suma+
Artículos
Julio 2013
73
pp. 25-34

# Comprensión del concepto de índice de poder en estudiantes de Secundaria

Ana Teresa Antequera Guerra
María Candelaria Espinel Febles

Hay que recortar este resumen.

El concepto de índice de poder se usa para medir el beneficio que se obtiene con la cooperación en un sistema de votación ponderada, y aporta información sobre la capacidad de una persona para influir con su voto en la toma de decisiones. Este concepto se emplea en una experiencia de aula con alumnos de secundaria a los que se propone una actividad en un contexto cercano empleando un proceso orientado de modelización matemática. Se pretende que los alumnos conozcan y detecten los sistemas de repartos justos y democráticos que se pueden encontrar como ciudadanos. Los resultados de la experiencia revelan como la mayoría de los estudiantes comprenden la actividad y hacen uso de contenidos básicos de la matemática en contexto.

*Palabras clave:* Sistemas justos, Juegos cooperativos, Índice de poder, Combinatoria, Matemáticas para secundaria.

**Understanding the concept of power index by High School students**

The concept of power index used to measure the benefit obtained with the cooperation in a weighted voting system, and provides information about a person's ability to influence with his vote in decision-making. This concept is used in a classroom experience with high school students. It is posed an activity in a close context using an oriented mathematical modeling process. It is intended that the students know and detect the deal systems, fair and democratic, that they may find as citizens. Experience results show that most students understand the activity and make use of basic mathematical content in context.

*Key words:* Fair systems, Cooperative games, Power index, Combinatory, Mathematics to secondary school.

La *teoría de juegos* estudia las situaciones de conflicto que aparecen cuando un colectivo de agentes, con intereses no concordantes, debe tomar decisiones individuales que les afectan mutuamente. En la terminología usual de esta teoría, al conflicto se le llama *juego* y a los agentes involucrados, *jugadores*. Existen dos clases de juegos que plantean una concepción muy diferente y requieren una forma de análisis distinta. Si los jugadores pueden comunicarse entre ellos, negociar y llegar a acuerdos vinculantes, se habla de *juegos cooperativos*, que son los que se consideran en esta experiencia. En el caso contrario, se trata de *juegos no cooperativos* (Binmore, 1996).

La teoría de juegos cooperativos estudia principalmente las posibilidades estratégicas de cada jugador, con la expectativa de mejorar su utilidad, representada en *pagos* o beneficios, a través de las coaliciones que se constituyen entre los mismos. Su aplicación práctica está relacionada con el número de votos que posee cada colectivo de agentes: escaños en un parlamento, número de acciones en una asamblea de accionistas, miembros de una mesa de negociación, etc. Desde el punto de vista formal, a este tipo de juegos se lo denomina *juego de votación ponderada*, y está formado por un conjunto de *jugadores*, representados por $N = \{1, 2,\ldots, n\}$, una distribución que



Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2012 y aceptado en diciembre de 2011

asigna a cada jugador $i \in N$ un *peso* $v_i \geq 0$ y una condición de *mayoría* q a la que se impone la restricción $T/2 < q \leq T$, siendo $T$ la suma de todos los pesos. El juego de votación ponderada se representa por $[q; v_1, v_2, \ldots, v_n]$, dando los pesos en orden decreciente. Cualquier subconjunto $S \subseteq N$ se denomina coalición, siendo $S$ *ganadora* si verifica que $\forall\, v_i \geq q$, y *perdedora* en caso contrario. Una coalición es *ganadora minimal* si no se puede prescindir de ninguno de sus jugadores para satisfacer la desigualdad anterior.

Para valorar la importancia estratégica que posee cada agente implicado, se obtienen unas medidas denominadas *índices de poder*. Algunas de las propuestas más conocidas de medida de poder son el valor de Shapley (Gura y Maschler, 2008), el índice de Banzhaf (COMAP, 1988) y el índice de Deegan-Packel (Taylor, 1995). Se pueden encontrar aplicaciones sencillas a distintos sistemas democráticos del concepto de índice de poder en Espinel (1999a, 1999b) y Álvarez y Alonso (2010).

En este artículo se presenta una experiencia de aula cuyo propósito general y a largo plazo, se centra en que los alumnos conozcan y detecten los sistemas de repartos justos y democráticos que se pueden encontrar como ciudadanos. Se trata de una experiencia donde se les orienta en la aplicación de ideas de juegos cooperativos y en el concepto de índice de poder de Deegan-Packel (Taylor, 1995) en el contexto de la composición de un consejo escolar. Al tiempo que se les presenta la actividad, se describen los conceptos teóricos y se analiza el sistema de votación ponderada junto con las coaliciones posibles. En el desarrollo de la experiencia, se induce a observar cómo la influencia de un jugador no es proporcional al número de sus votos. En especial, sería deseable que los alumnos percibieran que el poder de un individuo no está necesariamente asociado al número de votos que posee, sino que depende más de su capacidad para asociarse con otros y conseguir mayorías.

La idea general de la línea de investigación en la que se enmarca este trabajo es la de diseñar material para formar a los estudiantes de secundaria a través de una participación activa en el ámbito social y cultural. Esto responde a la continua necesidad del ser humano de comprender los diferentes fenómenos sociales y, por ello, se pretende desarrollar una visión integrada de las matemáticas que permita a los estudiantes prestar atención, comprender y valorar la utilidad de los conceptos y procesos en un mundo cada vez más matematizado. Las matemáticas, como código lingüístico, permiten expresar y configurar ideas procedentes de un contexto social. Dan la oportunidad de que los alumnos adquieran elementos de juicio para opinar críticamente sobre acontecimientos que les rodean. Se pretende divulgar entre los jóvenes las aplicaciones de las matemáticas que están vinculadas a las ciencias sociales, y no sólo aquellas que con más frecuencia aparecen en el currículo y que inciden principalmente en la importancia de las matemáticas en el desarrollo científico y tecnológico (Antequera y Espinel, 2009, 2010).

Uno de los métodos más utilizado para poner en práctica el principio general del aprendizaje activo es la enseñanza a través de la *resolución de problemas*. Como foco de la enseñanza de las matemáticas, ha dado lugar a varios modelos tanto teóricos como prácticos (Santos, 2007). Una perspectiva es considerar la resolución de problemas como un desafío, siendo uno de los principales el del diseño de buenas tareas de resolución de problemas que sean originales, no rutinarias y nuevas para los estudiantes (Doorman y otros, 2007), y es aquí donde la matemática discreta puede desarrollar un papel importante.

En este sentido, la *matemática discreta*, rama general en la que se enmarca la teoría de juegos, se ha convertido en una herramienta que ha proporcionado valiosos modelos en un amplio número de áreas. Es ésta una de las principales razones por la que sería conveniente incorporar contenidos propios de la matemática discreta al currículo de secundaria. Se suele aludir a cómo la matemática discreta se utiliza para resolver problemas prácticos y cómo ésta puede ser una oportunidad para relanzar las matemáticas escolares (De Bellis y Rosenstein, 2004), además de proporcionar amplias oportunidades para que los estudiantes investiguen problemas de la vida cotidiana (Goldin, 2004).

Este interés por incorporar la matemática discreta al aula se refleja en series como DIMACS (De Bellis y Rosenstein, 2004), en el proyecto COMAP (1988) <www.comap.com> y en grupos de trabajo de congresos como el International Congress on Mathematical Education (Huβmann, 2008). Los problemas de matemática discreta recogen un amplio rango de aplicaciones (Parks, Musser, Burton y Siebler, 2000), pero para nuestra línea de investigación interesan especialmente problemas de votación, reparto y asignación, y distintas estrategias de optimización (Antequera y Espinel, 2003, 2009, 2011*a*, 2011*b*, 2011*c*).

En los últimos años, la modelización y las aplicaciones de la matemática al mundo real se han retomado como temas de interés en educación matemática (Huβmann, 2008). La expresión *modelización matemática* comprende un amplio rango de orientaciones teóricas y prácticas para enseñar y aprender matemáticas. La modelización también es un proceso que, con algunas variantes, comprende el ciclo, resumido en cuatro fases estándar (Doerr y Pratt, 2008):

— Fase 1. Mundo real → *matematizar*
— Fase 2. Modelo matemático → *transformar*
— Fase 3. Solución al modelo → *interpretar*
— Fase 4. Solución al mundo real → *validar*

Las transiciones entre las fases, que en el ciclo anterior se resaltan en cursiva, suponen una actividad metacognitiva sobre la que algunos investigadores consideran que el profesor debe incidir, e incluso se han propuesto distintas mejoras y refinamientos a este ciclo, como por ejemplo el propuesto por Stillman, Brown, Galbraith y Edward (2007).

La experiencia de aula que se describe en este artículo se apoya en la resolución de un problema del mundo real y en un proceso de modelización de matemática discreta sobre contenidos que son propios de la teoría de juegos.

De manera general, se pretende indagar sobre si los alumnos son capaces de aproximarse a las apreciaciones siguientes:

— Los sistemas de justicia están asociados a la capacidad de los individuos para negociar más que a la cantidad de votos que se posea.
— La diferencia entre porcentaje de votos e índice de poder se debe a que hay que tener en cuenta las posibles coaliciones o alianzas, por el beneficio que se adquiere con la cooperación.
— La asignación justa de beneficios obtenidos por la cooperación entre los agentes implicados, sólo se consigue si se dispone de votos suficientes para poder negociar.
— El conocimiento matemático y los sistemas democráticos que predominan en la sociedad actual están interconectados.

Estas apreciaciones generales sobre índices de poder se concretan para este estudio en dos objetivos:

— Diseñar, mejorar y evaluar una actividad matemática relacionada con el concepto de índice de poder, propia de teoría de juegos cooperativos.
— Valorar el grado de comprensión de la actividad en base a las cuatro apreciaciones anteriores y detectar las dificultades surgidas en el proceso de resolución de la misma por los alumnos.

## Metodología y experimentación del estudio

El estudio se desarrolla con un total de 52 alumnos que tienen entre 16 a 18 años y que cursan el último año de secundaria obligatoria (4º ESO) o el bachillerato de Ciencias Sociales, distribuidos como se recoge en la tabla 1.

La actividad se desarrolla durante una hora de clase de la asignatura de matemáticas, aunque en algunos casos se les dejó la actividad para que la finalizasen en su casa.

La metodología de la experiencia de aula lleva a que los alumnos pasen por dos etapas distintas, etapa orientada y etapa analógica, estudiándose el comportamiento de los mismos en cada una de las etapas.

| *Nivel* | 4.º ESO | 1.º Bach | 2.º Bach |
|---|---|---|---|
| *Alumnos* (total: 52) | 15 | 30 | 7 |

Tabla 1. Número de alumnos distribuidos por niveles

### *Etapa orientada*

La idea principal es presentar a los estudiantes un problema matemático no típico. Se espera de ellos la comprensión del problema o al menos que sean capaces de leer la información. Para el correcto desarrollo de esta etapa se requieren conocimientos matemáticos variados, como manejar la combinatoria, operar con fracciones y calcular e interpretar porcentajes. Se reconoce la utilidad del problema formulado (figuras 1 y 2), no sólo en una situación cercana, sino en la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos en el futuro en su vida diaria.

La etapa *orientada* se divide a su vez en cuatro fases que dan lugar a un proceso de modelización que guía a los alumnos para el concepto de índice de poder. Estas fases concuerdan con las cuatro las fases estándar de resolución de problemas (Doerr y Pratt, 2008) y que, en relación al concepto de índices de poder, se adaptan y quedan para la secuenciación de la experiencia de aula como sigue.

#### Fase 1. Presentación simplificada de una situación (Mundo real)

De forma simplificada, presentando los datos en una tabla, se da a conocer la composición del consejo escolar de un centro y se constata el peso de cada uno de los grupos que lo componen según el número de miembros que los constituyan como se muestra en la figura 1. La primera cuestión de la actividad pretende asegurar la comprensión del texto por parte los alumnos, por eso es simple y sólo se intenta forzar la lectura de los datos.

Las producciones escritas por los 52 alumnos muestran que todos responden como se les pide y colocan un 15 en la casilla del total (figura 1), resultado de sumar el número de personas que forman los cuatro grupos y, por tanto, se puede considerar que los alumnos leen los datos y captan el significado del enunciado.

**EL CONSEJO ESCOLAR**

**El consejo escolar de un centro de enseñanza secundaria está formado por cuatro grupos: profesores (A), padres (B), alumnos (C) y personal no docente (D), de la siguiente forma:**

| Grupo | Profesores A | Padres B | Alumnos C | No docentes D | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Votos | 7 | 3 | 3 | 2 | |

**a) ¿Cuántas personas forman el consejo? Apuntalo en la tabla.**

Figura 1. Composición de un consejo escolar y distribución de los votos

#### Fase 2. Traducción de la situación real a la terminología matemática (Modelo matemático)

Se propone un modelo matemático y se realiza una primera aproximación a una solución matemática, como se recoge en la figura 2. Esta traducción de la situación real a la terminología matemática se aprovecha para orientar al alumno e ir introduciendo nuevo vocabulario: cuota, mayoría o coalición. Las cuestiones b) y c) de la figura 2 utilizan el conocimiento previo de los alumnos sobre combinatoria para introducir la idea de coalición, y luego identificar y separar las coaliciones ganadoras, perdedoras y ganadoras minimales.

Las respuestas correctas de los alumnos, en cuanto a completar las clases de coaliciones pedidas en los apartados b) y c), se recogen en la tabla 2.

Del total de 52 alumnos, 42 responden correctamente el apartado b) señalando

Supongamos que cada miembro vota siempre lo mismo que sus compañeros de grupo. Se considera que para ganar una votación se necesita la *mayoría simple*, es decir, la mitad de los votos más uno. La información anterior se recoge de forma abreviada así:

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|

[8; 7, 3, 3, 2]

Donde el número 8 indica los votos o *cuota* que se tienen que conseguir para alcanzar la mayoría y ganar cualquier votación que se realice en este consejo escolar.

Observa que ningún grupo tiene por sí sólo la cantidad de votos necesaria para ganar una votación. Por tanto, para que cualquier propuesta sea aprobada varios grupos tendrán que unirse y votar lo mismo, formando coaliciones o alianzas.

En la siguiente tabla aparecen las 15 coaliciones posibles formadas por 1, 2, 3, ó 4 grupos del consejo:

| 1 grupo | 2 grupos | 3 grupos | 4 grupos |
|---|---|---|---|
| A | AB; AC; AD | ABC; ABD; ACD | ABCD |
| B | BC; BD | BCD | |
| C | CD | | |
| D | | | |

Fíjate que de todas las posibles agrupaciones sólo algunas consiguen los votos necesarios para la mayoría, es decir, son *coaliciones ganadoras*. Por ejemplo, la coalición AB es ganadora porque A tiene 7 votos y B tiene 3 votos, lo que suma:

7 + 3 = 10 votos, que es más de los 8 votos de la cuota.

Todas aquellas coaliciones que no obtengan los votos suficientes para la mayoría las llamaremos *coaliciones perdedoras*.

b) De entre todas las posibles coaliciones localiza y separa las ocho coaliciones que son ganadoras de las siete que son perdedoras:

| Coaliciones ganadoras | Coaliciones perdedoras |
|---|---|
| AB; | BC; |

c) Por otro lado, hay coaliciones ganadoras en las que algún grupo no es necesario para alcanzar la mayoría. Por ejemplo, la coalición ganadora ABC no necesita del grupo C para ganar. Escribe las cuatro coaliciones ganadoras en las que no sobra ningún grupo y que se llaman *coaliciones ganadoras minimales* (cgm):

Figura 2. Traducción de la situación real a la terminología matemática

| *Coaliciones* | Ganadoras | Perdedoras | Ganadoras minimales |
|---|---|---|---|
| *Correctas* | 80,8% | 59,6% | 77% |

Tabla 2. Porcentajes de respuestas correctas dadas por los alumnos

las ocho coaliciones ganadoras, es decir, más del 80 % tiene éxito. El resto apuntan siete o menos coaliciones y sólo un estudiante no contesta. Se da la circunstancia de que cuatro alumnos apuntan sólo las coaliciones: AB, AC, AD, debido posiblemente a que entienden que las coaliciones sólo son grupos de dos. Señalan correctamente las siete coaliciones perdedoras 31 alumnos, es decir, casi el 60 %. El resto indica un número menor, cinco o seis, y cinco alumnos no responden. De nuevo destacan 10 alumnos que sólo apuntan las coaliciones formadas por grupos de dos: BC, BD, CB. Este error de considerar sólo las coaliciones formadas por dos grupos puede estar motivado, en parte, por los ejemplos propuestos en la actividad, formados precisamente por solo dos grupos.

Responden correctamente el apartado c) 40 alumnos, el 77 %. Nueve alumnos no responden y sólo tres lo hacen mal. Puede que el término o concepto minimal sea difícil de captar para algunos alumnos. Por ello, estaría justificado en el futuro un cambio en la terminología más accesible para los alumnos, por ejemplo, renombrando las coaliciones minimales como coaliciones mínimas necesarias para ganar.

## Fase 3. Trabajar sobre el modelo matemático y resolución del problema (Solución al modelo)

Esta fase se dedica a introducir la idea de poder y el proceso para cuantificar dicho poder a través del índice de Deegan – Packel empleando el procedimiento descrito en la figura 3. Se recurre a este índice dado que los cálculos son sencillos y el proceso sólo requiere del uso de fracciones y suma de fracciones.

Observa que los grupos que participan en las coaliciones ganadoras minimales son los realmente importantes en una votación, ya que le dan estabilidad al consejo a la hora de tomar decisiones. Por tanto, formar parte de una de estas coaliciones ganadoras minimales proporciona poder a ese votante, entendiéndose este poder como la capacidad que se tiene de influir en las decisiones del consejo.

Una forma de cuantificar ese poder es a través del Índice de Poder de Deegan – Packel. Veamos a continuación como se obtiene este índice.

Primero observamos que todas las coaliciones ganadoras minimales tienen la misma posibilidad de formarse, y en cada una de ellas el poder de los votantes se reparte por igual.

Así, una coalición de dos, como la coalición AB a cada grupo se le da un peso de $1/2$.

Mientras que la que está formada por tres grupos, como la coalición BCD, reparte el poder otorgando $1/3$ a cada.

Luego, para cada votante se suman los pesos que surgen de las coaliciones ganadoras minimales en las que toman parte. Por ejemplo, el grupo A sumará: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Y se toma como Índice de Poder Deegan – Packel el cociente de la suma de los pesos de cada votante respecto a la suma total de todos los pesos $\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{6}=\frac{24}{6}\right)$.

Por ejemplo, el índice para A será: $\frac{3}{2}\div\frac{24}{6}=\frac{18}{48}=\frac{3}{8}$

La siguiente tabla muestra como se calculan el índice de poder para cada grupo:

| Cgm | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| AB | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | |
| AC | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | |
| AD | $\frac{1}{2}$ | | | $\frac{1}{2}$ |
| BCD | | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| Suma | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6}$ |
| Índice | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{24}$ | $\frac{5}{24}$ | $\frac{5}{24}$ |

Observa que al sumar los índices de cada grupo se obtiene 1, por lo que estas proporciones se pueden pasar directamente a porcentajes.

Figura 3. Cálculo del Índice de Poder de Deegan-Packel

### Fase 4. Presentación de la solución en términos matemáticos (Solución al mundo real)

El proceso finaliza con la solución matemática y la aproximación a las conclusiones del problema del mundo real como se describe en la figura 4. Al comparar el porcentaje de votos y el índice de poder se advierte como jugadores de distinto peso tienen el mismo poder. La diferencia en votos de tres grupos (Padres, Alumnos y No docentes) desaparece al considerar el índice y se observa como los Profesores no tienen tanto poder como podría indicar su número de votos.

En las respuestas dadas a las cuestiones del apartado d) se comienza a percibir la diferencia entre los alumnos de cuarto de ESO y bachillerato. Mientras que 10 de los 15 alumnos de cuarto de ESO contestan mal la pregunta o la dejan en blanco, los 37 alumnos de bachillerato la completan y sólo tres lo hacen de forma incorrecta. Indicar los tres grupos que salen beneficiados con el índice lo hacen correctamente 34 de los estudiantes de bachillerato, y señalan al grupo D o No docentes como el que le va mejor, un total de 30 estudiantes de bachillerato.

Se cierra esta etapa reforzando la idea de poder a través de un resumen de la práctica realizada que sirva de guía para la segunda parte de la actividad, como se muestra en la figura 5.

**En la siguiente tabla se recoge el Índice de Poder de Deegan – Packel en porcentaje y el tanto por ciento de votos de cada grupo:**

| Grupo | Profesores A | Padres B | Alumnos C | No docentes D |
|---|---|---|---|---|
| Votos | $\frac{7}{15}\times 100 = 46{,}7\%$ | $\frac{3}{15}\times 100 = 20\%$ | $\frac{3}{15}\times 100 = 20\%$ | $\frac{2}{15}\times 100 = 13{,}3\%$ |
| Índice | $\frac{3}{8}\times 100 = 37{,}5\%$ | $\frac{5}{24}\times 100 = 20{,}8\%$ | $\frac{5}{24}\times 100 = 20{,}8\%$ | $\frac{5}{24}\times 100 = 20{,}8\%$ |

**Al comparar los resultados para cada grupo se observa que los porcentajes han variado, algunos de manera significativa.**

**d) ¿Qué grupo sale perjudicado al usar el índice? ¿Cuáles salen beneficiados? Y de ellos, ¿a cuál le va mejor?**

Figura 4. Comparativa del Índice de Poder y el porcentaje de votos

Un consejo escolar, un parlamento, un consejo de accionistas de una empresa, son ejemplos de instituciones en las que se dan procesos de toma de decisiones donde los miembros tienen distinto número de votos, y que se conocen como Sistemas de Votación Ponderados. Abordar el problema de cuantificar la importancia estratégica o influencia que tienen los miembros de estas instituciones, es decir, medir el poder de los miembros, es un proceso difícil. Para ello se han desarrollado los llamados Índices de Poder, en nuestro ejemplo el de Deegan – Packel.

El índice de poder de un miembro no siempre coincide con el porcentaje de votos que tiene. Esto se debe a que el índice se centra en el número de coaliciones en las que el votante desempeña un papel decisivo, y no en el número de votos. El índice de un jugador indica la porción de poder total ejercido por éste.

Figura 5. Concreciones teóricas sobre los Índices de Poder

### *Etapa analógica*

En esta segunda parte de la experiencia se pretende una traslación autónoma de forma *Analógica* del modelo matemático descrito en la etapa anterior, es decir, se da al alumno la oportunidad para que reproduzca el proceso de modelización anterior y trabaje de forma análoga pero más autónoma, guiados por preguntas concretas que deben ir completando. En esta etapa de la experiencia se quiere observar el grado de comprensión conseguido, en el sentido de ser capaz de realizar una actividad análoga a la ya realizada en la fase orientada.

Se proponen dos tareas que presentan para el alumno un grado de libertad mayor que la desarrollada en el contexto del consejo escolar. Con la primera (figura 6) se quiere reforzar en los alumnos la idea de coalición, para luego proponer en la segunda (figura 7) una tarea análoga a la desarrollada en la primera parte de la actividad, pero en base a la composición de un ayuntamiento. Se desea observar si los alumnos

**Tarea 1:**

**Un consejo escolar está formado por seis grupos con la siguiente distribución de votos:**

$$\begin{array}{ccccccc} & A & B & C & D & E & F \\ [21; & 10, & 8, & 7, & 7, & 4, & 4] \end{array}$$

**Indica si las siguientes coaliciones son o no ganadoras. Explica y justifica cada una de tus respuestas.**

**a) {ADF}** **b) {BCF}** **c) {CDEF}**

Figura 6. Tarea 1. Identificación de tipos de coaliciones

**Tarea 2:**

**El ayuntamiento de San Borondón tiene tres partidos políticos que llamaremos A, B y C. El partido A tiene 5 concejales, El B tiene 4 y el C tiene sólo 2.**

**i) Completa el sistema de votación ponderada con los datos anteriores:**

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ [6; & \;\; , & \;\; , & \;\; ] \end{array}$$

**ii) Calcula el porcentaje de votos que representa cada partido con respecto a los 11 concejales que forman el pleno. Anótalos en la siguiente tabla:**

| Partidos | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Porcentaje | | | |

**iii) Di cuantas coaliciones hay y escríbelas todas. Fíjate como se ha hecho al principio de esta actividad. Recuerda que una coalición puede estar formada por uno, dos o tres partidos.**

**iv) Encuentra el índice de poder de cada partido y recuerda escribir primero las coaliciones ganadoras minimales.**

**v) Da tu opinión cuando comparas los porcentajes y los índices de poder de cada partido.**

Figura 7. Tarea 2. Cálculo analógico del Índice de Poder son realmente capaces de reproducir el procedimiento descrito en la etapa guiada y captar el concepto de índice de poder.

La tarea 1 recogida en la figura 6 mantiene el mismo contexto del consejo escolar de la etapa guiada y sólo se cambian los datos del modelo matemático. Se pretende observar si, ante una situación análoga, los estudiantes han captado el concepto de coalición y saben extraer las ideas de perdedora y ganadora.

Efectivamente, los resultados de las cuestiones de esta tarea 1 muestran que el éxito es prácticamente total, tanto en alumnos de ESO como en bachillerato. Aunque se observa cierta diferencia entre los niveles de alumnos, ya que los de bachillerato justifican mejor y de una forma más amplia sus respuestas. Así, aparecen términos como *minimales*, *ganadora*, *suficiente*, *votos necesarios*, *se coalicionan* o *mayoría* para justificar los números 21, 19 y 22 que aparecen cuando realizan la suma de votos de los grupos que forman las coaliciones de cada apartado.

La tarea 2, recogida en la figura 7, continúa con el proceso analógico guiado con preguntas que van orientando al alumno en el proceso, pero utilizando un contexto político distinto.

Los tres primeros apartados de la tarea 2 los completan prácticamente por todos los alumnos. Sin embargo, no ocurre los mismo con los dos últimos donde se observa mejores resultados en los estudiantes de bachillerato que en los de ESO. Concretamente, todos los alumnos completan el apartado i), pasando los datos al modelo de votación ponderada. El apartado ii) lo completan casi todos los alumnos, el 91 %. La tabla 3 resume las distintas respuestas dadas en este apartado. Se consideran como admisibles las dos primeras filas, correspondientes a los alumnos que anotan

| *A* | *B* | *C* | *Respuestas* |
|---|---|---|---|
| 45,45 % | 36,36 % | 18,18 % | 73 % |
| 45,5 % | 36,4 % | 18,1 % | 3 % |
| 0,45 | 0,36 | 0,18 | 3 % |
| 45 % | 36 % | 18 % | 3 % |
| 83,3 % | 66,6 % | 33,3 % | 9 % |
| Blanco | Blanco | Blanco | 9 % |

Tabla 3. Respuestas de los estudiantes a la pregunta ii)

la respuesta: 45,45 %; 36,36 %; 18,18 %, y a los que redondean a: 45,5 %; 36,4 %; 18,1 %, que se puede aceptar como correcta ya que suman 100. Es decir, un 76 % de los alumnos responde correctamente.

Sin embargo, se presentan algunos casos que apuntan: 45 %, 36 %, 18 %, sin observar que esta distribución no suma 100. Otros alumnos indican primero: 0,45; 0,36; 0,18, y luego lo pasan a porcentajes cuando utilizan este resultado en el último apartado. Hay alumnos de Bachillerato que calculan el porcentaje utilizando como cuota 6, en lugar del total 11, por lo que colocan en la tabla: 83,3 %; 66,6 %; 33,3 %. Estos últimos casos son las respuestas más preocupantes, pues son alumnos de Bachillerato con una formación matemática de etapa finalizada, que no se dan cuenta que obtienen porcentajes disparatados o que no suman 100. En este sentido, estos errores en el uso de los porcentajes concuerdan con resultados obtenidos en experiencias en otros contextos, como en Espinel, Bruno y Plasencia (2010), lo que permite apuntar que estos errores no son consecuencia del tipo actividad propuesta.

El apartado iii) lo responden correctamente escribiendo las siete coaliciones, el 75,8 % de los alumnos. El resto apuntan sólo cuatro o tres coaliciones. Hay un 15,2 % de alumnos que no apuntan las coaliciones formadas por un solo grupo, a pesar de que en el enunciado de la pregunta se les recuerda.

El éxito en este apartado, 75,8 % de respuestas correctas, al considerarlo como una actividad de combinatoria en el que los alumnos han de escribir las distintas combinaciones de un conjunto de cuatro elementos, muestra cómo éstos son capaces de dar respuestas a este tipo de situaciones intuitivas frente a las dificultades que presentan en ejercicios de combinatoria más formales que requieren el uso de fórmulas (Batanero, Navarro-Pelayo, Godino, 1997).

Para responder al apartado iv), sobre el cálculo del índice, se espera que los alumnos realicen el proceso descrito en la tabla 4.

| *CGM* | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|
| *AB* | 1/2 | 1/2 | |
| *AC* | 1/2 | | 1/2 |
| *BC* | | 1/2 | 1/2 |
| *Suma* | 2/2 | 2/2 | 2/2 |
| *Índice* | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

Tabla 4. Cálculo del índice de poder en la Tarea 2

Los resultados de este apartado muestran que sólo lo hacen correctamente el 36,4% de los alumnos, dejándolo en blanco el 30,3%. El alto porcentaje de alumnos que no responden al apartado iv), y que también se mantiene en el apartado v), se debe al importante fracaso observado en los alumnos de ESO. Entre los alumnos de Bachillerato, el apartado iv), completar el cálculo del índice de poder, lo responde correctamente el 55,5%. En este nivel, sólo un alumno deja la cuestión en blanco y el resto comete distintos errores, destacando el uso de más coaliciones de las minimales de las necesarias en el proceso. En las opiniones aportadas en el apartado v) aparecen frases como: «Que A y B salen perdiendo y C sale ganando». «El más favorecido es el partido C, mientras que el más perjudicado es el A, seguido del B». «Que todos van a dar lo mismo» y «33,33% todos son iguales».

## Resultados y valoración de la experiencia

Como se ha indicado, el propósito de este trabajo y primer objetivo ha sido diseñar, mejorar y evaluar una actividad matemática relacionada con el concepto de índice de poder, propia de la teoría de juegos cooperativos. En el estudio se aplica el índice de poder de Deegan-Packel en dos contextos: el contexto de los consejos escolares de los centros de enseñanza y el de la composición de los ayuntamientos con los partidos políticos que componen el consistorio como jugadores. Esta experiencia se diseña y experimenta con estudiantes de secundaria (16-18 años).

En esta valoración del diseño de la actividad, se encuentra que la principal dificultad aparece relacionada con el concepto de coalición, esencialmente porque para algunos alumnos no es admisible que una coalición, entendida como grupo de poder, pueda estar formada por un único miembro. Además, presentan dificultades a la hora de seleccionar las coaliciones ganadoras minimales, debido a que no diferencian entre los conceptos de necesario y suficiente. Por ello, en la parte analógica, más de la mitad de los alumnos no completan la segunda tarea pues no son capaces de localizar las coaliciones ganadoras minimales de manera correcta. El término minimal resulta difícil de comprender por los alumnos y cabría sustituirlo por coaliciones mínimas necesarias para ganar, siendo éste un aspecto a tener en cuenta en futuras versiones mejoradas de la actividad.

El error más relevante se produce en el cálculo e interpretación de porcentaje. Se observa cómo hay alumnos que tienen un conocimiento deficiente ya que se detecta una práctica incorrecta: los porcentajes suman más de 100. Es este un error frecuente en el ambiente escolar y, como se ha indicado, es independiente del contexto en el que se trabaje, en concreto, del contexto del cálculo de índices de poder que se emplea en esta actividad.

En la valoración de la forma de implementación de la experiencia en el aula, hay que señalar que el diseño que se presenta aquí es el resultado de la valoración de varios diseños previos. En este sentido, se realizó una primera experiencia con una versión previa, donde la actividad propuesta a los alumnos requería de un desarrollo libre del proceso de modelización.

Dicha experiencia realizada con un grupo piloto fue un fracaso, ocasionado en buena parte por la falta de motivación y de tiempo para realizar esta actividad sin ningún tipo de guía.

Ante este fallo en el diseño preliminar, se realiza un análisis retrospectivo que conduce al diseño de la actividad de forma guiada u orientada, que se muestra en este artículo en la etapa analógica, y que utiliza preguntas para guiar al alumno hacia el concepto de índice de poder. Los resultados de la experiencia ponen de manifiesto que la actividad diseñada es manifiestamente mejorable, por ejemplo, en vocabulario o en la búsqueda de contextos que les interesen realmente a los alumnos, si bien es cierto que los resultados mejoraron de manera evidente con respecto a los de la prueba piloto. En este sentido, los contextos del consejo escolar y el ayuntamiento resultaron ser situaciones que interesan más a los profesores que participan en la experiencia que a los propios alumnos. Por lo que realmente se hace necesario buscar un contexto donde se aplique el modelo y que les interese a los alumnos, proceso que no resulta fácil.

Con respecto al segundo objetivo planteado, valorar el grado de comprensión de la actividad y detectar las dificultades surgidas en el proceso de resolución de la misma, se detecta una mejor comprensión de la actividad en la Etapa Orientada por parte de todos los alumnos, que en la Etapa Analógica que sólo obtiene resultados aceptables para los alumnos de bachillerato. Esta apreciación se observa a partir de que:

— Todos los alumnos hacen uso de contenidos básicos de matemática como combinatoria, fracciones y porcentajes especialmente en el proceso guiado, si bien, los alumnos más jóvenes tienen dificultades para transponer el proceso a otro contexto.
— En las respuestas de algunas preguntas hay una clara influencia del contexto pues se observa como, por ejemplo, los alumnos aplican mejor la combinatoria en esta actividad que cuando se formulan problemas matemáticos en abstracto.
— Se encuentra un aceptable conocimiento semántico, pues se observa que dominan el área relevante para el problema, utilizando términos como consorcio, afiliado, asociado, colega, accionista,… cuando justifican sus respuestas.
— De las aportaciones dadas por los alumnos se puede interpretar que captan las ventajas de la cooperación y formar alianzas entre los jugadores y, por tanto, se puede considerar que, al menos parcialmente, los alumnos han sido capaces de aproximarse a las dos primeras apreciaciones sobre esta experiencia descritas al comienzo de este artículo.

Con ésta y otras experiencias relacionadas con Teoría de Juegos, algunas de ellas se citan en la bibliografía, se ofrece al profesorado material didáctico que ayude a desarrollar en los alumnos valores ciudadanos como la importancia de cooperación y negociación y el diseño de sistemas democráticos.



## Agradecimientos

Esta investigación ha sido realizada en el marco del proyecto de Investigación SEJ2006-10290 (Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, programa del Plan Nacional de I+D+I).

## Referencias bibliográficas

Álvarez, M., y J. M. Alonso (2010), «Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento», *Suma*, n.º 63, 7-15.

Antequera, A. T., y M. C. Espinel (2003), «Decisiones estratégicas y de cooperación desde las Matemáticas», *Números*, n.º 53, 15-26.

— (2009), «Diagramas de árbol como destrezas cotidianas de estudiantes de Secundaria», *Actas XIV JAEM*, <http://xivjaem.org/index.php>.

Antequera, A., y M. C. Espinel (2011*a*), «Analysis of a teaching experiment on fair distribution with secondary school students», *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 42, n.º 2, 213-228.

— (2011*b*), «Rules for Rational Decision Making: An Experiment with15- and 16- year old Students», *Investigation in Mathematics Learning*, Winter Edition, 2011, vol. 4, n.º 2, 25-41.

— (2011c), «Juegos cotidianos y árboles de decisión: aportaciones de alumnos de secundaria», *Educación Matemática*, vol. 23, n.º2, 33-63.

Batanero, C., V. Navarro-Pelayo, V., y J. D. Godino (1997), «Effect of the implicit combinatorial model in combinatorial reasoning in secondary School pupils», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 32, 181-199.

Binmore, K. (1996), *Teoría de Juegos,* McGraw-Hill, Madrid.

COMAP (1988), *For All Practical Purpose*, S. Garfunkel, (Project Director) et al., W. H. Freeman, New York.

De Bellis, V. A., y J. G. Rosenstein (2004), «Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States», *ZDM* (Zentralblatt für Didacktik der Mathematik), vol. 36, n.º 2, 46-55.

Doorman, M., P. Drijvers, T. Dekker, M. van den Heuvel-Panhuizen, J. de Lange y M. Wijers (2007), «Problem solving as a challenge for mathematic education in The Netherlands», *ZDM (The International Journal on Mathematics Education)*, n.º 39, 405-418.

Doerr, H., y D. Pratt (2008), «The learning of mathematics and mathematical modelling», en M. K. Heid, y G. Blume (ed.), *Research on Technology and Teaching and Learning of Mathematics: Vol.1: Research Syntheses,* IAP-Information Age Publishing, Inc., USA, 259-285

Espinel, M. C. (1999*a*), «El poder y las coaliciones», *Suma,* n.º 31, 109-117.

— (1999*b*), «Sistemas de reparto de poder en las elecciones locales», *Números,* n.º 39, 13-19.

Espinel, M. C., A. Bruno e I. Plasencia (2010), «La compresión de gráficas de porcentaje de variación en situaciones cotidianas», *Unión*, n.º 25, 83-102.

Goldin, G. A. (2004), «Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics», *ZDM* (Zentralblatt für Didacktik der Mathematik), vol. 36, n.º 2, 56-60.

Gura, E., y M. B. Maschler (2008), *Insights into game theory. An alternative Mathematical experience*, Cambridge University Press, U. K.

Hubmann, S. (2008), «Doing mathematics-authentically and discrete. A perspective for teacher training», *11th International Congress on Mathematical Education,* <www.tsg.icme11.org/tsg/show16>

Mousoulides, N., C. Christou y B. Sriraman (2005), «From Problem solving to Modelling – A meta-analysis», <http://www.umt.edu/math/reports/sriraman/mousoulideschristousriraman.pdf>

Parks, H., G. Musser, R. Burton y W. Siebler (2000), *Mathematics in Life, Society, & the World*, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Santos, L. M. (2007), *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, Trillas, México.

Stillman, G., P. Brown, P. Galbraith e I. Edward (2007), «A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom», en Watson, J.; Beswick, K. (ed.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education*, vol. 2, 688-697.

Taylor, A. D. (1995), *Mathematics and politics. Stratey, Voting, Power and Proof*, Springer-Verlag, New York.



Ana Teresa Antequera Guerra
*C.E.O. Juan XXIII (Centro de Educación Secundaria)*
<aantegue@yahoo.es>

María Candelaria Espinel Febles
*Facultad de Matemáticas. Universidad de La Laguna*
<mespinel@ull.es>