ruedas, 7 coches tendrán el doble, 28

Se nos presenta la posibilidad de construir la tabla del 4 duplicando los resultados de la tabla del 2.

Otro camino para llegar a nuevos resultados es explotar la propiedad conmutativa de la multiplicación que reduce, a aproximadamente la mitad, el número de resultados a aprender. La comprensión a fondo de esta propiedad no es fácil si nos movemos exclusivamente en un contexto de suma reiterada (¿por qué 7+7+7 da lo mismo que 3+3+3+3+3+3+3?) o de grupos desestructurados (¿por qué en ocho barcas con cuatro tripulantes cada una van la misma cantidad de personas que en cuatro barcas con ocho tripulantes?). Pero aquí el modelo rectangular de la multiplicación juega un papel central como contexto (figura 8).

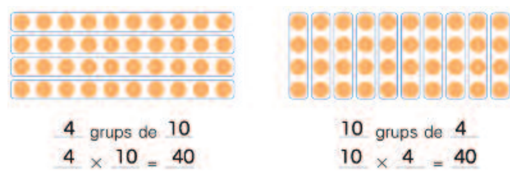

Figura 8. La cantidad de objetos distribuidos en 4 filas y 10 columnas es la misma, se cuenten por filas o por columnas

Veamos otro ejemplo de una sugerente conversación entre un alumno y su maestra tomada del libro de Van den Heuvel-Panhuizen citado al final del artículo:

Alumno: No sé cuánto da 6x8

Maestra: Puedes hacerme cualquier pregunta para ayudarte menos cuánto da 5x8

Al cabo de un instante:

Alumno: Ya lo sé: 48

Aquí se ilustra un paso clave en dinámica de «hechos conocidos - hechos derivados» de la que hablábamos antes: si un alumno sabe que en 5 grupos de 8 hay 40, puede deducir que en 6 grupos de 8 habrá 8 elementos más: 48.

Un último ejemplo que ilustra esta propuesta la encontramos en un vídeo[8] en el que una profesora enseña a un auditorio de maestros la tabla de multiplicar del 17 en diez minutos. Nos queremos centrar en la primera pregunta que plantea, a nuestro entender genial:

> Vamos a estudiar la tabla del 17, ¿qué resultados ya saben?

Las primeras respuestas son inmediatas: 17×1=17, 17×2 es el doble de 17: 34, 17×4 es el doble de 34: 68, 17×8 es el doble de 68: 136, 17×10=170, 17×5 es la mitad de 170: 85. ¿Y qué pasa con 17×3? Algunos responden sumando 17 a 17×2, otros restando 17 a 17×4… ¿no podríamos recorrer un itinerario equivalente para presentar, por ejemplo, la tabla del 7?

Para sustituir las dinámicas de memorización de las tablas a partir de la repetición, optamos por un proceso más reflexivo que pase porque cada alumno identifique qué resultados domina, cuáles no y entonces, por deducción, obtenga los otros resultados. Este planteamiento no sólo ofrece seguridad a los alumnos sino que refleja una imagen más adecuada de la actividad matemática.

Multiplicar por 10, 20, 30, 40…

Siguiendo en la misma línea de construcción de estrategias multiplicativas, huimos de dar fórmulas mágicas que resuelvan cada caso. En particular, huimos de frases como «para multiplicar por la unidad seguida de ceros se multiplican los números sin ceros y posteriormente se añaden al final». Como alternativa planteamos situaciones relacionada al conteo de billetes de 10, 20 y 50 euros. Por ejemplo, «si un pastel cuesta 20€ ¿cuánto cuestan 4 pasteles?» o «si tenemos 6 billetes de 20€ ¿cuánto dinero tenemos?». Después de haber resuelto diferentes situaciones como éstas podemos escribir la «tabla del 20». Organizando los resultados obtenidos y comparándolos con la tabla del 2 serán los propios alumnos quienes formulen la regularidad en sus propios palabras (por ejemplo: «se multiplican los números sin el cero y se pone un cero detrás»).

¿Qué representa una división entre números naturales?

En la línea de reconocer los distintos contextos en que se aplica la división encontramos que un mismo cálculo, como por ejemplo 18 : 3, puede resolver dos tipos de problemas bastante diferentes.

Por una parte, problemas de reparto en los que se conoce el total de elementos a repartir y el número de grupos en que se hará tal reparto y se busca el número de elementos en cada grupo. Por ejemplo: «tengo 18 galletas para repartir entre 3 amigos, ¿cuántas galletas recibirá cada uno de ellos?»

Por otra, problemas de agrupamiento en los que se conoce el total de elementos a repartir y el número de elementos que tendrá cada grupo y se busca el número de grupos resultantes. Por ejemplo: «hay 18 alumnos realizando una tarea en grupos de 3, ¿cuántos grupos hay?»

La base para entender que los dos problemas anteriores se asocian a la misma división está en la propiedad conmutativa de la multiplicación: dado que 6×3 y 3×6 dan el mismo resultado, 18 se puede descomponer tanto en 6 grupos de 3 elementos como en 3 grupos de 6 elementos. En este sentido, resolver una división es buscar el factor que falta en una multiplicación conociendo uno de los factores y el resultado.

Por este motivo, un buen recurso para acercarse a la división como inversa de la multiplicación son los triángulos multiplicativos. Se trata simplemente de una manera de simbolizar una multiplicación escribiendo en los dos vértices inferiores los factores y en el tercer vértice el producto. Los triángulos multiplicativos pretenden ayudar a la encapsulación de los tres números, de manera que no queden relacionados por una única operación sino por cuatro, tal y como se ve en la figura 9 (y en webs al final).

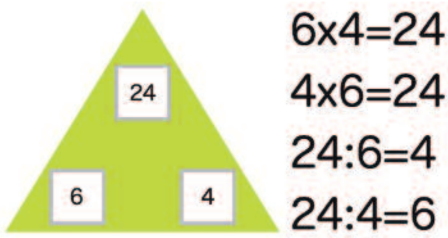

Figura 9. Saber que 6x4=24 implica poseer como hechos conocidos, y simultáneamente, el resultado de otras tres operaciones

Este proceso de encapsulación debe ser presentado de manera contextualizada por lo cual desde que se comienza a trabajar la multiplicación, aun antes de mencionar la división, se pueden proponer ejercicios como los que aparecen en la figura 10.

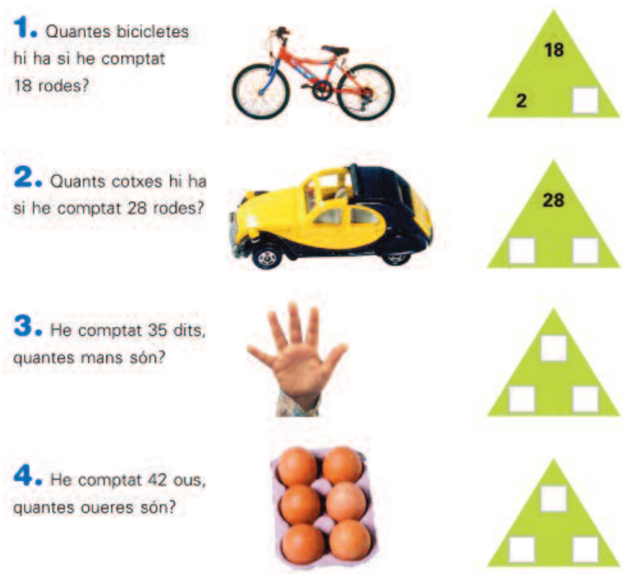

Figura 10. 1.¿Cuántas bicicletas hay si cuento 18 ruedas? 2.¿Cuántos coches hay si cuento 28 ruedas? 3.He contado 35 dedos ¿cuántas manos son? 4.He contado 42 huevos ¿cuántas hueveras son?

De todas maneras, la división no debería presentarse exclusivamente en situaciones en que no hay residuo. Para que un alumno pueda entender realmente qué implica un reparto deben presentarse desde un primer momento problemas en que al formar los grupos sobren objetos que no se pueden repartir sin alterar la idea fundamental de que los grupos sean iguales.

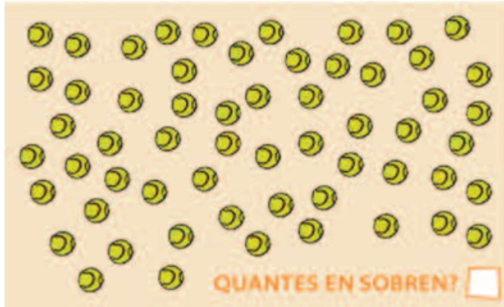

Figura 11. Situación en que se pide a los alumnos que averigüen cuántas pelotas sobran después de empaquetarlas en grupos de cinco[9]

Tampoco debería presentarse la división únicamente como inversa de la multiplicación sino que también debería relacionarse con la resta. La primera vez que un alumno se enfrenta al problema «en el bote quedan 20 rosquillas y cada día como 3, ¿cuántos días faltan para que se acaben?» su estrategia para afrentar el problema seguramente sea restar 3 de manera sucesiva al 20 y contar cuántas de estas restas pudo realizar. Es muy importante que el alumno asocie este problema a la división 20 : 3 y su solución al resultado 6 r 2 (és decir, 6 residuo 1 o, en este caso, saber que hay suficientes rosquillas para 6 días y que aún sobrarán 2 rosquillas).

El residuo de la división

Acabamos de ver que con el modelo de la resta reiterada tiene sentido plantear divisiones que no sean «exactas» y lo mismo sucede cuando el problema a resolver es un problema de reparto (aquí el residuo será el sobrante de un reparto que con todos los elementos no puede hacerse de manera que todos los grupos sean del mismo tamaño). Pero al buscar el resultado de 20 : 3 a partir de triángulos multiplicativos vemos que ninguno de estos triángulos tiene un 20 en el vértice superior y un 3 en alguno de los vértices inferiores. La solución del problema pasa por encontrar un triángulo multiplicativo con un vértice inferior de 3 y un vértice superior «cercano» al 20: si 18 caramelos se pueden repartir en 6 grupos de 3, con 20 caramelos el reparto sería igual salvo que sobrarían dos caramelos. Por tanto 20 : 3 = 6 r 2.

Creemos beneficioso para un buen entendimiento de la división plantear a los alumnos situaciones como la siguiente:

Si 97 : 7 = 13 r 6, ¿cuánto es 95 : 7?

¿I 98 : 7?

Creemos que es muy importante que los alumnos discutan las estrategias que les permiten derivar nuevos hechos a partir de hechos conocidos y, como siempre, el maestro podrá recurrir al contexto para ayudarlos en estas deducciones. Por ejemplo:

a) Si sabe que al repartir 97 objetos en 7 grupos resultan grupos de 13 objetos y un sobrante de 6, cuando los objetos son 95 (dos menos que antes) la cantidad de objetos en cada grupo no cambiará y sobrarán dos objetos menos: 95 : 7 = 13 r 4.

b) Pero si, aplicando un razonamiento similar, un alumno dice que 98 : 7 = 13 r 7,

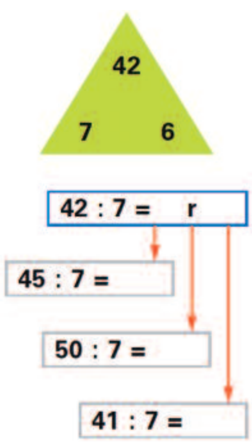

Figura 12. Se pide al alumno deducir los resultados de diferentes divisiones a partir de una conocida utilizando razonamientos del tipo «si al repartir 42 objetos en 7 grupos quedan 6 elementos en cada uno, al repartir 41 objetos los grupos quedarán de 5 objetos y sobrarán 6»

esto significaría que el reparto de 98 cromos entre 7 amigos daría 13 cromos a cada uno y sobrarían 7 cromos. Esto debería llamarle la atención y llevarle a descubrir que no tiene sentido que el sobrante sea mayor o igual que el número de grupos porque esto permitiría aumentar el número de elementos para cada grupo.

Otro ejemplo, en este caso un ejercicio, se puede ver en la figura 12.

Las divisiones con residuo se deben trabajar de manera intencionada en la clase, pero eso no quiere decir que requiera una práctica repetitiva sino que puede llevarse a cabo en un entorno de resolución de pequeños problemas como los que se muestran en las figuras 13 y 14.

Figura 13. De las seis divisiones que se pueden plantear colocando los tres números de la izquierda en los recuadros indicados, ¿cuál es la que tiene mayor residuo?

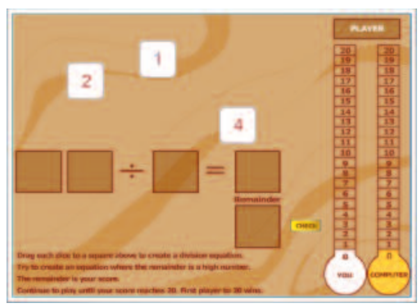

Figura 14. Captura de pantalla del *applet Remainder count*[10] que plantea en forma de juego la elección de la división que tiene mayor residuo intercambiando la posición de tres dígitos

Descomponer para multiplicar y para dividir

En la tercera entrega de esta sección, *Calcular usando el contexto del dinero* (Suma n.º 72, 91-98), hablamos de la descomposición como una estrategia fundamental en relación a las operaciones aditivas, pero esta estrategia también juega un papel relevante en relación a las operaciones multiplicativas. Si bien es cierto que las características de la descomposición son algo diferentes en el caso de la división.

Para sumar y restar, la descomposición que hacemos está íntimamente ligada a la descomposición decimal en centenas, decenas y unidades. Lo mismo con la multiplicación: para multiplicar 57×3 podemos descomponer $57 = 50 + 7$, multiplicar $50 \times 3 = 150$ y $7 \times 3 = 21$, y sumar los dos resultados parciales $150 + 21 = 171$.

Sin embargo, al dividir, la descomposición conveniente no suele ser la decimal. Para dividir 57 : 3, descomponer $57 = 50+7$ no ayuda porque las divisiones resultantes (50 : 3 y 7 : 3) no son más fáciles que la división inicial. Es mucho más conveniente descomponer $57 = 30 + 27$, dividir $30 : 3 = 10$ y $27 : 3 = 9$, y concluir que $57 : 3 = 10 + 9 =19$.

Para 160 : 7 descomponemos $160 = 70 + 70 + 20$. Y como $70 : 7 = 10$ y $20 : 7 = 2$ r 6, se puede concluir que $160 : 7 = 10 + 10 + 2$ r $6 = 22$ r 6.

En la división, la descomposición aditiva más eficiente es la que permite expresar el dividendo como suma de múltiplos del divisor.

Gran parte de los problemas que encontramos en los libros de texto que involucran divisiones pueden hacerse utilizando las citadas estrategias de «aritmética mental»[11] antes de presentar cualquier algoritmo para esta operación. Debería hacerse sin escribir para permitir que los alumnos generen una comprensión profunda de la división y de sus propiedades fundamentales.

Reflexión final

En estas páginas hemos querido destacar algunas características de los problemas de estructura multiplicativa que contribuyen a que se trabajen en un ambiente donde se prioriza la voz de los alumnos. Dichos problemas:

a) Permiten ser contextualizados de maneras diversas: situaciones en las que se combinan posibilidades, en las que los objetos se distribuyen en filas y columnas, situaciones de agrupamiento y reparto…

b) Se pueden resolver antes de presentar los algoritmos de multiplicación y de división, derivando resultados de otros ya conocidos y mediante la descomposición más conveniente de los números involucrados en las operaciones.

Para profundizar

Barba B. & Calvo C., 2010, La división: mucho más que un algoritmo, *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, nº. 54, 41-54.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.), 2001, *Children learn mathematics*, Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Enlaces recomendados

Sobre triángulos aritméticos (incluye material):

http://puntmat.blogspot.com.es/2013/10/triangles-aritmetics-2-multiplicacio-i.html

Enlaces recomendados sobre tablas de multiplicar:

http://puntmat.blogspot.com.es/2013/09/taules-de-multiplicar-ii.html

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako, Barcelona
<*tienenlapalabra@revistasuma.es*>

1 http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/children_arrays.html

2 http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=3

3 http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/01012/

4 http://youtu.be/GoxmKQ0xo-I

5 http://youtu.be/E7i-oQuoTVA

6 http://youtu.be/CBLO0c8GOsI

7 Ésta y las figuras 7 y 9 de: Barba, D. & Calvo, C., 2005, *3x6.mat Quaderns d'estratègies de càlcul*, Ed. Barcanova.

8 http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=yXdHGBfoqfw

9 Imagen extraída de: Cerezo, A., Calvo, C. y Barba, D., 2013, *El bloc de MATES*, Editorial Barcanova.

10 http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/children_remainders_count.html

11 El término no implica que los cálculos deban realizarse así. A veces es necesario ayudar la memoria con registros escritos. Podría llamarse «aritmética sin algoritmos».