suma+
Artículos
Julio 2013
73
pp. 49-60

Poesía y Matemáticas: comentario de texto

Francisco José Gómez Senent

Se plantea aquí una propuesta de trabajo interdisciplinar, dirigida al Bachillerato, en la que se integran contenidos de distintas áreas desde un punto de partida no habitual en la clase de Matemáticas: el comentario de texto, típico en la clase de Lengua, aplicado a una poesía de contenido matemático. Se trabajarán desde la historia de la ciencia hasta la geometría dinámica con *GeoGebra*, pero ante todo se incidirá en el desarrollo de la competencia lingüística (castellano e inglés) a partir de la competencia matemática, y en la importancia del criterio estético en la investigación científica.

Palabras clave: Poesía y Matemáticas, Competencia lingüística, Geometría dinámica, Teoremas de geometría, Innovación didáctica.

Poetry and Mathematics

This article presents a proposal of interdisciplinary work, applying to Secondary education, in which we integrate contents from different subjects with a rare starting point in the Mathematics class: the commentary of text, usual in the Language class, applied to a poem with mathematic content. We will work from history of science to dynamic geometry by using *GeoGebra*, but mainly we will stress on the development of the linguistic competence (in Spanish and English) from the mathematic competence, and on the importance of the aesthetic criterion in the scientific investigation.

Keywords: Poetry and Mathematics, Linguistic competence, Dynamic geometry, Geometric theorems, Didactic innovation.

Esta propuesta de trabajo se dirige al Bachillerato y plantea como objetivo principal la posibilidad de utilizar el análisis lingüístico de una poesía con contenido matemático (sobre un resultado no elemental) para transmitir a los alumnos el criterio estético que los matemáticos (y científicos en general) usan de forma muy importante al resolver un problema, demostrar un teorema o construir un modelo teórico.

No hay dudas sobre esta cuestión, la relación entre poesía y matemáticas, en la comunidad matemática, ya que puede ilustrarse de forma bastante contundente con un par de citas de importantes matemáticos:

> Un matemático que no tenga también algo de poeta, nunca será un matemático completo (Karl Weierstrass).

> La matemática es en cierto sentido una forma de poesía. El elemento poético, el goce de explorar el medio por sí mismo, es un ingrediente esencial en el proceso creativo (Jacob Bronowski).

Una amplia discusión y reflexiones sobre el tema pueden encontrarse en el artículo de Miguel de Guzmán (2003). El profesor Pedro González Urbaneja, en un artículo de Suma (2008), lo sintetiza muy bien:

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2012 y aceptado en enero de 2013

Poesía y Matemática comparten no sólo la medida, sino en todo caso armonía, belleza, juego, artificio y creatividad. Por eso muchos poetas y matemáticos han comparado la experiencia de demostrar un teorema con la de construir un poema.

Así pues, la idea central de la presente propuesta es la de analizar un caso real e importante de simbiosis entre dos ramas, Poesía y Matemáticas, como muestra a los alumnos de que las Matemáticas están presentes en más ámbitos de los que ellos perciben. Para ello se plantearán, a raíz del contenido del poema, algunas actividades interdisciplinares que permitirían a los profesores de distintas materias transmitir a los alumnos el hecho de que se puede trabajar sobre un mismo eje temático interconectado, ampliando en las distintas asignaturas, para que asuman que todo el conocimiento está relacionado y no forma parte de áreas estancas.

Centramos toda la propuesta didáctica en el poema *The Kiss Precise*, de Frederick Soddy (*Nature* 137 (20/6/1936, DOI 10.1038/1371021a0). La siguiente es su versión original acompañada de la traducción hecha por el autor de este trabajo[1].

The Kiss Precise	**El beso preciso**
For pairs of lips to kiss maybe	Quizás besarse pares de labios podría
involves no trigonometry.	no involucrar trigonometría.
'Tis not so when four circles kiss	Mas no es así para cuatro círculos besar
each one the other three.	cada uno a los otros tres.
To bring this off the four must be	Para lograrlo los cuatro han de estar
as three in one or one in three.	según tres en uno o bien uno entre tres.
If one in three, beyond a doubt	Si uno entre tres, es evidente,
each gets three kisses from without.	todos reciben tres besos externamente.
If three in one, then is that one	Si tres en uno, entonces éste
thrice kissed internally.	tres veces es besado internamente.
Four circles to the kissing come.	Cuatro círculos a besarse vienen.
The smaller are the benter.	Cuanto menores más curvatura tienen.
The bend is just the inverse of	La curvatura es sólo el inverso
the distance from the centre.	de la distancia desde el centro.
Though their intrigue left Euclid dumb	Aunque su fascinación dejó a Euclides sin habla
there's now no need for rule of thumb.	ahora no hay necesidad de empírica regla.
Since zero bend's a dead straight line	Puesto que la recta tiene curvatura cero
and concave bends have minus sign,	y las curvas cóncavas tienen signo menos,
the sum of the squares of all four bends	la suma de los cuadrados de las cuatro curvaturas
is half the square of their sum.	es la mitad del cuadrado de su suma.
To spy out spherical affairs	Reconocer las relaciones esféricas
an oscular surveyor	a un topógrafo de besos
might find the task laborious,	podría parecer trabajo penoso;
the sphere is much the gayer,	la esfera está más liberada,
and now besides the pair of pairs	y ahora además del par de pares
a fifth sphere in the kissing shares.	una quinta esfera comparte besos.
Yet, signs and zero as before,	Aún así, con signos y cero como antes,
for each to kiss the other four	para besar cada una a las otras cuatro,
the square of the sum of all five bends	el cuadrado de la suma de las cinco curvaturas
is thrice the sum of their squares.	es tres veces la suma de sus cuadrados.

Actividades en torno a la poesía

Se enuncia a continuación un listado de posibles tareas que podrían realizar los alumnos, estructuradas desde el punto de vista esencial de trabajar de forma interdisciplinar.

Es importante señalar, antes de entrar en materia, que no se pretende que todas ellas se puedan llevar a cabo en una misma experiencia de aula. Sin embargo, muchas se plantean para mostrar las múltiples posibilidades y con objeto de que cada profesor pueda elegir aquellas más cercanas a sus objetivos e intereses didácticos, adaptándose al grupo de alumnos al cual se dirija, optando entre un planteamiento con mayor peso matemático o por otro con mayor dosis de interdisciplinariedad y colaboración con otros compañeros profesores.

Así pues, propondremos a continuación una experiencia de aula básica que asegure trabajar los objetivos esenciales que pretendemos transmitir. A saber: analizar el contenido lingüístico y matemático del poema con el objetivo fundamental de percibir el criterio estético como base para depurar la demostración de un teorema e, incluso, para presentarlo a la comunidad científica.

Después, se enuncian las restantes actividades, no incluidas en el mencionado itinerario básico. Algunas no se centran específicamente en la poesía, pero conectan de algún modo con ella.

Quedaría a criterio del profesor la posibilidad de incluir un par de ellas en la experiencia de aula con objeto de ampliar el ámbito de discusión. También se podrían plantear algunas como actividades de profundización, voluntarias para los alumnos más motivados, incitándoles a investigar y consultar a otros profesores.

Más adelante daremos algunas pautas metodológicas y las claves de las respuestas esperadas, comentando los objetivos perseguidos con cada actividad.

Experiencia de aula básica

1) Analiza cuáles son las ideas principales del poema y el orden en que se presentan. Comenta la similitud estructural que encuentres en comparación con la forma en que se expone un teorema matemático.
2) Realiza un comentario de texto de la poesía, siguiendo el modelo de coherencia, cohesión y adecuación que te explican en Lengua (pide ayuda a tu profesor).
3) Escribe las fórmulas correspondientes a los dos teoremas que se exponen en la poesía.
4) ¿Qué interés tiene el contenido del verso 17? Y en el presente problema, ¿en qué afecta la aclaración del verso 18? Esto es, ¿en qué aspecto específico es importante?
5) El resultado de Soddy referido en la segunda estrofa fue descubierto antes por Descartes e investigado mucho antes por Euclides (observa el verso 15). Documenta la historia de este problema y resume tus impresiones.
6) Busca información sobre la importancia de la revista *Nature*. ¿Por qué crees que Soddy presentó en este formato poético el teorema, teniendo en cuenta el medio en que lo hizo? Relaciona esto con la cita de Weierstrass: «Un matemático que no tenga también algo de poeta, nunca será un matemático completo.»
7) Realiza un dibujo ilustrativo y aproximado de la situación geométrica que se plantea, tanto con los cuatro círculos como con las cinco esferas.

Actividades optativas o de profundización

8) Traduce la poesía de F. Soddy (pide ayuda al profesor de Inglés). Compara tu traducción con las que te proporcionará el profesor de Matemáticas. ¿Qué diferencias importantes encuentras y qué comentarios te sugieren?
9) En la última décima se generaliza el resultado sobre círculos (2 dimensiones) para esferas (3 dimensiones), pasando de cuatro a cinco los ele-

mentos necesarios. Pero Soddy trabajó en otros problemas similares. Investiga qué es el «sexteto de Soddy» y la historia de este problema.

10) En Enero de 1937, también en *Nature*, se publicó una cuarta estrofa que generalizaba la última parte de los resultados de Soddy formulando la expresión correspondiente para espacios de *n* dimensiones (esa nueva estrofa, de Thorold Gosset, se reproduce más abajo junto a su traducción). Especifica qué relación se produce ahora y comenta qué te sugiere. Además, plantea las cuestiones dudosas que te surgen al hablar de espacios con *n* dimensiones.
11) Crea tu propia poesía para expresar alguna fórmula del tema de Trigonometría.
12) Realiza una breve biografía de Frederick Soddy, y contesta a lo siguiente: ¿Por qué ganó el premio Nobel de Química en 1921? ¿Qué te sugiere el hecho de que se dedicara a resolver problemas matemáticos al dejar su investigación en Química?
13) Con herramientas de Dibujo Técnico (pide ayuda a tu profesor) resuelve el problema de hallar un cuarto círculo tangente a otros tres tangentes ya dados (obteniendo las dos soluciones posibles). Analiza qué contenidos matemáticos (geometría sintética) se utilizan.
14) Si la resolución anterior la implementas en GeoGebra podrás hacerlo admitiendo que los tres círculos iniciales no sean tangentes, de manera que al modificar los parámetros de los gráficos diseñados para que sí lo sean podrás comprobar numéricamente el teorema de los 4 círculos de Descartes-Soddy. Se obtiene así una demostración empírica (recuerda el verso 16) que no estaba al alcance de Euclides ni de sus coetáneos.

Metodología de aplicación en el aula

El método de trabajo consistiría en proporcionar a los alumnos la versión en castellano de la poesía y plantearles las tareas de la experiencia básica dando tiempo suficiente para que las resolviesen en casa. Después, se dedicarían al menos dos sesiones lectivas para debatir los aspectos fundamentales, intercambiar opiniones y resolver las dudas que con seguridad aparecerían.

También se sugiere que el profesor realice una presentación con cañón de vídeo (no más de 10 minutos en clase), de la implementación con GeoGebra planteada en la actividad 14. Las cuestiones 5 y 6 también podrían plantearse a los alumnos sólo después de la primera sesión de discusión en el aula, comentándose estas actividades en la segunda sesión, por ejemplo, una semana más tarde.

Como ya se señaló en el apartado anterior, no se pretende que se realicen todas las actividades, y eventualmente sólo tendrían cabida algunas otras tareas de profundización voluntarias para el alumno. El profesor elegiría cuáles según sus objetivos docentes y el perfil del alumnado al que

And let us not confine our cares to simple circles, planes and spheres, but rise to hyper flats and bends where kissing multiple appears.	Y no confinemos nuestros cuidados a simples círculos, planos y esferas, sino elevarnos a hiperplanos y curvaturas donde múltiples besos aparecen.
In n*-ic space the kissing pairs are hyperspheres, and Truth declares, as* n+2 *such osculate each with an* n+1 *- fold mate, the square of the sum of all the bends is* n *times the sum of their squares.*	En *n*-espacios, los pares de besos son hiperesferas, y la Verdad declara, cuando *n+2* de ellas son tangentes cada una con *n+1* compañeras, que el cuadrado de la suma de todas las curvaturas es *n* veces la suma de sus cuadrados.

se dirija, y sólo plantearía estas al grupo (o quizás alguna otra de forma particular sólo a algún alumno con intereses concretos conocidos).

Acerca de cuáles podrían ser más adecuadas, el lector puede orientarse basándose en las soluciones y comentarios del siguiente apartado. Por ejemplo, es muy posible que no todos cursen la asignatura de Dibujo Técnico e incluso aprehender los conocimientos mínimos para realizar la tarea 13 planteada requerirá de ayuda por parte de algún profesor.

Para acabar la experiencia, cabría la posibilidad de que el profesor comentase, siquiera brevemente, las claves de las soluciones de las actividades voluntarias que hubiera escogido, una vez recogidas las respuestas de los alumnos que las hubieran realizado.

En el siguiente apartado se resumen las soluciones de todas, pero volvemos a insistir en que la esencia para el desarrollo de esta experiencia consiste en el comentario de texto (actividades 1 y 2) y en el hecho de que los alumnos perciban el sentido de la estética presente en la investigación científica (actividad 6), que en este ejemplo además se visualiza claramente al resolver de forma dinámica con GeoGebra el problema de los cuatro círculos tangentes.

Respuestas y contenidos matemáticos trabajados

Vamos a resolver a continuación las actividades intercalando las tareas de profundización en el orden en que debieran situarse en caso de exponerse a los alumnos. En caso de realizarse sólo las de la experiencia básica, simplemente debemos obviar los comentarios de estas otras tareas, sin pérdida del discurso expositivo general.

Con la actividad 8, se pediría en primer lugar que los alumnos realizasen una traducción de la poesía original para interiorizar los conceptos que contiene, además de percibir su estructura tanto desde el punto de vista lingüístico como matemático. Encontrarán algunas dificultades porque la poesía original en inglés es de gran calidad literaria («a pesar» de haber sido escrita por un científico y no por un filólogo). En ella aparecen palabras específicas del lenguaje poético (*'Tis*, es decir, *it is*), del lenguaje matemático (*to osculate* , específico para figuras tangentes en un punto común con la que el autor realiza un juego de palabras al utilizar el término de cierto sentido humorístico *oscular* que se relaciona con el término latino *osculum*, beso), o con cierto sentido coloquial (*gayer*).

Se usa kiss *como sustantivo o como verbo, en infinitivo, conjugado y en gerundio, un total de 7 veces a lo largo de toda la poesía.*

Así, tendrán que ir más allá de un diccionario manual. También podrán observar que la traducción conocida del libro de M. Gardner no es muy buena, sobre todo la de la última décima y, particularmente, la del verso 25, traducido en los versos 27-28, pues se crea confusión respecto al mensaje matemático del resultado original de Soddy. En este caso, incluso, el lector podría no captar el hecho de que se está generalizando el problema del plano (bidimensional) de las dos primeras estrofas al espacio (tridimensional). Aportamos una traducción propia (seguro que imperfecta) con objeto de comparar las diferencias con la del libro de Gardner y para que se pueda opinar sobre los distintos mensajes que pueden transmitir traducciones diferentes.

Una cuestión añadida, más general, que el alumno podrá captar con esta actividad es la importancia que el rigor del lenguaje adquiere en cualquier área científica.

Respecto a la actividad 1 y el comentario de texto, se pueden encontrar algunas breves pautas y sugerencias sobre el método a seguir. Por ejemplo, en la web [2]. Aquí damos una posible versión del mismo más extensa de la que se debería pedir a un alumno medio. Esto se debe a que la presente experiencia se basa ante todo en relacionar las competencias matemática y lingüística. También lo hacemos con objeto de ilustrar algunas posibilidades de esta actividad en el aula de Matemáticas. Se debatirían en clase los comentarios de los alumnos. Señalemos que haremos los comentarios referidos a los términos del original inglés, pero creemos que el lector puede adaptarlos muy fácilmente a su versión en castellano.

...la estructura del texto y la organización de la información se ajustan bastante al patrón estándar de la exposición matemática ...

El eje temático consiste en comunicar la belleza de un resultado geométrico. De ahí que el autor elija la forma poética para expresar con mayor énfasis e intensidad un resultado científico. Se estructura en tres décimas, de manera que en la primera se describe la situación geométrica, con dos posiciones posibles para un círculo tangente a otros tres que ya se besaban (eran tangentes) entre sí por parejas. En la segunda estrofa define el elemento esencial (la curvatura) y expone el teorema fundamental (versos 19-20), que realza y contextualiza con la cita de que ya preocupó a Euclides. Por fin, en la tercera estrofa la situación se generaliza al caso tridimensional, con esferas, apareciendo una quinta que da lugar al nuevo teorema de los versos 29-30.

La función lingüística dominante es la poética, caracterizada sobremanera por las metáforas de círculos (o esferas) que se besan, ensalzando la imagen de belleza que tiene el problema. Y lo hacen de forma precisa, como reza el título, simbolizando las tangencias rigurosamente establecidas según la relación numérica de los versos 19-20 (respectivamente, 29-30).

El modo tan estructurado y formal que se emplea para exponer los conceptos, además de recordar conscientemente (dada su temática) al estilo del discurso matemático, refuerza el sentido lírico que el autor quiere dar a la presentación de sus resultados. Usa un lenguaje técnico y especializado (*oscular à osculate*; *bend*; *concave*) cuando es imprescindible, pero intenta exponerlo todo con un lenguaje coloquial en torno al «tema amoroso» entre los círculos. E incluso, con cierto toque de humor (*oscular*, *dumb*, *gayer*). Destaca asimismo el uso de un presente atemporal para enfatizar que lo que se enuncia tiene un alcance universal; también los infinitivos realizan esta función.

Entrando en un comentario algo más específico, podemos señalar lo siguiente.

En cuanto a la cohesión del texto, en primer lugar, destaca su conexión gramatical, que se consigue mediante la repetición constante de los besos y su campo semántico. Se usa *kiss* como sustantivo o como verbo, en infinitivo, conjugado y en gerundio, un total de 7 veces a lo largo de toda la poesía. También *oscular*, cercano semánticamente, en el verso 22. El mismo efecto produce el uso frecuente de *three* y *thrice* otras 7 veces en la primera décima y la aparición de *bend* y *benter* hasta 5 veces en la segunda. La cohesión léxico-semántica se completa con la abundancia de palabras relacionadas con las matemáticas:

circles

distance

centre

straight line

concave

sum

square

sphere

Dichos campos semánticos constituyen ejemplos del concepto de isotopía que hacen posible una lectura uniforme del texto.

Respecto a los recursos morfosintácticos empleados para articularlo, ya hemos comentado antes el uso del presente y el infinitivo, con sentido atemporal puesto que se exponen leyes matemáticas. En este apartado incluimos las imágenes metafóricas de los besos simbolizando las tangencias, o la «similitud» del significado del verso seis con un «oxímoron conceptual» referido a las dos situaciones geométricas posibles.

También podemos señalar algunas estructuras sintácticas que se repiten de forma muy parecida: los versos 7-8 respecto a los 9-10; y los 19-20 respecto a los 29-30.

Finalmente, el uso frecuente de marcadores o conectores discursivos también persiguen lograr una gran cohesión entre las distintas partes del texto. Observamos los siguientes:

'Tis not so	(v. 3)
if	(vv. 7 y 9)
though	(v. 15)
since	(v. 17)
and	(vv. 18, 25 y 27)
besides	(v. 25)
yet	(v. 27)

Con la misma finalidad, se utilizan elementos deícticos como:

the other	(vv. 4 y 28)
from without	(v. 8)
that one	(v. 9)
now	(vv. 16 y 25)

Acabamos remarcando las construcciones con sentido catafórico de los versos 5-6, del verso 11, de los versos 15-16 y de los versos 25-26, que adelantan (en mayor o menor medida) los contenidos que les siguen.

También encontramos el elemento anafórico *as before* en el verso 27 que nos remite a la estrofa anterior, justo antes de la conclusión del poema.

En síntesis, la cohesión entre las distintas partes de la poesía es muy patente.

...en las distintas estrofas, podemos encontrar un paralelismo perfecto entre la teoría matemática de los dos teoremas que se exponen y el discurso literario ...

La coherencia es la propiedad textual, básicamente semántica, que indica cuál es la información pertinente que se ha de comunicar y cómo se ha de hacer (en qué orden, con qué grado de precisión o detalle, con qué estructura, etc.).

En este sentido, podemos analizar, en primer lugar, si se exponen los conceptos necesarios, sin exceso de información (redundancia, datos irrelevantes…) ni defecto (exceso de presuposiciones…). En el presente texto debemos concluir que esto se consigue en grado sumo, dado que salvo la retórica amorosa pertinente para realzar la belleza de la situación geométrica, Soddy se limita a esquematizar el enunciado del problema (versos 3 a 6), exponer la definición esencial de curvatura (vv. 13-14) sin darla por previamente conocida y enunciar la tesis del teorema (vv. 19-20). Y en la última estrofa sólo apunta que ahora son 5 esferas y enuncia la tesis generalizada (vv. 29-30).

En segundo término, nos tenemos que plantear si las ideas son claras y se exponen de forma completa y con la terminología adecuada. Consideramos que la expresión sintética, sin rodeos, pero sin abandonar el sentido del juego amoroso que quiere darse a las tangencias, y sólo con las palabras técnicas imprescindibles (vv. 13 y 18), consigue todo lo anteriormente citado.

Finalmente, es muy destacable que la estructura del texto y la organización de la información se ajustan bastante al patrón estándar de la exposición matemática: planteamiento del problema, hipótesis, definiciones, observaciones particulares y tesis. Todo esto se va desarrollando progresivamente en las dos primeras estrofas, desde el planteamiento inicial hasta el desenlace (tesis del teorema) en los versos 19-20. Después, la tercera estrofa añade nueva información sobre los conceptos recién expuestos (ya son conocidos por el receptor y, por tanto, sirven de base -tema o tópico-), continuando de forma perfectamente lógica el discurso, sirviendo de puente para desarrollar la generalización que es realmente nueva (identificable con el tema textual).

En suma, de forma progresiva y bastante bien delimitada en las distintas estrofas, podemos encontrar un paralelismo perfecto entre la teoría matemática de los dos teoremas que se exponen y el discurso literario que se realiza, consiguiéndose un equilibrio entre lo que ya se sabe y lo novedoso con el fin de asegurar la comprensión y el interés por lo que se quiere comunicar.

Por último, ¿consigue el texto su propósito comunicativo? Podemos decir que se mantiene un mismo y bajo nivel de formalismo a lo largo de toda su extensión, puesto que el autor sólo usa los términos especializados imprescindibles (curvatura, cóncava) que el problema requiere. Asimismo, ajusta el mensaje, su lenguaje y su forma al contexto de una revista científica que no es específicamente matemática, adaptándose por tanto a un perfil de receptor algo más amplio, si bien perfectamente familiarizado con las cuestiones geométricas. En resumen, el texto alcanza un grado de adecuación destacable, consiguiendo llamar la atención, como probablemente quería su autor teniendo en cuenta el medio en que se publicó y su falta de ortodoxia en cuanto al *statu quo* de la forma de comunicación científica comúnmente admitida.

Respecto a la actividad 3, casi todos los alumnos deberían escribir las fórmulas de Soddy que, siendo las curvaturas $C_k = 1/R_k$:

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 = \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2 + C_3 + C_4\right)^2$$

$$\left(C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5\right)^2 = 3\left(C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2\right)$$

Quizás resulte oportuno destacar que estas expresiones permiten plantear algún problema interesante para alumnos a los que les guste profundizar en los temas que estudian. Así, en la Fase de Distrito de la XLVII Olimpiada Matemática de la RSME (Enero 2011), se planteó el problema siguiente:

> Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Otras tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, dos a dos. Cada una de estas tres esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encuentra la relación entre R y r.

Aunque la solución se puede hallar usando sólo trigonometría básica y el teorema de Pitágoras, resulta que la anterior disposición responde a un caso particular de la última estrofa de Soddy. Aplicando la relación tridimensional anterior se obtiene directamente la solución: $R = 6r$.

Pasando a la actividad 4, el interés del verso 17 estriba en que aclara que el teorema sobre círculos sigue siendo válido si uno de ellos es una recta (tangente), puesto que puede considerarse como un círculo de radio infinito. Aquí se podría comentar en clase la forma de investigar en Matemáticas: cuando un problema se ha resuelto, el matemático se pregunta qué sucedería llevando el problema al caso límite.

Por otro lado, la aclaración del verso 18, respecto a las curvas cóncavas tiene una importancia básica, pues se refiere al hecho de que las curvaturas deben considerarse con el signo adecuado para que las fórmulas se cumplan. Aquí, el signo menos se usa en la solución exterior, cuando la cuarta circunferencia circunscribe a las tres dadas inicialmente (lo mismo será con las esferas). Se ilustra así que, en matemáticas, hay que considerar todos los casos posibles.

Respecto a la actividad 5, se pretende que el alumno se interese por la historia de la ciencia y aprecie la importancia de adquirir un mínimo de cultura científica. Brevemente, deberá descubrir al menos que este problema geométrico ya fue estudiado en la Grecia antigua, antes del año 300 a.C. en que aproximadamente se publicó *Los Elementos* de Euclides. Después, Apolonio de Perga lo analizó en su libro *Sobre tangencias*, en el siglo III a.C., pero el texto se perdió. Por eso, al problema de encontrar una cuarta circunferencia tangente a otras tres dadas se le llama problema de Apolonio. La primera solución conocida la dio René Descartes en 1641, quien se la comunicó por carta a la princesa Isabel I de Bohemia. De ahí que se llame teorema de los cuatro círculos de Descartes. Lo que hizo F. Soddy fue redescubrir la solución en 1936, pero además extendiéndolo a las esferas en el espacio.

El lector interesado puede encontrar amplia información sobre la importancia de la obra de Apolonio en González Urbaneja (2007); una explicación detallada de los problemas de tangencias que este abordó, en Ortega y Ortega (2004); e información sobre el tratamiento del problema que realizó Descartes, en la web [3]. La resolución matemática del problema de Apolonio, usando el concepto de inversión, junto con la breve semblanza histórica anterior, puede consultarse en Reventós (2003).

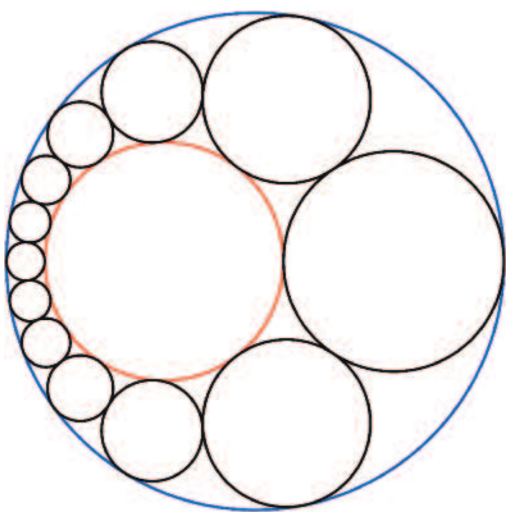
Al analizar este problema, y siguiendo con la investigación en caso de plantear la actividad 9, los alumnos pueden encontrar información sobre otros similares, como el sexteto de Soddy (espacial), relacionado a su vez con el porisma de Steiner (plano), y que les llevará hasta los *sangaku* japoneses (que podrían investigar).

El porisma de Steiner consiste en considerar dos circunferencias no concéntricas, una interior a la otra. Entonces, se inscribe una circunferencia entre ambas y luego vamos inscribiendo circunferencias tangentes a las dos dadas y a la última, hasta que llega un momento en que la circunferencia que inscribimos se solapa con la primera, o bien es tangente a ella. Se puede probar que esto no depende de la posición de la primera circunferencia inscrita. Una demostración detallada se encuentra en Reventós (2003).

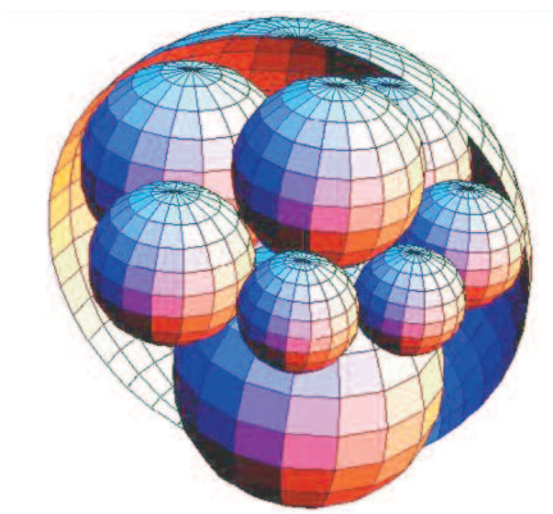
El sexteto de Soddy es un collar de seis esferas, cada una tangente a sus dos vecinas más cercanas y a otras tres esferas mutuamente tangentes. Dos de las tres esferas iniciales son tangentes entre sí y ambas están inscritas dentro de la tercera, formándose así un hueco dentro de esta en el que se tiene que

$$\left(C_1 + C_2 + \dots + C_{n+2}\right)^2 = n \cdot \left(C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_{n+2}^2\right)$$

situar el *collar*. El problema ya aparece en un *sangaku* de 1822. Según el resultado de Soddy, publicado también en *Nature* en 1937, con el título *The bowl of integers and the hexlet*, siempre es posible encontrar un sexteto de esferas para cualquier elección de las tres iniciales[2].



Porisma de Steiner



Sexteto de Soddy

Finalmente, como se anuncia en la actividad 10, Thorold Gosset amplió el resultado a dimensiones mayores que 3, obteniendo:

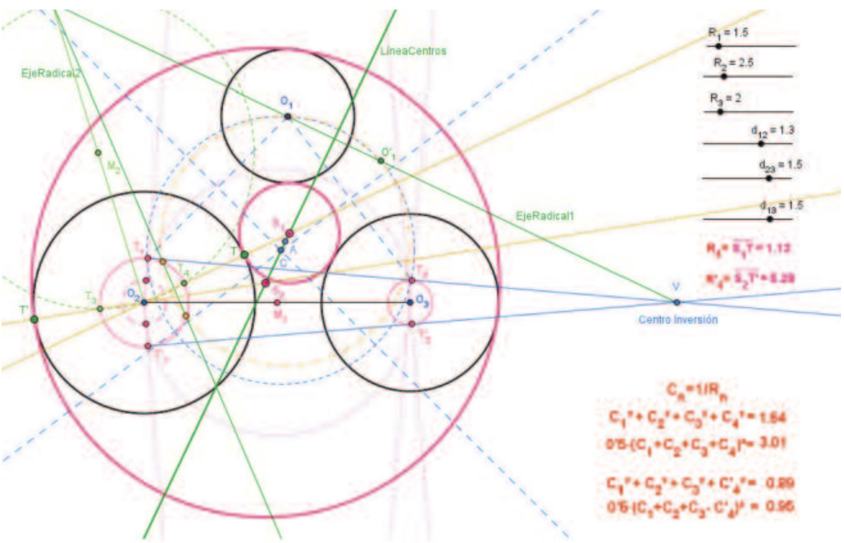
Ahora el alumno podrá apreciar la simetría de las fórmulas en las distintas dimensiones. Más allá de que lógicamente deberían surgir muchas dudas sobre los conceptos y la terminología, lo cual podría llevar a un interesante debate en clase. También sería de destacar el hecho de que Gosset eligiese el mismo formato y medio que Soddy para publicar su resultado, entrando en el juego poético planteado por este.

Volviendo a las actividades básicas, en la 6 se pide informarse respecto a la importancia de *Nature*. El objetivo es que los alumnos conozcan la existencia de esta y otras de las principales revistas científicas y el papel que juegan hoy día en el desarrollo de la ciencia. Que Soddy eligiese su particular formato poético para un medio editorial de tamaño prestigio, dará lugar sin duda a un interesante intercambio de opiniones acerca de los puntos de encuentro entre la poesía y las matemáticas.

Recordando las citas de Weierstrass, Bronowski y González Urbaneja, podrían buscarse otras con las que el profesor se adentraría en la importancia de la estética, elegancia, economía metodológica y belleza analítica de las demostraciones matemáticas, en la superioridad de algunas frente a otras (si es posible, se comentarían las claves de algún ejemplo asequible a los alumnos, o alguna idea tal como el proceso de diagonalización de Cantor…), y en cuestiones relacionadas como, por ejemplo, el principio físico de la navaja de Ockham (son preferibles las hipótesis y teorías simples a las complejas, en tanto no haya evidencias en contra).

Respecto a por qué Soddy eligió este poco ortodoxo método de publicación científica podemos valorar la belleza de la geometría, su contenido artístico y la poesía visual que en sí mismos contienen los resultados de Descartes y Soddy. Para orientar el debate en torno a estos temas, el profesor puede consultar el artículo de Miguel de Guzmán (2007), además de las ideas contenidas en los ya citados del mismo profesor Guzmán (2003) o de González Urbaneja (2008). Existen también numerosas contribuciones en la web, como por ejemplo en el blog [1].

La actividad 11 sería interesante como método de desarrollo de la competencia lingüística del alumno, al tiempo que le obligaría a captar la esencia y los casos particulares de la fórmula trigonométrica

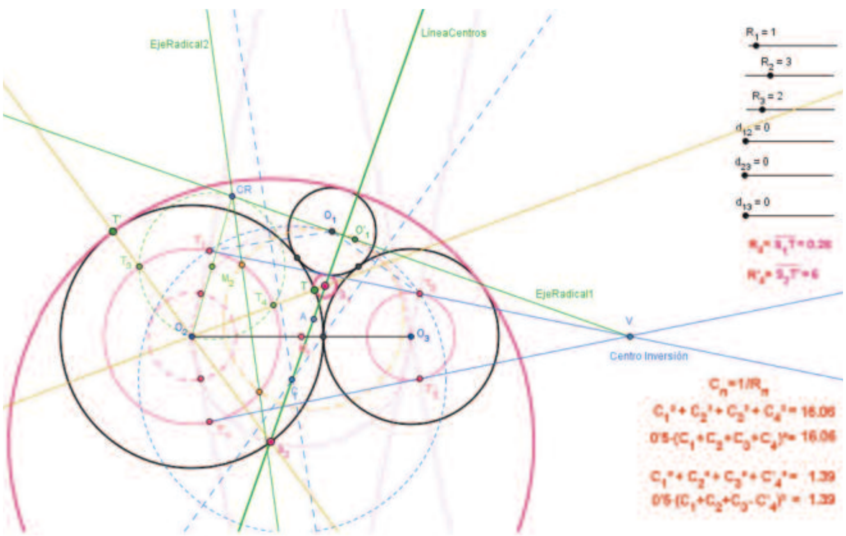


Comprobación empírica del teorema de los cuatro círculos con GeoGebra elegida. Otra posibilidad poética es abordar el teorema de Pitágoras y su generalización, el conocido último teorema de Fermat, junto con toda la historia que involucra.

La actividad 12 se plantea para que los alumnos profundicen en la historia de la ciencia desde un punto de vista interdisciplinar, ya que Soddy no era matemático, sino químico. En 1921 fue galardonado con el premio Nobel de Química «por sus notables contribuciones al conocimiento de la química radiactiva y las investigaciones sobre la existencia y naturaleza de los isótopos». Su biografía puede verse en la propia página oficial de los Premios Nobel [5]. Que al final de su labor investigadora principal se dedicase a estudiar problemas matemáticos dará pie a comentar la visión de las Matemáticas como diversión, al menos para algunos. También merece comentario que alguien que se dedicó a estudiar las estructuras atómicas fuera luego un artista consumado de los problemas geométricos, … ¿o más bien fue al contrario, aunque fue al final cuando plasmó su destreza?

En las actividades 7, 13 y 14 se aborda la parte gráfica del contenido de la poesía. Naturalmente, podría realizarse antes que todas las anteriores, para visualizarlo cuando se lee por primera vez. Un boceto aproximado, como se pide en la actividad 7, lo hará cualquier alumno. Pero si se quiere exactitud, sólo algunos alumnos de Dibujo Técnico, y con ayuda del profesor correspondiente, serán capaces, ya que aparecen los conceptos matemáticos de Inversión, potencia, eje y centro radical, además del uso elemental de la mediatriz.

Una explicación detallada, paso a paso, de la construcción que se puede hacer con los métodos de Dibujo Técnico puede verse en la web [4], además de las explicaciones de los artículos de Ortega (2004) y de Reventós (2003). Las posibilidades didácticas derivadas de esto son obvias, si algún alumno de verdad se interesa por el tema, pero desde luego sólo sería para alumnos muy motivados. Por último, implementarlo en GeoGebra, lo cual no es muy difícil si se conoce el proceso anterior, permite llevar la Geometría Dinámica al aula, y visualizar la verdadera poesía en movimiento del problema, al tiempo que la modificación en directo de los radios permitirá a los alumnos comprender cómo se puede hacer una demostración numérica, empírica, en la actual era informática. De esta forma experimentarán en el *laboratorio informático* de las Matemáticas. Se incluyen unas figuras tomadas de la implementación realizada por el autor de este trabajo, incluyéndose los cálculos numéricos en pantalla.



Comprobación de que el teorema de los cuatro círculos no es cierto si los tres iniciales no son tangentes

Conclusión

Partiendo de un nexo entre Lengua y Matemáticas a través de la poesía, lo cual de por sí ya es muy atrayente para el alumno de Secundaria, que ve ambas materias como mundos opuestos, se llega con la presente experiencia a profundizar en problemas de Traducción, Historia de la Ciencia, Dibujo Técnico, Geometría sintética, Aplicaciones informáticas… Desde la interdisciplinariedad el alumno captará la presencia de las Matemáticas.

Referencias bibliográficas

González Urbaneja, P. M. (2007), «Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica», *Sigma*, nº. 30, 205-236

González Urbaneja, P. M. (2008), «Matemática y lenguaje y matemática constructora de lenguaje», *Suma*, nº. 57, 31-42.

Guzmán, M. (2003), «Los goces estéticos del quehacer matemático», *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, vol. 97, n.º 2, 351-357.

Guzmán, M. (2007), «Enseñanza de las Ciencias y la Matemática», *Revista Iberoamericana de Educación*, nº. 43, 19-58.

Ortega, I., y Ortega, T. (2004), «Los diez problemas de Apolonio», *Suma*, nº. 46, 59-70.

Reventós, A. (2003), «Geometría inversiva», *La Gaceta de la RSME*, vol. 6, nº. 1, 39-79.

Referencias web

<http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/43573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_30/18_raices.pdf>

[1] Blog de matemáticas:

http://www.sangakoo.com/blog/la-mente-matematica/

[2] Comentario de texto:

http://www.lengua-castellana.es/2009/10/la-esencia-del-texto-coherencia-cohesion-y-adecuacion/

[3] Descartes:

http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriadescartes.pdf

[4] Dibujo técnico:

http://www.zonabarbieri.com

[5] Nobel:

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/1921/soddy-bio.html

Francisco José Gómez Senent
I.E.S. Thader, Orihuela (Alicante)
<fjgsenent@gmail.com>

Agradecimientos

Reconocer aquí el asesoramiento de mis compañeras profesoras. Gracias a Eva Sánchez Crespo por sus magníficas explicaciones de Dibujo Técnico, a Mª Jesús Fernández Puerta por sus sugerencias para el comentario de texto y a Fuensanta Rodríguez García por sus aclaraciones al traducir del Inglés.

1 Se puede encontrar en la web la traducción publicada en la versión española del libro *Circo Matemático*, de Martin Gardner, pero no nos parece muy acertada por los motivos que se comentarán.

2 Imagen: <http://horibe.jp/LG3DBOX/Soddy05.htm>