suma+
Artículos
Julio 2013
73
pp. 11-23

Método alternativo para la gráfica de funciones algebraicas

José Albeiro Sánchez Cano

Este artículo presenta un método original que utilizando procedimientos algebraicos, permite determinar los elementos más importantes de funciones algebraicas de una variable real entre los que se encuentran sus valores extremos y la gráfica, sin utilizar el tratamiento tradicional propuesto en el cálculo diferencial.

Palabras clave: Innovación, Álgebra, Funciones algebraicas, Extremos de funciones, Enseñanza y aprendizaje, Universidad.

Alternative method for the graph of algebraic functions

This paper introduces an original method that by using algebraic procedures, allow to determine the most important elements of algebraic functions of one real variable among which are its extreme values and the graph without using the traditional treatment proposed en the calculus.

Key words: Innovation, Algebra, Algebraic functions, Extremes of functions, Teaching and Learning, University.

Por lo regular, una gráfica se dibuja trazando unos cuantos puntos y conectándolos por medio de una curva suave, pero existe el problema de que fácilmente la curva pueda presentar oscilación y el trazado no lo detectaría. Este método se aplica también en calculadoras y sistemas de álgebra computacional. De aquí que el cálculo diferencial resulte fundamental en la obtención de las gráficas de funciones. Mediante la primera derivada se obtienen los puntos críticos, que pueden ser máximos o mínimos, y usando la segunda derivada los puntos de inflexión, que dan el cambio de concavidad.

El método que se propone en este artículo es puramente algebraico y no requiere del conocimiento de la primera derivada, pero tiene una limitación: solo se aplica a funciones algebraicas. Este procedimiento puede servir como preámbulo para un curso de cálculo, aunque de ninguna manera pretende desplazar al curso en sí mismo. Más bien se ofrece como un buen entrenamiento algebraico previo al estudio del cálculo.

Dicho método consiste en introducir un parámetro que se iguala a la función algebraica dada de manera que ésta, mediante manipulaciones algebraicas, se convierte en una función polinómica. Luego se busca un valor extremo (si existe) con lo cual se

Artículo recibido en *Suma* en diciembre de 2011 y aceptado en diciembre de 2012

«obliga» a la ecuación polinómica resultante a tener dos raíces reales e iguales. Aquí es donde se aplica el método, desarrollado inicialmente para funciones polinómicas, pero que extendemos a funciones algebraicas. Dicho desarrollo se encuentra en Sánchez (2011).

Los ejemplos que utilizaremos en este trabajo fueron extraídos de textos clásicos de Cálculo Diferencial, entre ellos Leithold (1987) y Larson (2006). Esos ejemplos se crean de manera que los sistemas de ecuaciones para obtener los extremos resulten relativamente fáciles de resolver, en particular para los polinomios de grado mayor que tres.

Se puede partir de cualquier texto de cálculo, sólo hace falta que las funciones a derivar sean fácilmente resolubles por álgebra, en el caso de encontrar los puntos críticos. En general, los sistemas de ecuaciones resultan imposibles de resolver en forma exacta, pero en estos casos se utilizan métodos numéricos.

El teorema siguiente será crucial para el desarrollo del artículo, fue construido precisamente como soporte al método expuesto y su demostración se encuentra en Sánchez (2011).

Teorema. La gráfica de la función polinómica de grado n,

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n \quad [1]$$

tiene una recta tangente horizontal en el punto (α, k) si y sólo si la ecuación polinómica $f(x)-k=0$ tiene una raíz real de multiplicidad algebraica dos, x = α. Es decir, $f(x)-k=0$ puede escribirse como:

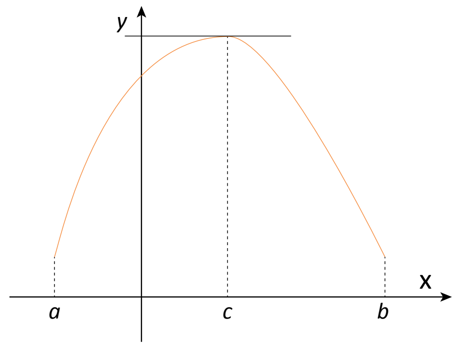
$$f(x)-k=(x-\alpha)^2\cdot P_{n-2}(x),\ P_{n-2}(\alpha)\neq 0 \quad [2]$$

donde $P_{n-2}(x)=0$ es un polinomio de grado n-2 y viene dado por:

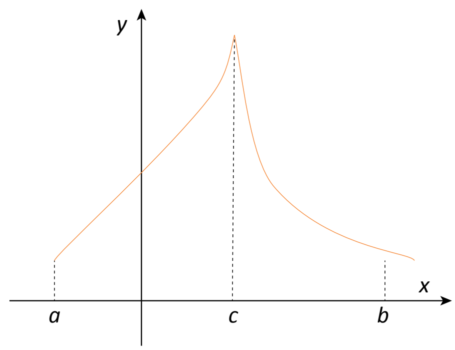
Obsérvese que si $P_{n-2}(a)=0$, el punto (a, f(a)) es un punto de inflexión.

Como el objetivo de este trabajo es encontrar los extremos de funciones algebraicas sin el uso del cálculo diferencial, requerimos las definiciones siguientes de extremos relativos.

Definición. Se dice que la función f tiene un valor máximo relativo en c si existe un intervalo abierto que contenga a c, en el cual f esté definida, tal que $f(c)\geq f(x)$ para toda x en ese intervalo.



(A)



(B)

Figura 1: máximo

La figura 1 muestra parte de la gráfica de una función que tiene valor máximo relativo en c. En (A) la pendiente de la recta tangente en es cero (tangente horizontal), mientras que en (B) tiene recta tangente vertical, termina en «pico».

$$\begin{aligned}P_{n-2}(x)=&\ x^{n-2}+(2\alpha+a_1)x^{n-3}+(3\alpha^2+2a_1\alpha+a_2)x^{n-4}+(4\alpha^3+3a_1\alpha^2+2a_2\alpha+a_3)x^{n-5}+...\\&...+((n-2)\alpha^{n-3}+(n-3)a_1\alpha^{n-4}+(n-4)a_2\alpha^{n-5}+...+3a_{n-5}\alpha^2+2a_{n-4}\alpha+a_{n-3})x\end{aligned} \quad [3]$$

Definición. Se dice que la función f tiene un valor mínimo relativo en c si existe un intervalo abierto que contenga a c, en el cual f esté definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para toda x en ese intervalo.

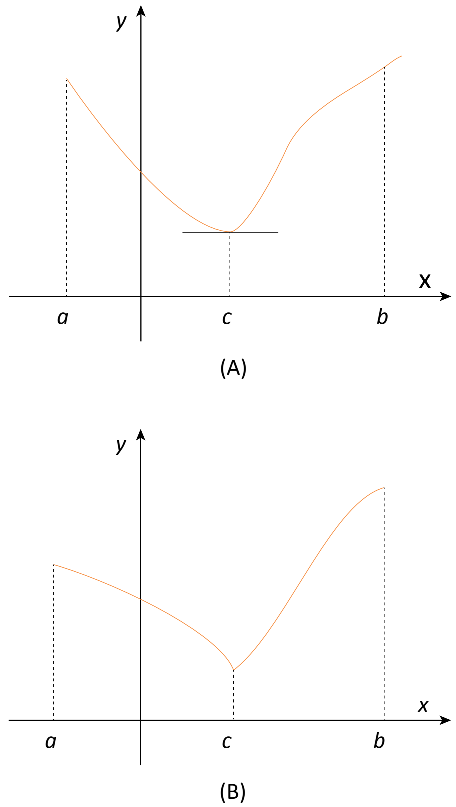


Figura 2: mínimo

La figura 2 muestra parte de la gráfica de una función que tiene valor mínimo relativo en c. En (A) la pendiente de la recta tangente en es cero (tangente horizontal), mientras que en (B) tiene recta tangente vertical, termina en «pico».

Método

Sea f una función algebraica. El objetivo es determinar los extremos de dicha función. El método funciona como sigue: igualamos la función dada f a un parámetro k por determinar y que, en caso de que exista, será el valor óptimo. Esto significa que podemos escribir la siguiente igualdad:

$$f(x) = k,\ x \in I \subset R$$

La igualdad anterior se convierte, por tanto, en un polinomio. Sea $P(x;k)$ dicho polinomio de grado n. Aplicando ahora el teorema 1, esto es, pedimos que el polinomio resultante $P(x;k)$ tenga dos raíces reales e iguales. Usando la notación del teorema:

$$f(x) - k = P(x,k) = (x-\alpha)^2 P_{n-2}(x;k)$$
$$P_{n-2}(\alpha;k) \neq 0$$

donde $P_{n-2}(x;k)$ es un polinomio de grado n-2.

En el caso de que $P(x;k)$ sea un polinomio de grado dos, luego lo que se exige es que el discriminante de la ecuación cuadrática resultante sea cero. En general, en el discriminante aparecerá una ecuación en la variable k. Como en principio el discriminante deberá ser mayor o igual a cero, de aquí se desprende el tipo de extremo. Es decir, si $k \geq a$, entonces $k = a$ será el valor mínimo; y si $k \leq b$, entonces $k=b$ será el valor máximo. La desigualdad estricta no produce valor extremo.

Para los otros casos, esto es, si $P(x;k)$ es un polinomio de grado mayor que dos, entonces el valor más grande de k asumido dentro de un conjunto de valores, será el valor máximo; y el valor más pequeño de k, será el valor mínimo.

Si la función f dada es polinómica, entonces se cumple la nota 1 y (α, k) será un punto de inflexión cuando $P_{n-2}(\alpha, k) = 0$. Pero cuando la función es algebraica este criterio puede fallar.

Ejemplos

Los ejemplos siguientes fueron extraídos de varios textos de cálculo, entre los cuales están Leithold (1987) y Larson (2006). Las soluciones calculadas por nuestro método podrán ser comparadas con las proporcionadas por dichos autores.

Ejemplo 1

Determinar los extremos relativos de la función:

$$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2},\ x \neq 0$$

Solución

Observar primero que la función es siempre positiva y simétrica con respecto al eje *y*, pues es par. Hacemos $f(x) = k$

$$\frac{x^4+1}{x^2} = k,\ \text{k>0},\ x \neq 0 \Leftrightarrow x^4 - kx^2 + 1 = 0,\ x \neq 0$$

Esta última ecuación puede verse como una «cuadrática» en la variable x^2 :

$$x^2 = \frac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2} \qquad [4]$$

De [4] se observa que:

$$k^2 - 4 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ k \leq -2 \ \vee \ k \geq 2 \qquad [5]$$

De [5] concluimos que $k \geq 2$, ya que $f(x) = k > 0$. Se tiene que el valor más pequeño que toma esa k en ese conjunto es precisamente $k = 2$, esto es, el valor mínimo absoluto.

Al reemplazar $k = 2$ en [4] se obtiene $x = \pm 1$. Luego los puntos donde ocurre el valor mínimo $k = 2$ son: $(-1, 1)$ y $(1, 2)$ (ver figura 3).

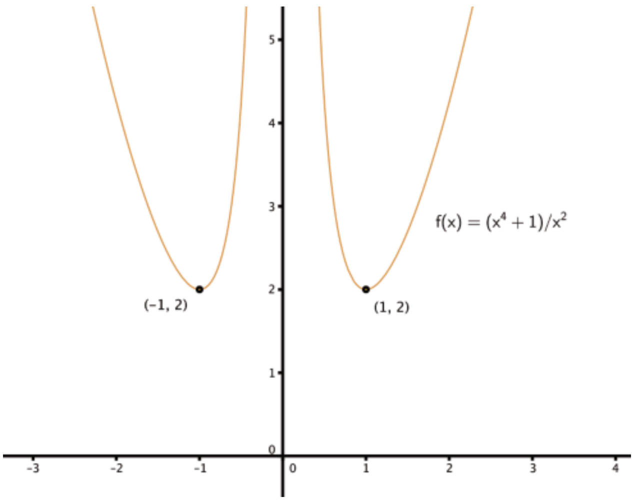


Figura 3

Ejemplo 2

Realizar la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}},\ x \neq \pm 1$$

Solución

Observar que la función es impar, ya que $f(-x) = -f(x)$.

Hacemos $f(x) = k$ para obtener:

$$x^3 - kx^2 + k^3 = 0$$

Como exigimos que las raíces sean reales e iguales, usando el teorema 1, podemos escribir:

$$\begin{aligned} x^3 - k^3x^2 + k^3 &= (x-\alpha)^2(x-\beta) = \\ &= x^3 - (\beta + 2\alpha)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} \beta + 2\alpha &= k^3 \qquad [6] \\ 2\alpha\beta + \alpha^2 &= 0 \qquad [7] \\ -\alpha^2\beta &= k^3 \qquad [8] \end{aligned}$$

De [7] se tienen dos posibilidades:

$$\alpha = 0 \text{ o } \alpha = -2\beta$$

Caso $\alpha = 0$. Al reemplazar el valor nulo de α en [8] se obtiene $k = 0$. Estos valores introducidos en el polinomio $P_1(x) = x + 2\alpha - k^3$ (ver [3]) dan que $P_1(\alpha) = 0$, con lo cual el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$ es un punto de inflexión.

Caso $\alpha = -2\beta$. En [6] se obtiene:

$$\beta = -\frac{k^3}{3}$$

luego:

$$\alpha = -\frac{2k^3}{3} \qquad [9]$$

Substituyendo estos valores de α y β en [8]:

$$-\left(-\frac{2k^3}{3}\right)^2\left(-\frac{k^3}{3}\right) = k^3 \Rightarrow k = \pm\sqrt[6]{\frac{27}{4}}$$

Estos son los valores óptimos. Reemplazándolos en [9] vemos que ocurren en:

$$x = \alpha = \pm\sqrt{3}$$

Luego:

$$\left(-\sqrt{3},\ -\sqrt[6]{\frac{27}{4}}\right) \text{ y } \left(\sqrt{3},\ \sqrt[6]{\frac{27}{4}}\right)$$

son los puntos de mínima y máximo, respectivamente (ver figura 4).

Observemos ahora el comportamiento de la gráfica. Para ello utilizaremos los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = -\infty$$

En resumen, la gráfica de esta función (figura 5), además de los puntos de máxima y mínima mencionados, presenta un punto de inflexion en el origen de coordenadas y dos asíntotas verticales en las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

Ejemplo 3

Encuentre los intervalos donde la función:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

es creciente y los intervalos donde la función es decreciente. Encuéntrense los extremos de la función al igual que el (los) puntos (s) de inflexión.

Solución

Hacemos $f(x) = k$:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - k = 0$$

Como exigimos que las raíces sean reales e iguales, al menos dos de ellas, podemos escribir:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - k = (x-\alpha)^2(x-\beta) =$$
$$= (\beta + 2\alpha)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes, se obtiene el sistema:

$$\beta + 2\alpha = \frac{3}{2} \qquad [10]$$
$$2\alpha\beta + \alpha^2 = 0 \qquad [11]$$
$$-\alpha^2\beta = -k \qquad [12]$$

De [11] se tiene: $\alpha = 0$ o $\alpha = -2\beta$. Si $\alpha = 0$, al reemplazar en [10] se obtiene $\beta = 3/2$; y en [12], se tiene $k = 0$. Esto nos dice que en el punto *(0, 0)* hay tangente horizontal y, por tanto, un extremo.

Análogamente, para $\alpha = -2\beta$, al reemplazar en [8] se obtiene $\beta = -1/2$; y en [10], se tiene $k = -1/2$ y $\alpha = 1$. Esto nos dice que en el punto *(1, –1/2)* hay tangente horizontal, esto es, un extremo.

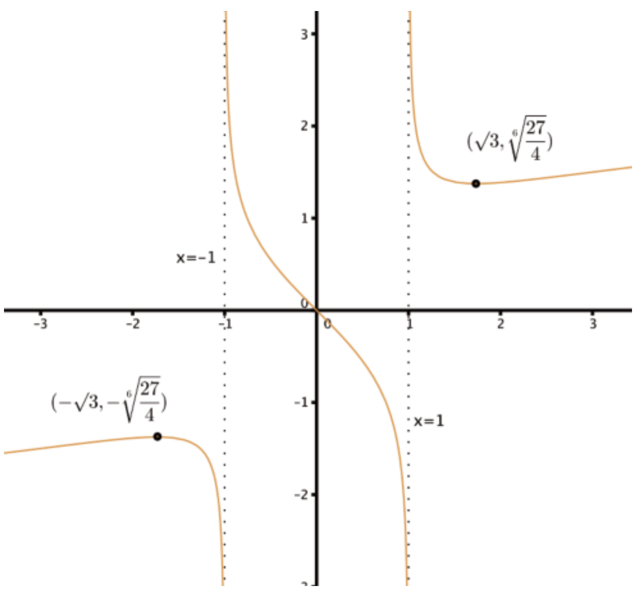


Figura 4

Para encontrar los puntos de inflexión, trabajamos con el polinomio:

$$P_1(x) = x + 2a - \frac{3}{2}$$

$$P_1(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{2}$$

Luego la gráfica de f presenta un punto de inflexión en $(1/2, -1/4)$. Además, el punto $(0, 0)$ es de máxima y $(1, -1/2)$ de mínima (Ver figura 5).

Ejemplo 4

Encontrar los extremos de la función:

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

Solución

Obsérvese primero que la función es impar y su dominio es todos los reales. Hacemos $f(x) = k$:

$$\frac{4x}{x^2+1} = k \;\Rightarrow\; kx^2 - 4x + k = 0$$

Si $k = 0$, entonces x = 0 y así la gráfica pasa por el origen. Para $k \neq 0$, resolviendo x mediante la fórmula cuadrática, se tiene:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4k^2}}{2k}$$

de donde se sigue que $x = 2/k$, el cual se logra cuando:

$$4 - k^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; k = \pm 2$$

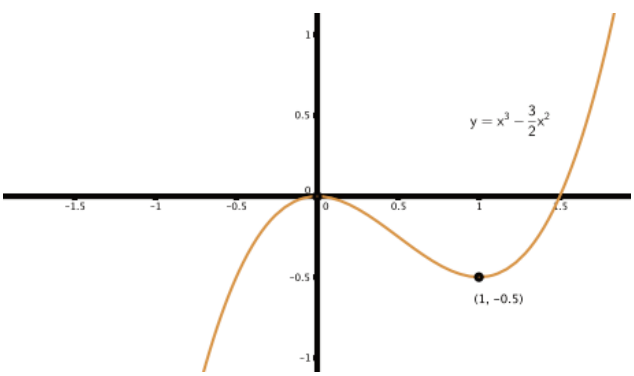


Figura 5

Se concluye que la función toma el valor máximo $k = 2$ en $x = 1$ y su valor mínimo en $x = -1$, con valor mínimo $k = -2$ (Ver figura 6).

Obsérvese que se deberá cumplir la desigualdad $4 - k^2 \geq 0$, con lo cual k $[-2, 2]$ y esto no es más que la extensión de la función, es decir, su rango.

Desafortunadamente, en este problema el método falla para encontrar los puntos de inflexión. Aunauqe, al fin y al cabo, las cuadráticas no tienen puntos de inflexión.

Obsérvesa que la gráfica presenta una asíntota horizontal en $y = 0$, pues:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2+1} = 0$$

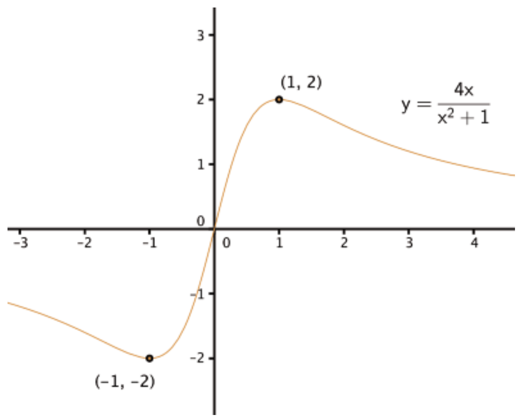


Figura 6

Ejemplo 5

Encuentre los valores de a y b que hacen que la función:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$$

tenga un extremo local en $(3, 1)$. ¿El valor extremo es un máximo o un mínimo local? Justifique la respuesta.

Solución

Haciendo $f(x) = k$ se obtiene:

$$\frac{ax+b}{x^2-1} = k, \; x \neq \pm 1$$

O bien:

$$kx^2 - ax - (k+b) = 0$$

Resolviendo para x:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4k(k+b)}}{2k}$$

El método supone que k es el valor extremo, el cual ocurre cuando:

$$x = \frac{a}{2k} \qquad [13]$$

donde k verifica la ecuación:

$$a^2 + 4k(k+b) = 0 \qquad [14]$$

Por un lado se tiene que $k = 1$ (k es el valor extremo), que ocurre en $x = 3$. Así que reemplazando estos valores en [13] encontramos:

$$x = \frac{a}{2k} \Rightarrow a = 2(1)(3) = 6$$

Ahora, $k = 1$ y $a = 6$ se reemplazan en [14] para obtener b:

$$\begin{aligned} &a^2 + 4k(k+b) = 0 \\ &36 + 4(1)(1+b) = 0 \\ &b = -10 \end{aligned}$$

Así que la función pedida es:

$$f(x) = \frac{6x - 10}{x^2 - 1}, \; x \neq \pm 1$$

¿Cómo saber qué clase de extremo es? Reemplazamos los valores $a = 6$ y $b = -10$ en la siguiente desigualdad:

$$a^2 + 4k(k+b) \geq 0$$

y obtenemos:

$$k^2 - 10k + 9 \geq 0 \;\Rightarrow\; k \leq 1 \;\vee\; k \leq 9$$

Como nos dan $k = 1$, según la desigualdad menor o igual tenemos un máximo.

Ejemplo 6

Analizar y dibujar la gráfica de:

$$f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}, \; x \neq \pm 2$$

Solución

Haciendo $f(x) = k$:

$$\frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} = k \;\Leftrightarrow\; (2 - k)x^2 = 18 - 4x, \; x \neq \pm 2$$

De la última ecuación, se tiene que:

$$x = \pm\sqrt{\frac{18 - 4k}{2 - k}}$$

Para garantizar la existencia de extremo, la cantidad bajo el radical, deberá ser igual a cero, y, para saber si es de máxima o mínima deberemos ver la desigualdad que verifica k. Más claro:

$$\frac{18 - 4k}{2 - k} = 0 \;\Leftrightarrow\; k < 2 \;\vee\; k \geq \frac{9}{4}$$

Luego se tiene lo siguiente:

a) El valor mínimo es $k = 9/4$ y ocurre en $x = 0$. El punto $(0, 9/4)$ es de mínima.

b) No tiene valor máximo, pues se tiene desigualdad estricta $k<2$.

c) La gráfica presenta asíntotas verticales en $x = \pm 2$:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4} = -\infty$$

d) La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal, pues $k<2$ y esto significa que la porción de gráfica se abre por debajo de la recta $y = 2$.

e) La gráfica pasa por los puntos $(0, 9/4)$, $(–3, 0)$, $(3, 0)$ (ver figura 7).

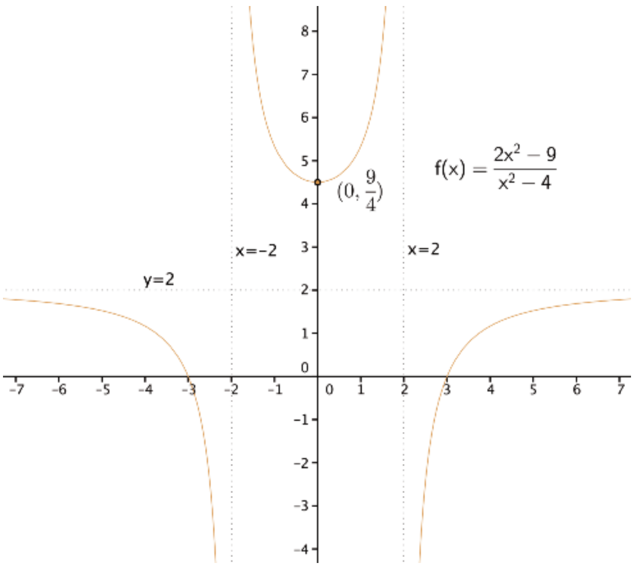


Figura 7

Ejemplo 7

Determinar los extremos relativos de la siguiente función y realizar su gráfica.

$$f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2},\ x\neq 2$$

Solución

Al hacer $f(x) = k$ llegamos a la siguiente igualdad:

$$x^2-(2+k)x+4+2k=0$$

La fórmula cuadrática da:

$$x=\frac{2+k\pm\sqrt{(2+k)^2-4(4+2k)}}{2}$$

De aquí se tiene el punto donde ocurre el extremo:

$$x=\frac{2+k}{2}$$

Y se logra cuando:

$$4k^2-4k+12\geq 0\ \Rightarrow\ k\in(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$$

Observemos que $k = –2$ es el valor máximo, y por tanto la abscisa del punto donde se alcanza es:

$$x=\frac{2+k}{2}=0$$

Es decir, que en el punto $(0, –2)$ ocurre el máximo. Análogamente, en el punto $(4, –6)$ ocurre el mínimo. Presenta asíntota vertical en $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x+4}{x-2}=+\infty$$

Veamos que presenta una asíntota oblicua. De hecho, esto se logra observando que el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador. Para encontrarla escribimos la ecuación $f(x) = k$ en la forma equivalente:

$$f(x)=k\ \Leftrightarrow\ x+\frac{4}{x-2}=k$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{4}{x-2}=k-x,\ x\neq 2$$

De la última ecuación se tiene que $k \neq x$, lo que significa que la función no debe tomar puntos sobre la recta $y = x$, por lo que la gráfica presenta una asíntota oblicua en $y = x$ (ver figura 8).

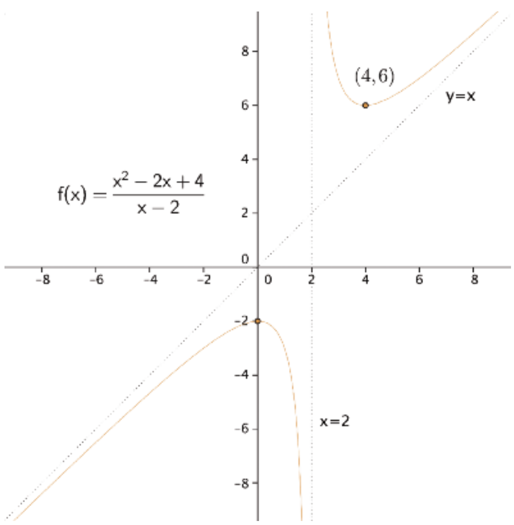


Figura 8

Ejemplo 8

Analizar y dibujar la gráfica de

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}},\ x\in R$$

Solución

Haciendo $f(x) = k$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}=k\Rightarrow x=k\sqrt{x^2+2}$$

De la última ecuación, elevando al cuadrado y resolviendo para x, tenemos:

$$x=\pm k\sqrt{\frac{2}{1-k^2}}$$

Para garantizar la existencia de extremo la cantidad bajo el radical debería ser igual a cero. Pero en este caso nunca será nula. Entonces, k deberá satisfacer:

$$1-k^2<0\Leftrightarrow k\in\left(-1,\ 1\right)$$

Luego se tiene lo siguiente:

a) La gráfica de la función no tiene extremos relativos.

b) Las rectas $y=-1$ e $y = 1$ son asíntotas horizontales.

c) La gráfica no presenta asíntotas verticales, con $Dom(f)$=R.

d) La gráfica pasa por el punto $(0, 0)$.

e) La gráfica está en la banda determinada por las asíntotas horizontales, es decir, el intervalo: $(-1, 1)$ (ver figura 9).

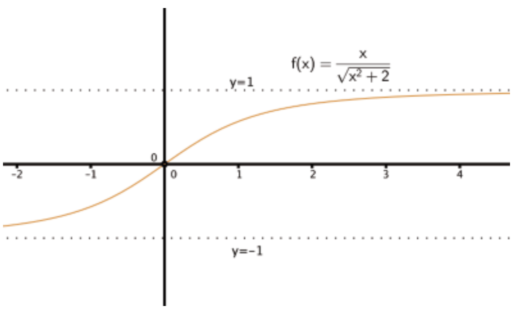


Figura 9

Ejemplo 9

Analizar y representar gráficamente:

$$f(x)=\frac{20x}{x^2+1}-\frac{1}{x},\ x\neq 0$$

Solución

Para obtener los extremos de la función hacemos $f(x) = k$ y realizamos operaciones algebraicas:

$$\frac{20x}{x^2+1}=\frac{1+kx}{x},\ x\neq 0$$

Al simplificar llegamos a una ecuación cúbica en la variable x:

$$kx^3-19x^2+kx+1=0 \qquad [15]$$

Tenemos dos casos:

Caso 1: $k = 0$. De [15] se obtiene:

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{19}}\approx\pm 0,23$$

Luego la gráfica pasa por los puntos:

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{19}},\ 0\right)\ \text{y}\ \left(\sqrt{\frac{1}{19}},\ 0\right)$$

Caso 2: $k \neq 0$. En [15] podemos dividir por $k \neq 0$ para obtener:

$$x^3-\frac{19}{k}x^2+x+\frac{1}{k}=0,\ k\neq 0 \qquad [16]$$

Como exigimos que las raíces sean reales e iguales, podemos escribir:

$$x^3-\frac{19}{k}x^2+x+\frac{1}{k}=$$

$$=x^3-\left(\beta+2\alpha\right)x^2+\left(2\alpha\beta+\alpha^2\right)-\alpha^2\beta$$

Igualando coeficientes se obtiene el sistema siguiente (en el que $k \neq 0$):

$$\beta + 2\alpha = \frac{19}{k} \qquad [17]$$

$$2\alpha\beta + \alpha^2 = 1 \qquad [18]$$

$$\alpha^2\beta = -\frac{1}{k} \qquad [19]$$

De [19] se tiene que:

$$\frac{1}{k} = -\alpha^2\beta$$

Análogamente, de (17):

$$\frac{1}{k} = \frac{\beta + 2\alpha}{19}$$

Igualando estas dos expresiones:

$$\beta + 2\alpha = -19\alpha^2\beta$$

O bien:

$$\beta = -\frac{2\alpha}{1 + 19\alpha^2}$$

Reemplazando [20] en [18]:

$$\alpha^2 - \frac{4\alpha^2}{1 + 19\alpha^2} = 1$$

Simplificando, queda la ecuación:

$$19\alpha^4 - 22\alpha^2 - 1 = 0$$

La cual puede ser resuelta en la forma:

$$\alpha^2 = \frac{11 + 2\sqrt{35}}{19}$$

Se ha omitido el signo negativo en la formula cuadrática (es claro). Por lo tanto, tenemos las raíces de la ecuación polinómica [16]:

$$x = \alpha = \pm\sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{35}}{19}} \approx \pm 1{,}0962174$$

Reemplazando estos valores en [20] se obtiene:

$$\beta = \mp\frac{\sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{35}}{19}}}{6 + \sqrt{35}} \approx \pm 0{,}0919948$$

Y, por lo tanto, para:

$$\alpha = \sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{35}}{19}}, \ \beta = -\frac{\sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{35}}{19}}}{6 + \sqrt{35}}$$

obtenemos el siguiente valor de k:

$$k = \frac{\sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{35}}{19}}}{19\left(6 + \sqrt{35}\right)} \approx 9{,}04572$$

Mientras que para:

$$\alpha = -\sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{35}}{19}}, \ \beta = \frac{\sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{35}}{19}}}{6 + \sqrt{35}}$$

Obtenemos:

$$k = \frac{-\sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{35}}{19}}}{19\left(6 + \sqrt{35}\right)} \approx -9{,}04572$$

Los puntos *(–1.0962174, –9.04572)* y *(1.09621, 9.04572)* son de mínima y máxima, respectivamente (ver figura 10).

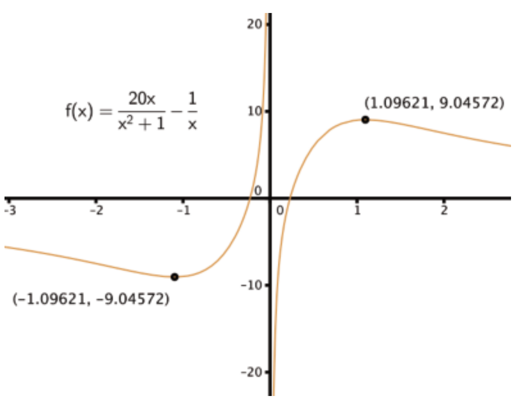


Figura 10

Observemos ahora el comportamiento de la gráfica. Para ello utilizaremos los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{20x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{20x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{20x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{20x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = 0^+$$

En los próximos ejemplos se aplicará el método a expresiones de la forma $x^{m/n}$, con $m<n$. Si un extremo existe en $x = 0$, la gráfica terminará en «pico» ahí.

Ejemplo 10

Dibujar la gráfica de la función:

$$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

Solución

Hacemos el cambio de variable $u = x^{1/3}$ y obtenemos una ecuación algebraica de grado cinco:

$$u^5 - 5u^2 + k = 0$$

Como exigimos que dos de las raíces sean reales e iguales, podemos escribir:

$$\begin{aligned} u^5 - 5u^2 + k = u^5 &- (2\alpha + \omega)u^4 \\ &+ (\alpha^2 + 2\alpha\omega + \eta)u^3 \\ &- (\alpha^2\omega + 2\alpha\eta + \delta)u^2 \\ &+ (\alpha^2\eta + 2\alpha\delta)u - \alpha^2\delta \end{aligned}$$

Donde los valores de ω, η y δ, son como antes. Igualando coeficientes, se llega al sistema:

$$2\alpha + \omega = 0 \qquad [21]$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\omega + \eta = 0 \qquad [22]$$

$$\alpha^2\omega + 2\alpha\eta + \delta = 5 \qquad [23]$$

$$\alpha^2\eta + 2\alpha\delta = 0 \qquad [24]$$

$$\alpha^2\delta = -k \qquad [25]$$

De [21] se tiene $\omega = -2\alpha$, que al ser reemplazada en [22] proporciona:

Reemplazando $\omega = -2\alpha$ y $\eta = 3\alpha^2$ en [23]:

$$\alpha^2(-2\alpha) + 2\alpha(3\alpha^2) + \delta = 5 \Rightarrow \delta = 5 - 4\alpha^3$$

Sustituyendo $\omega = -2\alpha$, $\eta = 3\alpha^2$ y $\delta = 5-4\alpha^3$ en [24], obtenemos:

$$\alpha^2(3\alpha^2) + 2\alpha(5 - 4\alpha^3) = 0 \Rightarrow \alpha=0,\ \alpha=\sqrt[3]{2}$$

Y reemplazando $\delta = 5-4\alpha^3$ en [25], con $\alpha = 0$, se tiene $k = 0$. Pero $u = \alpha = 0$, luego, $x = 0$. Así que tenemos un extremo en $x = 0$ con valor extremo $k = 0$. En este caso en el punto $(0, 0)$ la gráfica termina en «pico». Análogamente, reemplazando $\delta = 5-4\alpha^3$ en [25], con $\alpha = 2^{1/3}$, se tiene:

$$k = 3\sqrt[3]{4}$$

Pero $u = \alpha$ y $u = x^{1/3}$, así que tenemos un extremo en $x = 2$ cuyo valor extremo es ese k (véase la figura 11).

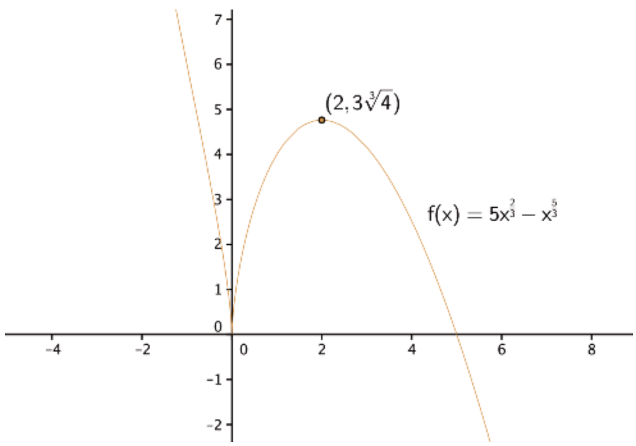


Figura 11

Ejemplo 11

(Minimización de un parámetro). Encuentre el valor mínimo de la constante positiva m que hará que:

$$mx-1+\frac{1}{x}$$

sea mayor que o igual a cero para todo valor positivo de x.

Solución

Inicialmente, llamamos:

$$P(x)=mx-1+\frac{1}{x}$$

Luego hacemos $P(x) = k$ y según la condición k deberá ser mayor o igual a cero. Así que:

$$mx-1+\frac{1}{x}=k\geq 0$$

Después de organizar esta última ecuación, nos queda:

$$mx^2-\left(1+k\right)x+1=0,\ \ k\geq 0$$

Resolviendo x se obtiene:

$$x=\frac{1+k}{2m}$$

Y donde k verifica lo siguiente:

$$\left(k+1\right)^2-4m\geq 0$$

O bien:

$$k\geq 2\sqrt{m}-1\ \vee\ k\leq -2\sqrt{m}-1$$

Tomamos la primera de estas desigualdades, pues lo que se requiere es un valor mínimo, así que el valor mínimo es $k = 2\sqrt{m}-1$. Luego el valor de x para ese mínimo es $k = 2/\sqrt{m}$. Como se requiere el valor para el cual $k \geq 0$, en consecuencia:

$$k=2\sqrt{m}-1\geq 0\ \Rightarrow\ m\geq\frac{1}{4}$$

Ejemplo 12

Analizar y dibujar la gráfica de:

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1},\ x\neq -1$$

Solución

Haciendo $f(x) = k$ y realizando operaciones, obtenemos:

$$\sqrt{x^2+1}=k\left(x+1\right)-x$$

Antes de resolver para x, veamos la región en la cual se encuentra la gráfica de la función f. Para esto debemos observar que $k(x+1)-x>0$, o bien, despejando k:

$$k>1-\frac{1}{x+1}$$

Esto último indica que la gráfica de f se encuentra en el interior de la región acotada por la gráfica de (ver gráfica 12):

$$y=1-\frac{1}{x+1}$$

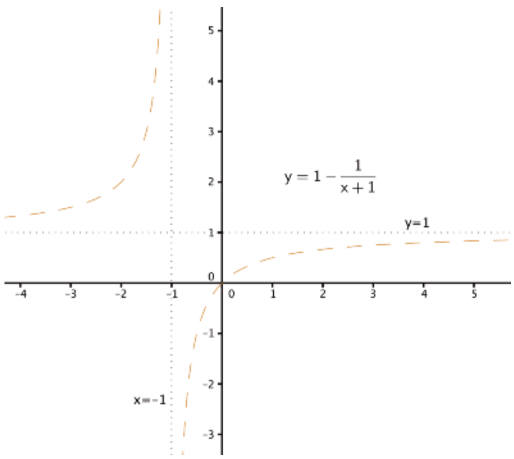


Figura 12

Continuando el proceso, elevando al cuadrado en ambos miembros de la ecuación [26] y simplificando para x, tenemos:

$$k\left(k-2\right)x^2-2k\left(k-1\right)x+\left(k^2-1\right)=0$$

Analicemos los siguientes casos: $k = 0$ y k = 2. El caso $k = 0$ no se cumple por [26], y para $k = 2$ en [26] se tiene $x = -3/4$. Así, la gráfica de f pasa por el punto $(-3/4, 2)$. Supongamos entonces que $k(k-2) \neq 0$, con lo que la abscisa donde ocurre el punto extremo es:

$$x = \frac{k-1}{k-2}$$

Y donde k verifica la desigualdad:

$$k(k-1) \geq 0 \iff k < 0 \vee k \geq 1$$

Luego el valor mínimo es $k = 1$ y ocurre, sustituyendo en [27], en $x = 0$. Observemos que no tiene valor máximo (por la desigualdad estricta).

Luego tenemos lo siguiente (véase la figura 13):

a) La gráfica de la función tiene un punto de mínima en $(0, 1)$.

b) La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

c) La gráfica presenta asíntota vertical en $x = 1$.

d) La gráfica pasa por el punto $(-3/4, 2)$.

e) El recorrido de la función es el siguiente:

$$(-\infty,\ 0) \cup [1,\ +\infty)$$

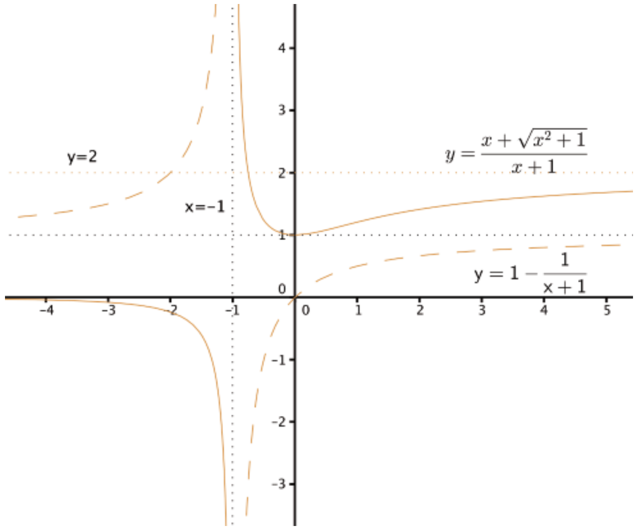


Figura 13

Referencias bibliográficas

Larson, R., R. Hostetler, y B. Edwards (2006), Cálculo, Mc Graw Hill, México.

Leithold, L. (1987), El Cálculo con Geometría Analítica, Harla, México.

Thomas, G. (2005), Cálculo de una variable, Pearson Addison Weley, México.

José Albeiro Sánchez Cano
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad EAFIT, Medellín (Colombia)
<josanche@eafit.edu.co>