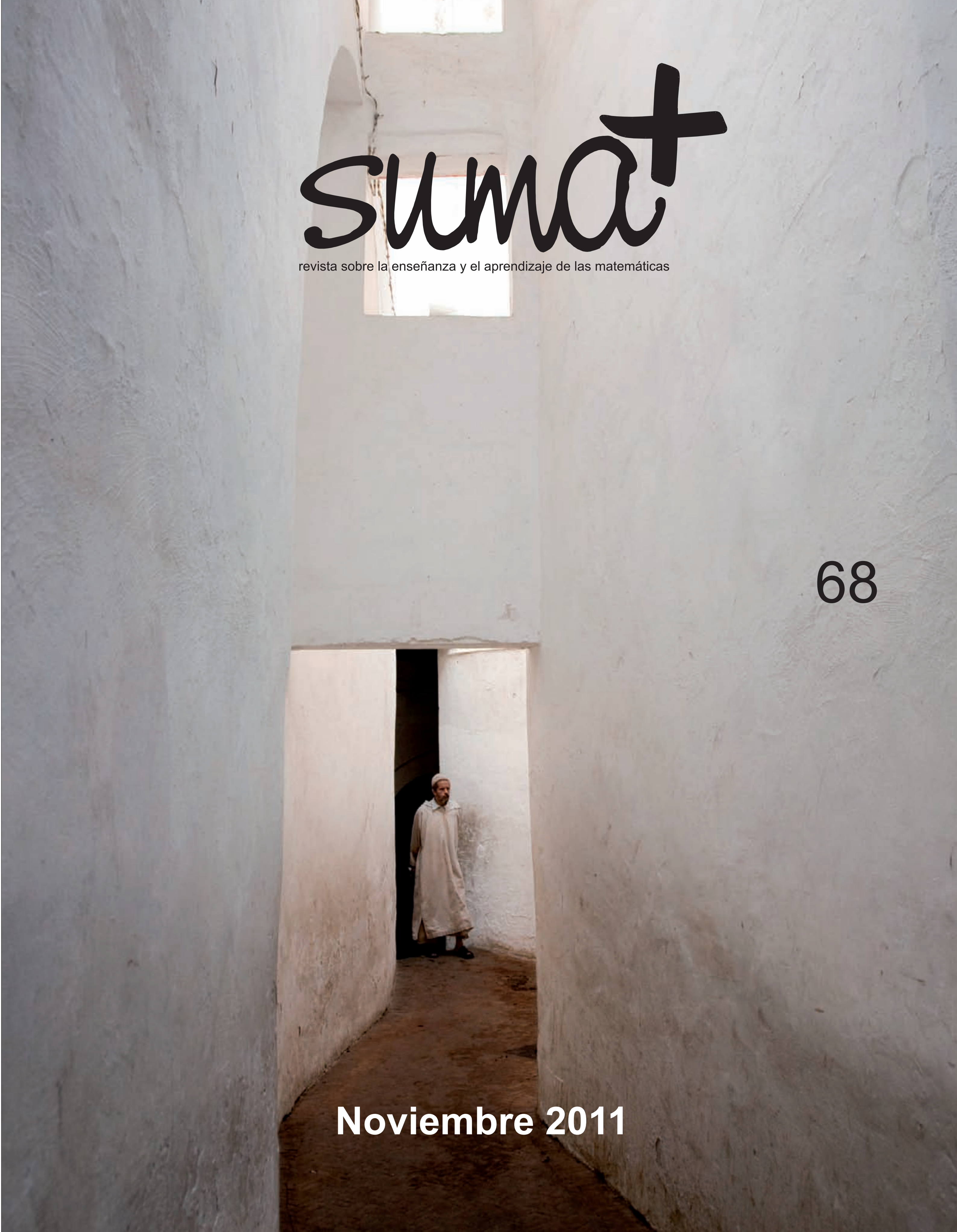


# suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

68

**Noviembre 2011**

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas


**Edita**
*FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)*
**Web**
*Antonio Alamillo Sánchez*
***www.revistasuma.es***

**Diseño de la portada:** *O. Monzó*
**Fotografía de la portada:**
***En su laberinto*** *- Mayte Piera*
**Maquetación**
*T. Queralt y O. Monzó*
**Revista Suma**
*Apartado 498*
*E-46900-Torrent (España)*
**Fax:**+(34) 912 911 879
**Tirada:** *6700 ejemplares*
**Depósito legal:** *Gr 752-1988*
**ISSN:** *1130-488X*

**68** ***Noviembre 2011***



## *artículos*



## *poliedro*

## *actividades de la FESPM*





SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+ 68
Noviembre 2011



# Y llegó el 12

*Au, adéu! Comence el meu comiat*
*a tot el temps passat.*
*Bon vent i barca nova!*
*Sé, però, que no s'estrena un prat*
*seguint sent rellogats*
*a dins una gran cova.*
*Mil espills em trenquen en la nit*
*colpegen el meu pit*
*i m'omplen d'ais la boca.*
*I un badall ofega el meu crit*
*i deixa l'ull humit*
*i el nas demana: Moca't!*

*Ea, adiós! Empiezo mi despedida*
*a todo el tiempo pasado.*
*Buen viento y barca nueva!*
*Sé, empero, que no se estrena un prado*
*siguiendo de realquilados*
*en una gran cueva.*
*Mil espejos me rompen en la noche*
*golpean mi pecho*
*y me llenan de ayes la boca.*
*Y un bostezo ahoga mi grito*
*y deja el ojo húmedo*
*y la nariz pide: Súenate!*

*Ovidi Monllor*

*Ya hace, casi, cuatro años que salió el número 57 de* Suma. *Cuatro años de que nos embarcáramos en la apasionate aventura –como reconocían Julio Sancho y Emilio Palacián en su despedida– de dirigir la revista de la Federación Española de Profesores de Matemáticas. Y en la que antes lo hicieron Rafael Pérez, Sixto Romero y Francisco Martín e Inmaculada Fuentes.*

*Como saben todos los directores de* Suma*, aunque a nosotros nos ha correspondido la tarea de cooordinación, la revista no habría podido ser sin el trabajo de un equipo. En este caso merecen mención especial Gregori García (administrador) y Antonio Alamillo (responsable de la página web). No por ello dejamos de acordarnos del Consejo de redacción (Salvador Caballero, Marida Fernández, Bernardo Gómez, Floreal Gracia, José Antonio Mora y Luis Puig) y del Consejo editorial (Serapio García, Francisco Martín, Inmaculada Fuentes y Ricardo Luengo), así como del equipo de asesores que han hecho que nuestra tarea fuera mucho más fácil. Tampoco podemos olvidarnos de la Comisión Ejecutiva y de la Junta de Gobierno de la Federación Española de Profesores de Matemática (FESPM) en las que sólo hemos encontrado facilidades y comprensión.*

*Aunque ya los hemos incluido en los agradecimientos anteriores, queremos señalar especialmente a nuestro presidente Serapio Cuesta y a nuestro secretario general Francisco Martín con el que nos une la complicidad de haber compartido la aventura de la dirección de* Suma*.*

*Llegados hasta aquí no podemos dejar de mencionar a los lectores, esta revista no tendría sentido sin nadie que la leyera número tras número. Nuestras aciones siempre han ido encaminadas hacia vosotros.*

*Damos las gracias a todos los autores que nos han mandado sus originales y que ha confiado en* Suma *para su difusión. Si como ya hemos dicho* Suma *no tendría sentido sin sus lectores, tampoco lo tendría si no hubiera alguien dispuesto a compartir con todos los demás sus ideas, propuestas, reflexiones...*

*Llega el momento de agradecer su tarea al equipo de autores más estable que ha tenido* Suma *a lo largo de éstos 12 números, los coordinadores de las secciones. Contar con este equipo hace que sientas que no trabajas sin red. Que seguro que vas a tener una contribución puntual y de calidad asegurada cada número. Agradecemos a Juan Antonio Hans, a José Muñoz y a Antonio Fernández-Aliseda (Grupo Alquerque de Sevilla) coordinadores de la sección* ***Juegos****, Claudi Alsina de* ***El Clip,*** *Constantino de la Fuente de* ***Literatura y Matemáticas****, Mariano Real de* ***MatemásTIC****, Francisco Marín de* ***Arte con ojos matemáticos****, Miquel Albertí de* ***En las ciudades invisibles*** *y* ***Adherencias****, Daniel Sierra de* ***Biblioteca****, Luis Puig de* ***Historias****, Santiago Gutiérrez de* ***Hace...****, Vicente Liern de* ***Musymáticas****, José María Sorando de* ***CineMATeca*** *y Xaro Nomdedeu de* ***El hilo de Ariadna****, por dejarse embarcar en esta aventura e iluminarnos cada número con su saber y buen hacer.*

*Acabado el tiempo de las despedidas le toca el turno a las bienvenidas. Como viene siendo habitual en* Suma *desde la direcciín de Julio Sancho y Emilio Palacián se incorporan a la tarea de dirigir* Suma *una pareja. Cuando nos enteramos de que Miquel Albertí y Iolanda Guevara estaban dispuestos a asumir esta tarea no pudimos por menos que alegrarnos. Primero porque son amigos y después porque su capaciad y competencia están fuera de toda duda. De Miquel, en* Suma*, no hace falta decir mucho, para eso está su contribución. Tanto en sus articulos como en las seciones que ha coordinado. De Iolanda, tampoco. Sólo hay que recordar su participación en los seminarios de la Federación, en la estructura de la Federació d'Entitats per l'Ensenyament de Catalunya (FEEMCAT) y en la red de formación del profesorado de Cataluña.*

*Sólo nos queda desear a Iolanda y Miquel toda la suerte posible –que dados los tiempos que corren y los que se nos avecinan, falta les va a hacer– ofrecerles nuestra colaboración como siempre hemos tenido la suya y recordales que :*

| | |
|---|---|
| *Som la cançó que mai s'acaba,*<br>*som el combat contra l'oblit,*<br>*som la paraula silenciada,*<br>*som la revolta en un sol crit.* | *Somos la canción que nunca se acaba,*<br>*somos el combate contra el olvido,*<br>*somos la palabra silenciada,*<br>*somos la revuelta en un solo grito.* |
| *som l'espurna que encén la flama,*<br>*som la lluita que hem compartit,*<br>*som la pedra en la barricada,*<br>*som el poble per construir.* | *somos la chispa que enciende la llama,*<br>*somos la lucha que hemos compartido,*<br>*somos la piedra en la barricada,*<br>*somos el pueblo por construir.* |

*Obrint Pas*

*Onofre Monzó del Olmo*
*Tomás Queralt Llopis*
*Directores de* Suma

Equipos de *Suma*. De izquierda a derecha: Antoni López, Iolanda Guevara, Miquel Albertí, Onofre Monzó, Tomás Queralt y Gregori García.

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas

suma+ 68
Noviembre 2011

# Merece la pena

*El próximo mes de diciembre se cumplirá mi mandato como secretario general de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, para el que fui elegido en diciembre de 2007.*

*No me corresponde a mi señalar los aciertos y fallos de mi gestión que de ambos habrá habido, pero sí apuntar que, desde un punto de vista personal ha sido una etapa apasionante. Ha sido un placer poder colaborar con el Presidente y con el resto de las personas que en estos años han formado parte de la Comisión Ejecutiva y de la Junta de Gobierno de la Federación.*

*La FESPM está formada por un colectivo de profesores comprometidos con la educación matemática, que a pie de aula, en las minas de la tiza y del byte, tratan cada día de trasmitir pasión por las matemáticas. Además, somos en ese colectivo muchos y muy variados y en esas dos características reside nuestra fuerza; una fuerza que hay que renovar y aprovechar más y mejor.*

*Tras más de 35 años, el movimiento de renovación de la educación matemática en España, que emprendieron unos pocos, se encuentra consolidado e institucionalizado, pero se avecinan malos tiempos que requieren que estemos alerta: la calidad y la igualdad están en peligro cierto.*

*Se hace necesario, por tanto, renovar esfuerzos y para ello hay que empezar por nuestra propia reflexión. Debemos tener claro qué perseguimos y tratar de alcanzarlo con eficacia y eficiencia, incluso en los malos tiempos que se avecinan. Toca, por tanto, renovarnos; rehacer nuestros planteamientos, implicar a más profesores, imaginar nuevas acciones, nuevos proyectos, revisar los que ya están en marcha. Sólo la renovación nos garantiza el futuro como organización.*

*Por ello, os animo a todos los socios a participar, a proponer proyectos nuevos, a promover nuevas acciones para mejorar la educación matemática.*

*Quiero desde estas líneas, además de despedirme, animar a los que siguen y a los que asumen nuevas responsabilidades, Agustín Carrillo de Albornoz, que me sustituirá al frente de la Secretaría General, a Iolanda Guevara y Miquel Albertí, que dirigirán* Suma *y a Biel Frontera que ocupa desde hace unos meses la recién creada Secretaría Técnica Adjunta.*

*Renovemos las personas y renovemos las ideas. Saquemos más partido al hecho de ser muchos. La tarea sigue siendo inmensa. Merece la pena.*

*Francisco Martín Casalderrey* ■

suma+

Manuscrito de Pedro Puig Adam

# artículos

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 11-15

# A la FIFA no le gustan las mates

*En este artículo se realiza una crítica a los criterios utilizados por la FIFA para la concesión de los galardones "Balón de Oro", "Balón de Plata", "Balón de Bronce", "Bota de Oro", "Bota de Plata" y "Bota de Bronce" en el último campeonato mundial de fútbol. Se introduce un estimador que permite mejorar las decisiones en la concesión de esos galardones, aportando las definiciones objetivas de valoración de los goles obtenidos en un campeonato.*

Palabras Clave: Fútbol, FIFA, matemáticas aplicadas, estimadores, estadística.

## FIFA doesn't like maths

*In this article we review the criteria used by FIFA officials for the awards "Golden Ball", "Silver Ball", "Bronze Ball", "Golden Boot", "Silver Boot" and "Bronze Boot" in the last World Cup. It introduces an estimator that can improve decisions on the granting of these awards, bringing the objective valuation definitions for the goals obtained in a championship.*

Key words: Football, FIFA, applied mathematics, estimators, statistics.

Tras la consecución por parte de la selección española de fútbol del campeonato del Mundo de Fútbol, celebrado en Suráfrica en 2010, los seguidores de "La Roja", al igual que muchos otros aficionados al fútbol, recibieron con sorpresa la concesión de los galardones del torneo. Estos galardones, sustanciados en los llamados "Balones" y "Botas" (en ambos casos de oro, plata y bronce), dejaron a los aficionados al fútbol boquiabiertos. Lo que sigue es una crítica a los criterios de adjudicación de los mismos y la aportación de diferentes soluciones objetivas, inclinándonos en particular por una de ellas, la que consideramos óptima.

## Balones de Oro, Plata y Bronce

La concesión de los balones de oro, plata y bronce se realiza por votación de los periodistas acreditados por la FIFA para cubrir la celebración del mundial. Por ello es, de entrada, un galardón que se otorga de forma subjetiva. Si bien es cierto que los candidatos están escogidos entre los futbolistas más destacados del campeonato, por su importancia dentro de sus equipos, que son los que más progresan en la competición, así como por su relevancia de cara a portería, no debe ocultarse el hecho de que periodistas simpatizantes de ciertas selecciones siempre votarán a su candidato y en contra del candidato que les hizo caer eliminados, por ejemplo. Se trata de un comportamiento humano, totalmente verificable. Como botón de muestra basta con acudir al anterior balón de oro: Fabio Cannavaro, un jugador que, apoyado por un entramado mediático descomunal logró hacerse con el Balón de Oro en Alemania 2006 sin unos méritos objetivos más allá de su bien demostrado apoyo de los "mass media" europeos.

**Francisco J. García Cubero**
*IES Dr. Faustí Barberà, Alaquàs (València)*

Dicho esto, el análisis de la concesión de los "Balones" desde un punto de vista objetivo es irrealizable, por lo que queda fuera de este artículo ir más allá. Eso sí, para la reflexión y la sorpresa dejo los resultados de los "Balones" en el mundial de Suráfrica, junto a los porcentajes obtenidos por cada jugador. Llama la atención que el ganador haya sido un jugador que marcó 5 goles, pero que milita en la selección que quedó en cuarta posición, mientras que con unos méritos equivalentes, el jugador español David Villa sólo logró llegar al Balón de Bronce.

| | | |
|---|---|---|
| Balón de Oro: | Forlán (Uruguay) | 23'4 % de los votos |
| Balón de Plata: | Sneijder (Holanda) | 21'8 % de los votos |
| Balón de Bronce: | Villa (España) | 16'9% de los votos |

## Botas de Oro, Plata y Bronce

El premio al máximo goleador del mundial, de entrada, parece mucho menos controvertido. Se otorga a aquel jugador que más goles ha marcado, sin tener en cuenta los lanzamientos de penalty en los casos de partidos eliminatorios, a lo largo del campeonato. No se establece, en principio, ningún otro criterio. Si un jugador hubiera marcado 6 goles, ese jugador habría sido, sin duda alguna, el ganador del trofeo. En ese caso no se contemplaría dato alguno más. Se me ocurre pensar en un jugador que marque 6 goles en un partido de la liguilla inicial que quede 6-0. Sí, ha marcado 6 goles, pero su aportación al avance de su equipo en la competición es la misma que si hubiera marcado un solo gol y el resultado hubiera sido 1-0. Tampoco se tomaría en consideración el número de partidos jugados por el goleador. Si tras marcar esos 6 goles hubiera caído lesionado y su equipo eliminado, sus 6 goles aún le darían la bota de oro. Es más, ni siquiera se utilizan criterios más "finos" como establecer su cadencia goleadora (cuántos minutos debe estar en el terreno de juego un jugador para marcar un gol) o su relación "gol/tiros a puerta", que nos daría un índice de efectividad del jugador. No. La FIFA no está para estas sutilezas. El que marque más goles y arreglado. Bien. Al menos es un criterio objetivo.

Pero hay un problema: en este mundial se ha llegado al final de la competición con cuatro jugadores que han marcado los mismos goles. A saber: Villa (España), Forlán (Uruguay), Müller (Alemania) y Sneijder (Holanda). Todos ellos con 5 goles. Muy discutible es la presencia de Sneijder en esta lista, al cual se le asignó como propio un gol marcado en propia meta por el brasileño Felipe Melo. Cualquier aficionado al fútbol, independientemente de los conocimientos técnicos que tenga, vio de forma clara y meridiana que Sneijder sacó una falta lateral con idea de que se produjera un remate por parte de algún compañero; una mala salida del portero Julio César y la cabeza de Melo hicieron el resto. El balón nunca hubiera entrado solo, ya que la trayectoria no tomaba puerta en modo alguno. Aún así, aceptaremos la decisión "técnica" de la FIFA y de buena gana consideraremos como legítima la presencia del jugador holandés en la lista de máximos goleadores.

Ante la poco práctica decisión de otorgar 4 botas de oro exaequo, los técnicos de la FIFA sacan un conejo en la chistera. Deciden hacer intervenir una estadística del juego para deshacer el empate: las asistencias. Un lance del juego que estimo muy importante en el cálculo de, por ejemplo, el jugador más valioso de un partido (MVP) o para incluir esa variable en un cómputo objetivo que pudiera servir en la asignación no subjetiva del Balón de Oro, pero que no sé a santo de qué tiene que intervenir en el cálculo del máximo goleador. Claramente, una asistencia no es un gol. Incluso puede haber asistencias de gol que no acaben en gol por error del delantero. Dicho esto, veamos la estadística de los goleadores utilizada por la FIFA:

| | | |
|---|---|---|
| Müller (Alemania) | 5 goles | 3 asistencias |
| Villa (España) | 5 goles | 1 asistencia |
| Snijder (Holanda) | 5 goles | 1 asistencia |
| Forlán (Uruguay) | 5 goles | 0 asistencias |

La asignación de las botas de oro, plata y bronce corresponden, exactamente, con los tres primeros de esta escueta clasificación. Simple ¿no? Sí, simple e injusto y, sobre todo arbitrario. Esta arbitrariedad por parte de una organización tan importante como la FIFA (que se mostró de forma patente e inequívoca en la forma de resolver el error arbitral de la no concesión de un gol de Lampard en el encuentro Inglaterra vs. Alemania) sorprende e indigna. La FIFA no invierte prácticamente nada en crear unos estimadores estadísticos objetivos que resuelvan de un modo inequívoco y falto de arbitrariedad problemas como el que se le planteó con la Bota de Oro del Mundial 2010.

Lo que está totalmente fuera de lugar es utilizar un lance que es ajeno en su naturaleza a los goles marcados por los acreedores al premio de Bota de Oro para dilucidar justamente ese trofeo. ¿Por qué no dar un "peso" superior a los goles de cabeza frente a los marcados con el pie? ¿Por qué no valorar con mayor puntuación los goles de fuera del área que los marcados desde dentro de la misma? ¿Por qué no valorar más destacadamente un gol en jugada combinada frente a goles conseguidos tras un rechace del contrario? Siendo criterios muy discutibles y, sin lugar a dudas, inválidos, al menos tienen relación directa con los goles que otorgan el premio. Así, pues, ¿se podría usar algún estimador objetivo que tenga relación directa con los propios goles que otorgan el premio? La respuesta es, obviamente, sí.

## Valoración de los goles

El gol es el logro máximo de una jugada. Es el unico camino hacia la victoria. Un equipo que no marca goles no puede ganar el partido, a lo sumo puede aspirar a no perder, a empatar. Es el gol el auténtico rey del fútbol. Así que centremos nuestra atención en él.

Los goles marcados y el balance entre estos goles marcados y los goles recibidos establecen de forma inequívoca el resultado de un partido. La victoria se premia con 3 puntos y el empate otorga un punto a cada equipo. Así, de forma natural, vemos cómo los goles sirven para conseguir puntos. Los puntos conseguidos establecen las clasificaciones de los equipos y esas clasificaciones suponen victorias en campeonatos o derrotas en los mismos. Por ello, vamos a exponer tres modos diferentes de computar el valor en puntos de los goles.

### Valoración equitativa

En este modo de calcular los 3 puntos de la victoria o el punto del empate se reparten entre todos los goles que ha marcado el equipo ganador o cada uno de los equipos que empatan. Por supuesto, los goles del equipo perdedor no aportan punto alguno y obtendrían una valoración nula. Veamos un ejemplo:

Francia 1 – Suráfrica 2

El gol de Francia es de Malouda y los de Suráfrica los marcaron Khumalo y Mphela.

Según esta forma de computar, el gol de Malouda tiene valoración nula (por haber perdido el partido) y los de Suráfrica recibirían cada uno de ellos una puntuación de 1'5 puntos.

Nigeria 2 – Corea del Sur 2

Los goles de Nigeria a cargo de Uche y Yakubu, y los de Corea del Sur fueron de Lee Yung Soo y Chu Young. Cada uno de estos cuatro goles recibiría una puntuación de 0'5 puntos.

### Valoración acumulativa

Los casos de empate se evalúan como en el caso anterior. En el caso de que haya un vencedor, se entiende que hay un gol que es el que otorga el triunfo, el que deshace una igualdad, el que frea una diferencia, que puede ser ampliada, pero que una vez establecida es insalvable, pues el equipo perdedor siempre habrá marcado un gol menos. Si la victoria es por 1-0, no hay duda de que el gol recibirá los 3 puntos. Si la victoria es por 4-2, el gol que da la victoria es el tercer gol del equipo local. Ése será el gol que acumulará los 3 puntos de la victoria. Veamos un ejemplo:

Argentina 4- Corea del Sur 1

Los goles de Argentina fueron marcados por Park Chu (el 1-0 en propia meta), y 3 de Higuaín, mientras que el de Corea del Sur lo marcó Lee Chung. El gol que da la victoria es el segundo gol de Argentina, marcado por Higuaín. Así que ese gol acumularía los 3 puntos, mientras que los otros dos de Higuaín tendrían puntuación nula.

### Valoración equitativa de necesidad

Los casos de empate se evalúan como en el caso anterior. La valoración de los goles, en este caso, recoge la idea de las dos valoraciones anteriores combinándolas de la forma siguiente. Se debe estimar cuál es el resultado que da la victoria, independientemente del resultado final. Por ejemplo: en una victoria por 5-1, la victoria se produce por el resultado interno de 2-1, es decir los dos primeros goles son los únicos necesarios para obtener la victoria, el resto de goles mejoran el aspecto del marcador, pero no tienen incidencia real sobre la obtención de los puntos. Por tanto, los dos primeros goles deberían recibir los 3 puntos a razón de 1'5 puntos cada gol y los otros 3 goles recibirían valoración nula. Veamos un ejemplo:

Dinamarca 1 – Japón 3

El gol de Dinamarca fue obra de Tomasson y los de Japón fueron de Honda (0-1), Endo (0-2) y Okazaki (1-3). Los goles que dan la victoria son los dos primeros, por lo que el gol de Honda y el de Endo recibirían cada uno 1’5 puntos, mientras que el de Okazaki recibiría valoración nula.

Es procedente una pequeña crítica sobre cada uno de los modos de computar la valoración de los goles.

La valoración acumulativa es, a todas luces, injusta. Ignora la necesidad de que se marquen goles previamente a la consecución del que otorga la victoria, en los casos en que es necesario más de un gol para conseguirla, por tanto, la desechamos como una forma aceptable de valoración.

La valoración equitativa otorga valores idénticos a todos los goles, lo cual de entrada parece adecuado, pero en ese caso, cuando la cantidad de goles aumenta, el peso de cada gol disminuye de forma equivalente, reduciendo la importancia de los goles mínimos necesarios para ganar el partido, por ello siendo una opción mejor, tampoco nos satisface totalmente.

Como no podría ser de otro modo, nuestra propuesta es utilizar la valoración equitativa necesaria. Respeta la importancia de todos los goles necesarios para ganar y reparte de un modo igualitario el peso entre ellos. Será esta, pues, nuestra forma de valorar los goles.

## Forlán, Villa, Müller y Sneijder, ¿Quién es el merecedor de la Bota de Oro en Sudáfrica 2010?

El estimador que vamos a utilizar es el siguiente: *valoración media por gol conseguido* (*VMGC).* Este estimador se obtiene calculando la suma de los puntos asignados a cada gol utilizando la valoración equitativa necesaria y dividiendo esa suma por el número de goles conseguidos. Lo que nos dice el estimador es cuántos puntos de media consigue ese jugador con cada gol marcado. Estudiemos jugador a jugador sus goles y calculemos su *VMGC.*

**Goles de Müller**
Alemania 4 – Australia 0

Müller marca el 3-0, por lo que su gol obtiene valoración nula.

Alemania 4 – Inglaterra 1

Müller marca el 3-1 y el 4-1, ambos goles reciben valoración nula.

Alemania 4 – Argentina 0

Müller consigue el 1-0, su gol gana el partido y tiene la valoración de 3 puntos.

Uruguay 2 – Alemania 3

Müller marca el 0-1, como los tres goles son necesarios para obtener la victoria, la valoración del gol es de 1 punto.

$$VMGC = \frac{0+0+0+3+1}{5} = \frac{4}{5} = 0'8$$

Cada gol de Müller en el Mundial Suráfrica 2010 supuso una aportación de 0’8 puntos de media.

**Goles de Villa**

España 2 – Honduras 0

Villa es autor de ambos goles, pero es el primero el que recibe 3 puntos ya que es el mínimo necesario para ganar el partido; el segundo gol recibe valoración nula.

España 2 – Chile 1

Villa marca el primer gol, como los dos son necesarios ya que Chile marcó, el gol de Villa recibe la puntuación de 1’5 puntos.

España 1 – Portugal 0

Villa marca el gol de la victoria. 3 Puntos.

España 1 – Paraguay 0

Villa marca el gol de la victoria. 3 Puntos.

$$VMGC = \frac{3+0+1'5+3+3}{5} = \frac{10'5}{5} = 2'1$$

Cada gol de Villa en el Mundial Suráfrica 2010 supuso una aportación de 2’1 puntos de media**.**

**Goles de Sneijder**
Holanda 1- Japón 0

Sneijder marca el gol de la victoria. 3 puntos.

Holanda 2 – Eslovaquia 1

Sneijder marca el 2-0, como el resultado fue 2-1, su gol se valora 1’5 puntos.

Holanda 2 – Brasil 1

Suyos son los dos goles, aunque uno es el de Felipe Melo en propia meta. Cada gol se valora 1’5 puntos.

Holanda 3 – Uruguay 2

Sneijder marca el 2-1, como fueron necesarios los 3 goles para doblegar a Uruguay, la valoración de su gol es 1 punto.

$$VMGC = \frac{3+1'5+1'5+1'5+1}{5} = \frac{8'5}{5} = 1'7$$

Cada gol de Sneijder en el Mundial Suráfrica 2010 supuso una aportación de 1’7 puntos de media.

**Goles de Forlán**
Uruguay 3 – Suráfrica 0

Forlán marca los dos primeros goles. El primero recibe valoración de 3 puntos, mientras que el segundo recibe valoración nula.

Uruguay 1 – Ghana 1

Forlán marca el gol. 1 punto.

Holanda 3 – Uruguay 2

Forlán marca el 1-1, pero recibe valoración nula al no haber ganado el partido.

Alemania 3 – Uruguay 2

Forlán marca el 1-2, pero recibe valoración nula al no haber ganado el partido.

$$VMGC = \frac{3+0+1+0+0}{5} = \frac{4}{5} = 0'8$$

Cada gol de Forlán en el Mundial Suráfrica 2010 supuso una aportación de 0’8 puntos de media.

## Clasificación de goleadores (utilizando el VMGC para deshacer el cuádruple empate)

| | |
|---|---|
| Bota de Oro: Villa (España) | *VMGC = 2’1* |
| Bota de Plata: Sneijder(Holanda) | *VMGC = 1’7* |
| Bota de Bronce: Müller (Alemania) | *VMGC = 0’8* |
| Bota de Bronce: Forlán (Uruguay) | *VMGC = 0’8* |

## Valoración final

El algodón no engaña, como decía el famoso anuncio, y los números tampoco. Esta clasificación no solo está confeccionada con el único material posible para discriminar la excelencia de un goleador: los goles marcados; sino que, además, tiene una coherencia y lógica aplastante. Los dos primeros clasificados corresponden a los finalistas del mundial y los otros dos, bronce ex-aequo, corresponden a los que jugaron por el tercer y cuarto puesto.

Mi opinión es que, más allá de las consideraciones tenidas en cuenta en este artículo para la valoración de los goles, la FIFA ignora de una forma muy grave las posibilidades matemáticas de sus propias estadísticas y opta por decisiones no basadas en cálculos objetivos. A diferencia de otros deportes, como el béisbol (donde incluso existe hasta una disciplina universitaria – Sabermetrics – dedicada al estudio de la estadísticas del deporte americano), en el fútbol el uso de los, cada vez más abundantes, conjuntos de datos que se obtienen en cada partido está aún en una edad muy temprana. Hacen falta grupos de trabajo y un conocimiento profundo del deporte para poder abrir una nueva vía en el estudio matemático y estadístico del fútbol. ■

# Publicaciones recibidas

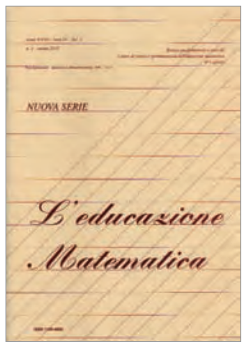

**PROBLEMES OLÍMPICS**
**SEMCV Al Khwārizmī**
*N.º 60, juny 2011*
*Valencia*
*ISSN: 1578-1771*


**GRAND N**
**Irem de Grenoble**
*N.º87, mai 2011*
*Saint Martin d'Hères Cedex*
*ISSN: 0152-4682*


**XLA TANGENTE**
**Kangourou Italia**
*N.º 28, agosto 2011*
*Monza. Italia*
*ISSN: 1971-0445*


**INVESTIGACIÓN Y CIENCIA**
**Prensa Científica, S.A.**
*Noviembre 2011*
*Barcelona*
*ISSN: 0210136X*


**EPSILON**
**SAEM THALES**
*Vol. 27 (3), 2010*
*Sevilla*
*ISSN: 1131-9321*




**L'EDUCAZIONE MATEMATICA**
**Centro di recerca e sperimentazione dell'educazione matematica di Cagliari**
*Anno XXXI Serie IX Vol. 2  n. 3*
*ottobre 2010*
*Cagliari*
*ISSN: 1120-4850*


**LOSANGES**
SBPMef
*N.º 14, septembre 2011*


**LA GACETA DE LA RSME**
RSME
*Vol.14, n.º 3, 2011*
*Madrid*
*ISNN 1138-8927*

SUMA+ 68
Noviembre 2011, pp. 17-25

# El Proyecto Gauss

*Se presentan diversos ejemplos de cómo se pueden aprovechar los applets en general, y las actividades presentes en el Proyecto Gauss del ITE en particular, en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Cada apartado presenta un aspecto distinto que confiere a las actividades ciertas ventajas que podemos disfrutar, así como reflexiones sobre el interés que puede tener su uso. Se destaca el protagonismo que adquieren nuestras propias acciones y la importante ayuda que supone su retroalimentación continua en un escenario visual, dinámico e interactivo.*

Palabras Clave: Nuevas Tecnologías, Actividades, Primaria, Secundaria, Aprendizaje y Educación.

## The Gauss Project

*Several examples of how to profit for learning and teaching of Mathematics from applets, in general, and activities present in the ITE Gauss Project, in particular, are given. Each section shows a different aspect that offers some enjoyable adventages to the activities, as well as thoughts about the interest it can have. The article points at the relevance of our own actions and the great help the steady feedback in a dynamic, interactive and visual background means.*

Key words: New Technologies, Activities, Primary, Secondary, Learning & Education.

## GeoGebra

El programa GeoGebra[1], libre y gratuito, es ya un referente en todo el mundo como un importante recurso de ayuda a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De sus muchos aspectos destacables (Losada, 2007), resaltaremos en principio que es gratuito, intuitivo y permite convertir en segundos las construcciones en *applet*s, esto es, en pequeñas aplicaciones integradas en páginas web.

## El Proyecto

El Instituto de Tecnologías Educativas[2] (ITE) ha creado *El Proyecto Gauss*[3] como parte del Programa Escuela 2.0[4] con el fin de ofrecer materiales educativos digitales que reflejen modos creativos y amenos de aprender matemáticas. Sin duda, el hecho de que el actual director del ITE, Antonio Pérez Sanz, sea también matemático y profesor, ha propiciado una especial atención a su desarrollo. El Proyecto Gauss cuenta hoy con más de 500 actividades que recorren los currículos de matemáticas de 5º y 6º de Primaria y de toda la ESO.

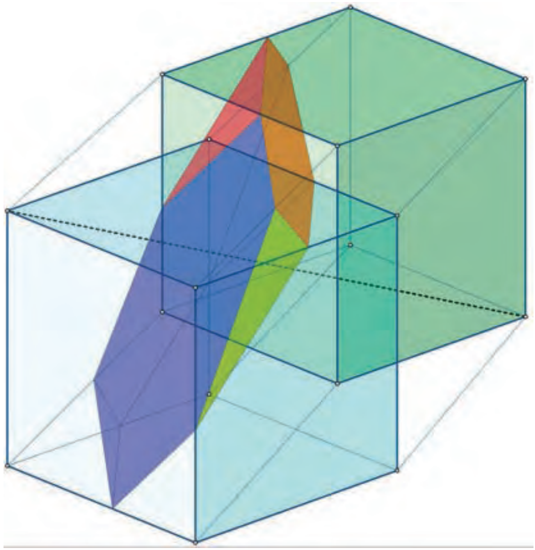
Los culpables del diseño de las construcciones y actividades son los autores de este artículo, asesores técnico-docentes del ITE con amplia experiencia tanto en la docencia de las matemáticas como en el aprovechamiento de las nuevas tecnologías: José Luis Álvarez y Rafael Losada. Este último es también formador del Instituto GeoGebra de Cantabria[5] (IGC), organismo con sede en el CIEM[6] y presidido por el profesor Tomás Recio, que mantiene un convenio de colaboración con el ITE con el propósito de facilitar el desarrollo de actividades e investigaciones de interés común.

## Los temas

Cinco bloques (Aritmética, Álgebra, Funciones, Geometría, Estadística y Probabilidad) dividen por temas las actividades de ESO. El bloque de Geometría es el más extenso debido al aprovechamiento de la representación visual de los elementos geométricos y a las facilidades que ofrece GeoGebra como

**José Luis Álvarez García**
**Rafael Losada Liste**
*Instituto de Tecnologías Educativas. Ministerio de Educación.*

*software* de Geometría Dinámica[7]. La manipulación de elementos geométricos se convierte así en un excelente medio visual donde desarrollar nuestras habilidades matemáticas.

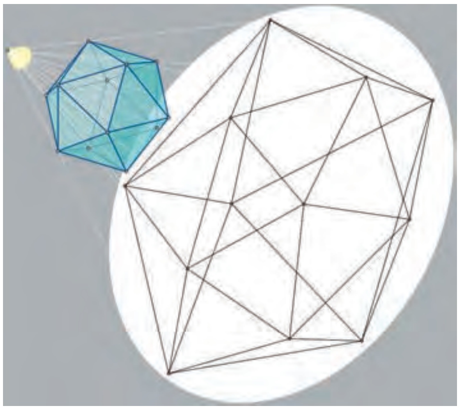


En *Las dimensiones del hipercubo*[8] la animación facilita la visualización de los distintos sólidos que aparecen al seccionar progresivamente un hipercubo

Por su parte, cada una de las actividades de los tres bloques de Primaria (ya que no hay Álgebra ni Funciones) enlaza con otra similar o de nivel ligeramente superior. Estos enlaces ayudan a tratar la diversidad hacia un nivel superior (de Primaria a ESO) o inferior (de ESO a Primaria).

## Las actividades

Cada actividad se compone de un applet de GeoGebra, una introducción y un *cuestionario*. Este último, *parte esencial* del Proyecto, se diseña específicamente para guiar y graduar la exploración del applet. En algunas ocasiones, debido a la naturaleza de la actividad, el cuestionario es reemplazado por algún proceso de construcción o de autoevaluación.



La treintena de preguntas de la actividad *Ombra mai fu*[9] nos impulsan a realizar una incursión en la matemática discreta

En síntesis, las actividades pretenden aproximarnos a las relaciones abstractas de los conceptos matemáticos mediante *la observación de la respuesta a nuestras acciones por parte de objetos dinámicos interactivos*. Esta respuesta del sistema informático retroalimenta nuestra manipulación al tiempo que cuestiona la validez de nuestra interpretación mental de tales conceptos.

## Actitudes y principios

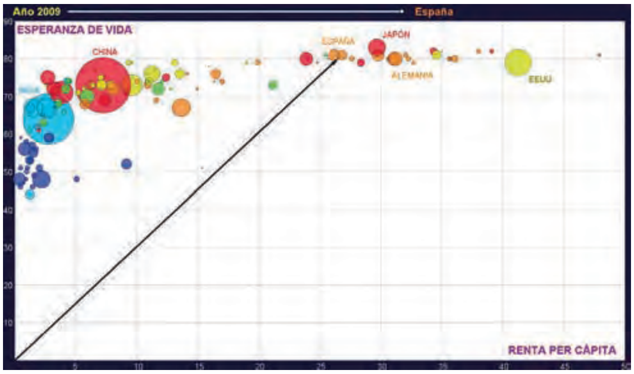
En el espíritu del Proyecto Gauss se antepone la práctica de *competencias generales* a la de algoritmos concretos de resolución. Esto es muy importante, porque significa que para aprovechar al máximo cada actividad debemos mantener una actitud atenta, pero también abierta, curiosa e inquisitiva en vez de pasiva y crédula. Naturalmente, esta actitud supone un esfuerzo que debemos saber apreciar.

El Proyecto Gauss nos ofrece la oportunidad de explorar por nosotros mismos escenarios ricos en contenidos matemáticos, interactuando con ellos. Las profesoras y los profesores, como expertas y expertos socorristas, podemos dirigir, animar (realzar lo positivo y convertir lo negativo en retos que superar), ayudar y valorar, pero las actividades interactivas invitan a que sean alumnos y alumnas *los auténticos protagonistas y las auténticas protagonistas* de su propio aprendizaje. Ellos y ellas son quienes, dependiendo del tipo de actividad, deberán analizar, aplicar, comparar, representar, relacionar, extrapolar, comprobar, reconocer, practicar, investigar, construir, resolver, identificar, generalizar, etc., las situaciones presentadas.

## Los materiales

Las actividades del Proyecto Gauss tienen licencia Creative Commons de “Reconocimiento, No Comercial, Compartir Igual”, es decir, hay libertad de copia, modificación y distribución, siempre que compartamos la misma licencia, reconozcamos los créditos y no lo hagamos con fines comerciales.

Además de poder navegar por las actividades en Internet, podemos descargar todos los materiales[10] en local, comprimidos en sendos archivos para Primaria y ESO. La estructura de carpetas es bastante simple. En la carpeta “eso”, por ejemplo, encontramos las subcarpetas “actividades” y “comentarios” (modelos de respuestas). Al abrir la carpeta “actividades”, cualquiera de los archivos de extensión HTM (página web) que aparecen incorpora un menú general que nos permite navegar por todas las actividades.

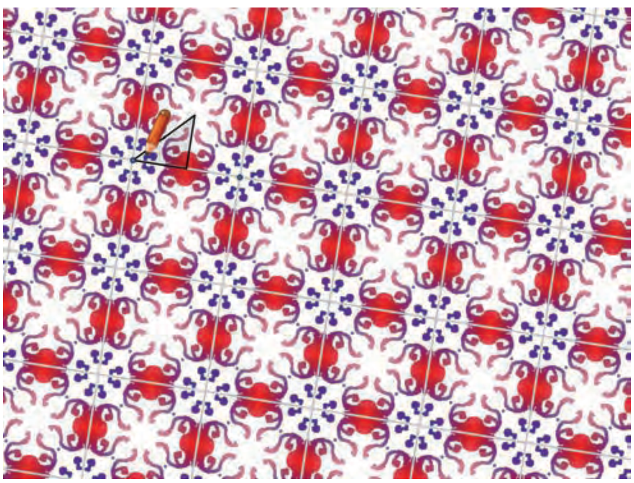



En *Dos siglos*[11] la variable del año posibilita dinamizar la interpretación y comparación de una gran cantidad de datos

Si deseamos cambiar algo en una construcción de GeoGebra basta abrirla en su carpeta. Podemos modificarla como queramos sin necesidad de convertirla de nuevo en applet, pues estos se actualizan automáticamente: solo debemos conservar el nombre del archivo y no moverla a otra carpeta. También podemos editar la página web y, por ejemplo, realizar cambios en el cuestionario.

## Protagonismo y comunicación

Siempre resulta satisfactorio sentir nuestra capacidad de interactuación con nuestro entorno. Los applets del Proyecto Gauss presentan cada escenario procurando mantener el equilibrio entre interactividad y claridad. De este modo, podemos explorarlos y conseguir buenos resultados en poco tiempo. Lo importante es poder dirigir la respuesta del sistema hacia nuestros deseos.



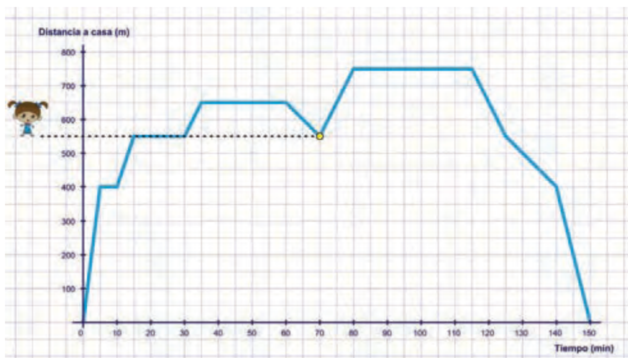
Mosaico periódico del grupo *442 creado con la actividad *Creador de mosaicos*[12] en 15 segundos. (Vale, en 20...)

Es impensable que en un entorno abierto a todo tipo de diversidad se produzca la misma respuesta en todos nosotros. Podemos aprovechar la natural pluralidad de observaciones y respuestas para fomentar y dirigir el debate argumentado, lo que además brindará nuevas oportunidades de mejorar la expresión, la (auto) estima, la comprensión y el respeto mutuo. De hecho, aunque en algunas actividades se propone explícitamente una redacción de conclusiones, en un entorno de aprendizaje en grupo podemos además aprovechar distintos mecanismos (discusión, cooperación, explicación, puesta en común...) que enriquezcan la realización de la actividad.

## Lectura y comprensión

El protagonismo comienza por la lectura individual. Debemos leer la introducción a la actividad para conocer su contexto, el objetivo que persigue y, cuando sea preciso, algunas instrucciones sobre el uso del applet.

Pero, sobre todo, es esencial una correcta interpretación de las preguntas del cuestionario, lo que supone un esfuerzo de atención y concentración que debemos reconocer. La dificultad en la correcta comprensión de los textos a menudo estribará en la precisión de los términos empleados más que en la extensión del texto. La brevedad de estos debe animarnos a releerlos, varias veces si es preciso: unos pocos segundos de especial atención pueden evitarnos muchas confusiones.

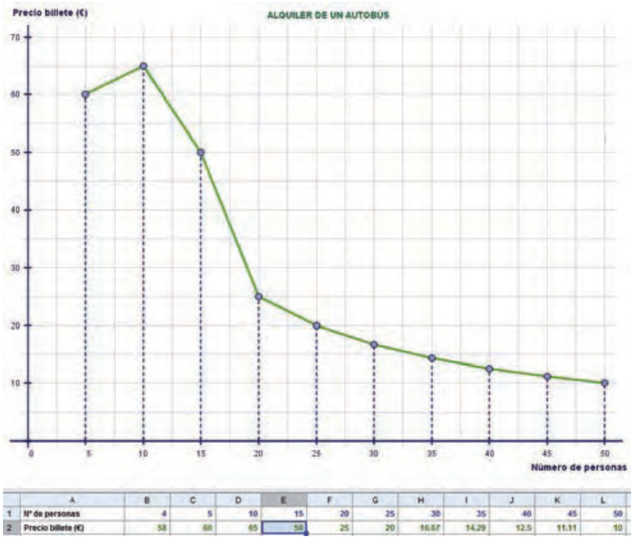



En *Una tarde de paseo*[13] debemos completar la información verbal con ayuda de la información gráfica

## Pluralidad de representaciones simultáneas

En el propio nombre (o en el nombre propio) de GeoGebra aparece la intención de la representación simultánea de la **Geo**metría y el ál**Gebra**. Esta es la idea básica del creador del programa, Markus Hohenwarter: dos ventanas adyacentes con los mismos objetos matemáticos, una para cada representación, algebraica y gráfica. La hoja de cálculo que integra GeoGebra añade otra posibilidad de representación, la tabular.

En diversas actividades se aprovecha como recurso didáctico la adaptación inmediata de todas las representaciones al cambio efectuado en cualquiera de ellas. La pluralidad de representaciones ofrece dos grandes ventajas. Por una parte, permite apoyarnos en un tipo de representación (inicialmente, la gráfica) para comprender mejor la otra (inicialmente, la algebraica). Por otra parte, cada tipo de representación focaliza la atención en ciertos aspectos conceptuales del objeto representado, por lo que la pluralidad de representaciones favorece una comprensión más profunda del objeto matemático.




La actividad *Enunciados, tablas y gráficas*[14] permite la interacción con la representación tabular en el mismo escenario que la representación gráfica

## Modelización

Un buen modelo es a menudo la causa de una buena comprensión. Las fórmulas y gráficos estáticos son habituales modelos matemáticos, pero suelen exigir bastante experiencia para su correcta interpretación. Los materiales físicos, usados como modelos, son de gran utilidad en el aprendizaje, pero en ocasiones presentan algunos problemas: disponibilidad, limitaciones de uso, opacidad, peligrosidad, fragilidad, etc. Los modelos virtuales añaden a los modelos matemáticos estáticos algunas cualidades muy valiosas: interactividad, dinamismo y adaptabilidad.

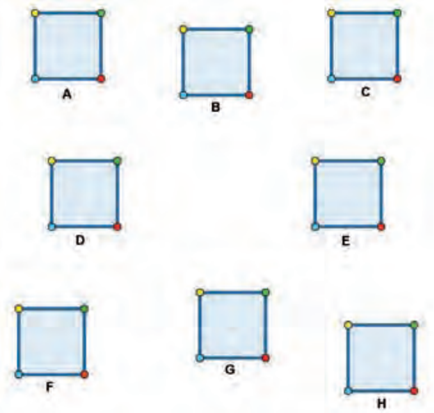
Resulta particularmente sugerente y vistosa, a menudo incluso sorprendente, la búsqueda de modelos geométricos que se adapten a formas y fenómenos naturales.

En *Unas curvas muy enrolladas*[15] debemos ajustar el modelo matemático al fenómeno real

## Manipulación y retroalimentación

Para conocer los objetos físicos, si son pequeños (y se dejan) les damos vueltas con las manos y si son grandes damos vueltas alrededor de ellos. En ambos casos, el fin es variar el punto de vista para facilitar una composición mental de la forma y naturaleza del objeto. De la misma forma, para conocer bien los objetos matemáticos, nada mejor que darles vueltas. Habitualmente, una imagen estática ofrece la visión de un estado particular, mientras que una imagen dinámica muestra mucha más información sobre el estado general de un objeto.

Un cuadrilátero puede "parecer" un cuadrado, pero para estar seguros lo mejor es tirar de sus vértices. Si al mover un vértice el cuadrilátero pierde la forma cuadrada ya no hace falta que probemos a mover los demás vértices: ya hemos *demostrado* que no es un cuadrado, lo que nos conduce a probar con el siguiente cuadrilátero. De esta forma, el comportamiento de cada figura como respuesta a nuestras acciones nos dirige a otras acciones, retroalimenta nuestras decisiones.



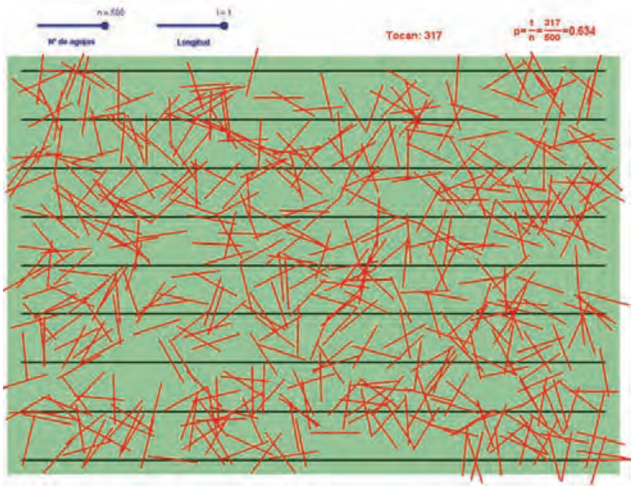

Siete de estas figuras son en realidad *Falsos cuadrados*[16], pero solo podremos desenmascararlos al intentar modificar su forma

Finalmente, si encontramos un cuadrilátero que al trasladarlo, girarlo, escalarlo, etc., varía de posición o cambia de tamaño, pero se mantiene cuadrado, entonces "puede ser" un cuadrado. No tenemos una demostración, solo una ***comprobación***. Pero, una vez descubierta la condición del objeto, podremos plantearnos, de forma natural avanzar un paso más y preguntarnos si existe alguna ***razón lógica*** (en la forma en que ha sido construido, por ejemplo) para que tal cuadrilátero "deba ser" un cuadrado.

## Simulación y experimentación

Existen espacios escolares especialmente dotados para la realización de algunos tipos de actividades: aulas de música, gimnasios y pabellones deportivos, laboratorios de biología, física y química, talleres de tecnología, laboratorios de idiomas, aulas de informática... Pero, ¿y laboratorios de matemáticas? ¿Se conserva todavía la falsa creencia de que el aprendizaje de las matemáticas no precisa de la experimentación? ¿O se considera que bastan la tiza y la pizarra para realizar suficientes experimentos matemáticos?

Afortunadamente, si tenemos acceso a las nuevas tecnologías (pizarras digitales, ordenadores, proyectores, Internet...) la situación puede mejorar mucho. A fin de cuentas, ¿la propia existencia del mundo informático no se debe en gran medida a avances matemáticos? Facilitar el uso de las nuevas tecnologías en las clases de matemáticas tal vez ayude a amortizar esa deuda histórica.

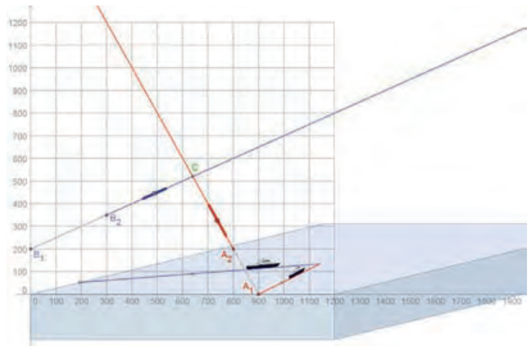



En *La aguja de Buffon*[17] podemos observar el resultado de simular centenares de veces el lanzamiento de una aguja

## Animación

Otra posibilidad que ofrece GeoGebra es la de automatizar el movimiento de los objetos. Podemos optar por un desplazamiento "geométrico" (por ejemplo, el de un punto sobre una circunferencia), controlado desde el teclado, o por un desplazamiento "aritmético", controlado por un deslizador numérico. En este último caso, también podemos optar por un movimiento desasistido (animación automática).

La animación resulta de particular interés en aquellas simulaciones o modelizaciones en donde uno de los factores determinantes sea, precisamente, el tiempo.

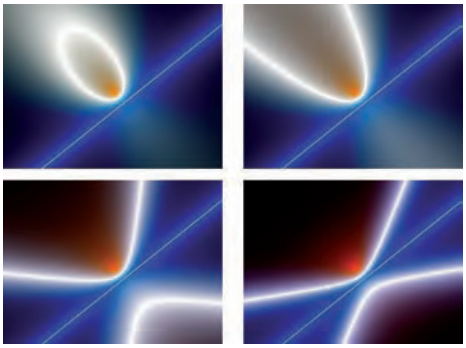


En *Barcos en la niebla*[18] la doble animación 2D-3D ayuda a comprender el problema y permite comprobar la corrección de nuestros cálculos

## Visualización y plástica

Si una imagen vale por mil palabras, ¿cuánto vale una cámara fotográfica? ¿Y una cámara de video? Elucubraciones aparte, las imágenes pueden ayudarnos a adquirir práctica en la visualización mental de relaciones y conceptos matemáticos.

La actividad ***La hipérbola*** permite crear mapas de color en función de la proporción, variable a nuestra elección, de la distancia de cada punto del plano a un punto y a una recta determinados. El proceso empleado es resultado de una investigación[19] realizada en el IGC relacionada con el comando *Color Dinámico* de GeoGebra. Algunas de las imágenes obtenidas de esta forma muestran, además, gran belleza plástica.



Imágenes de *La hipérbola*[20]. Los tonos rojizos denotan una mayor proximidad del foco, los azules de la directriz y el blanco el equilibrio en la proporción establecida

La calidad estética del escenario es un aspecto al que, desgraciadamente, no se suele prestar el cuidado que merece. Las propiedades de estilo de los objetos nos permiten mejorar notablemente el atractivo visual de nuestras construcciones, a las que, además, podemos añadir elementos gráficos (fondos estáticos o imágenes dinámicas) que la realcen todavía más, aunque procurando, al mismo tiempo, evitar un exceso de complejidad, de barroquismo, que pueda dificultar la exploración.

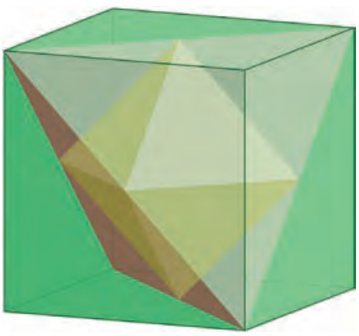
## Exploración e investigación

*Lo que más placer proporciona*
*no es el saber, sino el estudiar;*
*no es la posesión, sino la conquista;*
*no es el estar aquí, sino el llegar allá.*

Carl Friedrich Gauss

La curiosidad por explorar diferentes entornos es natural, pero estos han de tener un mínimo de complejidad, de riqueza, para estimularla. Por "escenario rico" no nos referimos a la cantidad de elementos que aparecen, sino a la cantidad y profundidad de inmersiones que permite. Por supuesto, el grado adecuado de riqueza, de profundidad, dependerá de nuestra propia experiencia. Un escenario puede resultar de lo más estimulante en una etapa y demasiado pobre en otra más avanzada.

Por fortuna, podemos encontrarnos con relativa frecuencia en escenarios dotados de diversas profundidades de exploración, debido a la presencia de relaciones con diferentes grados de dificultad para su observación y análisis. Por ejemplo, las relaciones existentes entre los diferentes sólidos platónicos y sus elementos distinguibles pueden abordarse, con distinta profundidad, en diversas etapas educativas. Su manipulación en Educación Primaria puede permitir la observación de elementos claramente identificables y cuantificables, como la forma de las caras, su número o la cantidad de aristas concurrentes en un vértice, mientras que en la ESO permite investigar relaciones menos evidentes, como las existentes entre elementos de dos sólidos de distinto tipo.

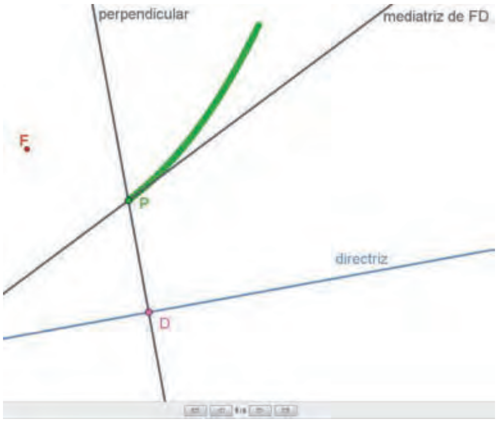


Una imagen de *Omnipoliedro*[21]

## Construcción

GeoGebra se halla provisto de sistemas especialmente diseñados para facilitar la observación de los procesos constructivos. El *Protocolo de Construcción* muestra el historial de objetos creados y permite secuenciar su aparición en la *Barra de Navegación por Pasos de Construcción*. Como resultado, disponemos de un excelente visualizador de las etapas relevantes en cualquier construcción.

Una forma de aprovechar estas ventajas en una actividad consiste en incluir en ella tres applets de GeoGebra. En el primero, mostramos cuál es el objetivo que perseguimos, es decir, la construcción ya realizada. En el segundo, exponemos el proceso seguido en la construcción, usando el sistema de navegación mencionado. En el tercero, dejamos la ventana vacía con las herramientas necesarias o suficientes e invitamos a reproducir en ella el anterior proceso constructivo.



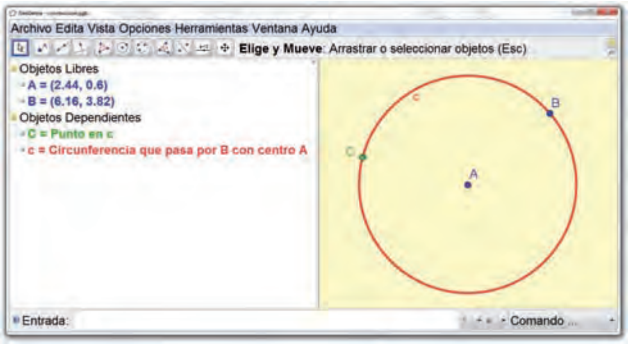

Un paso del proceso constructivo que aparece en el segundo applet de *Construcción de la parábola*[22], como parte del estudio de la función cuadrática

## Orientación

Con frecuencia, podemos observar que las actividades hacen uso intencionado de distintas estrategias para orientar la atención hacia las cuestiones que se plantean (¿a qué estamos, a setas o a relojes?). Algunas de las posibilidades con las que podemos contar al diseñarlas son:

- Ocultación de los elementos superfluos de la construcción y diversos modos de presentación e interactuación disponibles en el menú Opciones de GeoGebra.
- Resaltado, mediante la aplicación de distintos estilos (color, grosor, sombreado...), de los elementos principales.
- Organización de los elementos en la pantalla, adecuada a la interactividad permitida.
- Empleo de capas (GeoGebra admite diez capas de profundidad) que controlen el modo en que los objetos gráficos se superponen.

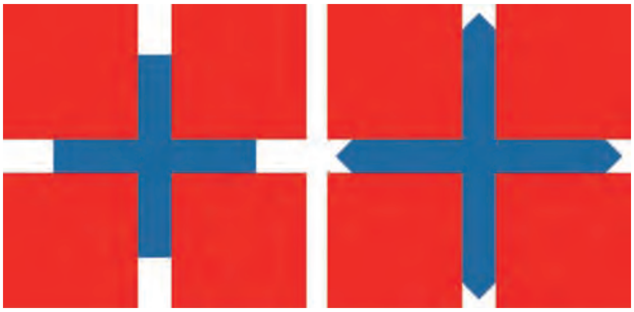
- Uso de LaTeX en fórmulas y ecuaciones.
- Aprovechamiento de la generación aleatoria de números para provocar la aparición de situaciones similares con datos o parámetros diferentes.
- Utilización de casillas para el control de escenas y visualización de objetos.
- Exposición de únicamente las partes de la interfaz de GeoGebra que se usarán (Vista Gráfica, Vista Algebraica, Hoja de Cálculo, Barra de Menús, Barra de Herramientas, Barra de Entrada).
- En el caso de hacer visible la Barra de Herramientas, también podemos personalizarla, bien limitando las herramientas disponibles, bien mostrando herramientas creadas por nosotros mismos.




En los *Talleres*[23] podemos practicar gradualmente los procedimientos básicos de construcción de objetos geométricos y algebraicos

## Percepción e interpretación

Tanto en Primaria como en ESO, la sección *La necesidad de medir* del bloque de Geometría se halla dedicada específicamente a la realización de actividades que pretenden alertarnos sobre los peligros que encierra confiar ciegamente (valga la paradoja) en nuestra percepción y experiencia visual. Las imágenes pueden ser de mucha ayuda, pero también podemos malinterpretarlas. Por eso necesitamos verificar nuestras estimaciones mediante las oportunas mediciones (o mediante argumentaciones lógicas).



Dos imágenes de *Eclipse parcial*[24]. Aunque no lo parezca, los cuadrados azules, parcialmente eclipsados por los rojos, son del mismo tamaño.

## Resolución de problemas

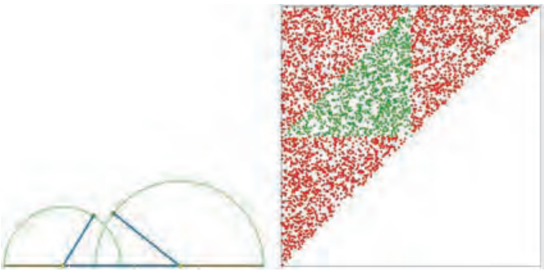
La visualización e interacción con el escenario en el que se desarrolla un problema, además de añadir atractivo y estimular la curiosidad por resolverlo, favorece su comprensión. Por otra parte, la disponibilidad de distintas herramientas, así como la facilidad con la que podemos deshacer y ensayar distintas acciones, nos anima a continuar en la búsqueda de un camino hacia la solución. En algunos casos, incluso podemos modificar las condiciones iniciales e investigar en qué medida los cambios afectan a la cantidad o naturaleza de las soluciones.


En *De camino al trabajo*[25] se ofrecen las pistas suficientes para reconstruir un camino y calcular la distancia recorrida

## Verificación y argumentación

Las actividades han sido diseñadas para favorecer que nuestros ensayos y tanteos deriven en la formulación (explícita o no) de conjeturas susceptibles de ser verificadas o refutadas. Este juego de manipulación, observación y comprobación es el caldo de cultivo del objetivo perseguido: la argumentación lógica.

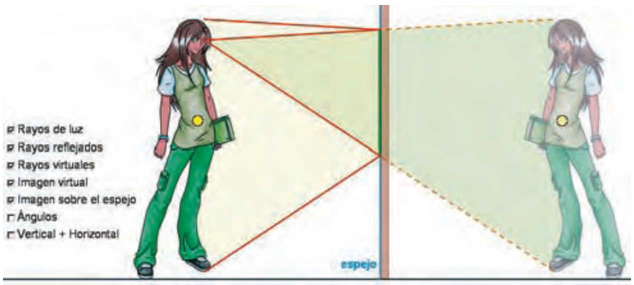
Normalmente, surgen distintas argumentaciones sobre la causa de un mismo comportamiento. Es sabido que existen cientos de demostraciones (es decir, argumentaciones lógicas y formales) del Teorema de Pitágoras. Una argumentación es siempre bienvenida, pues si no podemos aceptarla por ser demasiado débil, nos ofrece la oportunidad para redargüir o contraargumentar por qué no la aceptamos.



En *Un triángulo... probablemente*[26] calculamos la probabilidad de poder construir un triángulo al cortar en tres segmentos, al azar, un segmento dado

## Demostración

En ocasiones, la verificación de alguna relación o propiedad dirige a su vez hacia una argumentación más formal, una demostración. Por ejemplo, en la actividad ***Espejo*** (¿cuál es la altura mínima que debe tener un espejo vertical para poder ver nuestra propia imagen completa?) no cuesta mucho esfuerzo observar la invarianza de la longitud de nuestra imagen según la vemos “sobre” el espejo. Si nos situamos frente a un espejo, y perfilamos sobre él nuestra silueta (el contorno de nuestra cabeza, por ejemplo) veremos que todas las longitudes se han reducido a la mitad.



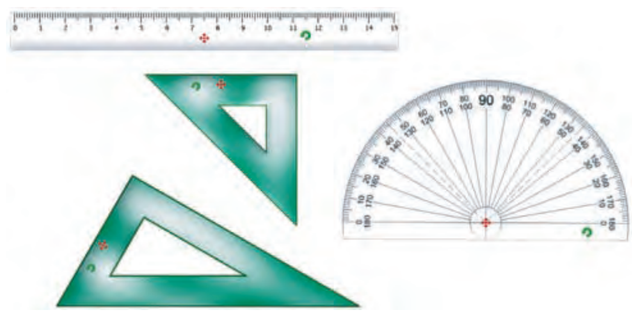

La actividad *Espejo*[27] muestra una situación cotidiana en donde el ojo es el vértice de dos triángulos en “posición de Tales”

La comprobación de que esta proporción, exactamente la mitad, no varía al acercarnos o alejarnos del espejo hace saltar a la boca una pregunta natural (que aprendemos a formular bastante precozmente, en comparación con otras): ¿por qué? La respuesta a esta pregunta es a menudo difícil, incluso en matemáticas. Pero, gracias al poder de la demostración matemática, a veces podemos sustituir la causa o razón última por la verificación lógica. Esta certeza irrefutable, sin llegar a satisfacernos plenamente en todos los casos, al menos nos permite asegurar que no nos engañamos, algo extremadamente valioso y exclusivo del universo matemático.

## Personalización

Podemos aprovechar muchas actividades para realizar distintas versiones de ellas de forma sencilla. Por ejemplo, en algunas actividades basta cambiar algunos valores numéricos o posiciones de puntos en la construcción (archivo GGB) para obtener situaciones similares pero no idénticas. Si conservamos el nombre de los objetos, modificando únicamente sus valores, podremos seguir beneficiándonos de los sistemas de comprobación o autoevaluación que la actividad pueda incorporar, pues los valores concretos generalmente no les afecta.

Otra forma de diversificar una actividad consiste, simplemente, en cambiar las preguntas del cuestionario. En este sentido, algunos applets son tan polivalentes que han sido etiquetados como “multiusos”. Como ejemplo, GeoGebra nos permite recrear reproducciones ad hoc de material habitual, como fichas, reglas, transportadores, etc., lo que, además de salvar el posible inconveniente de falta de disponibilidad en número suficiente, permite la interacción de estos materiales en el escenario virtual.

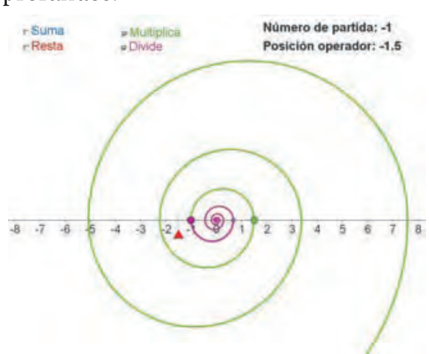


En la actividad *Escuadra y cartabón*[28] podemos analizar por sus características geométricas algunos instrumentos de dibujo muy conocidos

## Práctica e iteración

El reconocimiento nos produce placer mental y la repetición es la forma más evidente de lograr ese reconocimiento. La observación de la repetición en el tiempo, como al reconocer un rostro o una melodía, y en el espacio, como al apreciar la simetría de una estrella de mar, es inherente al proceso de aprendizaje.

Ahora bien, la iteración mecánica, algorítmica, no ofrece más recompensa que un adiestramiento marcial en procedimientos puntuales. Gracias a las máquinas, a las calculadoras y a los ordenadores, podemos liberar gran parte de nuestro tiempo y dedicarlo a aprendizajes más creativos. Pocas cosas hay más alejadas de la auténtica matemática que un procedimiento rutinario. Si realmente deseamos adquirir y manejar estrategias poderosas y generales que nos permitan abordar una gran diversidad de problemas, debemos practicar, practicar mucho, todo lo que podamos y tal vez durante toda la vida, pero en procesos complejos, diversos e interconectados, abiertos y profundos.




En *Más, menos, por, entre*[29] podemos visualizar el resultado de iterar sucesivas veces la misma operación aritmética

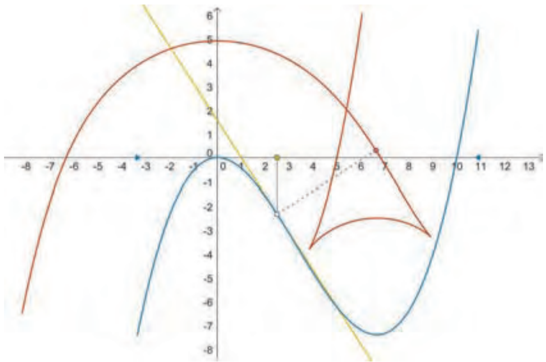
## Conclusiones

En este artículo hemos recorrido rápidamente algunas de las características y ventajas que podemos disfrutar con actividades como las que encontramos en el Proyecto Gauss.

Estas actividades pueden servir de medio conductor para un gran número de conexiones de muy diversa naturaleza: conexiones entre imágenes estáticas y dinámicas, entre imágenes físicas y mentales, entre matemáticas y realidad, entre distintas áreas de las matemáticas y entre estas y otras áreas del conocimiento, entre diferentes conceptos y representaciones, entre percepción y lógica, entre opinión y argumentación., entre orden y belleza...

El acceso a los ordenadores e Internet está permitiendo que, paulatinamente y en todo el mundo, las aulas de matemáticas puedan convertirse en verdaderos laboratorios, bolas de cristal en donde profesoras, profesores, alumnas y alumnos podamos explorar el universo matemático.

La presentación de escenarios suficientemente ricos en contenidos matemáticos para animar a su exploración, como puente entre la acción física y la proyección mental, guiados por cuestionarios graduados que estimulen la interacción con el medio, puede favorecer una visión de las matemáticas mucho más creativa, mucho más apasionada y mucho más humana. Es decir, mucho más auténticamente matemática. ■



La técnica de trazado *Offset*[30] puede servir de cauce para el estudio de la curvatura de la gráfica de una función

## NOTAS

[1] http://geogebra.org
[2] http://ite.educacion.es
[3] http://recursostic.educacion.es/gauss/web
[4] http://plane.gob.es/escuela-20
[5] http://geogebra.es
[6] Centro Internacional de Encuentros Matemáticos, Castro Urdiales, http://www.ciem.unican.es
[7] http://geometriadinamica.es
[8] ESO > Geometría > Cuerpos
[9] ESO > Geometría > Cuerpos
[10] http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/materiales_didacticos.htm
[11i] ESO > Estadística y Probabilidad > Recuento
[12] ESO > Geometría > Grupos de isometrías
[13] ESO > Funciones > Características
[14] ESO > Funciones > Características
[15] ESO > Geometría > Figuras curvas
[16] Primaria > Geometría > Polígonos
[17] ESO > Estadística y Probabilidad > Estimación
[18] ESO > Álgebra > Ecuaciones y sistemas
[19] R. Losada, http://geogebra.es/color_dinamico/color_dinamico.html
[20] ESO > Funciones > Funciones concretas
[21] ESO > Geometría > Cuerpos
[22] ESO > Funciones > Funciones concretas
[23] ESO > Geometría > Procedimientos
[24] Primaria > Geometría > La necesidad de medir
[25] Primaria > Geometría > Escalas y planos
[26] ESO > Estadística y Probabilidad > Estimación
[27] ESO > Geometría > Tales y Pitágoras
[28] Primaria > Geometría > Ángulos
[29] ESO > Aritmética > Patrones
[30] ESO > Funciones > Características

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Losada, R (2007). GeoGebra: La eficiencia de la intuición. *Gaceta de la RSME* vol. 10.2, pp. 223-239.

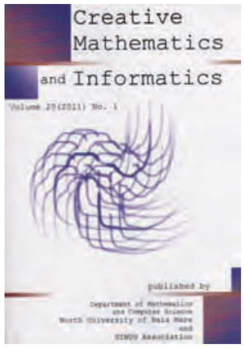
Este artículo fue recibido en SUMA en diciembre de 2010 y aceptado para su publicación en julio de 2011

# Publicaciones recibidas


**PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas**
Universidad de Granada
*Vol. 6 n.º 1, septiembre 2011*
*ISSN 1886-1350*

**petit X**
IREM de Grenoble
N.º 86, 2011
*Saint Martin d'Hères*
*ISSN 0759-9188*


**Tarea**
Tarea Asociación de Publicaciones Educativas
*N.º 77, agosto 2011*
*Lima*
*ISSN 0250-8819*




**Creative Mathematics and Informatics**
Department of Mathematics and Computer Science. North University of Baia Mare. Romania
*Vol.20, n.º 1, 2011*
*ISNN 1584-286X*


**Jakingarriak**
**Mondragon Unibersitatea**
*N.º69, 2011eko Uztaila*
*Eskoriatza*
*ISSN: 1697-6215*


**La creatividad en matemáticas. Cómo funciona un mente maravillosa**
**Miquel Albertí**
*RBA Libros, S.A.*
*Barcelona, 2011*
*ISBN: 978-84-9006-023-0*
*157 páginas*


**Matemáticas e imágenes**
**Elia Blasco, Olga Martín y Lucía Rufo**
*ELO Editoras*
*Madrid 2010*
*ISBN: 978-84-614-1182-2*
*159 páginas*


**Mira a tu alrededor con ojos matemáticos**
**José Lorenzo Blanco**
*Creaciones Copyright, S.l.*
*Sevilla, 2011*
*ISBN: 978-84-15270-02-7*
*174 páginas*

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 27-36

# Ibn Mu‘ad Al-Yayyani

*Durante el siglo XI vive en al-Andalus uno de los matemáticos y astrónomos más conocidos y estudiados en el mundo árabe y en el Renacimiento europeo, se trata de Ibn Mu'ad, que nace y muere en la ciudad de Jaén. Sus logros en el campo de la trigonometría, independizándola de la astronomía hacen que su obra* Kitab Mayhulat qisi al-kura *(Libro de las incógnitas de los arcos de la esfera) sea reconocida como el primer tratado de Trigonometría Esférica en el Occidente medieval.*

Palabras Clave: Matemáticas, Astronomía, Al-Andalus, Ciencia Árabe, Siglo XI.

**Ibn Mu‘ad Al-Yayyani**

*During the eleventh century, Ibn Mu'ad, one of the best-known and studied mathematicians and astronomers in the Arab world and in the European Renaissance, lives in al-Andalus. In fact, he was born and died in the city of Jaen. Due to his achievements in the trigonometry field, astronomy and trigonometry begin to be thought as two independent fields and so, his book* Kitab Mayhulat qisi al-kura *(Book of the unknowns of the arcs of the sphere) is considered the first treatise recognized on Spherical Trigonometry in the Medieval West.*

Key words: Mathematics, Astronomy, Al-Andalus, Arabic Science, 11th Century.

## I Introducción

El desarrollo de la ciencia en la España musulmana, al-Andalus, se realizó con posterioridad a la evolución científica del Oriente musulmán, aunque su importancia en la Europa medieval fue mucho mayor, sobre todo por su proximidad y traducción al hebreo y a las diferentes lenguas europeas. Así este desarrollo de la ciencia en al-Andalus ha jugado un papel importantísimo en la propagación de los conocimientos científicos en Europa. Es desde al-Andalus desde donde se expande al resto del Occidente europeo el patrimonio científico que venía de Oriente y Grecia, a través de un complejo e importante sistema de traducción del árabe al latín o a diversas lenguas romances. A partir de los siglos XII y XIII, numerosos traductores y compiladores trabajaron en Toledo en esta labor, siendo el trabajo de estos sabios tan importante para el desarrollo renacentista de las matemáticas, como de otras ciencias, en Europa como en su día fue el que se realizó en Bagdad y en otras ciudades de Oriente, también por sabios traductores, para el desarrollo científico en los países islámicos.

La investigación científica tuvo un gran desarrollo en el norte de África y en al-Andalus. Poco después de su entrada en la península (711), los árabes andalusíes se independizaron políticamente del califato de Bagdad, formando su propio emirato bajo la égida de la familia Omeya en el año 756. Esta situación de independencia llegó a su culmen más alto cuando, en 929, el emir de Córdoba, ‘Abd al-Rahman III (912-961), se hizo proclamar califa, realizando de esta manera la total separación de Bagdad, ahora ya tanto política como religiosamente (Samsó, 1992, Vernet, 1978 y Martos, 2005 y 2006).

A principios del siglo X, existía ya, en la España musulmana, una cultura auténticamente andalusí que llevaba la marca de anteriores elementos hispano-romanos, árabe-orientales, beréberes y judíos, la cual llegó a alcanzar un gran esplendor, tanto en el campo científico, como en el jurídico, religioso o literario. Como ejemplo, de este interés por la ciencia, se puede citar al segundo califa, al-Hakam II (961-976), quien financia con generosidad la compra y la copia de un gran número de obras que se encuentran en otros países islámicos,

**Mª del Carmen Escribano Ródenas**
*Universidad CEU San Pablo*
**Juan Martos Quesada**
*Universidad Complutense*

formando con ellas una inmensa biblioteca de casi 400.000 manuscritos, cuyo catálogo ya ocupaba 44 volúmenes.

Para estudiar las matemáticas en la España musulmana, o la ciencia islámica en al-Andalus es necesario tener en cuenta, en primer lugar, la supervivencia de una tradición astronómica y astrológica latino-visigoda en el medio musulmán andalusí. Un anónimo magrebí de la segunda mitad del siglo XIV-principios del XV atribuye al rey Sisebuto (612-621) escritos en verso sobre cuestiones relativas a la astronomía y la astrología. Por otra parte, el historiador musulmán al-Razi habló de la enorme fama de San Isidoro de Sevilla como astrólogo cristiano, lo que hace posible explicar los pasajes de carácter puramente astronómico que se recogen en sus *Etimologías* y *De Natura Rerum*.

La famosa obra alfonsí llamada *Libro de las cruces* es la evidencia más clara que se tiene sobre la supervivencia de una tradición astrológica indígena anterior en al-Andalus. Esta gran obra recoge datos acerca de esta tradición e incluso numerosos pasajes de temática astrológica de origen árabe, como por ejemplo los treinta y nueve versos de un poema didáctico del astrólogo al-Dabbi[1] (1989), de la corte del emir Hisam I (788-796), que se corresponde extraordinariamente con el capítulo cincuenta y siete del *Libro de las cruces*.

*Ibn Mu‘ad en el siglo XI consigue estudiar y tratar la trigonometría con un nivel muy superior al estudiado casi dos siglos después en la corte cristiana del rey Alfonso X el Sabio, lo que le imprime un carácter pionero en esta materia en al-Andalus.*

La cultura andalusí comienza su orientalización con la llegada al poder del primer Omeya, ‘Abd al-Rahman I, en el año 756, y ésta se consolida bajo ‘Abd al-Rahman II (821-852) (Ramírez Del Río, 2002). Los musulmanes andalusíes emprenden, desde muy pronto, viajes a Oriente y al norte de África con el fin de estudiar o, simplemente, de realizar la peregrinación a La Meca, y, a su regreso, traen consigo las últimas novedades científicas y culturales de todo el oriente islámico. La mezquita de Córdoba, fundada en el 786, se convierte en un centro de difusión científica y cultural. Poco a poco, la astronomía y las matemáticas, entre otras ciencias, se introducen en la enseñanza superior que se imparte en las mezquitas, en las madrasas o en las casas particulares de los maestros.

El sabio andalusí Ibn Mu‘ad en el siglo XI consigue estudiar y tratar la trigonometría con un nivel muy superior al estudiado casi dos siglos después en la corte cristiana del rey Alfonso X el Sabio[2] (Ausejo, 1984b), lo que le imprime un carácter pionero en esta materia en al-Andalus.

## Biografía de Ibn Mu‘ad al-Yayyani

Abu ‘Abd Allah Muhammad ibn Ibrahim ibn Muhammad ibn Mu‘ad al-Sa‘bani al-Yayyani[3] nació en Jaén a principios del siglo XI, aunque se desconoce la fecha exacta, pero sí se sabe que murió, también en Jaén, en el año 1093. Al menos en cinco fuentes árabes se encuentran noticias sobre su vida[4] y, en alguna biografía suya, en vez de Abu ‘Abd Allah, aparece Abu Bakr como sobrenombre (*kunya*)[5]. En los manuscritos e impresiones en latín y en lenguas romances europeas se le conoce por las diferentes transcripciones de Abumadh, Abhomadii, Abumaad, Abenmohat y Abenmoat.

Perteneció a una familia influyente de Jaén dedicada al Derecho (fiqh) y a la judicatura, entre ellos se deben resaltar dos hermanos, uno de los cuales fue abuelo del tatarabuelo de nuestro biografiado, llamado Mu‘ad ibn ‘Utman al-Sa‘bani[6], que fue nombrado cadí de Jaén por ‘Abd al-Rahman II (Ibn Hayyan, 1979), y su hermano Yujamir ibn ‘Utman[7], cadí de Córdoba (Al-Jusani, 1914), y también al hijo de éste último, Sa‘d ibn Mu‘ad, importante alfaquí.

El matemático Ibn Mu‘ad al-Yayyani[8] fue alfaquí y cadí de Jaén, cargo que acabó abandonando (aunque alguna fuente sugiere que, más bien, fue destituido de dicho cargo) con fama de hombre sabio, pues, incluso al-Dabbi lo califica como un “filósofo de su tiempo”; además, en uno de los manuscritos árabes que se conservan de su obra, se lee que fue “cadí y visir de Sevilla”[9], noticia que no se puede comprobar con ninguna otra fuente, pero que no sería improbable este dato ya que, durante el turbulento siglo XI andalusí, parte de la cora, de la provincia de Jaén, paso a manos temporalmente de la taifa de Sevilla y, es posible que ocupara algún cargo político delegado.

El reconocimiento mundial de este hombre no es debido a su faceta como jurista y cadí, sino a su faceta como matemático. Por lo que ha pasado a la Historia y lo que le ha dado fama universal fueron sus conocimientos, descubrimientos y escritos de matemáticas y astronomía, hasta el punto que se han conservado decenas de manuscritos e impresiones de sus obras, tanto en árabe, como en latín, hebreo e italiano, lo que indica el alto grado de uso que tuvieron las mismas, tanto en los últimos años de al-Andalus como en los siglos posteriores XV y XVI europeos.

Se desplazó a Almería a fin de poder estudiar como alumno de varios maestros de esa ciudad, entre ellos del cadí Abu Bakr ibn Sahib ibn al-Abbas y de Abu-l-'Abbas ibn al-Dalla'i, conocido alfaquí y experto en hadices[10] que llegó a viajar al Oriente para hacer la peregrinación y aprender de los maestros egipcios. Y, aunque posiblemente él mismo fuera maestro, no ha llegado hasta nuestros días el nombre de sus alumnos, pues sus biógrafos son muy parcos en noticias, a pesar de su posterior importancia.

Se le ha confundido durante mucho tiempo con otro personaje que tenía también el nombre de Ibn Mu'ad, precisamente con Abu 'Abd Allah ibn Mu'ad al-Yahani (Villuendas, 1981), filólogo cordobés nacido entre los años 989-990, del que sí se sabe con certeza que viajó al Oriente y estuvo cinco años aprendiendo en El Cairo[11], estancia que explicaría la adquisición de los conocimientos de matemáticas y astronomía de los que hace gala nuestro Ibn Mu'ad de Jaén, ya que uno de los grandes misterios de su biografía es cómo logró el aprendizaje trigonométrico y astronómico que demuestra en sus escritos. Este conocimiento de las matemáticas sólo se explica, o bien porque efectivamente tuviese la oportunidad de viajar a Egipto aunque sus biógrafos no recojan este dato, o bien porque tuvo acceso a las obras manuscritas de estas ciencias, traídas por alguien del Oriente (¿quizás su maestro Ibn al-Dalla'i, que sí viajó al Oriente?, aunque no es probable, pues su especialidad no eran las ciencias exactas, sino los hadices y El Corán). Lo cierto es que Ibn Mu'ad era un experto en trigonometría esférica, que se atrevió a defender los conceptos del intrincado y oscuro libro quinto de Euclides, y en algún sitio o de algún maestro tuvo que adquirir estos conocimientos.

## Escritos y aportaciones científicas de Ibn Mu'ad al-Yayyani

Los trabajos científicos escritos de este sabio giennense que han llegado a nuestros días son seis, de los que de tres de ellos se conserva el manuscrito árabe, mientras que de los otros tres sólo se conservan sus traducciones al latín, al hebreo o al italiano, en numerosos manuscritos e impresiones. Sin embargo sus biógrafos no informan de su producción científica escrita[12]. Estas obras son las siguientes:

### Sobre el eclipse de Sol

Esta obra esta compuesta por cuatro capítulos en donde se describe el eclipse solar que tuvo lugar en al-Andalus el lunes, 1 de julio del año 1079, y que Ibn Mu'ad observó desde Sevilla, ya que los datos que ofrece la obra sobre este eclipse están calculados para esta ciudad, con el manejo de las tablas de Ptolomeo, al-Juwarizmi y al-Battani, sin que llegue a aclarar si el mismo fue total o parcial. De este escrito, no se conserva el texto en árabe, pero sí una traducción al hebreo realizada por Samuel Ben Judá, sabio judío de Marsella, y conservada en la Biblioteca Nacional de París (manuscrito misceláneo 1036, nº 1). Es en esta obra en donde se puede leer que fue cadí y visir de Sevilla.

### Liber de Crepusculis matutino et vespertino

En esta obra Ibn Mu'ad analiza el fenómeno del crepúsculo matutino y vespertino, con el fin de calcular la altura de la atmósfera. Lo que hace es intentar estimar en 19º el ángulo de depresión del Sol al principio del crepúsculo matutino y al final del vespertino. Este parámetro junto con la distancia media entre la Tierra y el Sol de 1110 radios terrestres, el tamaño relativo del Sol y la Tierra de 5,5 a 1 en radios terrestres, y una circunferencia de la Tierra de 38.624,25 kilómetros le hace conseguir la altura de la atmósfera. Ibn Mu'ad acaba decidiéndose por la cifra de 83,68 kilómetros. Esta obra fue muy popular y utilizada en la Edad Media latina y en el Renacimiento, durante casi seis siglos, como lo prueba el hecho de que, de su versión latina, se han conservado nada menos que la friolera de veinticinco manuscritos diferentes. El cálculo de 83,68 kilómetros (52 millas) de Ibn Mu'ad se mantuvo como un dato inmutable hasta que debido a los estudios sobre la refracción atmosférica de Tycho Brahe, tomó mucha importancia, y en el siglo XVII Johan Kepler lo redujo a 3,2 kilómetros (2,5 millas).

No se conserva ningún manuscrito de esta obra en árabe, pero sí han llegado a nuestros días diferentes traducciones al hebreo, al latín y al italiano.

La versión hebrea que ha llegado a la actualidad se le debe a Samuel Ben Judá de Marsella, y se conserva en la Biblioteca Nacional de París (manuscrito misceláneo 1036, nº 2, ff. 7a-9b), junto a su anterior obra citada *Sobre el Eclipse de Sol*. Este manuscrito fue estudiado y traducido al inglés en los años setenta por B.R. Goldstein (1977).

La versión latina es, casi con toda probabilidad, obra del gran traductor Gerardo de Cremona y de la misma se conservan veinticinco manuscritos copiados entre los siglos XIII y XVII. Además, la obra fue impresa en Lisboa en los años 1542, 1573 y 1592, así como en Basilea, en el año 1572. Esta última versión latina impresa fue analizada y traducida al inglés por A. Mark Smith (1992).

La traducción italiana que ha llegado hasta nuestros días es anónima del siglo XIV y parece ser que fue traducida del latín. La edición de este texto fue llevada a cabo en el año 1993 por A. Mark Smith en colaboración con B.R. Goldstein.

### Maqala fi Sarh al-nisba (Comentario del concepto de razón matemática)

Este escrito es una auténtica defensa de Euclides en la controversia habida en el mundo científico árabe acerca de la interpretación de "razón" matemática descrita en la definición quinta de su libro V. Ibn Muʿad es el sabio medieval que más se acercó a la explicación de dicho libro realizada posteriormente por los matemáticos especialistas del siglo XX. La aportación de Ibn Muʿad es hacer más comprensible la definición de este concepto, pasando del concepto primario griego de "razón" como cociente de dos magnitudes conmensurables (razón racional), a la razón entre dos magnitudes inconmensurables (razón irracional). Aunque parece ser que Euclides dejó abierta la posibilidad de esta razón irracional, el comentario de Ibn Muʿad hace que la definición de Euclides sea aplicable a las nuevas formas de los problemas planteados. Ibn Muʿad defiende la validez de la definición de Euclides, a pesar de que el procedimiento euclídeo para la razón racional, mediante el máximo común divisor con divisiones sucesivas, para la razón irracional no llega nunca a su fin, pues la cadena de cocientes es infinita.

El manuscrito en árabe se encuentra conservado en la Biblioteca Nacional de Argel (manuscrito 1446) y en el mismo aparece claramente el sobrenombre de "al-Yayyani" (el Giennense). Ha sido estudiado, editado y traducido al inglés en los años cincuenta por E.B. Plooij (1950).

**Risala fi Matrah al-suʿaʿat (Epístola sobre la proyección de rayos)**

En esta obra Ibn Muʿad trata de los aspectos matemáticos relacionados con las prácticas astrológicas, en particular de la división de casas y de la proyección de rayos, prácticas importantes para saber levantar horóscopos. A lo largo del texto va pasando revista a los matemáticos que han trabajado estos aspectos, así como a las diversas teorías existentes; finalmente, Ibn Muʿad se decanta por el uso del denominado "método ecuatorial de límites fijos para la división de casas", método que tiene en esta obra su principal documentación conocida y fue muy utilizado en los siglos posteriores. Este algoritmo se utilizó tanto para la división de casas como, por analogía, para la proyección de rayos, y consiste en dividir el ecuador en arcos de 30º a partir del punto Este u Oeste, y por estos puntos de división trazar los círculos máximos que pasan por los puntos Norte y Sur del horizonte. Estos círculos máximos al cortar la eclíptica determinan las casas zodiacales. Durante mucho tiempo este método fue atribuido en el Occidente latino a Johann Müller Königsberg (Königsberg 1436 - Roma 1476, mas conocido por el sobrenombre de Regiomontano), en su obra *De Triangulis Omnimodis*, a pesar de que este algoritmo fue un claro referente utilizado y copiado por los astrólogos y astrónomos de la corte del rey Alfonso X el Sabio, que siempre reconocieron su autoría a Ibn Muʿad. La *Risala* de Ibn Muʿad fue muy utilizada por los colaboradores de Alfonso X el Sabio, al igual que el resto de sus obras, ya que su figura era tenida como una autoridad matemática y astronómica[13].

De esta obra en la actualidad existe una copia en árabe fechada hacia el año 1265, y que se conserva en la Biblioteca Medicea Laurenziana de Florencia (manuscrito or. 152, fls. 71r-80r) y, curiosamente, es en esta obra únicamente donde se menciona a Ibn Muʿad con el nombre de Abu Bakr. Hay una edición parcial, con su traducción al inglés de los pasajes que describen el algoritmo para el cálculo de la proyección de rayos, llevada a cabo por J.P. Hogendijk (2005).Recientemente, J. Casulleras (2010) la ha traducido al español, junto con un nuevo estudio sobre su autor.

> *La demostración general del teorema del seno que realiza Ibn Muʿad para triángulos esféricos es original suya, y parece ser independiente de las realizadas con anterioridad.*

**Kitab Mayhulat qisi al-kura (Libro de las incógnitas de los arcos de la esfera)**

Por primera vez en la historia de las matemáticas, aparece un libro que sólo se dedica a la trigonometría. La importancia de esta obra es innegable pues ha sido siempre estudiada como el primer tratado de trigonometría esférica en el Occidente medieval, considerando esta disciplina como independiente de sus usos astronómicos, sólo aparece la astronomía en su prólogo. Lo más llamativo de este libro es que Ibn Muʿad aparece como un perfecto conocedor y muy familiarizado con las principales novedades en este campo desarrolladas en el Oriente musulmán, lo que ha hecho despertar las sospechas de que viajara a Egipto para aprender, aunque no hay ningún dato en las fuentes que tratan de este matemático que puedan validar esta teoría, sin embargo es innegable que recoge todas las novedades que los matemáticos orientales habían ido introduciendo, en el siglo precedente, en esta materia. Es de destacar la descripción que hace del conjunto de herramientas trigonométricas utilizadas, lo que en su época supuso un gran avance, hasta el punto que la obra fue un importante referente entre los científicos de la corte del rey Alfonso X, y prueba de ello es que una de las dos copias que se han conservado del texto se sabe que fue realizada en el *scriptorium* del rey español. Averroes nos dice de Ibn Muʿad, con relación a esta obra, que es un matemático de alto nivel y no hay duda que fue fuente directa de la primera gran obra europea que introduce la nueva trigonometría, el *De Triangulis Omnimodis* de Regiomontano.

Página del Kitab Mayhulat qisi al-kura

Dentro de este tratado se exponen, desde el teorema de Menelao, pasando por las relaciones de los arcos de círculos máximos de la esfera y las relaciones entre los arcos y sus cuerdas, llegando hasta la demostración de siete teoremas: el teorema del seno, la regla de las cuatro cantidades, el teorema del coseno, el de las tangentes, y algunas consecuencias derivadas de las fórmulas que va sucesivamente utilizando. La finalidad de la obra es resolver todos los casos posibles de triángulos esféricos, conocidos cuatro de sus elementos, y ver cómo si se reduce el número de elementos conocidos a tres, los triángulos quedan indeterminados. El orden para la resolución de los dieciséis diferentes casos de triángulos esféricos no es correlativo por lo que se deduce que Ibn Mu‘ad establece una resolución deductiva diferente de alguna otra establecida previamente. La demostración general del teorema del seno que realiza Ibn Mu‘ad para triángulos esféricos es original suya, y parece ser independiente de las realizadas con anterioridad (Villuendas, 1981). Otra aportación es el cálculo de tangentes, sin mencionar la función tangente, es decir, calcula los valores del cociente entre el seno y el coseno de un ángulo, aunque en notación sexagesimal. Los cálculos los realiza de grado en grado hasta llegar a 89º, a partir de este momento calcula los valores de 89,15º, 89,30º, 89,45º y 89,59º, seguramente para ver su rápida velocidad de crecimiento. Para estos cálculos se ha demostrado (García Doncel, 1982), que utiliza por primera vez interpolación cuadrática a partir de la tabla de senos de al-Jwarizmi-Maslama (Escribano y Martos, 1998). Además utiliza para los cálculos radios de círculo de 60 partes y también de una docena de dígitos, aunque en algún caso también utiliza el valor unidad.

Se conservan dos copias; una de ellas en el mismo manuscrito de la obra anteriormente citada y conservada en la Biblioteca Medicea Laurenziana de Florencia (manuscrito or. 152, fols. 50-72) y otra en la Biblioteca de El Escorial de Madrid (manuscrito 960, antes 955). Esta obra ha sido estudiada, editada y traducida al español por M.V. Villuendas (1979).

**Tabulae Jahen (Tablas de Jaén)**

Se trata de unas tablas astronómicas adaptadas a las coordenadas de la ciudad de Jaén, al uso de las realizadas por al-Juwarizmi, aunque con aportaciones novedosas del autor. Por ejemplo Ibn Mu‘ad calcula la longitud geográfica de la ciudad de Jaén. El cálculo está hecho como una adaptación del Sindhind, y se corresponde con las correcciones de longitudes realizadas entre la Península Ibérica y el meridiano de Arín. También es original de Ibn Mu‘ad la fecha rádix utilizada como punto de partida de todos los movimientos medios de sus tablas. El autor utiliza, como otros muchos astrónomos musulmanes, el principio de la Hégira, aunque la originalidad consiste en utilizar la conjunción media y parte de la medianoche entre el jueves 15 de julio del año 622, y el viernes 16[14].

La obra contiene una tabla de estrellas que mejora la de al-Juwarizmi, así como un método, original en al-Andalus, para calcular la dirección de la alquibla en las mezquitas. Esta obra fue muy popular, como lo prueba el hecho de que, aún en el siglo XVI, se realizaran varias ediciones impresas de la misma. Esta tabla contenía las longitudes de las estrellas para el comienzo de la Hégira, y además tenía como complemento otra tabla con la precesión constante calculada para años y meses. Ambas tablas son independientes de la tradición toledana (Samsó, 1992).

Dentro del capítulo dieciocho de las Tablas de Jaén, Ibn Mu‘ad describe el llamado método de los ziyes[15], utilizado en Oriente y el Norte de África para calcular la orientación de la *alqibla* de las mezquitas y que, aunque conocido, no era utilizado por los arquitectos y astrónomos andalusíes, por lo tanto otra aportación de Ibn Mu‘ad consiste en el traslado a al-Andalus del primer método exacto para el cálculo del acimut de la alquibla.

Lamentablemente, no se conserva el texto original en árabe, pero se sabe que fue traducido al latín, a finales del siglo XII, por Gerardo de Cremona bajo el título de *Liber tabularum*

*Iahem cum regulis suius*, obra de la cual ha llegado a nuestros días una edición impresa (aunque no recoge las tablas, pero sí los cánones) hecha en el año 1549 en Nüremberg, con el título *Scriptum antiquum saraceni cuiusdam de diversarum Pentium Eris, annis ac mensibus et de reliquis Astronomiae principiis.* A partir de esta obra, los barceloneses J. Samsó y H. Mielgo analizaron y editaron el capítulo dieciocho de esta obra (1994); por su parte, J.P. Hogendijk (2005), gran estudioso de la figura y la obra de Ibn Mu‘ad, ha analizado, publicado y traducido al inglés, junto al texto de la *Risala*, parte de los capítulos finales del texto latino.

*Las obras de Ibn Mu‘ad son prueba de que la Trigonometría Esférica fue importante en el siglo XI en al-Andalus hasta tal punto que realmente se desliga de la Astronomía para aparecer independientemente con tratados que no se refieren a cuestiones astronómicas.*

## Los estudios sobre Ibn Mu‘ad

Los especialistas en matemáticas y astronomía árabes han tratado desde siempre la figura y la obra de Ibn Mu‘ad, tanto en España como en Occidente y, por supuesto, en el mundo árabe e islámico, en donde forma parte de todas las enciclopedias, aunque ha sido a partir de los años ochenta del siglo pasado, cuando sus trabajos y aportaciones a la trigonometría comenzaron a ser más conocidos y, por tanto, más valorados. El primero en citarlo fue M. Casiri en el siglo XVIII, al elaborar su catálogo de manuscritos de la Biblioteca de El Escorial. Posteriormente, en el siglo XIX, el profesor Manuel Rico Sinobas hizo referencia a la importancia de su obra al editar los libros de astronomía de Alfonso X, y ya a comienzos del siglo XX, el estudioso de las matemáticas árabes, José Augusto Sánchez Pérez, lo citó en su obra *Biografías de matemáticos árabes que florecieron en España*[16]. A mediados del pasado siglo XX, el experto en ciencia andalusí, creador de la denominada “Escuela barcelonesa” de estudios sobre la ciencia árabe, J. M. Millás de Vallicrosa (1960), volvió a referirse a la obra de Ibn Mu‘ad en uno de sus libros y el arabista E. Terés (1957) hizo referencia al mismo cuando analizó el linaje de al-Sa‘bani; asimismo el profesor Juan Vernet, continuador de la obra de Millás de Vallicrosa, en la Universidad de Barcelona, lo trató en sus estudios de ciencia y astronomía árabes y, en 1980, el profesor iraquí Ridha Hadi Abbas, leyó su Tesis doctoral en la Universidad de Granada, sobre cadíes de al-Andalus, en donde reconstruyó su biografía a partir de las fuentes conocidas, haciendo hincapié sobre todo, en su personalidad y actividad jurídica.

Hay que esperar a los años 80-90 del siglo pasado, para que los estudios sobre el giennense Ibn Mu‘ad se multipliquen: en 1979 ve la luz la edición, estudio y traducción de su obra *Mayhulat* por la profesora barcelonesa M.V. Villuendas; en 1980, el profesor Julio Samsó publicó un importante artículo con el título “Notas sobre la astronomía esférica de Ibn Mu‘ad”; en 1981, M.V. Villuendas volvió a escribir acerca del mismo en su aportación al libro misceláneo sobre la historia de la ciencia árabe publicado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; en el año 1982 García Doncel escribe su artículo “Quadratic Interplations ibn Ibn Mu’ad” ; en el año 1992 J. Samsó lo trató ampliamente en su obra *Las ciencias de los antiguos en al-Andalus* (págs. 137-144) y en el año 1994, los profesores J. Samsó y H. Mielgo editan y traducen parte de sus Tablas de Jaén. Desde entonces, es obligada referencia en cualquier estudio sobre las matemáticas andalusíes.

A principios del siglo XXI vuelven a florecer los estudios sobre Ibn Mu‘ad: en 2004, J. Casulleras escribió un artículo titulado “Ibn Mu‘adh on the Astrological Rays”; en 2006, la Enciclopedia de la Cultura Andalusí publicó su biografía elaborada por E. Calvo y J. Casulleras; y la profesora Emilia Calvo ha publicado otra biografía suya para la Biographical Encyclopedia of Astronomen, editada por T. Hockey en 2007. Por último, J. Martos Quesada y M.C. Escribano Ródenas han publicado un artículo titulado “Vida y obra del matemático giennense del siglo XI Ibn Mu‘ad al-Yayyani”, en el Boletín del Instituto de Estudios Giennenses, en el número 198 correspondiente a Julio/Diciembre de 2008.

En Occidente, fueron los estudiosos alemanes H. Suter y M. Cantor los que, a principios del siglo XX, nos dieron cuenta de la figura de Ibn Mu‘ad en sus respectivas magnas historias de las matemáticas. Habrá que esperar a mediados de siglo para que E.B. Plooij edite y traduzca al inglés la *Maqala* de Ibn Mu‘ad en Rotterdam.

En la década comprendida entre los años 60 y 70, H. Hermelink publicó un artículo sobre las tablas de Jaén y otro con su biografía; A.I. Sabra escribió sobre el *Liber de Crepusculis* en la revista Isis, y el estudioso de la astronomía árabe B.R. Goldstein hace numerosas referencias a Ibn Mu‘ad en varios de sus trabajos, hasta que, en 1977, publica su edición y traducción inglesa del *Liber de Crepusculis matutino et vespertino*.

En la década posterior correspondiente alos años 80-90, junto a la reimpresión de la traducción de B.R. Goldstein, en 1985, A. Mark Smith unos años más tarde, en 1992, vuelve a la misma obra de Ibn Mu'ad, para dar su versión, también en inglés, pero desde la copia latina y, posteriormente, al año siguiente, la edición de la copia italiana. Asimismo, junto al magnífico trabajo de E.S. Kennedy sobre Ibn Mu'ad y sus aportaciones al estudio de las casas zodiacales astronómicas, en 1994, se puede constatar cómo las referencias a Ibn Mu'ad son cada vez más numerosas en los estudiosos europeos y americanos de las ciencia árabe (G.A. Hairetdinova, E.S. Kennedy, J. Lay, J.D. North, L. Richterbernburg, A.I. Sabra, G. Saliba, J.P. Hogendijk, D.A. King, R. Rashed, B.R. GoldsteinA. Mark Smith, etc.), valiendo como ejemplo las páginas que R. Rashed le dedica en su excelente y completa *Histoire des sciences arabes,* publicada en 1997.

Y por último, ya en los primeros años del siglo XXI, el interés por el matemático giennense continúa entre los estudiosos occidentales –en paralelo a los investigadores españoles, como se ha visto anteriormente-, siendo prueba de ello las ediciones y traducciones parciales al inglés realizadas por J.P. Hogendijk de la *Risala* y de las Tablas de Jaén, en el 2005.

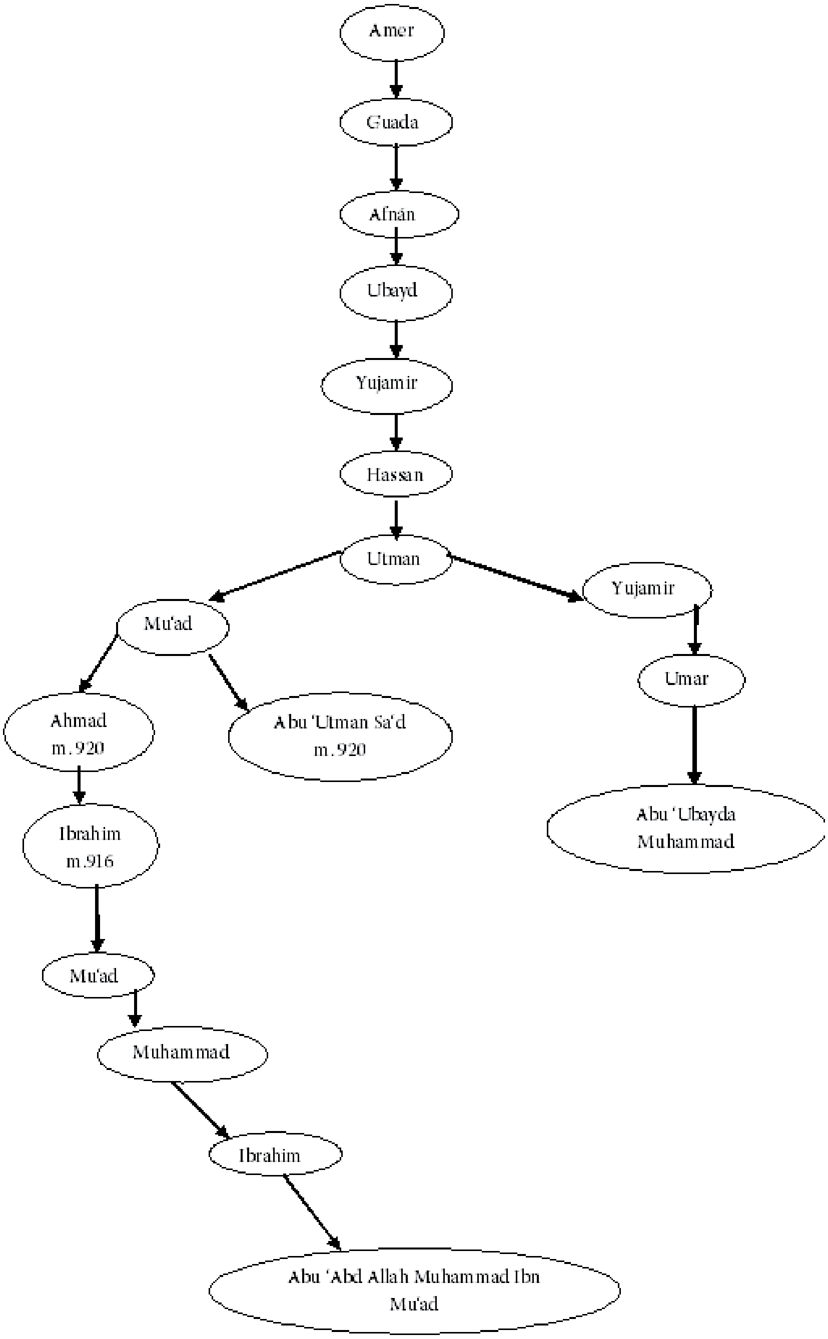
## Conclusiones

Las obras de Ibn Mu'ad son prueba de que la Trigonometría Esférica fue importante en el siglo XI en al-Andalus hasta tal punto que realmente se desliga de la Astronomía para aparecer independientemente con tratados que no se refieren a cuestiones astronómicas.

La vida de Ibn Mu'ad es confusa y muy poco conocida. Parece ser que efectivamente nació en Jaén, a pesar de que Sánchez Pérez dice que es cordobés, lo que consigue confundir al profesor Rafael Pérez Gómez[17], que menciona precisamente la ausencia notable del matemático Ibn Mu'ad, en su "Estudio Preliminar" para la edición facsímil, publicada en el año 1995 por la Universidad de Granada, del libro *Biografías de Matemáticos Árabes que florecieron en España*. No se sabe casi nada ni sobre sus maestros, ni de sus posibles viajes, ni siquiera se sabe con certeza dónde residió con exactitud. Sin embargo han llegado a nuestros días al menos seis obras originales suyas, bien en manuscritos árabes o bien traducidos al hebreo, al italiano o al latín.

La relevancia de este gran matemático Ibn Mu'ad se puede comprobar en la actualidad con las abundantes investigaciones y estudios que de él se han publicado en los últimos años, tanto dentro como fuera de España.

En definitiva, es un verdadero personaje del siglo XI, con especial interés como jurista y como científico, sobre todo en matemáticas, del que aún se mantiene abierta la investigación, ya que algunos datos suyos o bien no aparecen claros o bien las fuentes que los citan contienen errores. Aún cabe conjeturar sobre su fecha de nacimiento, sobre su ciudad natal, sobre su aprendizaje, sobre sus posibles viajes a Oriente, sobre sus maestros, sobre los libros que estudió, y aunque, ya se le reconocen seis obras, probablemente queden aún otras que todavía no se le han atribuido. Quizá en los próximos tiempos quede el misterio desvelado. ■




Árbol genealógico del biografiado Ibn Mu'ad[18]

## NOTAS

[1] Es conocido entre sus contemporáneos como el Ptolomeo de la época, y a él se le debe la traducción del latín al árabe del *Libro de las Cruce*s, que sería después vertido al castellano por Alfonso X el Sabio.

[2] En el siglo XIII parecen haber coexistido en la península Ibérica dos tipos de trigonometría, una de nivel superior, con probable origen en Ibn Mu'ad e Ibn Aflah (y con alguna repercusión en la obra alfonsí, en el libro *Tratado del Cuadrante Sennero*), con otra de carácter mas práctico como la correspondiente a los *Libros del Saber de Astronomía* de la mismísima corte alfonsí [Ausejo, 1984a].

[3] Su mejor biografía en español, por el momento, es la realizada por E. Calvo y J. Casulleras para la Enciclopedia de la Cultura Andalusí IV, editada por J. Lirola en Almería, 2006.

[4] Al-Bunnahi, Marqaba, ed. Cuéllar, 211 (tra.) y 82 (ar.), Granada, 2005; AL-DABBI, Bugya, ed. al-Abyari, I, pág. 41, nº 48, Beirut-El Cairo, 1989; Ibn Baskuwal, Sila, ed. al-Abyari, III, pág. 816 nº 1234, Beirut-El Cairo, 1989; Ibn Hayyan, Muqtabis, II-2, El Cairo, 1971, págs. 204-206; Ibn Rusd, Tafsir, ed. Bouyges, II, Beirut, 1942, pág. 665.

[5] Este sobrenombre de Abu Bakr aparece en su obra *Risala fi Matrah al-su'a'at* (Epístola sobre la proyección de rayos).

[6] En versión de al-Jusani, Mu'ad Ibn Utman fue juez de Córdoba durante diecisiete meses y fue destituido. Parece ser que la causa de su destitución fue la rapidez con la que resolvía las causas a él encomendadas, unas setenta causas en los 17 meses, aunque el mismo al-Jusani duda de esta anécdota, ya que tenía fama ante el pueblo de ser un hombre de excelente conducta y que trataba con mucha atención a la gente.

[7] Parece ser que este juez trataba mal al pueblo, con maneras rudas y mucha dureza, lo que motivó que algunos poetas cordobeses le hiciesen algún verso satirizándole, según cuenta al-Jusani.

[8] Este segundo gentilicio o nisba aparece en el manuscrito de su obra *Maqala fi Sarh al-nisba* (Comentario del concepto de razón matemática).

[9] Aparece con esta denominación en su obra *Sobre el eclipse de Sol* que tuvo lugar el día uno de julio del año 1079 en al-Andalus. En realidad es una traducción al hebreo de su obra, realizada por el judio Ben Judá, que se conserva en la Biblioteca Nacional de París.

[10] Los hadices son los dichos y hechos del profeta recogidos por sus discípulos; véase el *Diccionario de Islam e islamismo* de Luz Gómez García, ed. Espasa, Madrid 2009, págs. 125-127.

[11] José Augusto Sánchez Pérez en su libro Biografías de Matemáticos Árabes que florecieron en España, lo menciona en su biografía número 148, con el nombre de Abuabdala Mohámed Benyusuf Benahmed Abenmoad el Chuhaní, y lo coloca en El Cairo desde el año 1012 al 1016. Sánchez Pérez califica de confusión fácilmente explicable el hecho del sobrenombre *el Gaijaní*, en lugar de *el Chuhaní*, pero le atribuye, según la opinión de Suter, el Comentario al libro V de Euclides del manuscrito número 1446 de la Biblioteca de Argel. También sugiere la posibilidad de coincidencia con Abuabdala Mohámed Abenmoad el Cortobí, autor cordobés del *Tratado de la esfera (libro de las incógnitas de los arcos de la esfera)*, manuscrito número 955 de la Biblioteca de El Escorial de Madrid, al cual sitúa en el año 1341 (fecha escrita en castellano moderno en una de las guardas del libro) ó en 1158 (fecha que se puede leer al principio del libro en una preciosa letra árabe-española).

[12] Seguramente sus biógrafos lo consideraban más como un importante jurista que como un científico.

[13] Parece ser que no sólo se atribuyó la obra de Ibn Mu'ad, ya que Gerolamo Cardano (1501-1576) criticó que mucha parte de la obra de Regiomontano estaba recogida en la del siglo XII debida al sevillano Ibn Aflah, conocido también en el mundo latino como Geber.

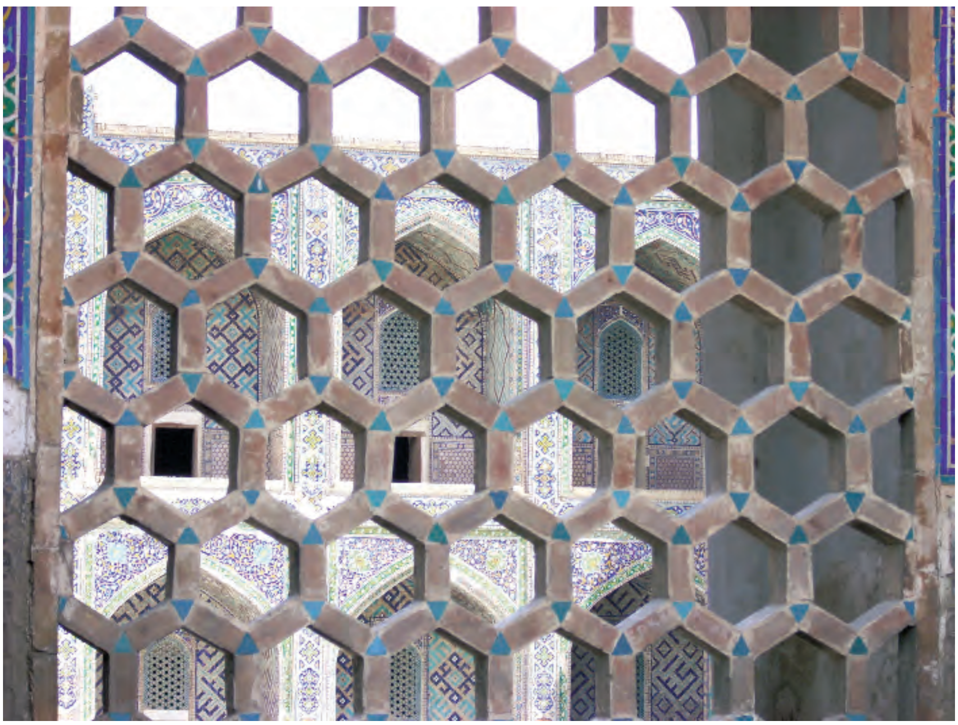
[14] Por ejemplo al-Juwarizmi utiliza también el comienzo de la Hégira, pero parte del mediodía del miércoles 14 del año 622, conjunción del Sol y la Luna del 1 del mes de Muharram.

[15] Parece ser que este método es anteriormente descrito por al-Biruni.

[16] Aunque le pone como ciudad natal Córdoba y no deja claro si es el biografiado número 130, o el número 148.

[17] El profesor Pérez Gómez atribuye esta ausencia al descubrimiento posterior de Ibn Mu'ad respecto a la publicación del libro de Sánchez Pérez de 1921.

[18] Este árbol genealógico es de elaboración propia y difiere del elaborado por el profesor J. Lirola Delgado para la Enciclopedia de de la Cultura Andalusí. IV (Lirola, 2006, p. 198), ya que se han tenido en cuenta además, las denominaciones de al-Jusani (1985, p.141]9y de E. Calvo y J. Casulleras (2006, p.197).



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Al-Dabbi (1989). *Bugya*. Ed. al-Abyari, Beirut-El Cairo.

Al-Bunnahi (2005). *Marqaba*. Ed. Cuéllar, Granada.

Al-Jusani (1914). *Historia de los jueces de Córdoba*, Ed. y trad. por J. Rivera. Madrid: Biblioteca de la Cultura Andaluza en Granada, 1985.

Ausejo, E. (1984a). Sobre los conocimientos trigonométricos en los libros del Saber de Astronomía de Alfonso X el Sabio. *Llull*, 6, pp.5-36.

Ausejo, E. (1984b). Trigonometría y astronomía en el Tratado del Cuadrante Sennero(c.1280). *Dynamis*, Vol. 4, pp.7-22

Calvo, E. y Casulleras, J. (2006). Ibn Mu'ad al-Yayyani. En Lirola, J. (Ed.) *Enciclopedia de la Cultura Andalusí IV* (pp. 197-201) Almería.

Cantor, M. (1907-1908). *Vorlesungen über geschichte der mathematiker* Vol. I. Leipzig.

Casiri, M. (1760-1770). *Bibliotheca Arabico-Hispana Escurialensis*. 2 vls. Madrid.

Casulleras, J. (2004). Ibn Mu'adh on the Astrological Rays. *Suhayl*, 4, pp.385-402.

Casulleras, J. (2010). La astrología de los matemáticos. La Matemática aplicada a la astrología a través de la obra de Ibn Mu´ad de Jaén. Barcelona. Universidad de Barcelona.

Escribano, M.C. y Martos, J. (1998). Las matemáticas en al-Andalus: fuentes y bibliografía para el estudio del matemático y astrónomo árabe madrileño Maslama. En *Estudios de Historia de las Técnicas, la Arqueología industrial y las Ciencias. Actas del VI Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas. Segovia-La Granja,9-13 septiembre de 1996*(457-466). Salamanca.

García Doncel, M. (1982). Quadratic Interpolations in Ibn Mu'adh. *Archives Internationales d´Histoire des Sciences*, 32, pp.68-77.

Goldstein, B.R., (1977). Ibn Mu'adh's Treatise On Twilight and the Height of the Atmosphere. *Archive for the History of Exact Sciences*, 17, pp. 97-118.

Gómez García, L. (2009). *Diccionario de Islam e islamismo*. Madrid: Espasa.

Hermelink, H., (1964). Tabulae Jahen. *Archive for History of Exact Sciences* 2, pp. 108-112.

Hermelink, H., (1977-1980). Al-Jayyani. En Gillispie, CH. C. (ed.) *Dictionary of Scientifc Biography VII* (pp. 82-83) Nueva York

Hogendijk, J.P. (2005). Applied Mathematics in Eleventh Century al-Andalus: Ibn Mu'adh al-Jayyani and his computation of astrological houses and aspects. *Centaurus*, 74, pp. 87-114.

Hockey, T. (Ed.) (2007). *Biographical Encyclopedia of Astromers*, 2vols. Springer, Nueva York.

Ibn Baskuwal (1989). *Sila.*, Beirut-El Cairo: al-Abyari.

Ibn Hayyan (1979). *Muqtabis*. Madrid: Ed. Makkí y P. Chalmeta. Editado también por Makki, El Cairo, 1971.

Ibn Rusd (1942). *Tafsir*. Beirut: Bouyges.

Kennedy, E.S. (1994). Ibn Mu'adh on the Astrological Houses. *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenchaften*, 9, pp. 153-160.

Lirola, J. (ed.) (2006). *Enciclopedia de la Cultura Andalus IV* Almería: FundaciónEl Legado Andalusí.

Mark Smith, A. (1992). The Latin Version of Ibn Mu'adh's Treatise: On Twilight and the Rising of Clouds. *Arabic Sciences and Philosophy*, 2, pp. 83-132.

Mark Smith, A. and Goldstein, B.R. (1993). The Medieval Hebrew and Italian Versions of Ibn Mu'adh's: On Twilight and the Rising of Clouds. *Nuncius*, 8, pp. 611-643.

Martos, J. (2005). La actividad científica en la España musulmana. *Hesperia. Culturas del Mediterráneo*, II, pp. 137-164.

Martos, J. (2006). La ciencia matemática árabe. En R. Moreno Castillo, (trad. y notas) *Compendio del arte del cálculo, atribuido a Ibn al-Samh* (pp. 9-46) Madrid: Nivola.

Martos Quesada, J. y Escribano Ródenas, M.C. (2.009). Vida y obra del matemático giennense del siglo XI Ibn Mu'ad. *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses*, nº 198, pp. 117-137.

Millas De Vallicrosa, J.M. (1960). *Obras completas. Nuevos estudios sobre Historia de la Ciencia Española*, 2 vols. Barcelona. Reeditado por el CSIC en 1987.

Plooij, E.B. (1950). *Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as criticized by Arabian commentators. Including the text in facsimile with translation of the commentary on ratio of Abu 'Abd Allah Muhammad ibn Mu'ad al-Djajjani*, Rótterdam: W.J. Van Hengel.

Ramírez Del Río, J. (2002). *La orientalización de al-Andalus*. Sevilla:Universidad de Sevilla.

Rashed, R. (dir.) (1997). *Histoire des sciences arabes*. 3 vols., París.

Sabra, A.I. (1967). The authorship of the Liber de crepusculis an eleventh-century work on atmospheric refraction. *Isis*, 58, pp. 77-85.

Samsó, J. (1980). Notas sobre la trigonometria de Ibn Mu'ad. *Awraq*, 3, pp.60-68.

Samsó, J. (1992). *Las ciencias de los antiguos en al-Andalus*. Madrid.

Samsó, J. y Mielgo, H. (1994). Ibn Ishaq al-Tunisi and Ibn Mu'ad al-Jayyani on the Qibla. En J. SAMSÓ, *Islamic Astronomy and Medieval Spain* (1-25), Aldershot.

Sánchez Pérez, J. A. (1921). *Biografías de matemáticos árabes que florecieron en España*, Madrid. Edición Facsímil, Sevilla 1995.

Suter, H. (1900). *Die mathematiker und astromen der araber und ihre werke*. Leipzig.

Terés, E. (1957). Linajes Árabes en al-Andalus según la "Yamhara de Ibn Hazm. *Al-Andalus,* 22, 55-111, 337-76.

Vernet, J. (1978). *La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente*. Barcelona.

Vernet, J. y Samsó, J. (eds.) (1992). *El Legado científico andalusí.* Madrid.

Villuendas, M.V. (1979). *La Trigonometría en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Mu'ad, el "Kitab mayhulat*. Barcelona: Instituto de Historia de la Ciencia de la Real Academia de Buenas Letras.

Villuendas, M.V. (1981). El origen de la Trigonometría. En: Real Academia De Ciencias Exactas, Físicas Y Naturales, *Historia de la ciencia árabe* (39-62), Madrid: RACEFYN.


Este artículo fue recibido en SUMA en mayo de 2010 y aceptado para su publicación en julio de 2011

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 37-46

# ¿Existen pentágonos que recubren el plano y hexágonos que no?

*Se descubren propiedades geométricas de algunos hexágonos y pentágonos que aparecen en mosaicos y otros objetos del entorno. Como casos particulares de hexágonos se han considerado los parhexágonos de los cuales sorprenden sus "regularidades" geométricas y los teselados producidos por sus combinaciones con pentágonos "casita".*
*A partir de estas y otras formas geométricas se muestran actividades para el aula de Secundaria con diversos grados de dificultad y de métodos de resolución: aritmético, algebraico, geométrico, gráfico….*

Palabras Clave: Investigación, geometría, recubrimientos, parhexágonos, actividades de aula.

**Are there any pentagons which tessellate the plane and any hexagons which don't?**

*This article is mainly focused in finding geometric properties of some hexagons and pentagons that usually appear in the environment. As a particular case of hexagons have been considered parhexagons. These polygons present surprising geometric "regularities" and generate interesting tessellations after their combinations with some special pentagons.*
*From these and other geometric shapes, some math activities of high school are shown. These exercises present different degrees of difficulty and can be solved by arithmetic, algebraic, geometric or graphic methods.*

Key words: Research, geometry, tilings, parhexagons, classroom activities.

## Introducción

En teoría de mosaicos es bien conocido que cualquier hexágono regular recubre el plano y que un pentágono regular no lo hace, pero, abandonando la regularidad, ¿hay pentágonos que generan mosaico y hexágonos que no? En este trabajo tratamos de dar respuesta a esta pregunta.

El artículo contiene una primera parte de construcción y análisis de varios modelos de polígonos en los que se estudian algunas de sus propiedades geométricas, especialmente su carácter generador de mosaico. En la segunda parte se proponen actividades diversas por su dificultad y adecuación a los niveles de los alumnos; unas se caracterizan por tener un perfil más artístico o creativo, en otras intervienen los cálculos geométricos o las operaciones aritmético-algebraicas; las hay con soluciones concisas y cerradas, pero también otras que permiten soluciones abiertas a la imaginación del alumnado.

### Hexágonos que recubren el plano. Parhexágonos

Además del hexágono regular existen otros hexágonos que recubren el plano. Un tipo de estos polígonos son los llamados parhexágonos, es decir, hexágonos cuyos lados son dos a dos iguales en longitud y paralelos (Fernández y Reyes, 2003 y Newman, 1956).

La característica de estos hexágonos especiales para generar mosaico está garantizada por su fácil transformación en un paralelogramo (ver figura 1), polígono que como es bien conocido, siempre tesela el plano.

A continuación se proponen algunas construcciones de parhexágonos que forman mosaico a partir de otros polígonos regulares.

Figura 1

**Inmaculada Fernández Benito**
*IES Núñez de Arce. Valladolid*
**Encarnación Reyes Iglesias**
*E.T.S. Arquitectura. Universidad de Valladolid*

### Parhexágono a partir de un triángulo equilátero

Tomando un triángulo equilátero y dividiendo sus lados en tres partes iguales se trazan segmentos paralelos a los lados como en la figura 2 se obtiene un hexágono regular que obviamente es un parhexágono.

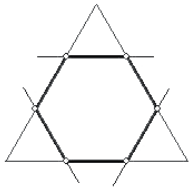


Figura 2

### Parhexágonos a partir de un cuadrado

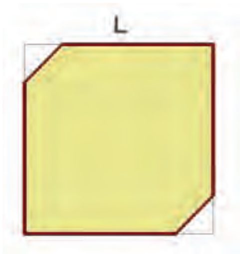



Figura 3

Eliminando dos triángulos rectángulos isósceles en dos vértices opuestos de un cuadrado se obtiene un tipo de parhexágono con cuatro lados iguales, dos ángulos rectos y los cuatro restantes de 135º (figura 3).

En la figura 4 se presenta un dibujo y una fotografía del teselado monoedral originado por este parhexágono.

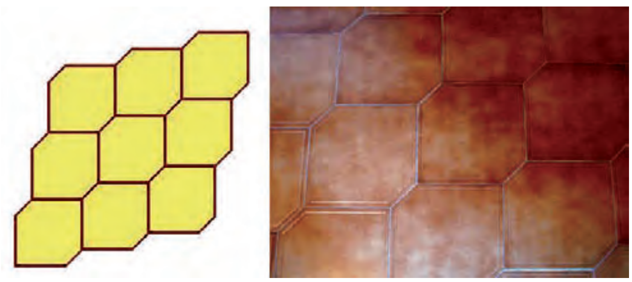


Figura 4

Es posible obtener un parhexágono equilátero siguiendo el mismo método. Basta con resolver el problema algebraicamente de la siguiente forma:

Si el cuadrado de partida tiene lado $L$ y llamamos $x$ al lado del parhexágono, se tiene la siguiente relación (parte derecha figura 5): $x^2=(L-x)^2+(L-x)^2$; operando $x^2=2(L^2-2Lx+x^2)$.

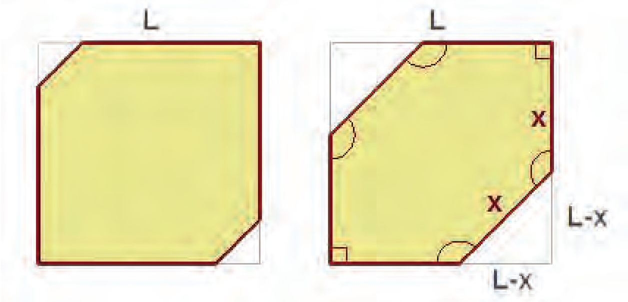



Figura 5

Es decir $x$ es solución de la ecuación $x^2-4Lx+2L^2=0$ y al resolverla obtenemos: $x = L\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$.

Puesto que deber ser: $x<L$ la longitud del lado del parhexágono será: $x = L\left(2 - \sqrt{2}\right)$

Este parhexágono equilátero da lugar a diferentes recubrimientos del plano como se observa en la figura 6.

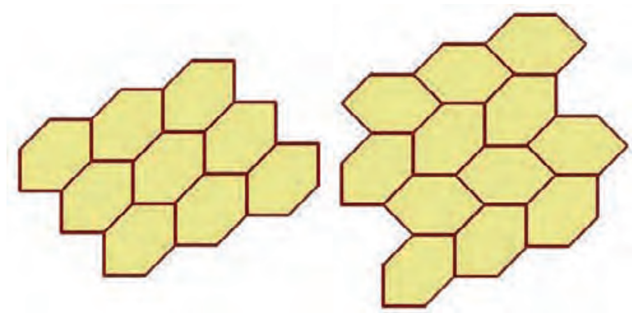


Figura 6

### Parhexágonos a partir de hexágonos regulares

En la figura 7 se han dibujado tres modelos diferentes de parhexágonos, a partir de agrupaciones de dos, tres y cuatro hexágonos regulares. El proceso para obtener estos parhexágonos es unir convenientemente, mediante segmentos, algunos vértices de las configuraciones de hexágonos regulares.

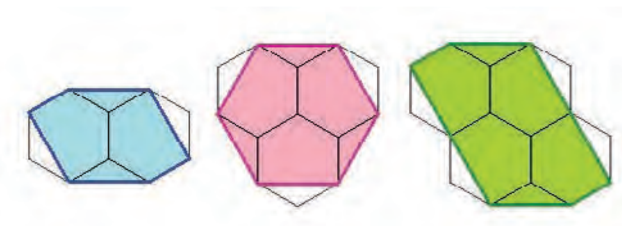


Figura 7

En la figura 8 se presentan tres mosaicos generados respectivamente con cada uno de estos parhexágonos.

Figura 7

### Hexágono que no recubre el plano

Después de todos estos ejemplos parece difícil encontrar un hexágono que no recubra el plano. A continuación mostramos un ejemplo de fácil construcción.

Uniendo vértices en la configuración de siete hexágonos regulares de la figura 9 se origina un hexágono cuyos ángulos son todos iguales (120º) y sus lados son paralelos dos a dos.

Claramente no es un parhexágono al ser los lados paralelos de distinta longitud (Chamoso, Fernádez y Reyes, 2009).

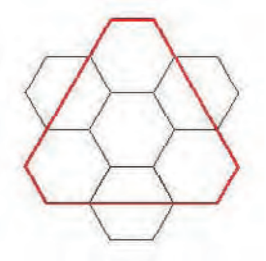


Figura 9

El mismo polígono puede obtenerse cortando los lados contiguos de un triángulo equilátero por un segmento paralelo al tercer lado, generalizando la construcción de la figura 2. En la figura 10 se ha dibujado un parhexágono de estas características, tomando el lado del triángulo dividido en seis partes iguales, resultando el polígono congruente con el trazado sobre la configuración hexagonal de la figura 9.

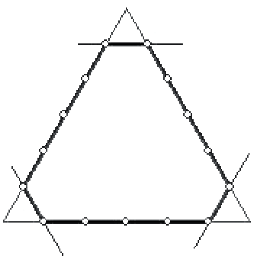


Figura 10

Este parhexágono aparece dando forma a objetos como la alcantarilla de Oporto o la fuente del claustro de la catedral de Coimbra de la figura 11.


Figura 11

A pesar de la existencia de ejes de simetría, este hexágono no genera ningún teselado monoedral. No obstante, combinando parhexágonos de este tipo con hexágonos regulares de lado igual al menor del parhexágono, se forma un mosaico diedral como el de la figura 12, correspondiente a un pavimento de la catedral de Burgos (Chamoso, Fernández y Reyes, 2009).

Figura 12

## Pentágonos que no cubren el plano

Es imposible recubrir el plano con pentágonos regulares, como ya constató Durero, en sus trabajos sobre mosaicos (Durero, 2000). Presentamos a continuación algunos pentágonos no regulares que recubren el plano pese a tener una morfología que les confieren ciertas características de cuasi-regularidad: lados, ángulos, ejes de simetría, etc.

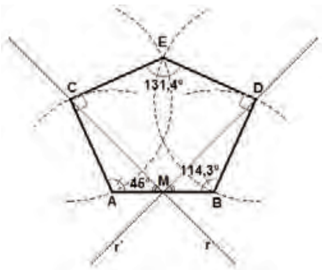



Figura 13

### Pentágono equilátero de "El Cairo"

Recibe este nombre por aparecer con frecuencia en los pavimentos de la ciudad egipcia de El Cairo (Fernandez y Reyes, 2003 y Martin, 1982). El pentágono se construye de la siguiente forma (figura 13):

– Por el punto medio de un segmento AB se trazan dos semirrectas formando con él un ángulo de 45º.
– Dos arcos de circunferencia centrados en los puntos A y B y radio AB cortan a las semirrectas anteriores en los puntos C y D respectivamente.
– Dos nuevos arcos de circunferencia en C y D con el mismo radio AB determinan el punto E.

Por construcción, el pentágono obtenido ABCDE es equilátero. Se comprueba que posee dos ángulos rectos y por tanto no puede ser regular.

En la parte izquierda de la figura 14 se muestra la disposición de cuatro de estos pentágonos para formar un parhexágono. El recubrimiento obtenido se conoce como teselado de "El Cairo". En el centro y la parte derecha de la figura 14 se observan dos ejemplos de recubrimientos con apariencia de "El Cairo".

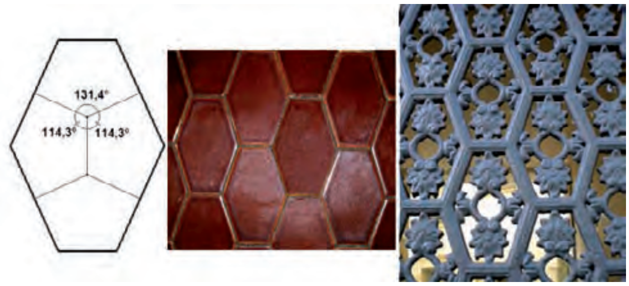



Figura 14

El teselado anterior ofrece diferentes percepciones al observador: bien en una red de parhexágonos trasladados, o estos mismos parhexágonos entrelazados o como piezas en forma de cruz creadas por la rotación de 90º de un pentágono en torno a uno de sus vértices (figura 15).

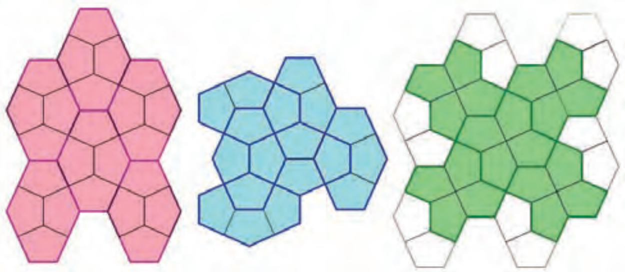


Figura 15

En la literatura sobre teselados aparece con el mismo nombre de pentágono de “El Cairo” otro pentágono que tiene solo cuatro lados iguales, es decir, no equilátero, cuyos ángulos miden: dos 90º, dos 108º y uno 144º. Cuatro pentágonos de este tipo pueden disponerse formando un parhexágono.

Mostramos a continuación pentágonos que recubren el plano trazados a partir de cuadrados y hexágonos regulares.

**Pentágono derivado de un cuadrado (dos o tres lados iguales)**

Tomando un cuadrado y eliminando una sola de sus esquinas de forma similar a la realizada en el apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*, se construye un pentágono con tres ángulos rectos y dos de 135º (figura 16). El pentágono así construido recubre el plano porque al hacer un giro de 180º por el punto medio de uno de sus lados se forma un parhexágono.


Figura 16

Este pentágono siempre tiene al menos dos lados iguales, pero puede tener hasta un máximo de tres, dependiendo de la longitud del cateto del triángulo rectángulo isósceles suprimido.

a. Para que los tres lados iguales del pentágono sean consecutivos (figura 17, parte izquierda), la medida del cateto $x$ ha de ser exactamente la obtenida en el apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*, es decir:

$$x = L\left(2-\sqrt{2}\right)$$

b. Para que los lados iguales del pentágono sean la hipotenusa del triángulo recortado y los dos originales del cuadrado formando ángulo recto, la longitud de los lados denotados por $y$ (figura 17, centro) será la solución de la ecuación: $L^2=(L-y)^2 + (L-y)^2$, de donde se obtiene como único valor:

$$y = \frac{L\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} \quad \text{puesto que } y<L.$$

Obsérvese que el lado $y$ del segundo pentágono mide la mitad que el lado $x$ del primero.

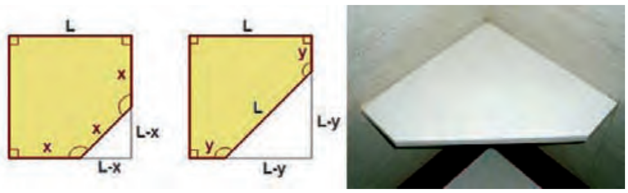



Figura 17

**Otro pentágono derivado de un cuadrado (tres lados iguales)**

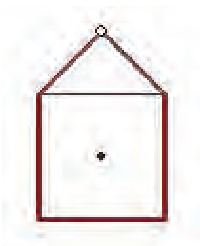


Figura 18

Tres lados de un cuadrado y los segmentos que resultan al unir los dos vértices del cuarto lado con el punto simétrico del centro del cuadrado respecto de este lado, determinan un polígono de cinco lados, tres de ellos iguales (figura 18). El pentágono tiene tres ángulos de 90º y dos de 135º. Su forma recuerda el dibujo esquemático de una casa por lo que se le denomina “pentágono casita” (Alsina, Pérez y Ruiz, 1989).

Este pentágono ofrece diferentes posibilidades de generar mosaicos. En la parte izquierda de la figura 19 se agrupan de dos en dos para formar parhexágonos, también el mosaico de la parte derecha está generado por parhexágonos, pero en este caso formados por grupos de cuatro pentágonos. El mosaico de la parte central está configurado por cruces griegas diseccionadas en pentágonos del mismo tipo.

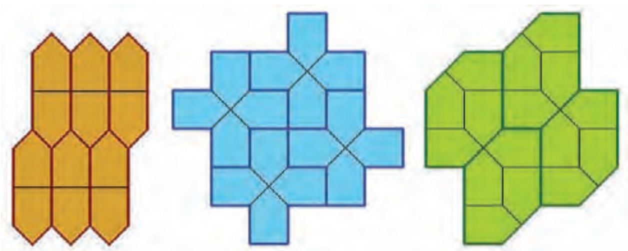


Figura 19

**Pentágono derivado de un hexágono (cuatro lados iguales)**
Se construye con cuatro lados consecutivos de un hexágono regular y el quinto lado es el segmento que une los vértices extremos. El pentágono así construido es una variación del "pentágono casita".

Al yuxtaponer dos de estos pentágonos por su lado desigual o hacer un giro de 180º por el punto medio de éste, se determina un parhexágono. En la parte derecha de la figura 20 se muestra el dibujo de un mosaico realizado con estas losetas pentagonales.

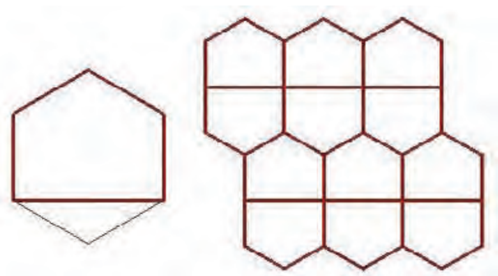


Figura 20

**Otro pentágono derivado de un hexágono (cuatro lados iguales)**
Su trazado se realiza de la forma siguiente: desde dos vértices alternos del hexágono regular se dibujan dos arcos del mismo radio (lado del hexágono). Estos arcos determinan dos vértices del pentágono cuando cortan a las dos diagonales del hexágono trazadas desde los mismos vértices en que se trazaron los arcos. Los tres vértices restantes del pentágono coinciden con vértices del hexágono de partida (figura 21). Los cuatro lados iguales del pentágono obtenido tienen la misma longitud que el lado del hexágono inicial.

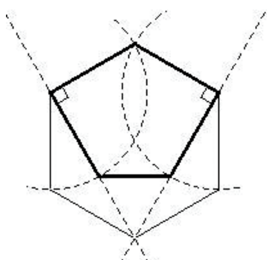


Figura 21

Uno de los ángulos del pentágono es el interior del hexágono, es decir, de 120º, otros dos miden 90º (la primera diagonal del hexágono regular siempre es perpendicular a un lado del mismo) y los dos restantes, al ser iguales, han de medir 120º cada uno.

La apariencia del mosaico monoedral generado por este pentágono resulta similar a la de los mosaicos obtenidos con pentágonos de "El Cairo" (Figura 15).

**Pentágono derivado de un hexágono (tres lados iguales)**

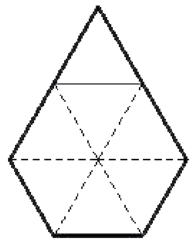


Figura 22

Yuxtaponiendo un triángulo equilátero en uno de los lados de un hexágono regular (figura 22) se obtiene un pentágono que ofrece diferentes formas de recubrir el plano como se muestra en la Figura 23. Obsérvese que en el mosaico de la izquierda dos pentágonos, girados 180º por el punto medio de un lado, se combinan formando un parhexágono, y en la configuración de la derecha seis pentágonos se disponen de forma cíclica, al girar uno de ellos 60º con centro en su vértice desigual.

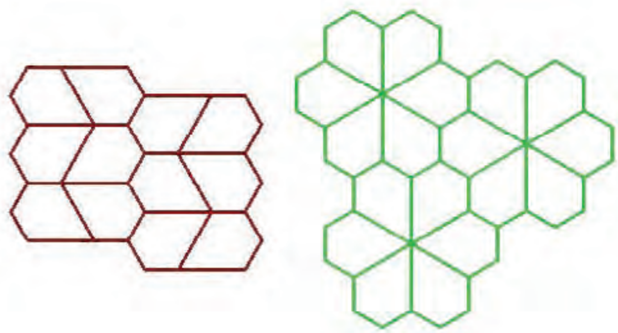


Figura 23

**Pentágono derivado de un hexágono (pares de lados iguales)**
Al diseccionar un hexágono regular como se muestra en la parte izquierda de la figura 24 cada una de las tres piezas resultantes es un pentágono con dos ángulos rectos y tres de 120º. Uno de sus lados es el lado del hexágono, otros dos miden la mitad de éste y los dos restantes son apotemas del hexágono. Es evidente que este pentágono genera un mosaico. (figura 24 - parte derecha).

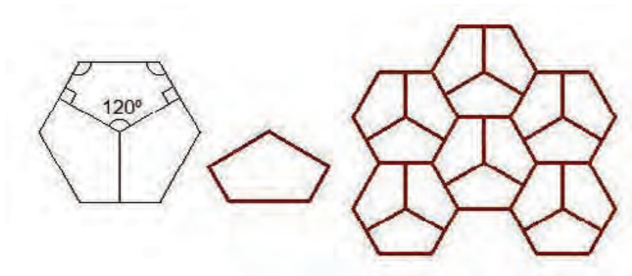



Figura 24

## Actividades para el aula

**Actividad 1. Enunciado**

a. A partir de un cuadrado y su girado respecto de uno de sus vértices 180º, construir un parhexágono y calcular su área y perímetro.

b. ¿Qué sucede si los cuadrados son de diferente tamaño? ¿Qué polígono se forma? ¿Es un parhexágono?

**Actividad 1. Solución**

a. En la parte derecha de la figura A1-1 se observa el parhexágono construido. Si el cuadrado inicial tiene lado $L$, es evidente, que el área del parhexágono es $A=3L^2$ y su perímetro:

$$P = 4L + 2\sqrt{2}\,L = 2\left(2+\sqrt{2}\right)L.$$

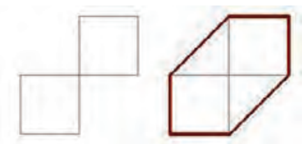


Figura A1-1

b. Se forma también un hexágono que no es parhexágono porque dos de sus lados opuestos no son paralelos y además los lados paralelos no poseen la misma longitud como puede verse en la figura A1-2.

Figura A1-2

**Actividad 2. Enunciado**

Uniendo vértices de los contornos de las siguientes configuraciones de cinco, seis y siete hexágonos regulares, cada uno de lado $L$ y área $A$, (figura A2-1), dibujar diferentes parhexágonos y calcular sus perímetros y áreas.

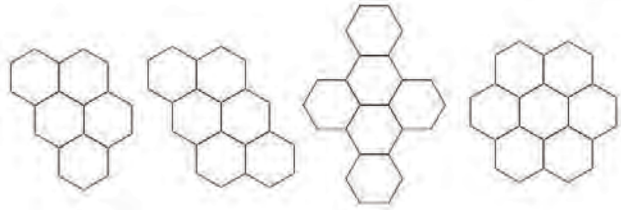


Figura A2-1

**Actividad 2. Solución**

En la figura A2-2 se muestran cinco parhexágonos diferentes.

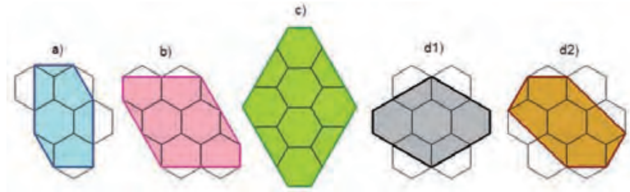



Figura A2-2

Para calcular los perímetros hay que tener en cuenta que las dos diagonales distintas $D$ y $D'$ de un hexágono regular de lado $L$, miden: $D=\sqrt{3}L$ y $D'=2L$ (figura A2-3) (Fernández y Reyes, 2003).

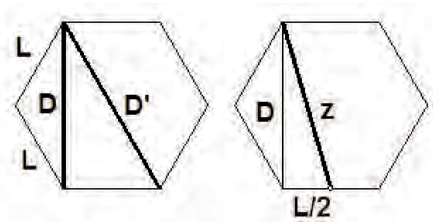



Figura A2-3

La longitud del segmento $z$ de la figura A2-3 se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = 3L^2 + \frac{L^2}{4} \quad \text{de donde resulta:} \quad z = \frac{\sqrt{13}}{2}L$$

El área de un hexágono regular en función de su lado $L$ es:

$$A = \frac{6L\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}L}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2$$

En la siguiente tabla se muestran los valores de los perímetros y de las áreas de los cinco parhexágonos dibujados:

| Parhexágono | Perímetro | Área |
|---|---|---|
| a) | $\left(6+4\sqrt{3}\right)L$ | $4A=6\sqrt{3}L^2$ |
| b) | $\left(2+8\sqrt{3}\right)L$ | $6A=9\sqrt{3}L^2$ |
| c) | $18L$ | $8A=12\sqrt{3}L^2$ |
| d1) | $14L$ | $5A=\frac{15\sqrt{3}}{2}L^2$ |
| d2) | $4z+4\sqrt{3}L=$ $\left(2\sqrt{13}+4\sqrt{3}\right)L$ | $5A=\frac{15\sqrt{3}}{2}L^2$ |

**Actividad 3. Enunciado**

Manteniendo los tres lados iguales del "pentágono casita" derivado de un cuadrado, y uniendo los vértices extremos de esta línea poligonal con el centro del cuadrado, se obtiene un pentágono cóncavo, figura A3-1.

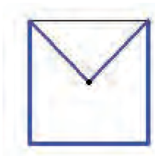


Figura A3-1

Si el lado del cuadrado es $L$, calcular el área y perímetro del pentágono. Construir con él un recubrimiento del plano.

**Actividad 3. Solución**

El área del pentágono será la del cuadrado de lado menos la de un triángulo isósceles de base $L$ y altura $L/2$, por tanto el área es:

$$A=L^2-\frac{1}{2}L\frac{L}{2}=\frac{3L^2}{4}$$

Los lados del pentágono son tres lados del cuadrado y dos medias diagonales del mismo, por consecuencia su perímetro es:

$$P=3L+2\frac{\sqrt{2}}{2}L=\left(3+\sqrt{2}\right)L$$

En la figura A3-2 se ha realizado un mosaico utilizando como tesela este pentágono cóncavo.

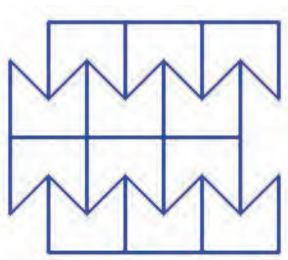


Figura A3-2

**Actividad 4. Enunciado**

El mosaico de la fotografía, figura A4-1, ofrece distintas interpretaciones en cuanto a las losetas que lo forman. Por ejemplo, puede visualizarse formado por parhexágonos y cuadrados.


Figura A4-1

El parhexágono se ha diseñado a partir de un cuadrado trazando segmentos paralelos a una diagonal por los puntos medios de los lados (procedimiento similar al descrito en apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*). figura A4-2, parte izquierda.

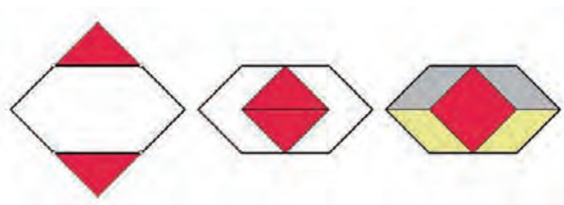


Figura A4-2

Los triángulos rectángulos isósceles suprimidos se disponen formando un cuadrado, como en la parte central de la figura A4-2, resultando una disección de este parhexágono convexo en un cuadrado y dos nuevos parhexágonos cóncavos que se dividen a su vez en cuatro paralelogramos coloreados por pares (Parte derecha de la figura A4-2). El parhexágono así construido es semejante al trazado en la Actividad 1.

Al combinar los parahexágonos iniciales con cuadrados del mismo color y tamaño que los cuadrados interiores a ellos se genera el mosaico de la figura A4-3.

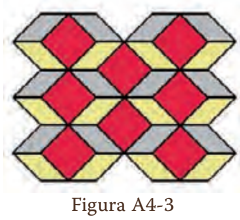


Figura A4-3

a. ¿Cuánto miden los ángulos del parhexágono convexo? (figura A4-2).
b. Si el lado del cuadrado de partida es $L$. ¿Cuánto miden los lados del parhexágono anterior? ¿Cuál es su área?
c. ¿Cuál es el área del parhexágono cóncavo?
d. Dibujar, respetando el colorido de las piezas, un nuevo mosaico utilizando únicamente parahexágonos convexos.
e. Yuxtaponiendo un parhexágono cóncavo al cuadrado central se forma un nuevo parhexágono con apariencia

tridimensional de paralelepípedo. Dibujar el teselado correspondiente.

### Actividad 4. Solución

a. Los parhexágonos tienen dos ángulos de 90º grados y cuatro de 135º.

b. Cuatro de sus lados miden $L/2$, y los otros dos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}L$$

El parhexágono convexo tiene por área la del cuadrado inicial menos la del cuadrado formado por los dos triángulos, es decir :

$$A = L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{3L^2}{4}$$

c. Teniendo en cuenta que el parhexágono convexo contiene dos parhexágonos cóncavos y un cuadrado interior, el área del cóncavo será la mitad de la diferencia entre el área del convexo y la del cuadrado, es decir:

$$A' = \frac{1}{2}\left(\frac{3L^2}{4} - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right) = \frac{L^2}{4}$$

Observar que este valor coincide con el del área del cuadrado inscrito, lo que implica que cada parhexágono cóncavo es equivalente (misma área) y equicompuesto (se pueden descomponer en las mismas piezas) con el cuadrado interior al parhexágono convexo.

d. Utilizando sólo parhexágonos se obtiene el mosaico de la figura A4-4.

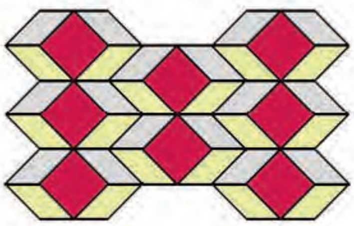


Figura A4-4

e. Con el nuevo parhexágono se origina, por traslación de dos vectores perpendiculares, el teselado de la figura A4-5 (izquierda). En la parte derecha de la figura A4-5 se ha representado este mismo mosaico mostrando el efecto tridimensional que presentan algunos pavimentos.

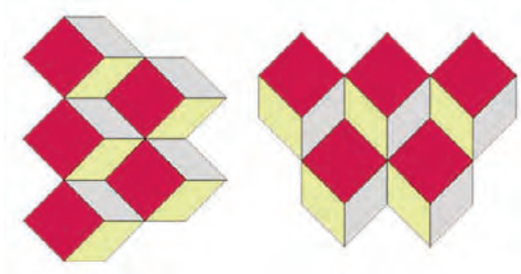


Figura A4-5

### Actividad 5. Enunciado

Con un programa de geometría dinámica trazar las cruces que aparecen en las fotografías (figura A5-1).

a) Explicar qué tipo de parhexágonos de los utilizados anteriormente se adaptan a las composiciones.

b) Hallar el perímetro de los “pentágonos casita” que completan la primera cruz.

c) Calcular el área de las cruces.

Figura A5-1

### Actividad 5. Solución

a) En el esquema geométrico con CABRI que reproduce la reja (parte izquierda, figura A5-1) se han dibujado cuatro parhexágonos de los utilizados en la Actividad 4 (figura A4-2).

En la representación con CABRI de la yesería (parte derecha, figura A5-2) se han considerado ocho parahexágonos equiláteros y congruentes de los considerados en el apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*, figura 5.

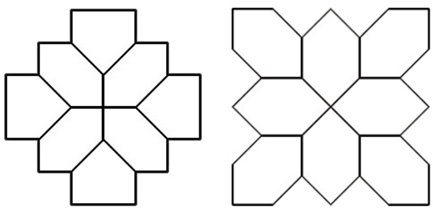


Figura A5-2

b) Teniendo en cuenta las medidas de los lados de los parhexágonos de la actividad 4 a partir de un cuadrado de lado $L$, los lados oblicuos de los pentágonos casita que completan la primera cruz miden $(\sqrt{2}/2)L$ (longitud del lado mayor del parhexágono); otros dos miden $L/2$ (lado menor del parhexágono) y el quinto lado mide $L$. Ordenando de mayor a menor estas longitudes: $L$, $(\sqrt{2}/2)L$ y $L/2$ , podemos comprobar que son tres términos consecutivos de una progresión geométrica de razón $(\sqrt{2}/2)$.

Finalmente el perímetro $P$ del pentágono es:

$$P = 2\frac{\sqrt{2}}{2}L + 2\frac{L}{2} + L = \left(\sqrt{2}+2\right)L$$

c. El área de la primera cruz es la suma de las áreas de cuatro parahexágonos (cada uno de ellos de área $3L^2/4$ ) y de cuatro pentágonos. Cada pentágono se descompone en un rectángulo de lados $L$ y $L/2$ y un triángulo isósceles de base $L$ y altura $L/2$ (Es decir el área de un pentágono es:

$$\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \text{ ).}$$

Si tenemos en cuenta que los parahexágonos y los pentágonos casita que forman la primera cruz tienen todos la misma área, ésta resulta ser:

$$A = 8\frac{3L^2}{4} = 6L^2$$

El área de la segunda cruz es ocho veces la del parhexágono equilátero del apartado *Parhexágonos a partir de un cuadrado*. El área de uno estos parhexágonos es la del cuadrado de partida de lado $L$, menos la de dos triángulos rectángulos e isósceles de cateto:

$$L - x = \left(\sqrt{2}-1\right) L$$

que forman un cuadrado de lado:

$$\left(\sqrt{2}-1\right) L$$

resultando pues, que el área de cada parhexágono es

$$2\left(\sqrt{2}-1\right) L^2.$$

Luego el área A de esta cruz es:

$$A = 16\left(\sqrt{2}-1\right) L^2.$$

**Actividad 6. Enunciado**

En los dos enrejados de la figura A6-1 se distinguen de nuevo cruces formadas por polígonos. Identificar los tipos de pentágonos y parhexágonos que las forman y su disposición en las cruces.

Figura A6-1

**Actividad 6. Solución**

La cruz de la fotografía de la izquierda en la figura A6-1, se compone de cuatro pentágonos casita girados entre sí 90º alrededor de un vértice combinados con cuatro parhexágonos de los considerados en la Actividad 1 o en la Actividad 4.

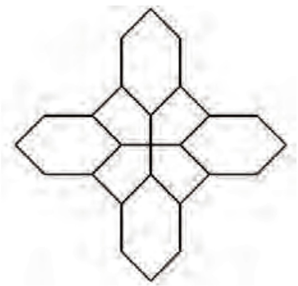


Figura A6-2

Una interpretación geométrica de la segunda cruz, parte derecha de la figura A6-1, puede basarse en el hecho de que cada uno de sus brazos es un pentágono formado al combinar o intersecar dos pentágonos casita, derivados de un cuadrado de lado $L$, como se muestra en la figura A6-3. El perímetro del nuevo pentágono, también con forma de "casita", es:

$$P = 5L + 2\frac{\sqrt{2}}{2}L = \left(5+\sqrt{2}\right) L$$

y su área la suma de la de dos cuadrados y un triángulo isósceles de base $L$ y altura $L/2$ , es decir:

$$A = 2L^2 + \frac{1}{2}L\frac{L}{2} = \frac{9L^2}{4}$$

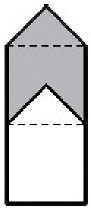


Figura A6-3

Al girar 90º este pentágono, consecutivamente, alrededor de uno de sus vértices se obtiene la cruz dibujada en la figura A6-4.

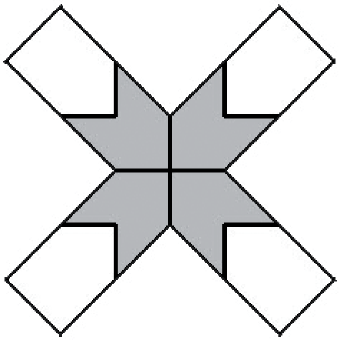


Figura A6-4

Las fotografías de las actividades 5 y 6 corresponden a detalles constructivos (ventanales y yesería) de Sint Lucas Architectuur.Universidad de Gante (Bélgica).

## Consideraciones finales

Nuestro propósito al escribir este artículo ha sido ofrecer ideas a los lectores de la revista *Suma* para aplicar las matemáticas y, especialmente la geometría, en la praxis docente, concretando actividades didácticas útiles para los niveles de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. En definitiva, se pretende enriquecer y afianzar las competencias de nuestros alumnos a través de contenidos matemáticos adaptados al estudio y comprensión del entorno. ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., Pérez, R., Ruiz, C. (1989). *Simetría Dinámica*. Madrid: Síntesis.

Chamoso, J., Fernández, I., Reyes, E. (2009). *Burbujas de Arte y Matemáticas*. Madrid: Nivola.

Durero, A., *De la medida*. (Edición de J. Peiffer). (2000). Madrid: Akal, D. L.

Fernández, I., Reyes, E. (2003). *Geometría con el hexágono y el octógono*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones. (Segunda edición 2008).

Fernández I., Reyes, E. (2005). Trabajando con el hexágono. *Números*, 60, pp. 7-14.

Martin, G.E. (1982). *Transformation Geometry*. New York: Springer.

Newman, J. (1956). *The World of Mathematics Vol 3*. New York: Simon and Schuster.

Este artículo fue recibido en *Suma* en diciembre de 2010 y aceptado para su publicación en julio de 2011

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 47-54

# Análisis cienciométrico y temático de la revista SUMA (1999-2010)

*La revista* Suma *es una publicación de referencia en la Educación matemática en España, por lo que conocer las características del conocimiento que publica es de actual interés. Este trabajo es un estudio cienciométrico de los artículos científicos publicados en los últimos años en* Suma*, la revista de la Federación Española de Sociedades de Educación Matemática (FESPM), realizado desde una doble perspectiva bibliométrica y conceptual o temática.*

Palabras Clave: Educación matemática, Revista *Suma*, revistas científicas, análisis temático.

**Scientometric analysis and thematic *Suma* journal (1999-2010)**

*The* Suma *journal is one of the most important spanish journal in Mathematics Education. Knowing the main caracteristics of the papers published in it, is rather than interesting. This paper presents a scientometric study of scientific articles published in the last years in* Suma*, the journal of the Spanish Federation of Mathematics Teachers Societies (FESPM), from both bibliometric and conceptual perspective.*

Key words: Mathematics Education, *Suma* journal, scientific journals, topic analysis.

## Introducción

En el esquema general de la construcción del conocimiento científico, las revistas especializadas son los referentes capaces de organizar sistemáticamente los conocimientos acumulados, que se inician a partir del trabajo de los autores y que se perfeccionan y formalizan con las aportaciones de los editores y evaluadores hasta llegar a los usuarios (Cañedo, 2003).

Por otro lado, la evaluación de la producción científica es sin duda una cuestión de interés singular en los últimos tiempos y la Cienciometría es el campo disciplinar que ofrece métodos e instrumentos apropiados para este tipo de análisis. Centrándonos en el estudio cienciométrico de las revistas científicas, a través del estudio de una serie de indicadores adecuados es posible conocer el nivel de consolidación de un área de conocimiento, conocer los temas que se investigan con más cadencia, identificar a los autores e instituciones más productivos, así como el nivel de colaboración entre ellos y, en definitiva, orientar a los usuarios de las publicaciones y/o a los responsables de las mismas acerca de aspectos reveladores a partir de los trabajos que se publican (Terrada y Peris, 1988; Maz-Machado et al, 2009).

Teniendo en cuenta que en la base de datos In-Recs, que evalúa el impacto de las publicaciones españolas en Ciencias Sociales tan sólo se incluyen cinco revistas específicas de Educación Matemática, cobra interés realizar un estudio objetivo sobre ellas y en particular de *Suma* para conocer cuáles son sus patrones de citación, autoría, colaboración y temática. Por tal razón en este trabajo se aborda un análisis cienciométrico y conceptual de los artículos científicos sobre Educación Matemática publicados en la revista *Suma* entre el año 1999 y el año 2010.

**Rafael Bracho López**
**Alexander Maz-Machado**
**Noelia Jiménez-Fanjul**
**Natividad Adamuz-Povedano**
**Pilar Gutiérrez Arenas**
**Manuel Torralbo Rodríguez**
*Universidad de Córdoba*

## Información general sobre la revista *Suma*

La revista *Suma* nace con la finalidad de convertirse en un referente para el profesorado de Matemáticas de todos los niveles educativos de España, sirviendo de órgano de expresión de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas FESPM) y de las 20 sociedades que la integran.

| | |
|---|---|
| Nombre: *Suma:Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* | |
| Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática | |
| ISSN: 1130-488X | |
| Periodicidad: Cuatrimestral | |
| Editores: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas | |
| Director: Tomás Queralt y Onofre Monzó | |
| Consejo editorial:<br>• Inmaculada Fuentes<br>• Francisco Martín<br>• Ricardo Luengo<br>• Serapio García | Comité editorial:<br>• Mª Luisa Fernández<br>• Salvador Caballero<br>• José Antonio Mora<br>• Luis Puig<br>• Bernardo Gómez<br>• Floreal Gracia |
| Página Web: http://www.revistasuma.es/ | |

Tabla 1. Datos generales de la revista Suma. Fuentes: Dialnet, RESH y http://www.revistasuma.es

La revista se empezó a publicar en 1988 en Granada, siendo su primer director Rafael Pérez Gómez. En 1991, la sede de la revista se trasladó a Huelva, bajo la dirección del profesor Sixto Romero. En 1995 lo sucedieron Emilio Palacían y Julio Sancho, en Zaragoza, hasta junio de 2003. Más tarde se hicieron cargo de la dirección Francisco Martín e Inmaculada Fuentes, en Madrid, durante un periodo de cuatro años. Desde entonces se encargan de la dirección Tomás Queralt y Onofre Monzo en Torrent, Valencia (*Suma*, 2011).

A lo largo de estos años, la revista *Suma* ha experimentado diversos cambios de formato; no obstante, se puede decir que mantiene en su estructura, dos partes diferenciadas: artículos y secciones. Los artículos pueden tener distinta naturaleza, siendo frecuentes artículos de investigación en Educación Matemática, presentación de experiencias en el aula, trabajos sobre historia de las matemáticas, artículos de divulgación, etc. Por otro lado, las secciones mantienen una temática fija, si bien el contenido puede ser bastante distinto en cada número.

La revista se encuentra referenciada en las bases de datos CARHUS plus-+, Compludos, Dialnet, DICE, sumarios del ISOC, Latindex, Mathematics Didactic Database, RESH, MathEduc, Dulcinea e IRESIE, entre otras (*Suma*, 2011).

## Planteamiento del problema y Objetivos

Con el objetivo de analizar la contribución de *Suma* a la Educación Matemática en nuestro país se ha llevado a cabo un completo análisis cienciométrico de la misma en los últimos doce años. En este estudio se ha realizado un análisis diacrónico de los artículos publicados en el periodo 1999 – 2010. Dicho análisis se ha abordado desde una doble perspectiva bibliométrica y temática.

Para el análisis bibliométrico se han estudiado un total de 27 variables y diversos indicadores de producción, de colaboración y de citación, si bien en este trabajo se muestra solo un resumen. Para el análisis temático de los documentos se han utilizado las 16 variables definidas en la *Mathematics Education Subject Clasification (MESC)* para la catalogación en la base de datos MathEduc, ya que las categorías establecidas en dicho sistema son ampliamente aceptadas por la comunidad de investigadores en Educación Matemática y han sido utilizadas en estudios anteriores (Torralbo et al, 2003).

El objetivo general de esta investigación es analizar longitudinalmente los artículos científicos publicados en la revista *Suma* en el periodo comprendido entre 1999 y 2010, a través de un doble estudio bibliométrico y temático.

Suma *se encuentra referenciada en las bases de datos CARHUS plus-+, Compludos, Dialnet, DICE, sumarios del ISOC, Latindex, Mathematics Didactic Database, RESH, MathEduc, Dulcinea e IRESIE, entre otras.*

Para llevar a cabo el estudio definimos los siguientes objetivos específicos:

1. Realizar un análisis bibliométrico de la producción de investigación en la revista *Suma* a través de los artículos científicos publicados en los años de 1999 a 2010, analizando sus patrones y tendencias.

2. Catalogar y analizar temáticamente los documentos de la investigación.

3. Identificar los investigadores y las instituciones con mayor producción del campo disciplinar y analizar las redes de colaboración en la autoría.

Este estudio es longitudinal, de tipo descriptivo explicativo y en él se utilizan técnicas bibliométricas cuantitativas y cualitativas en concordancia con el análisis bibliométrico. Se ha hecho uso de datos cuantitativos como frecuencias, porcentajes de valores, estadísticos inferenciales con significación estadística y correlacionales e interpretaciones de los mismos. La recogida de datos se ha realizado a través de la consulta directa de los ejemplares de la revista. En una base de datos de estructura relacional, confeccionada *ad hoc* en OpenOffice Base, se registró un conjunto de campos relacionados con las variables objeto de estudio. Más tarde se programaron una serie de consultas que fueron exportadas a una hoja de cálculo diseñada con el programa Calc, también del paquete OpenOffice, para el tratamiento estadístico de los datos.

Puesto que la revista *Suma* publica trabajos de distinta naturaleza (artículos científicos, trabajos de divulgación, experiencias en el aula, reseñas bibliográficas, etc.), en este trabajo se han estudiado únicamente los artículos que el consejo de redacción de la revista ha catalogado como tales, dejando de lado otro tipo de trabajos.

## Resultados del análisis cienciométrico

### Regularidad productiva

En el periodo analizado se han publicado un total de 242 artículos en la revista *Suma*. La media de artículos publicados al año en la revista es de 20,17 y la desviación típica es 5,06. En la Figura 1 se observa una ligera disminución del número de artículos científicos publicados al año a partir del año 2006, probablemente en beneficio de la publicación de experiencias en el aula y otros tipos de trabajos de interés para el profesorado.

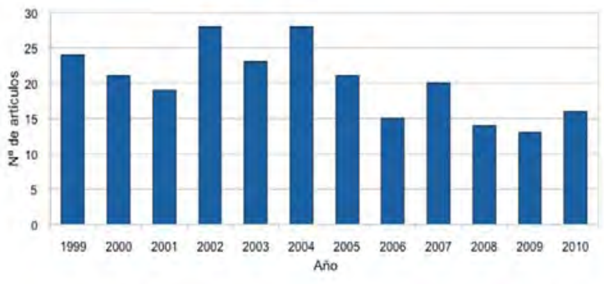



Figura 1. Productividad diacrónica de artículos en la revista *Suma*

### Productividad de los autores y colaboración en la autoría

En cuanto a la productividad, de los 301 autores que han publicado artículos en la revista en el periodo analizado, 230 (76,4 %) sólo publican un trabajo (pequeños autores) (Price, 1986), mientras que tan solo 32 autores publican 3 o más artículos; de entre ellos, destacan Antonia Redondo, con 7 artículos publicados, y Juan Carlos Cortés y Gabriel Ruiz, con 6.

Al estudiarse más de 200 trabajos, tiene sentido que nos planteemos el cumplimiento de la deominada "Ley de Lotka", que viene a decir que la mayoría de los autores publican un número reducido de trabajos, mientras que la mayoría de los artículos son publicados por un número muy limitado de investigadores. Para la verificación de la Ley de Lotka se ha aplicado el modelo del poder inverso generalizado utilizando el método de los mínimos cuadrados propuesto por Pao (1992) y aplicando el test de ajuste Kolmogorov-Smirnov, como sugiere Urbizagástegui (2004) y aplicado a ciertas revistas españolas de Educación Matemática (Bracho-López et al, 2011). La formulación del modelo es la siguiente:

$$y_x = Cx^{-n},\ x = 1, 2, 3\ldots x_{max}$$

donde $y_x$ es la probabilidad de que un autor publique $x$ trabajos, siendo $C$ y $n$ los dos parámetros que han sido extraídos de nuestros datos y cuyas expresiones generales son las siguientes:

$$n = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2}$$

donde: $N$ = número de pares de datos observados, $X$ = logaritmo decimal de $x$, $Y$= logaritmo decimal de $y$. Hemos tomado $P$ = 20, siguiendo a Pao (1986), quien comprobó que el error residual es insignificante para este valor de $P$.

Para nuestro caso se ha obtenido: $y_x = 0{,}643 \cdot x^{-2{,}85}$. A partir de ahí se pudieron conseguir los valores teóricos esperados para nuestro estudio mediante aplicación de la Ley de Lotka de poder inverso generalizado con una desviación mínima de 0,1013, superior al valor crítico de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, lo que nos permite afirmar que no se cumple la hipótesis de homogeneidad con un nivel de significación de 0,01 a pesar de que sí se observa bastante aproximación entre las distribuciones de las frecuencias observadas y las esperadas tras la aplicación del procedimiento descrito (figura 2).

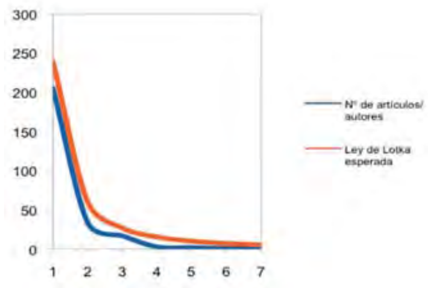



Figura 2. Distribuciones de las frecuencias observadas y esperadas tras la aplicación de la ley de Lotka a los autores de *Suma*

En los 242 artículos publicados ha habido 424 firmas, con lo que se obtiene un índice de coautoría (I.C. = Nº de firmas / Nº de artículos) igual a 1,75, inferior al índice de dos firmas por trabajo que establecen Bordon y Gómez (1997) para las Ciencias Sociales en España, lo que nos da una primera idea de una colaboración más bien escasa.

| Nº de firmas | Frecuencia | Porcentaje |
|---|---|---|
| 1 | 136 | 56,2 % |
| 2 | 65 | 26,9 % |
| 3 | 22 | 9,1 % |
| 4 | 8 | 3,3 % |
| 5 | 9 | 3,7 % |
| 6 | 0 | 0 % |
| 7 | 1 | 0,4 % |
| 8 | 1 | 0,4 % |
| | 242 | 100 % |

Tabla 2. Número de autores por artículo publicado en la revista *Suma*

Para identificar las redes de coautoría se construyo una matriz con los datos de los autores de los artículos y mediante el Software (Pajek Batagelj y Mrvar, 2007). Se realizó la grafica aplicando el algoritmo Kamada Kawai. La representación obtenida resulto muy densa para una fácil visualización por lo que realizamos un proceso de reducción con un umbral variable hasta que se pudo identificar las tres subredes de colaboración más significativas (figura 3). El tamaño del nodo es proporcional a la frecuencia de ocurrencia, mientras que el grosor del enlace es más intenso (grueso) cuanto mayor haya sido el número de coincidencias entre dos miembros (nodos).

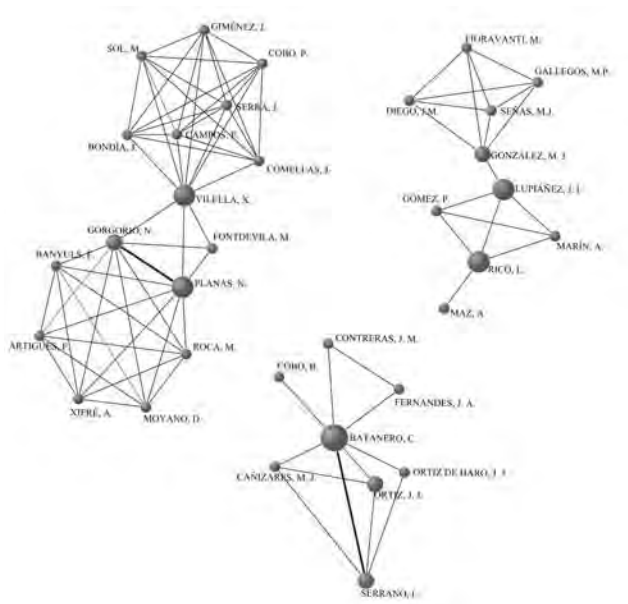



Figura 3. Principales redes de colaboración en autoría de la revista *Suma*

## Productividad y colaboración institucional

Los 301 autores de artículos están vinculados a un total de 160 instituciones, entre las cuáles destacan los institutos de E. Secundaria (59,4 %), seguidos de las universidades (30,6 %), mientras que tan solo aparecen tres colegios de E. Primaria (1,9 %) y 13 (8,1 %) instituciones que no son centros educativos. Sin duda esta distribución institucional contrasta con la obtenida en un estudio similar de una muestra representativa de las revistas españolas que publican artículos sobre Educación Matemática en la que el porcentaje de universidades era de un 47,2 % y el de centros no universitarios un 31,32 % (Bracho, 2010).

> *La mayoría de los autores publican un número reducido de trabajos, mientras que la mayoría de los artículos son publicados por un número muy limitado de investigadores.*

Sin embargo, como puede verse en la tabla 3, las instituciones más productivas suelen ser universidades y entre ellas destacan la Autónoma de Barcelona, la de Granada y la de Cádiz, aunque curiosamente también aparecen dos IES entre las instituciones que figuran en más artículos.

| Institución | Nº de artículos |
|---|---|
| Universidad Autónoma de Barcelona | 13 |
| Universidad de Granada | 13 |
| Universidad de Cádiz | 12 |
| Universidad de Valladolid | 8 |
| Universidad de La Laguna | 7 |
| Universidad de Sevilla | 6 |
| Universidad Politécnica de Madrid | 6 |
| Universidad Politécnica de Valencia | 6 |
| IES Al-Basit (Albacete) | 5 |
| IES Diego de Siloé (Albacete) | 5 |
| Universidad de Extremadura | 5 |
| Universidad de Salamanca | 5 |
| Universidad de Zaragoza | 5 |
| Universidad de Córdoba | 4 |
| Universidad de Murcia | 4 |
| Universidad de Santiago de Compostela | 4 |
| Universidad Politécnica de Cataluña | 4 |

Tabla 3. Instituciones más productivas

En cuanto a la colaboración institucional, al igual que ocurría con la autoría, también se observa que es más bien escasa, así en 182 artículos (75,2 %) solo participa una institución, en 51 (21,1 %) dos y en tan solo nueve (3,7 %) intervienen tres instituciones o más.

**Indicadores de citación**

El análisis de citas, a pesar de las polémicas sobre él existentes, constituye un elemento esencial de la bibliometría, ya que permite cuantificar la repercusión de las publicaciones científicas y de la producción de los investigadores, así como establecer las relaciones existentes entre los documentos científicos.

En nuestro análisis, hemos obtenido un total de 2563 referencias bibliográficas en los 242 artículos publicados en las revistas que se han analizado en el periodo de 1999 a 2010, lo que supone una media de 10,6 referencias por artículo, inferior a la usual en revistas científicas educativas, y una elevada desviación típica también de 10,6.

En cuanto a la antigüedad de las citas, se obtiene una media global de 21,11 años, bastante más alta que la que se obtiene para las Ciencias Puras y para las Ciencias Sociales en general, debido a la cadencia con la que aparecen artículos sobre Historia de las Matemáticas, como se verá más adelante, en los que se suele hacer referencia a documentos muy antiguos. En términos globales, los documentos más citados han resultado ser los libros (51 %), seguidos de los artículos de revistas científicas (23%), que aparecen en un porcentaje más bajo de lo usual en revistas españolas de Educación Matemática (Bracho, 2010). En menores proporciones aparecen las citas a capítulos, tesis doctorales, actas de encuentros del profesorado y otros tipos de documentos (Figura 4).

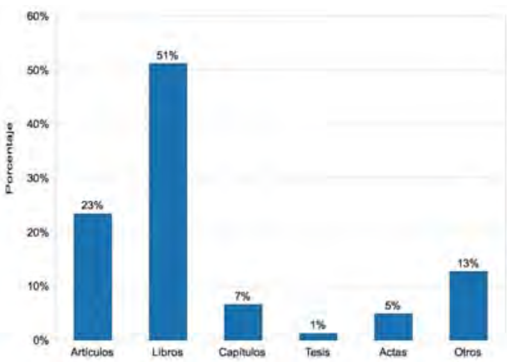



Figura 4. Porcentajes de citas a los distintos tipos de documentos

Centrándonos en las revistas, que suelen ser el cauce normal de difusión de los avances en el ámbito de la investigación, en total se citan a 198 publicaciones distintas. De ellas, en la tabla 4 se recogen los nombres de las 10 revistas más citadas, así como el número de veces que se cita a cada revista. Nos ha llamado la atención, no el hecho de que *Suma* sea la que aparece con más frecuencia, ya que sabíamos que es un referente para el profesorado español del área, sino la gran diferencia existente con el resto de revistas. Por otro lado, también aparecen en lugares destacados, *Uno*, de la editorial Graó, y *Epsilon*, la revista de la SAEM THALES, así como *Educational Studies in Matematics*, *Recherches en Didactique des Mathématiques* y *Journal for Research in Mathematic Education y For the Learning of Mathematics,* tres de las cuatro revistas que se pueden considerar el núcleo que nutre a los autores de artículos sobre Educación Matemática en el plano internacional, junto a *For the Learning of Mathematics*, que en este caso aparece en la posición 33ª con tres citas (Torralbo, 2002; Vallejo et al, 2008; Bracho, 2010).

*Nos ha llamado la atención, no el hecho de que Suma sea la que aparece con más frecuencia, ya que sabíamos que es un referente para el profesorado español del área, sino la gran diferencia existente con el resto de revistas.*

| **Revista** | **Frecuencia** |
|---|---|
| *Suma* | 82 |
| *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas* | 27 |
| *Educational Studies in Mathematics* | 23 |
| *Epsilon* | 18 |
| *Investigación y Ciencia* | 15 |
| *Educación Matemática* | 14 |
| *American Mathematical Monthly* | 13 |
| *Recherches en Didactique des Mathématiques* | 12 |
| *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas* | 11 |
| *Journal for Reserch in Mathematics Education* | 10 |

Tabla 4. Revistas más citadas en *Suma*

## Resultados del análisis temático

El análisis temático se ha basado en las variables definidas en la *Mathematics Education Subject Classification (MESC)*, para la base de datos *MathEduc*. La *MESC* se basa en un sistema de etiquetas constituidas por una letra mayúscula seguida de dos dígitos. La letra hace referencia a la categoría temática general, el primer dígito a la subcategoría dentro de ella en la que enmarcamos el trabajo, y el segundo dígito hace referencia al nivel educativo. Veamos un ejemplo: la letra G se asigna a la Geometría, como veremos enseguida. Dentro de la G hay 9 subcategorías (G10, ...., G90); por ejemplo, la G20 es para los trabajos relacionados con áreas y volúmenes. Pues bien, un trabajo catalogado con la etiqueta G22, trataría sobre áreas y volúmenes en Educación Primaria.

En primer lugar se ha consultado la catalogación de la base de datos *MathEduc* para cada artículo, respetándose el etiquetado cuando existía y, en los casos en los que el artículo no estaba catalogado conceptualmente, hemos realizado nosotros la catalogación. De los 242 artículos publicados en la revista *Suma* en el periodo que estudiamos, 157 (64,9 %) aparecían indexados en *MathEduc* y 85 (35,1 %) de ellos estaban sin clasificar conceptualmente y han sido catalogados por los autores de este estudio.

En la tabla 5 se presentan los resultados por categoría comprobándose el interés del profesorado del área por un variado y completo conjunto de tópicos que responde a la problemática actual de la Educación Matemática. Sólo se observan tres variables sin presencia significativa que, como es lógico, son las relacionadas con la informática, campo temático incluido en la catalogación de *MESC*.

Además de la categoría A, que como "cajón de sastre" recoge un considerable número de catalogaciones, destacan los artículos que tratan temas relacionados con la categoría D (Educación e Instrucción en Matemáticas) que se ocupa de lo relacionado con los procesos de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva de la educación, y la M (Modelos matemáticos y Matemáticas Aplicadas), en coherencia con la preocupación actual del profesorado por el enfoque práctico de la enseñanza de las Matemáticas y su orientación hacia el desarrollo de las competencias básicas.

*Nos ha llamado la atención el considerable número de trabajos dedicados a la Historia de las Matemáticas, a la Matemática Recreativa en general y a Arte, Literatura y Matemáticas.*

Por otro lado, un 37,6 % de los trabajos se centran en aspectos fundamentalmente curriculares (categorías F, G, H, I y K) y entre ellos destacan los artículos que tratan sobre Geometría, Aritmética y Análisis Matemático.

Mayor presencia esperábamos de los trabajos relacionados con "Materiales y Recursos Educativos", ya que en otros análisis más amplios se ha constatado un incremento en esta temática, sobre todo en los trabajos centrados en el uso educativo de los recursos TIC en la clase de Matemáticas. No obstante, si se encuentran en la revista bastantes experiencias para el aula relacionadas con las TIC.

| **Categorías temáticas** | **Frecuencia** | **Porcentaje** |
|---|---|---|
| A: General | 53 | 16,1 % |
| B: Política Educativa y Sistema Educativo. | 8 | 2,4 % |
| C: Psicología de la Educación Matemática.... | 23 | 7 % |
| D: Educación e Instrucción en Matemáticas | 44 | 13,3 % |
| E: Fundamentos de las Matemáticas | 12 | 3,6 % |
| F: Aritmética. Teoría de los Números. Cantidades | 30 | 9,1 % |
| G: Geometría. | 33 | 10 % |
| H: Álgebra | 12 | 3,6 % |
| I: Análisis | 24 | 7,3 % |
| K: Combinatoria y Teoría de Grafos. Estadística.... | 25 | 7,6 % |
| M: Modelos Matemáticos, Matemáticas Aplicadas | 38 | 11,5 % |
| N: Matemáticas Numéricas. Matemáticas Discretas... | 8 | 2,4 % |
| P: Informática | 6 | 1,8 % |
| Q: Educación Informática | 0 | 0 % |
| R: Aplicaciones de la Informática | 2 | 0,6 % |
| U: Materiales y Medios Educativos... | 12 | 3,6 % |
| **Total de etiquetas** | 330 | 100 % |

Tabla 5. Artículos de *Suma* agrupados por categorías

Si nos centramos en los temas más concretos (subcategorías temáticas), nos ha llamado la atención el considerable número de trabajos catalogados con la etiquetas A30, A20 y M80, destinadas respectivamente a la Historia de las Matemáticas, a la Matemática Recreativa en general y a Arte, Literatura y Matemáticas. Quizá, además de la inquietud del profesorado por encontrar alternativas metodológicas que hagan más atractivas las Matemáticas, exista una motivación particular por el propio disfrute en torno a cuestiones que probablemente no estén destinadas a su aplicación en el aula.

Por último, hemos de comentar que en más de la mitad de los casos no se hace referencia al nivel educativo al que van dirigidos los trabajos (53 %) y, entre los trabajos en los que se indica esta característica, destacan los destinados a la enseñanza universitaria, mientras que los que se centran en la E.S.O. y Bachillerato doblan exactamente a los destinados a Educación Infantil y Educación Primaria.

| Nivel educativo | N. de etiquetas |
|---|---|
| 0: General | 246 |
| 1: Educación infantil | 33 |
| 2: Educación primaria | 24 |
| 3: Educación secundaria elemental (ESO) | 39 |
| 4: Educación secundaria superior (Bachillerato) | 44 |
| 5: Enseñanza universitaria | 11 |
| 6: Educación especial | 6 |
| 7: Formación profesional | 0 |
| 8: Facultades y escuelas de educación. Formación a distancia | 7 |
| 9: Formación del profesorado | 7 |
| | 124 |

Tabla 6. Frecuencias de los niveles educativos en la revista *Epsilon*

## Interpretación de los resultados. Conclusiones

A través del presente estudio se constata un nivel aceptable de concordancia con la producción científica en el ámbito de las Ciencias Sociales en el comportamiento, tanto de los indicadores bibliométricos de producción, colaboración y citación, como en la temática, siendo ésta semejante a la observada en otros estudios realzados en el campo de la Educación Matemática en España.

La revista se mantiene regular en sus publicaciones de tres números al año en los meses de febrero, junio y noviembre. En cuanto al contenido, este ha variado un poco a lo largo del periodo analizado, observándose un ligero descenso en el número de artículos a partir del año 2006, mientras que aumentaron las experiencias en el aula, trabajos divulgativos, etc. En cualquier caso, nos encontramos sin duda ante una de las publicaciones más leídas por el profesorado de Matemáticas español, como demuestra su destacada presencia entre las revistas más citadas en otros estudios (Maz-Machado et al, 2011; Bracho, 2010) y su aventajado primer puesto entre las más citadas en este trabajo.

Por otro lado, cabe destacar el especial interés que despierta entre el profesorado de E. Secundaria y el protagonismo de este colectivo profesional en lo relativo a participación, algo que explica en buena medida los contenidos a los que acabamos de hacer referencia y ciertas caracterizaciones observadas en algunos de los indicadores cienciométricos estudiados, como son los porcentajes de artículos y de libros citados y el número de autocitas, entre otros. En todo caso, en el análisis de los indicadores de citación se obtienen resultados bastante esperados, lo cual nos transmite una sensación de normalidad que, en general, es un buen indicador del nivel científico de la revista, si bien es cierto que en este caso no se cumple con nivel de significación la Ley de Lotka, sin duda uno de los patrones característicos de la producción científica.

A nivel de colaboración en la autoría, se observa una tendencia relativamente individualista en consonancia con lo que es habitual en las Ciencias Sociales. Si acaso, se han detectado algunas pequeñas redes integradas por pocos autores que no pueden llegar a considerarse como los denominados “colegios invisibles”. Este hecho podría estar motivado por la escasa costumbre asociacionista en lo relativo a investigación educativa entre el profesorado no universitario, en buena parte responsable y receptor de los contenidos que se publican en la revista *Suma*.

De hecho, en el plano institucional, prevalecen los autores vinculados a institutos de E. Secundaria, aunque las instituciones más productivas suelen ser universidades, lo cual demuestra que también hay una presencia notable de artículos de investigación en la revista, una característica que creemos que vale la pena seguir manteniendo viva.

> *Nos encontramos sin duda ante una de las publicaciones más leídas por el profesorado de Matemáticas español, como demuestra su destacada presencia entre las revistas más citadas en otros estudios y su aventajado primer puesto entre las más citadas en este trabajo.*

En lo relativo al análisis temático de los documentos, se ha podido comprobar que se aborda un variado conjunto de temáticas que cubre todo el espectro de interés del profesorado de Matemáticas, destacando los trabajos que tratan temas relacionados con aspectos curriculares y, en particular, con cuestiones de naturaleza práctica en coherencia con la tendencia actual de orientar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas hacia el desarrollo de las competencias básicas. En definitiva, concluimos que se ha podido constatar tanto la presencia regular y mantenida de artículos en la revista *Suma* a los largo de los últimos años, como el comportamiento biliométrico y conceptual de estos documentos de acuerdo con los estándares de las Ciencias Sociales en general y de la Educación Matemática en particular, observándose, eso sí, ciertas características propias a tener en cuenta. ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batagelj, V. y Mrvar, A. (2007). Pajek software, [Descargado el 12 de febrero de 2009 a partir de http://pajek.imfm.si/doku.php].

Bordon, M. y Gómez, I. (1997). La actividad científica española a través de los indicadores bibliométricos en el periodo 1990-93. Revista General de Información y Documentación, 7(2), 69-86.

Bracho, R. (2010). *Visibilidad de la investigación en Educación Matemática en España. Análisis cienciometríco y conceptual de revistas científicas (1999-2008).* Universidad de Córdoba.

Bracho-López, R, Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N. y Torralbo, M. (2011). La investigación en Educación Matemática en la revista Epsilon. Análisis cienciométrico y temático (2000-2009). *Epsilon, 27*(2), 11-27.

Cañedo, R. A. (2003). Análisis del conocimiento, la información y la comunicación como categorías reflejas en el marco de la ciencia. *ACIMED (*Revista en línea), *11*(4), 53. Disponible: http://infomed.sld.cu/revistas/aci/vol11_4_03/aci02403.htm (Consulta: 2004, Septiembre 20).

Lotka, A. F. (1926). The frequency distribution of scientific productivity. *Journal of Washington Acadimy of Science, 16*, 317-323.

Maz-Machado, A., Bracho, R., Torralbo, M., Gutiérrez, M. P. y Hidalgo, M. D. (2011). La investigación en Educación Matemática en España: los simposios de la SEIEM. *PNA*, 5(4), 128-140.

Maz-Machado, A., Torralbo, M., Vallejo, M., Fernández-Cano, A. y Rico, L. (2009). La educación matemática en la revista enseñanza de las ciencias: 1983-2006. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(2), 185-194.

Mendoza, S. y Paravic, T. (2006). Origen, clasificación y desafíos de las Revistas Científicas. *Investigación y Postgrado, 21* (1), 49-75.

Pao, M. L. (1985). Lotka´s law: a testing procedure. *Information Processing & Management, 21*(4), 305-320.

Price, J. D. S. (1986). *Little Science, Big Science and beyond.* Nueva York: Columbia University Press.

SUMA (2011). *Historia de la revista Suma*. Recuperado el 7 de abril de 2001 a partir de http://www.revistasuma.es.

Terrada, M. L. y Peris, R. (1988). *Lecciones de Documentación Médica*. Valencia: Cátedra de documentación médica.

Torralbo, M. (2002). *Análisis cienciométrico, conceptual y metodológico de las tesis doctorales españolas en Educación Matemática*. Universidad de Córdoba.

Torralbo, M., Fernández-Cano, A., Rico, L., Maz, A., y Gutiérrez, Mª. P. (2003). Tesis doctorales españolas en Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, nº 21 (2). 295-305.

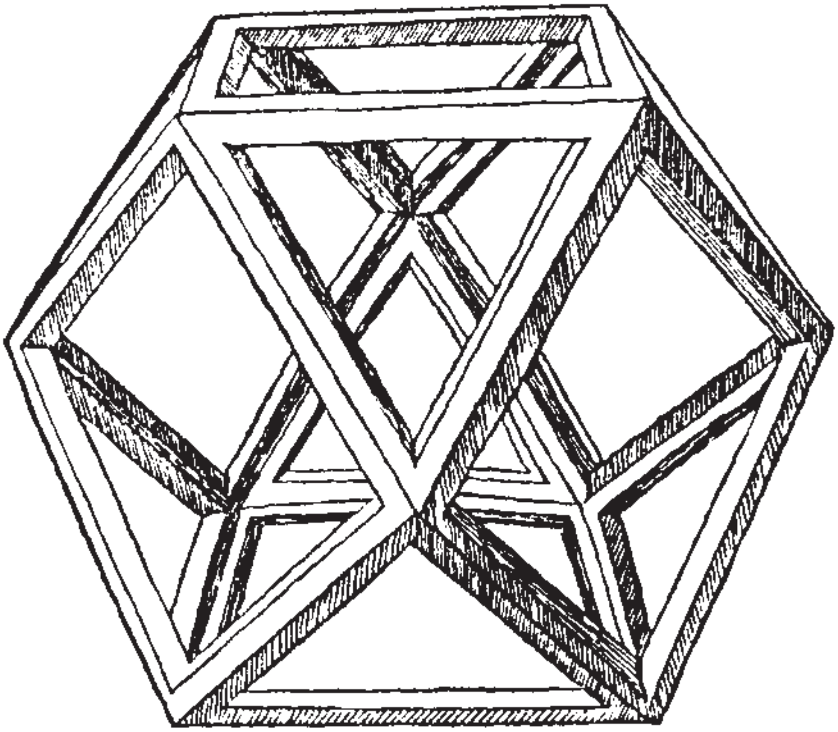
Urbizagástegui, R. (2005). La productividad científica de los autores. Un modelo de aplicación de la ley de Lotka por el método del poder inverso generalizado. *Información, cultura y sociedad, 12*(21-73).

Vallejo, R. (2010). *Estúdio longitudinal de La producción española de tesis doctorales en Educación Matemática (1975-2002).* Universidad de Granada.

Vallejo, M., Fernández-Cano, M. Torralbo, M., Maz, A. y Rico, L. (2008). History of Spanish Mathematics Education focusin on PhD Theses. *International Journal os Science and Mathematics Education, 6*(2), 313-327.

Este artículo fue recibido en *Suma* en mayo de 2011 y aceptado para su publicación en octubre de 2011

suma+



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

# poliedro

suma+ 68
Noviembre 2011, pp.57-60

# Baraja de funciones

Quienes estamos preocupados por cómo enseñar nuestra materia diariamente, enfrentándonos muchas veces a alumnos desmotivados que no tienen ningún interés en lo que les mostramos, solemos usar distintos tipos de recursos para hacer que nuestro alumnado se interese y participe en la construcción de su conocimiento de una forma activa. Los que llevamos algún año en esto de la enseñanza sabemos que por muy atractivo y motivador que sea un recurso no conviene abusar de él, pues termina perdiendo su efectividad e interés. Por eso es conveniente, desde nuestra modesta opinión, alternar los materiales y recursos y utilizar aquellos que sean más interesantes en cada momento. Hay partes de las matemáticas en que es más útil un recurso que otro y, el alternarlos, hace que el curso sea más diverso y no se pierda el interés en conocer cosas nuevas o practicar lo ya aprendido.

Hoy vamos a dedicar la sección a un juego cuyo contenido está relacionado con las tablas y gráficas. Cuando trabajamos estos contenidos no suele ser corriente la presencia de juegos, posiblemente porque se pueden trabajar con otros recursos mucho más potentes, como por ejemplo el uso de los medios de comunicación o de los programas para representar gráficas de los que hay multitud de ejemplos en Internet y de los que no podemos dejar de citar a *Geogebra* por su versatilidad y constante evolución.

La mayoría de juegos que conocemos referidos al bloque de funciones y gráficas pertenecen a la familia de los denominados por Fernando Corbalán como *juegos de procedimiento conocido*, es decir, aquellos cuyas reglas de juego se conocen desde tempranas edades, por ser practicados en ambientes familiares o sociales antes que en los escolares, como son bingos, puzzles dominós o barajas de cartas; algunos muy interesantes se pueden encontrar comercializados por *Proyecto Sur Ediciones*.

Nosotros vamos a presentar un ejemplo de baraja que hemos construido y con el que hemos trabajado en nuestras clases.

## Baraja de funciones

El juego tiene como objetivo familiarizarse y reconocer funciones elementales y predecir por su expresión la forma y sus características mas destacadas.

Esta baraja se compone de 40 cartas en las que aparecen funciones lineales, cuadráticas y de proporcionalidad inversa. Está diseñada como un juego de parejas y por eso consta de 20 cartas con gráficas de funciones y otras 20 con algo que las

**Grupo Alquerque de Sevilla**

*Constituido por:*
**Juan Antonio Hans Martín.** *CC Santa María de los Reyes.*
**José Muñoz Santonja.** *IES Macarena.*
**Antonio Fernández-Aliseda Redondo.** *IES Camas.*
*juegos@revistasuma.es*

distingue, que puede ser la expresión algebraica de la función, una tabla de valores o un enunciado que nos dé referencia sobre qué función le corresponde. El objetivo es, por tanto, emparejar cada gráfica con la carta correspondiente. Veamos las instrucciones del juego.

Juego de cartas: de tres a cinco jugadores.

Material: una baraja de 40 cartas con funciones.

Reglas del juego:

– Se barajan las cartas y se esconde una de ellas.
– Se reparten las cartas entre los jugadores y el que reparte se queda con una menos.
– Cada jugador intenta emparejar las cartas que tengan representaciones gráficas con las cartas donde se describan éstas (bien por una relación, por una tabla, o por un enunciado). Las parejas que consiga las aparta en la mesa. Por cada pareja correcta se anota un punto.
– En la segunda fase el primer jugador que recibió carta comienza a jugar.
– Cada jugador en su turno roba una carta del jugador que tiene a su derecha; si consigue formar pareja la descarta, anotándose el punto correspondiente, en caso contrario pasa el turno.
– La partida termina cuando todas las cartas se han emparejado, salvo la correspondiente a la escondida. El jugador que tiene esa carta es penalizado con tres puntos.
– Se juegan varias partidas y gana quien tenga más puntos anotados.

La baraja de compone de 14 gráficas con funciones lineales, bien sean constantes, de proporcionalidad directa o afines; de tres cartas de gráficas de 2º grado y de tres de proporcionalidad inversa. Si se quiere se pueden retirar estas seis últimas funciones y jugar solo con aquellas que tienen una gráfica formada por una línea recta, según el nivel en el que queramos utilizarla.

Otra forma de jugar sólo con las gráficas lineales es la siguiente:

Reglas del juego:

– Juegan sólo dos jugadores con las catorce cartas correspondientes a las gráficas representadas por una recta.
– Se barajan las 14 cartas y se coloca boca abajo el mazo en medio de los dos jugadores.
– Por turno, cada jugador levanta una carta, la expone en la mesa y tiene que decir de qué tipo es (lineal, afín, constante, creciente, decreciente…), indicando en cada caso su pendiente y su ordenada en el origen.
– Por cada acierto se anota un punto. Si se equivoca y el contrario lo descubre, pierde el turno y el punto se lo anota el contrario si indica cuál es la solución correcta.
– Gana el que tenga más puntos al terminar el mazo.

Este segundo juego es más rápido, pero no puede repetirse varias veces pues los jugadores terminan aprendiéndose los datos correspondientes, mientras que el primer juego sí es posible repetirlo más de una vez durante el tiempo de una clase.

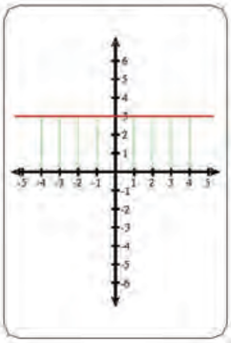
Es evidente la versatilidad de este tipo de juego pues el número de cartas, los conceptos matemáticos representados y los tipos de funciones se pueden modificar a gusto del profesor según las necesidades del grupo en que se vaya a utilizar.

Vamos por último con las cartas.

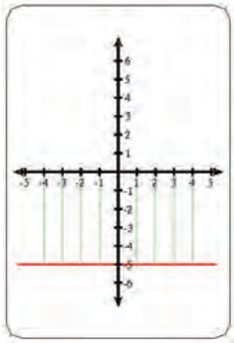
***JUEGOS*** ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en abril de 2011 y aceptado en septiembre de 2011 para su publicación.

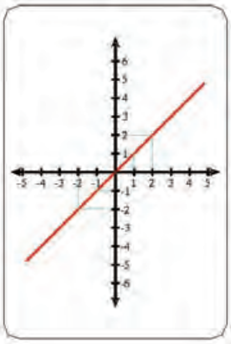
| x | y |
|---|---|
| -2 | 3 |
| -1 | 3 |
| 0 | 3 |
| 1 | 3 |
| 2 | 3 |



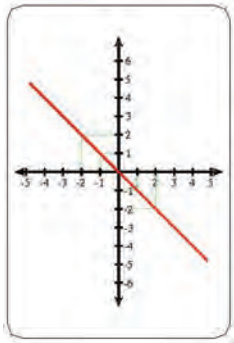
La temperatura (y) de mi congelador es siempre - 5º C



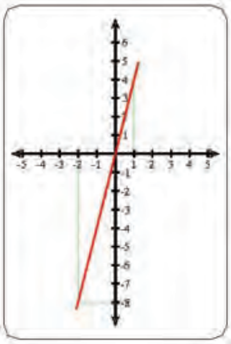
$$y = x$$



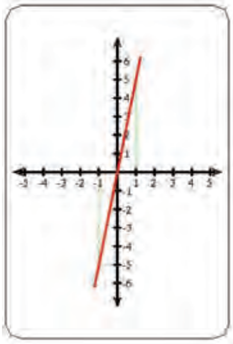
No nos ponemos de acuerdo. Si tú dices un número, yo digo su opuesto.



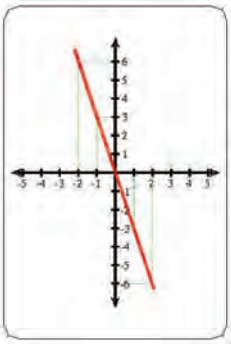
| x | y |
|---|---|
| -2 | -8 |
| -1 | -4 |
| 0 | 0 |
| 1 | 4 |
| 2 | 8 |



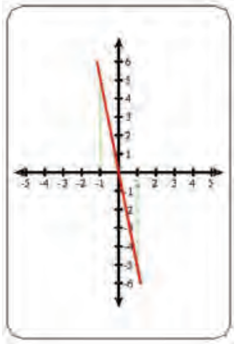
El precio del kilogramo de plátanos (y) es el quíntuplo del precio del kilogramo de sandías (x).



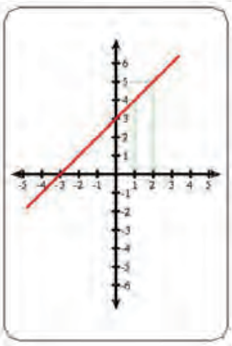
| x | y |
|---|---|
| -2 | 6 |
| -1 | 3 |
| 0 | 0 |
| 1 | -3 |
| 2 | -6 |



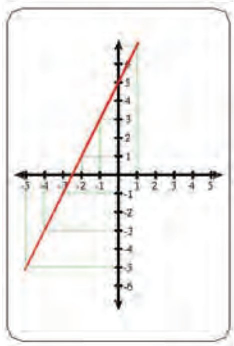
$$y = -5x$$



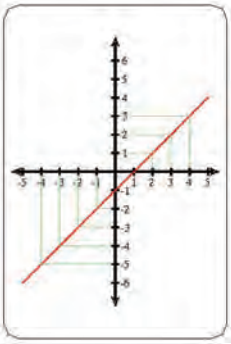
El dinero de Juan (y) supera en 3 euros al de Eva (x).



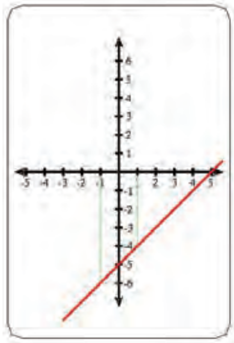
$$y = 5 + 2x$$



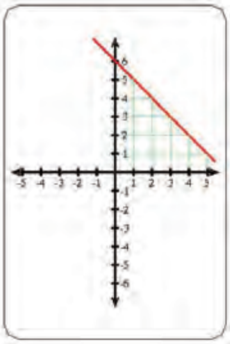
| x | y |
|---|---|
| -1 | -2 |
| 0 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |



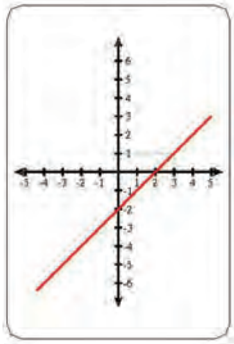
$$y = x - 5$$



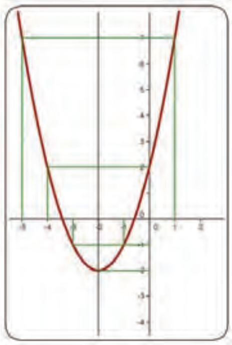
| x | y |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 1 | 5 |
| 2 | 4 |
| 3 | 3 |



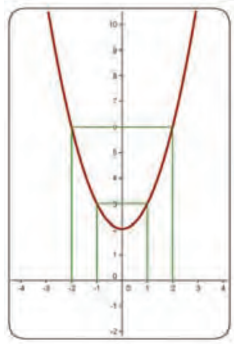
$$2 = x - y$$



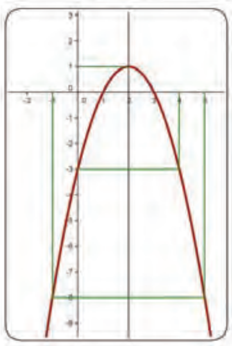
La gráfica representa a la función cuadrática de eje x = - 2



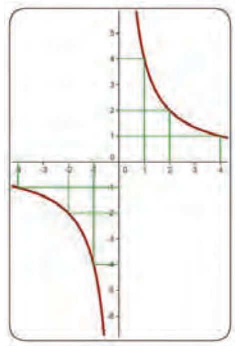
La gráfica representa el cuadrado de un número más 2



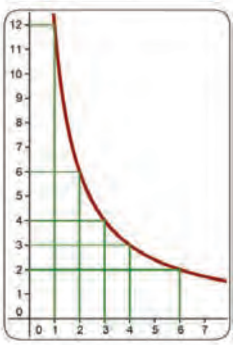
$$y=-x^2+4x-3$$



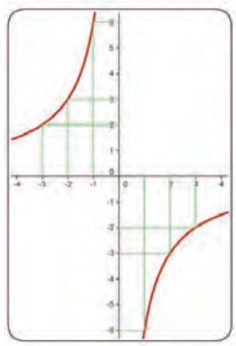
El producto de dos números es 4



| x | y |
|---|---|
| 1 | 12 |
| 2 | 6 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |



$$y=\frac{-6}{x}$$



suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 61-70

# Configurando Gcompris para atender la diversidad en matemáticas

En los dos números anteriores de *Suma* hemos podido ver las posibilidades que nos ofrece la aplicación Gcompris para el área de matemáticas con algunas de sus herramientas. En esta ocasión nos proponemos una tarea doble. Por una parte vamos a tratar otras herramientas de contenido matemático con las que cuenta la aplicación y que resultan de interés para su uso en el aula de matemáticas y por otra, vamos a tratar de personalizar la aplicación para cada uno de los grupos o cada uno de los alumnos a los que les impartamos clase de forma que adaptemos las actividades al nivel adecuado para cada alumno o alumna.

Comenzamos siguiendo con el recorrido por las herramientas con las que cuenta Gcompris y que son realmente útiles en el aula de matemáticas. Recordemos que en los anteriores artículos ya habíamos hecho un recorrido por algunas de las utilidades con las que cuenta la aplicación y que son de interés para el uso en la clase de matemáticas, y por otras con las que contaba Gcompris que habían sido especialmente diseñadas para esta materia.

Al entrar Gcompris podíamos seleccionar entre varios conjuntos de herramientas, el grupo que nos interesaba. En este momento vamos a desglosar algunas de las utilidades que aparecen en la parte de matemáticas. Para acceder a ellas debemos pulsar sobre el quinto botón del menú lateral izquierdo que observamos en la imagen 1. Al pulsar sobre este botón nos encontramos con la pantalla que podemos observar en la misma.


Imagen 1: Pantalla de las actividades de matemáticas

**Mariano Real Pérez**
*CEP de Sevilla*
*matemastic@revistasuma.es*

Las actividades que se agrupan tras los dos primeros iconos que aparecen en la parte central de esta pantalla ya las habíamos visto. Recordamos cada uno de ellos conducía a un grupo distinto, el primero de los iconos daba paso a las actividades de cálculo, mientras que el segundo servía de entrada a las actividades de geometría.

Ahora vamos a realizar un recorrido por las actividades que se encuentran tras el tercer y último icono en el que observamos una hoja blanca con los números 1, 2 y 3. Este icono va a dar paso a las actividades de numeración.

Si pulsamos sobre este tercer icono accedemos a la pantalla que observamos en la imagen 2.


Imagen 2: Pantalla de actividades de numeración

En esta pantalla contemplamos que nos proponen 10 tipos de actividades diferentes. Vamos a realizar un recorrido por ellas comenzando de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

Nos llama la atención en esta pantalla que las actividades ya aparecen marcadas por el símbolo que representa el nivel al que se dirigen y que ya tratamos en el artículo del número anterior. Además, se han colocado las actividades por orden creciente según el nivel al que están dirigidas. Observamos también que los iconos comunes que aparecen en la barra horizontal inferior ya son conocidos y en este caso, los iconos de izquierda a derecha nos facilitan: salir de la aplicación, acceder a la pantalla de créditos de la aplicación, configurar Gcompris y, por último, en el que aparece el signo de interrogación, información de ayuda sobre la pantalla en la que nos encontramos.

Comenzamos con la primera de las actividades a la que se accede pulsando sobre la tortuga de la imagen 2. Al pinchar sobre ella accedemos a la pantalla que aparece en la imagen 3.

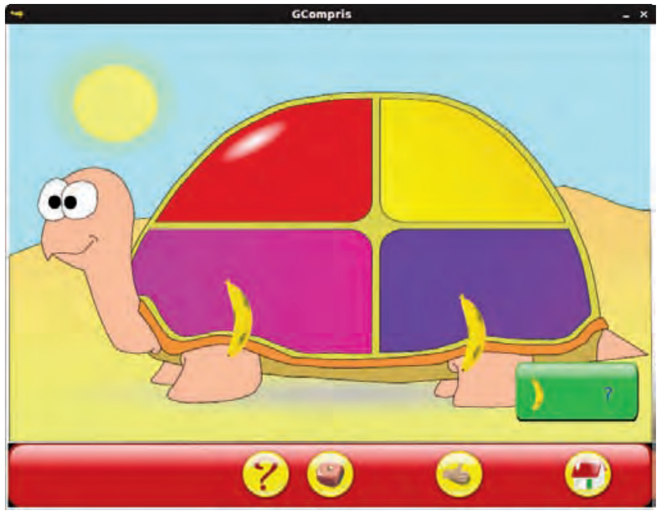



Imagen 3: Cuenta los elementos

La actividad se denomina “Cuenta los elementos” y está dirigida para el alumnado más de menor edad. Observamos en la pantalla que aparecen dos plátanos en el área de trabajo. En este caso el usuario debe pulsar sobre el recuadro verde y escribir el número de unidades que aparecen en el área de trabajo que sean iguales a las que nos indican en el dibujo que hay en la zona verde, que en este caso es un plátano.

Para facilitarle el recuento al alumnado, observamos que como fondo se encuentra una tortuga con un caparazón dividido en 4 colores, de forma que el alumnado pueda agrupar en cada área del mismo color los objetos que sean iguales antes de escribir su respuesta. Vamos, aquello de que no se sumen peras con naranjas que repetimos tantas veces en clase.

Cuando haya escrito su respuesta, deberá pulsar con el ratón sobre la mano que se encuentra en la barra horizontal inferior y el ordenador le indicará si lo ha hecho bien o no. La forma de indicarlo será a través de los gráficos a los que ya nos tiene acostumbrado esta aplicación y de señales sonoras que animan al usuario.

En la barra horizontal nos indican también que esta actividad tiene distintos niveles ya que aparece un dado que, en la imagen 3 nos informa de que estamos en el nivel 1. El máximo nivel es el 9 en el que ya aparecen hasta 5 elementos distintos en cantidades diferentes cada uno. El alumnado deberá hacer lo mismo, agrupar primero los elementos que sean iguales y responder posteriormente la cantidad de elementos de cada tipo que aparecen en la pantalla.

Volvemos ahora a la imagen 2. El segundo icono que aparece son dos dados. Este icono nos conduce a la pantalla que podemos ver en la imagen 4.


Imagen 4: Números con dados

Esta actividad se llama “Números con dados” y es una actividad con un objetivo muy sencillo. En este caso, observamos que van cayendo desde la parte superior de la pantalla parejas de dados. El objetivo es que los dados no lleguen a la parte inferior de la pantalla. Para conseguir el objetivo, el alumnado deberá escribir el número que resulta de sumar los puntos que aparecen en la pareja de dados. Cuando escriba el resultado correcto, esa pareja desaparecerá de la pantalla.

Si existe más de una pareja que coincide en la suma de sus puntos, desaparecerán todas esas parejas.

Según observamos en la barra horizontal inferior, el juego también tiene distintos niveles. Concretamente, en la imagen 4 observamos que nos encontramos en el nivel 1. A medida que vamos avanzando en las pantallas observamos que la actividad se complica ya que aparece un mayor número de parejas de dados y la velocidad a la que caen es cada vez mayor, lo que conlleva que los alumnos deban hacer la operaciones mentales más rápidamente.

Volvemos ahora a la imagen 2 y vamos a ver la actividad que se oculta tras el tercer icono que en este caso tiene forma de capirote de mago con un símbolo de suma. Si pulsamos sobre este icono accedemos a la pantalla que se observa en la imagen 5.

Esta actividad se denomina “El sombrero de mago”. En un principio aparecen dos filas superiores de estrellas de las que hay iluminadas unas cuantas. Debajo aparece otra fila de estrellas de las que también hay iluminadas algunas. Lo que debe hacer el alumnado es pulsar sobre el sobrero y entonces, las estrellas iluminadas se esconden debajo del sobrero. Posteriormente, deberá pulsar con el ratón, de izquierda a derecha sobre tantas estrellas de la fila inferior, como crea que hay escondidas debajo del sobrero, que evidentemente, son la

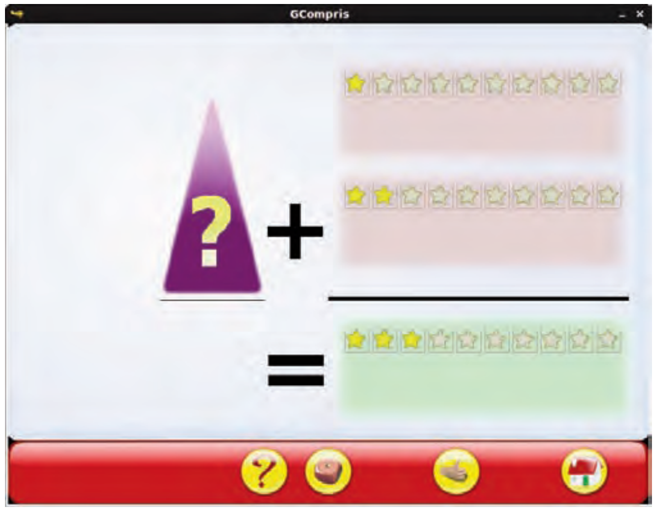



Imagen 5: Sombrero de mago

suma. Cuando haya pulsado las que considere que hay, deberá pulsar sobre la mano que aparece en la barra horizontal inferior y la aplicación le indicará si lo ha hecho bien o no. Nuevamente observamos que esta actividad tiene distintos niveles ya que aparece el dado en esa barra horizontal.

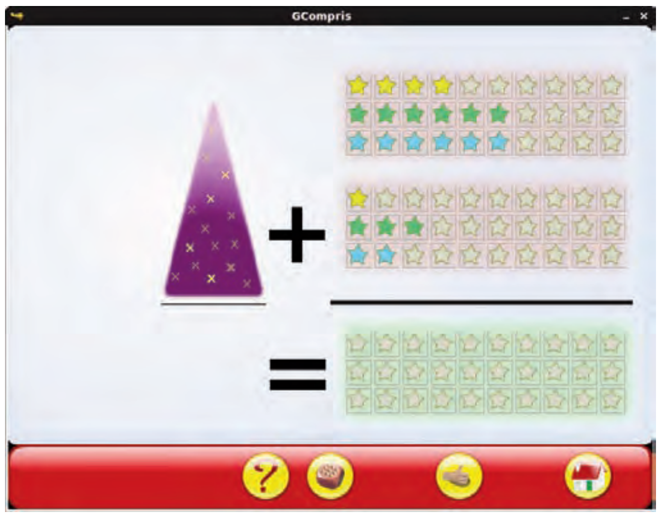



Imagen 6: Nivel 9 del sobrero de mago

En esta actividad los niveles de dificultad son del 1 al 9. A medida que vamos avanzando de nivel, nos encontraremos que aparecen estrellas de distintos colores como observamos en la imagen 6. Allí, los alumnos y alumnas deberán sumar las estrellas que aparecen de cada uno de los colores e indicarlo en la zona inferior. Posteriormente, la actividad funciona de la misma forma, es decir, deberán pulsar sobre la mano que aparece en la barra horizontal inferior y la aplicación le indicará con mensaje sonoro y visual si lo ha hecho bien o no.

Si observamos nuevamente la imagen 2, vemos que la siguiente actividad tiene el mismo icono que esta que hemos visto, pero se diferencia en que en lugar de un símbolo de suma tiene un símbolo de resta. Esa otra actividad tiene el mismo funcionamiento y la pantalla es la misma que la de la actividad que acabamos de ver. Únicamente se diferencia de ésta en que debemos restarle a las estrellas que aparecen en la parte superior, las estrellas que aparecen en la parte inferior. Todo el resto de la actividad así como las acciones que deben hacer los alumnos y alumnas son las mismas.

Seguimos adelante con las actividades que nos proponen en la imagen 2 y nos fijamos ahora en el quinto icono en el que aparece un billete con la cifra 50 euros. Al pulsar sobre ese icono accedemos a la pantalla que podemos ver en la imagen 7.

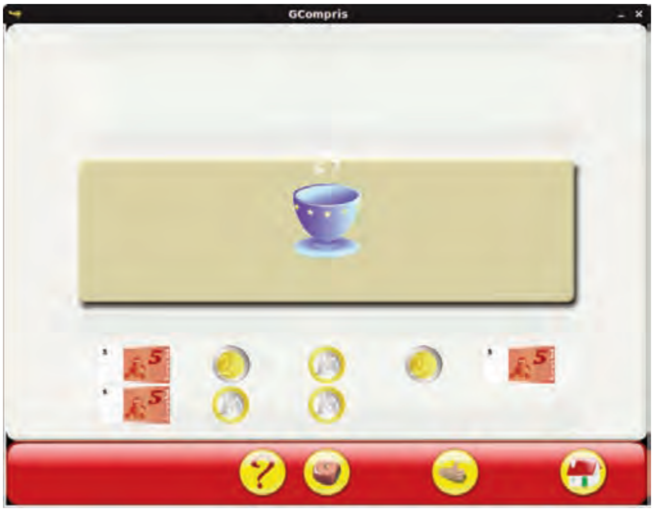



Imagen 7: Dinero

Esta actividad se llama "Dinero". En la pantalla de la imagen 7 observamos que aparece una taza con un valor en euros del precio que tiene. Debajo de ella aparecen billetes y monedas de Euros con sus correspondientes valores. Aunque las monedas están bastante bien conseguidas, no sucede lo mismo con los billetes.

El objetivo que persigue la actividad es que el alumnado sepa manejar el dinero. Para ello, deberán pulsar sobre las monedas y billetes que entregarían para comprar el objeto que aparece, en este caso, la taza. A medida que van pulsando, los billetes y monedas seleccionadas pasan a la parte superior de la pantalla. Cuando consideren que ya tienen el dinero justo para comprar el objeto deberán pulsar sobre la mano que aparece en la barra horizontal inferior y la aplicación les indicará si lo han hecho bien o no.

Según observamos en la imagen 7, la solución no es única, ya que en este caso podrían haber utilizado un billete de 5 euros y una moneda de 2, pero también cabe la posibilidad de utilizar dos monedas de dos euros y tres de un euro. Con una solución que se encuentre es suficiente.

Según podemos apreciar en la imagen 7, esta actividad tiene distintos niveles. A medida que vamos avanzando en las pantallas observamos que la dificultad aumenta. En este caso la dificultad va a aumentar de dos formas. Por una parte el número de billetes y monedas va a ser más variado y por otro, en lugar de tener que indicar el dinero que vamos a utilizar para comprar un objeto, vamos a tener que indicar el dinero que vamos a poder utilizar para comprar varios objetos. Llegando a aparecer hasta 4 objetos distintos que debemos pagar a la vez y todos los billetes posibles y las monedas de uno y dos euros.

En la imagen 2 aparece también un icono que nos va a conducir a una actividad muy parecida a esta. Nos referimos al noveno icono que nos conduce a la misma actividad, pero en esa ya no se utilizan los billetes y las monedas de uno y dos euros, sino que se utilizan todas las monedas posibles: 1 céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos....

En ese caso la actividad se complica un poco más ya que se deben utilizar números decimales, pero el funcionamiento es el mismo. Es más, la actividad se llama igual.

Usando estas dos actividades introducimos a nuestros alumnos en el manejo de la moneda.

Si volvemos a la imagen 2, nos encontramos el sexto icono que viene representado por un helicóptero amarillo. Al pulsar sobre este helicóptero accedemos a la pantalla que observamos en la imagen 8.


Imagen 8: Números ordenados

La actividad a la que acabamos de acceder es a la de números ordenados. En esta ocasión, la pantalla que se le presenta a los alumnos y alumnas es un cielo azul sobre el que aparece volando un helicóptero. El helicóptero se maneja con los cursores del teclado con los que podremos mover el helicóptero en todas las direcciones. Sobre el cielo van apareciendo nubes con un número que deberá ir cogiendo el helicóptero, pero siguiendo el orden de los números naturales. De esta forma, no se deberán coger todas las nubes que aparecen, sino aquella que contenga el número siguiente al que se cogió, comenzando por el uno.

En la barra horizontal inferior observamos que aparece un dado, lo que indica que la actividad tiene distintos niveles. En este caso, los niveles de dificultad son dos. Esa dificultad radican en que en el segundo nivel aparecen más nubes que en el primero.

Volvemos ahora a la imagen 2 para fijarnos en el séptimo icono en el que aparece el pingüino Tux con un dado y un pez. Si pulsamos sobre este icono accedemos a la pantalla que observamos en la imagen 9.


Imagen 9: Comiendo peces

En este caso nos indican que vamos a practicar la resta con un juego divertido. Según observamos en la pantalla de la imagen 9, aparecen varios escalones de hielo, un dado, un pez y un reloj. El objetivo de la actividad es que Tux se coma al pez que aparece, para ello se debe situar en el bloque en el que está el pez. Lo que el alumnado debe hacer es pulsar sobre el dado y si obtiene una puntuación inferior o igual a la que separan a Tux del Pez debe pulsar sobre el escalón hasta el que avanzará Tux. Posteriormente pulsará sobre la mano que aparece en la barra horizontal inferior y la aplicación le indicará si lo ha hecho bien o no. Si la puntuación obtenida es superior a la distancia que los separa, volverá a lanzar el dado. Con esto, el alumnado practicará los números *menores que* y *mayores que*.

Como aparece un dado en la barra inferior, sabemos que la actividad tiene distintos niveles. A medida que avanzamos, la actividad se complica ya que aparece un número mayor de escalones y en lugar de un dado, debemos lanzar dos e incluso tres. En una de las últimas pantallas nos encontramos que el recorrido lo componen 38 escalones y debemos lanzar tres dados a la vez.

Seguimos adelante con las actividades de numeración y nos volvemos a fijar en la imagen 2. En esta ocasión, en el octavo icono. Si pulsamos sobre el segundo helicóptero amarillo que aparece en la imagen 2 nos aparece la pantalla de la imagen 10.


Imagen 10: Adivina un número

En esta actividad llamada "Adivina un número", los alumnos y alumnas van a tener que hacer eso, adivinar un número. Observamos en la pantalla que aparece un helicóptero y en la parte de la derecha un hueco por el que tiene que pasar. El helicóptero pasará siempre y cuando el alumnado encuentre el número.

El funcionamiento de la actividad es muy sencillo. En la parte superior derecha de la pantalla que observamos en la imagen 10 aparece un hueco en blanco. El alumno debe adivinar un número entre 1 y 10. En ese hueco en blanco debe escribir el número que considere y posteriormente debe pulsar sobre la mano que aparece en la barra horizontal inferior. Seguidamente, la aplicación le indicará si es mayor o menor. Si no ha acertado el número, podrá escribir otro, teniendo en cuenta la información que le ha dado la aplicación. En el momento que acierte el número, el helicóptero pasará por el hueco que aparece en la parte derecha de la pantalla.

Según observamos en el barra horizontal inferior, esta actividad tiene distintos niveles. A medida que vamos aumentando de nivel, mayor es el intervalo en el que debemos localizar el número (siempre números naturales). Los niveles van del 1 al 4, de forma que en el nivel 4 el alumnado deberá encontrar un número entre 1 y 1000.

Llegamos a la última de las actividades de numeración que nos propone Gcompris. Para acceder a esta actividad debemos fijarnos en el último icono que aparece en la imagen 2. Este icono es un cuadrado rodeado de los números 1, 2, 3 y 4. Si lo pulsamos aparece la pantalla que observamos en la imagen 11.

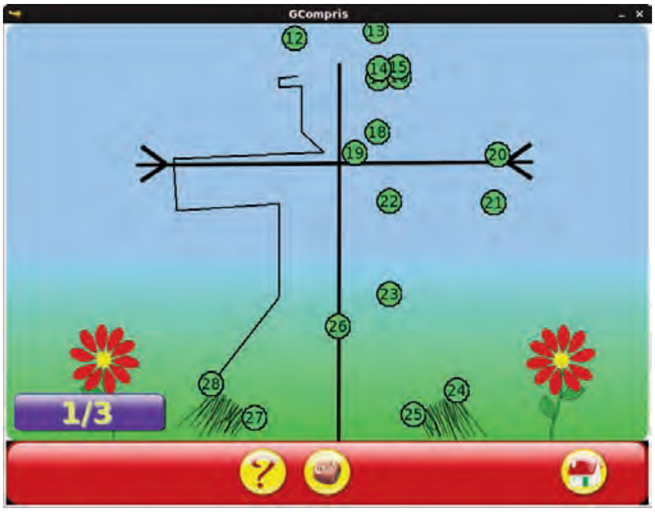



Imagen 11: Dibujar números

La actividad se denomina "Dibujar números". En este caso observamos que aparece una pantalla con varios puntos verdes que contienen en su interior un número. El alumnado deberá ir pulsando sobre todos esos números siguiendo un orden creciente, de forma que a medida que va pulsando aparece una línea recta que une el punto anterior con el que acaba de pulsar. Al final, después de haber recorrido todos los puntos aparecerá una figura. En la imagen 11 podemos adivinar que esa figura es un espantapájaros.

Ahora que hemos terminado con las actividades de numeración pasamos al segundo propósito que nos planteamos al comienzo.

## Configurando Gcompris para atender la diversidad de nuestro alumnado

Nos proponemos ahora hacer un recorrido por otra faceta de este completo programa que nos va a ser muy útil en el aula. El otro aspecto que vamos a tratar en este número es la gestión que podemos hacer en el mismo de nuestro alumnado, de forma que podamos adaptar la aplicación a cada uno de los cursos que tengamos e incluso a cada uno de los alumnos a los que le demos clase.

Cuando instalamos Gcompris (nos basamos en la versión para Linux), se instalan dos aplicaciones. Una denominada "Suite educativa Gcompris" y otra llamada "Administración de Gcompris". La primera de ellas ya la conocemos por los números anteriores en los que hemos visto la utilidad de la aplicación para la clase de matemáticas. La segunda es la que vamos a ver ahora. Si ejecutamos esta segunda aplicación obtenemos la pantalla que observamos en la imagen 12.


Imagen 12: Clases y usuarios en GCompris

En la ventana observamos que en la parte izquierda aparecen cinco opciones que nos van a permitir administrar Gcompris. En la imagen 12 aparece marcada la opción Clases/usuarios. Aquí nos van a permitir configurar las clases que tenemos y el alumnado que hay en cada una de ellas. La forma de hacerlo es muy sencilla. Según podemos observar, la pantalla aparece dividida en dos partes. La parte superior, en la que configuraremos las clases que tenemos y la parte inferior en la que configuraremos el alumnado que hay en cada clase.

Lo primero que debemos hacer es añadir los alumnos que existan. Para ello pulsamos sobre el botón añadir de la parte inferior. De cada alumno/a nos pedirá un nombre de usuario/a, el nombre del alumno/a y su primer apellido y la fecha de nacimiento. Con estos datos ya tendremos creado en la aplicación un usuario para cada alumno/a.

También podemos añadir los alumnos a partir de un archivo. Para ello deberemos disponer de un archivo que tenga la siguiente forma:

usuario;Nombre;Apellido;Fecha de nacimiento

El separador se detectará automáticamente y puede ser «,», «;» o «:»

Para añadir los alumnos de esta forma debemos pulsar sobre el botón "Abrir" que aparece en la parte inferior. En ese momento la aplicación nos pedirá que le indiquemos el archivo que contiene la información del alumnado que deseamos añadir y cuyo formato debe ser el que hemos mencionado anteriormente. Tras indicárselo, la aplicación extraerá la información de todo el alumnado que contenga.

Tras haber dado de alta al alumnado debemos configurar las distintas clases que existan. Para realizar esta acción pulsaremos sobre el botón "añadir" que aparece en la parte superior. Se abrirá una nueva ventana en la que deberemos introducir el nombre de la clase, el nombre del profesor/a y deberemos indicar los/las alumnos/as que pertenece a esa clase de entre los que hemos introducido previamente.

Observamos en la pantalla que en cualquier momento podemos editar la información del alumnado o quitarlo del listado. De la misma forma, en cualquier momento podemos editar una clase o quitarla.

Si nos fijamos en la imagen 12, en nuestro caso hemos creado dos clases. Una llamada 3A cuyo profesor es Mariano Real y otra llamada 3B cuya profesora es Lorena Morales.

En el caso de la imagen 12 está marcada la clase 3A, por lo que el alumnado que observamos en la parte inferior es el que corresponde a esta clase. Si pulsáramos sobre 3B aparecería en la parte inferior el alumnado de esta otra clase. Vemos también que cada alumno tiene su nombre de usuario y que en este caso le hemos puesto el mismo que el nombre del alumno/a.

Otra de las cosas que nos va a ayudar a administrar Gcompris son los grupos. Dentro de cada clase podemos crear los grupos que estimemos convenientes, con lo que podemos adaptar la aplicación a los distintos niveles o avances que observemos en el aula.

Si pulsamos sobre el botón Grupos que aparece en la Imagen 12, observamos la pantalla de la imagen 2.


Imagen 13: pantalla de grupos

Para crear los grupos, debemos seleccionar en la parte superior de la pantalla que observamos en la imagen 13. En nuestro caso hemos seleccionado la clase 3A. Seguidamente pulsamos sobre el botón "Añadir" para crear un grupo en esta clase.

Cuando vamos a crear el grupo nos solicitan un nombre para el grupo y una descripción del mismo. Posteriormente, seleccionamos los alumnos de la clase que pertenecen a este grupo. En nuestro caso hemos creado en la clase 3A un grupo llamado 3A-Especial en cuya descripción hemos indicado "Grupo especial". Hemos indicado que a este grupo pertenecen tres alumnos Antonio Real, Luis Real y Pedro Real según podemos observar en la imagen 13.

De esta forma, en cada clase podemos crear tantos grupos como necesitemos, ofreciéndonos la posibilidad de adaptar la aplicación a cada alumno.


Imagen 14 : Pantalla de perfiles

Si ahora pulsamos sobre el botón “Perfiles” observamos la pantalla que nos aparece en la imagen 14.

En la pantalla de perfiles vamos a poder definir todos los que deseemos y en cada perfil podremos incluir tantos grupos o tantas clases como queramos. En el ejemplo que estamos siguiendo tenemos creadas dos clases, 3A y 3B y un grupo en la clase 3A llamado 3A-Especial.

Para crear un nuevo perfil pulsamos sobre el botón “Añadir”. En ese momento se abrirá una nueva ventana en la que nos solicitarán el nombre del perfil y una descripción del mismo. En la misma ventana añadiremos al perfil los grupos que estimemos oportuno. En nuestro caso, en la Imagen 13 podemos observar que hemos añadido un nuevo perfil llamado “Adelantado” cuya descripción es “Perfil de alumnos de segundo t”. En la parte inferior de la Imagen 13 comprobamos que hemos añadido a este perfil la clase 3B. Como hemos dicho anteriormente, podríamos haber añadido a este perfil todas las clases y grupos que estimemos oportuno de entre los que tengamos creados.

Hasta aquí hemos configurado en Gcompris las clases que tenemos y los grupos en los que hemos dividido nuestras clases. Posteriormente, a cada conjunto de clases-grupos le hemos asignado un perfil. Ahora vamos a proceder a configurar cada uno de los perfiles que hemos creado. Esta opción la vamos a realizar pulsando sobre el botón “Tableros”. La pantalla que nos aparece es la que observamos en la imagen 15.

En la parte superior de esta pantalla seleccionamos el perfil que deseemos configurar. En nuestro caso el perfil “Adelantado”. En la parte inferior marcamos aquellas actividades que deseamos que le aparezcan a los alumnos que tienen el perfil “Adelantado”. En nuestro caso, según se puede observar en la imagen 15, los alumnos que tengan este perfil podrán acceder a todas las actividades excepto a “Ir a las actividades experimentales” e “ir a las actividades recreativas” que aparecen desmarcadas.

Si pulsamos sobre el triángulo que aparece a la izquierda de cada actividad, se despliegan cada uno de los ejercicios que contiene esa actividad, ofreciéndonos la oportunidad de marcar los ejercicios que queremos que estén visibles para los alumnos de este perfil o desmarcar los que no queramos.

En esta pantalla no solamente vamos a poder seleccionar las actividades y ejercicios que estarán disponibles para cada perfil, sino que vamos a poder seleccionar el grado de dificultad. Para ello debemos pulsar sobre el botón “Filtro” y podremos seleccionar los distintos grados de dificultad que estén disponibles de 1 a 6.

Los botones “Seleccionar todos” y “Deseleccionar todos” sirven para marcar todas o ninguna actividad respectivamente.

Por otra parte, en el botón “Usuario” que aparece en la Imagen 15 podremos indicarle a la aplicación que deseamos que cada usuario introduzca el nombre para acceder al perfil adelantado.

Hasta aquí casi hemos configurado la aplicación para que responda a nuestras necesidades. Ya solamente queda que la aplicación se ejecute con el perfil que hemos configurado y que accedan a la misma el alumnado que pertenezca a ese perfil. Para que esto suceda volvemos a la pantalla de perfiles que observamos en la imagen 14 . En esta pantalla pulsamos sobre


Imagen 15 : Pantalla de tableros

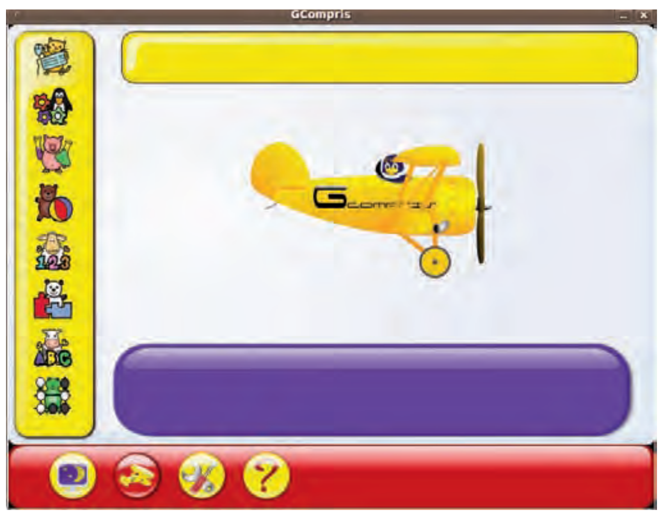



Imagen 16: Pantalla de inicio de Gcompris

el perfil “Avanzado” y posteriormente sobre el botón “Predeterminado”. Con esta acción indicamos que deseamos que la aplicación comience con el perfil “Adelantado”, pero como hemos marcado antes, para acceder a ella nos pedirá primeramente el nombre de usuario.

Si iniciamos Gcompris con un perfil normal, es decir, con el perfil general, la pantalla que nos aparece es la que podemos observar en la Imagen 16 . Ya indicamos en el primer artículo de *Suma* en el que tratamos esta aplicación las distintas opciones que nos ofrecía esta pantalla. Ahora hemos vuelto a recoger aquí esa imagen para que nos sirva de comparación con la que observaremos en el caso de utilizar uno de los usuarios que previamente hayamos configurado en la administración de la aplicación siguiendo las opciones indicadas anteriormente

Ahora que conocemos como administrar Gcompris vamos a realizar un ejemplo cuyo desarrollo completo podemos observar en la imagen 17.

Para comenzar, hemos creado un grupo llamado 3A-Especial que contiene dos alumnos: Luis y Pedro.

Seguidamente, hemos creado un perfil denominado “loritos” y hemos indicado que dentro de ese perfil está el grupo 3A-Especial que habíamos creado anteriormente.

Posteriormente hemos indicado que el perfil “Loritos” tiene los tableros que se relacionan seguidamente:

– Descubre la computadora
– Ir a las actividades de descubrimiento
– Ir a las actividades de experiencias
– Ir a las actividades recreativas
– Matemáticas


Imagen 17: Pantallas utilizadas para la configuración

Para finalizar hemos accedido a Gcompris y cuando nos ha solicitado el nombre del alumno que va a utilizar la aplicación, hemos escrito "Luis", uno de los alumnos que pertenece al grupo 3A-Especial y observamos que se ha reducido el número de actividades de Gcompris a las que habíamos indicado para este grupo.

*MATEMASTIC*

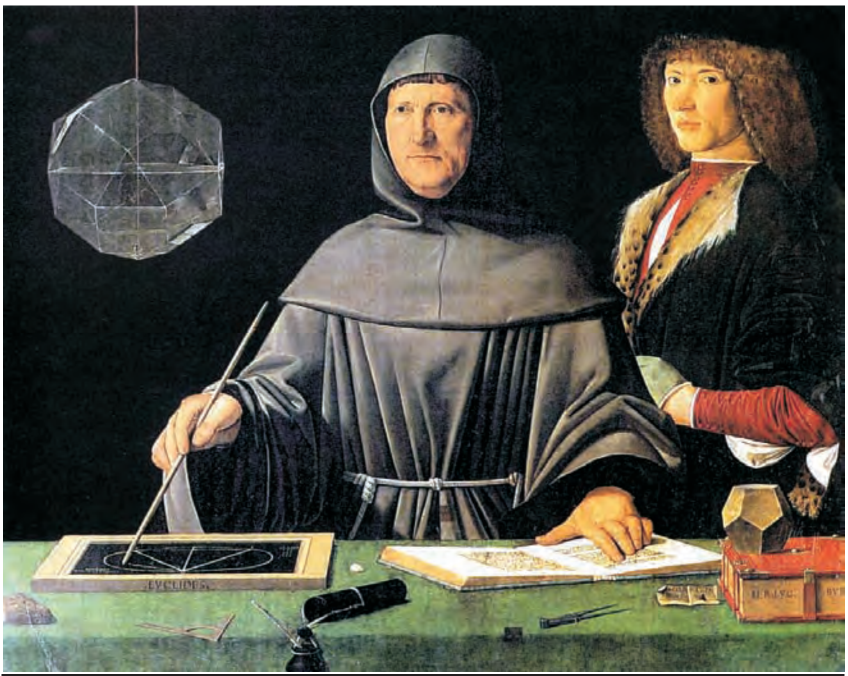
| Ficha educativo - técnica | |
|---|---|
| Nombre | GCompris |
| Sistema | Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos las versiones correspondientes para Windows y para Mac. |
| Descarga | Repositorio de la distribución de Linux correspondiente o Página oficial: http://gcompris.net<br>Página español: http://gcompris.net/-es-<br>http://sourceforge.net/projects/gcompris/files/ |
| Licencia | GPL |
| Contenido | Aunque es una aplicación general para la educación, en la parte de matemáticas se tratan ejercicios y juegos numéricos. |
| Nivel | Multinivelar: primaria y ESO. |
| Metodología | Aplicación para utilizar a partir de 2º de Primaria. Los alumnos utilizarán por parejas la aplicación para resolver las tareas propuestas en el primer y segundo ciclo de primaria. Es aconsejable el uso individual en el tercer ciclo o con alumnos mayores. |

Este artículo fue solicitado por *Suma* en abril de 2011 y aceptado en septiembre de 2011 para su publicación.

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 71-76

# Retrato de un matemático en clase

*Aunque pintado en Urbino, este cuadro se exhibe hoy en el Museo di Capodimonte, en Nápoles. Se trata del retrato de un matemático: Luca Pacioli (1445 - 1517). Su autor, Jacopo de'Barbari, lo pintó en 1495 y representa una escena cotidiana. Pacioli en plena clase de matemáticas, de pie, en actitud hierática imparte una clase de Geometría. Con una mano mantiene abierto un ejemplar de los* Elementos, *con la otra, usando un puntero, señala en una pizarra. Su alumno apenas acaba de alzar la vista de la mesa hacia el espectador, como en una instantánea fotográfica.*



*Retrato de fra Luca Pacioli con un alumno (Guidobaldo de Montefeltro),*
Jacopo de'Barbari (atribuido), Museo de Capodimonte, Nápoles

**Francisco Martín Casalderrey**
*IES Juan de la Cierva, Madrid*
*fmc@revistasuma.es*

Figura 2. *Retrato de fra Luca Pacioli con un alumno (Guidobaldo de Montefeltro),* detalle
Jacopo de'Barbari (atribuido)
Museo de Capodimonte Nápoles (Italia).
Foto: FMC 2011

## El profesor

Luca Pacioli, el protagonista de este cuadro, nació en Burgo Sansepolcro, un pueblo al norte de Perugia, en 1445 y murió en su ciudad natal en torno a 1517. Su padre, Bartolomeo, pertenecía a una familia humilde dedicada al pequeño comercio. De esta misma ciudad era Piero della Francesca, y es probable que Luca Pacioli recibiera sus primeros estudios en el taller de este pintor y matemático.

Cuando tenía unos veinte años abandonó su ciudad natal y se trasladó a Venecia donde entró al servicio de Antonio Rompiasi, un rico comerciante que vivía en el barrio de la Giudeca, en calidad de preceptor de sus hijos Francesco y Paolo. A la vez que ejercía este empleo, continuó sus estudios de matemáticas en la escuela que regentaba Domenico Bragandino, en la iglesia de San Giovanni di Rialto.

Como Rompiasi se dedicaba al comercio internacional hacía frecuentes viajes con caravanas de mercancías. Pacioli debió acompañarlo en muchos de estos viajes, lo que le permitió adquirir notables conocimientos sobre el comercio y sus entresijos. Descubrió así las tareas habituales de los comerciantes y de sus contables en las diferentes plazas en las que la empresa tenía sede.

Sumando estas dos experiencias, la del comercio y la de matemático adquirida con Bragandino, debió concebir la idea de escribir un tratado de aritmética comercial y rudimentos de álgebra. Este apareció en 1470, dedicado a sus alumnos, los hijos de Rompiasi.

Tras la muerte de su protector, abandonó Venecia en 1470 y se trasladó a Roma como invitado de Leon Battista Alberti (1404-1472), arquitecto y una de las primeras personas que estudió la perspectiva geométrica. Es probable que su introductor ante Alberti fuera su conciudadano Piero della Francesca, que había sido su maestro. Piero poco antes había estado en Roma pintando los frescos de una de las estancias vaticanas, por encargo del papa Pío II. En Roma hizo amistad también con Giuliano della Rovere, el que luego sería Papa con el nombre de Julio II, uno de los principales mecenas del Renacimiento. Unos años más tarde, en 1472, hizo votos como fraile franciscano.

El cuadro que estudiamos en esta ocasión, no fue el único que le dedicó un gran pintor. Durante una estancia en Urbino, debió coincidir nuevamente con Piero della Francesca, que en esos momentos estaba pintando el retablo de la iglesia de San Bernardino, más conocido como la *Pala de Brera.* En dicho retablo aparece el duque Federico de Montefeltro (1422-1482), rezando ante la Virgen rodeado de ángeles y santos. Para uno de esos santos, San Pedro Mártir, Piero usó como modelo a Luca Pacioli. Ver mis artículos sobre este cuadro en *Suma* 61 junio 2009, pp. 63-70 y *Suma* 62, noviembre 2009, pp. 63-68.

Terminados sus estudios en teología y comenzó una etapa amplia de viajes a distintas ciudades. En 1475 trabajó como lector de matemáticas en Perugia, a propuesta de los estudiantes. Entre 1477 y 1480 dio clases de aritmética en la Universidad de Perugia, con un sueldo anual de 30 florines. Durante esta estancia escribió un libro de texto, que dedica a sus alumnos. En 1481 se trasladó a Zara, en la actual Croacia, ciudad entonces bajo dominio veneciano, para impartir clases de matemáticas. De nuevo aprovechó su estancia para redactar otro tratado de aritmética.

De vuelta a Perugia, obtuvo el título de Magíster, lo que cambió su estatus en la Universidad, donde enseña ábaco entre los años 1486 y 1487. Impartió después clases de matemáticas en la Universidad de Nápoles (1490), donde realizó una colección de poliedros regulares que regaló después a Guidobaldo de Montefeltro. Volvió después a su ciudad natal Sansepolcro, para preparar su *Summa*. En 1493 daba lecciones de matemáticas en Padua. En esta etapa surgieron sus primeros problemas con los franciscanos. El espíritu libre de fra Luca y su creciente fama no debían resultar del agrado de los franciscanos. Sus superiores deciden amonestarlo y le obligan a trasladarse a Asís, bajo amenaza de excomunión.

En 1494, una vez terminada la redacción de su *Summa*, se trasladó a Venecia para supervisar de cerca los trabajos de impresión. Se traslada de nuevo a Urbino, donde gozó de un gran prestigio como matemático y como hombre sabio.

En 1496 Pacioli fue invitado a Milán, a la corte de Ludovico Sforza, conocido como Ludovico el Moro, a enseñar matemáticas. Allí tuvo la oportunidad de conocer a Leonardo da Vinci (1452-1519). Pacioli y Leonardo pronto se convirtieron en grandes amigos. Leonardo se encontraba pintando su *Última Cena* en el refectorio del convento de Santa María delle Grazie. La amistad de ambos les permitía compartir sus preocupaciones. Leonardo consultaba asuntos de matemáticas a Pacioli. Así aparece reflejado en sus notas de esta época. Pacioli encargó a Leonardo la realización de los sesenta dibujos de poliedros que necesitaba para ilustrar otro de sus libros, *De divina proportione*, redactado durante esta etapa milanesa. En 1499 los franceses entraron en Milán y capturaron a Ludovico el Moro. Preso su protector, Pacioli y Leonardo se vieron obligados a abandonar Milán y emprendieron juntos un viaje que les llevó a Mantua y Venecia, para terminar finalmente en Florencia donde compartieron casa.

En 1500 Pacioli se convierte en profesor de la Universidad de Pisa, cuya sede había sido trasladada a Florencia a causa de las revueltas ciudadanas del 1494. Allí continuó impartiendo clases hasta 1505. No obstante, entre los años 1501-1502 dio clases de matemáticas en la Universidad de Bolonia, donde coincidió con uno de los mejores matemáticos de este cambio de siglo, Scipione del Ferro, primer descubridor de una fórmula para resolver la ecuación cúbica. En 1504, de nuevo en Florencia, la *Signoria*, el gobierno de la ciudad, le encargó la realización de otra serie de figuras geométricas, por las que le pagaron 52,9 libras. Fue después elegido superior de la orden de los franciscanos para la provincia de la Romaña e ingresó en el convento de la Santa Croce de Florencia.

En 1505 se encontraba en Roma de nuevo. Allí permaneció al menos hasta 1508, año en que, mediante una bula especial, el papa Julio II le permitió prescindir del voto de pobreza, para poder así poseer bienes materiales, cosa que no les era permitida a los franciscanos. Ese mismo año se le concede el privilegio de editar su versión italiana de los *Elementos* de Euclides. Se trasladó de nuevo a Venecia para supervisar esta nueva impresión y el día 11 de agosto de agosto de 1508 pronunció una lección pública sobre el libro V de los *Elementos*, en la iglesia de San Bartolomeo, ante una concurrencia de más de 500 personas. Permaneció en Venecia en 1509 mientras salía de imprenta la primera edición impresa de *De divina proportione*.

A partir del año 1510, debido a su creciente mal estado de salud, se traslada de nuevo a su ciudad natal, Sansepolcro, retirándose de la vida activa. No obstante en 1514, a instancias del papa León X se trasladó de nuevo a Roma como profesor de la Sapienza, la Universidad de Roma. Se cree que murió finalmente en torno a 1517 en su pueblo natal.

**Luca Pacioli (1445-1517)**

Matemático italiano, alumno del artista y matemático Piero della Francesca, y amigo de otros muchos como Leonardo da Vinci, Leon Battista Alberti, es quizás más conocido y renombrado entre los economistas, ya que se le considera el inventor de la contablidad por *partida doble*, es decir, la que se basa en el *debe* y el *haber*, y que se sigue utilizando en nuestros días.

Como matemático fue un buen compilador, en su compendio *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (1494). Es también autor de *De Divina Proportione* (1497).

Figura 4. *Retrato de fra Luca Pacioli con un alumno*
detalle, Guidobaldo de Montefeltro,
Jacopo de'Barbari (atribuido)
Museo de Capodimonte Nápoles (Italia).
Foto: FMC 2011

## El alumno

Aunque algunos han querido ver en el el rostro del joven que asiste a la clase de fra Luca al pintor Alberto Durero, no consta que ambos llegaran a conocerse. Más probablemente se trate de Guidobaldo de Montefeltro, hijo de Federico, y sucesor de su padre en el ducado de Urbino. Al él dedicó Pacioli su obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (1494). Mecenas de las artes y de las ciencias, fue retratado por varios pintores desde niño. Entre dichos retratos cabe destacar el que le hizo el pintor español Pedro Berruguete, que trabajó para su padre y el que pintó Piero de la Francesca y que se encuentra en el Museo Museo Thyssen-Bornemisza de Madrid.

Figura 5. *Retrato de fra Luca Pacioli con un alumno*
detalle, los dos libros.
Jacopo de'Barbari (atribuido)
Museo de Capodimonte Nápoles (Italia).
Foto: FMC 2011

## La *Summa* de Pacioli

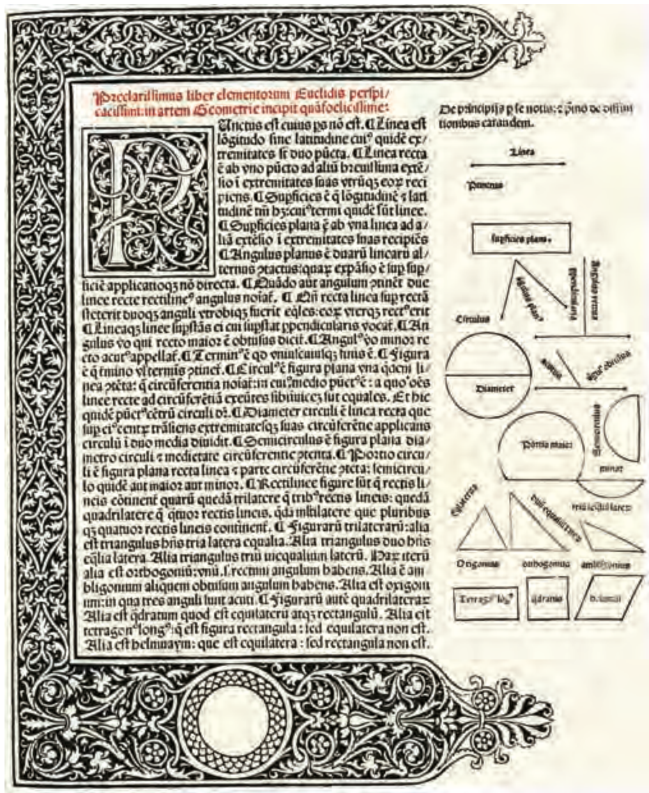
En el cuadro, figura 5, pueden verse dos libros. El que está abierto, con la mano de Luca Pacioli sobre él, es un ejemplar de los *Elementos* de Euclides, probablemente la edición latina de Campano, impresa en 1482 en Venecia.

En el que aparece cerrado, encuadernado en rojo, se puede leer: LI. R. LVC. BUR. (*Liber reverendi Lucae Burgensis*, libro del reverendo Luca del Burgo). Es, por tanto, una obra de Pacioli y muchos la identifican como la *Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalità*, escrita en italiano en 1487 y publicada en 1494, que, a su vez, puede ser considerada como el mejor y más famoso tratado de ábaco. Al igual que Cervantes acabó con los libros de caballerías escribiendo el último de ellos de una manera genial, también la *Summa* acabó con los tratados de ábaco de manera definitiva. Pero el paralelismo no puede ser llevado más allá. A Pacioli le falta la originalidad y el genio mostrado por Cervantes en el *Quijote.* Su influencia, no obstante, fue tremenda y las razones habría que buscarlas en el hecho de que fue impresa, lo que facilitó su difusión, y que lo fue en lengua vulgar, en italiano y no en latín, facilitando el acceso a lectores que no conocían otra lengua que la propia.

La primera parte de la *Summa* se dedica a la aritmética y al álgebra y esta dividida en nueve distinzioni, cada una de las cuales se divide en tratados. Cita entre las fuentes usadas a Boecio, Euclides, Jordano Nemorario, Tomás Beduardin, Blasius de Parma, Alberto de Sajonia, Arquímedes, Sacrobosco y Leonardo de Pisa, entre otros. La parte aritmética incluye las operaciones con los números y la aritmética comercial, que recibe un trato muy elaborado, como correspondía a su importancia en esa época. Se incluyen muchos ejemplos prácticos de cómo aplicar las operaciones elementales a las diferentes situaciones en que se ve envuelto un comerciante.

En la parte algebraica se incluye la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Sigue después una tabla de pesos, monedas y medidas usados en las principales ciudades italianas y las conversiones entre ellas. La obra termina con un resumen de la geometría de Euclides.

La parte más original quizás de la obra de Pacioli es la titulada *De computis et scrituris* la dedicada a la contabilidad. Introduce por primera vez la llamada contabilidad de doble entrada, conocida también como contabilidad veneciana o



Figuras 6 (arriba). Portada de los *Elementos* de Euclides, edición latina de Campano, 1482.

Figura 7 (abajo). *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, Luca Pacioli (1494).

sistema veneciano. Por este motivo a Pacioli se le considera el padre de la contabilidad moderna.

La *Summa* de Pacioli compiló todos los conocimientos de álgebra de los siglos anteriores en una sola obra de carácter enciclopédico y más de 600 páginas. Se convirtió en lectura básica para los algebristas del siglo XVI, que, apoyados en ella, pudieron hacer nuevos descubrimientos. Todos ellos citan a Pacioli en sus obras. Cardano, en su *Arithmetica*, lo hace de manera reverencial, a pesar de dedicar un capítulo entero a corregir innumerables errores de la obra de Pacioli. Bombelli, en la introducción de su *Álgebra*, llega a afirmar que después de Leonardo Fibonacci, Pacioli "primo fu que luce diedi a questa scientia" (fue el primero que dio luz a esta ciencia).

## Los objetos matemáticos

Además de los dos libros, el cuadro está lleno de referencias matemáticas. Sobre la mesa aparece una pizarra, que reproduce la misma figura que podemos ver en la página abierta de los *Elementos*; en el marco de la pizarra está escrito EVCLIDES. A su lado, un trozo de tiza y una esponjita para borrar. Sobre el tapiz verde de la mesa, un compás abierto y una especie de escuadra. Sobre el ejemplar de la *Summa,* figura 5, un dodecaedro que parece estar hecho en madera.

Pero sin duda el objeto más misterioso del cuadro es la figura que pende de un cordón en la parte superior izquierda de la escena. Se trata de uno de los poliedros arquimedianos, el rombicuboctaedro, que consta de 26 caras, 18 cuadrados y 8 triángulos equiláteros; por tanto tiene

$$n.^{o}\, aristas = \frac{18 \cdot 4 + 8 \cdot 3}{2} = 48$$

En cuanto al número de vértices lo podemos obtener de la fórmula de Euler:

$$C + V = A + 2$$
$$V = A + 2 - C = 48 + 2 - 26 = 24$$

El poliedro parece construido en vidrio y está relleno de agua hasta la mitad de su volumen. La cara superior, triangular queda vacía. En la cara opuesta, una anilla sujeta el cordón del que pende. En varias de las caras se refleja la ventana por la que entra la luz que ilumina el cuadro y, a través de ella, se observa el patio de un palacio, que algunos han identificado como el palacio ducal de Urbino.

El cuadro, de autoría discutida, con su fondo negro produce una especie de suspensión temporal y espacial que acrecienta la fascinación del observador, creando una atmósfera de misterio y silencio. La visión platónica de unas matemáticas vinculadas al arte y convertidas en un misterioso saber silencioso, quedan retratadas en esta singular lección de Luca Pacioli.

*ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS* ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2011 y aceptado en octubre de 2011 para su publicación.

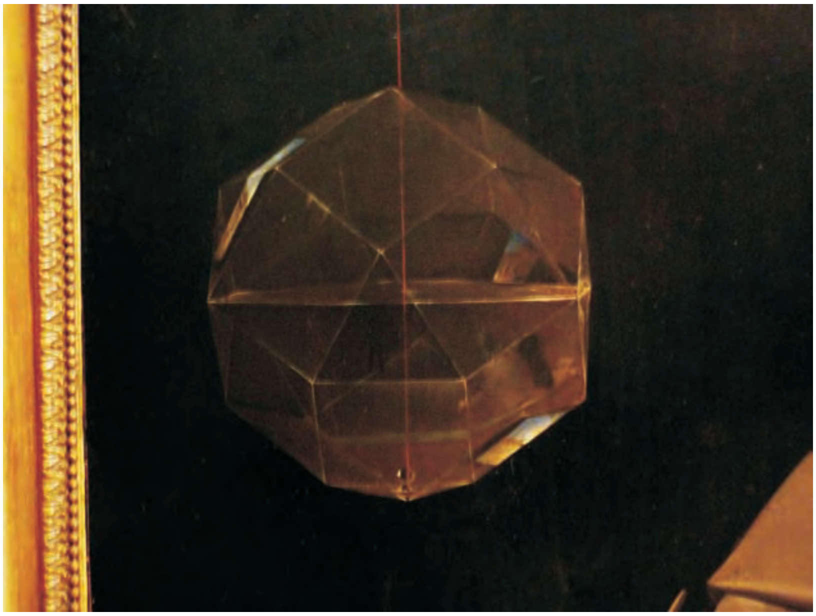


Figura 8. *Retrato de fra Luca Pacioli con un alumno*
detalle, rombicuboctaedro de vidrio.
Jacopo de'Barbari (atribuido)
Museo de Capodimonte Nápoles (Italia).
Foto: FMC 2011

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 77-81

# Extramuros

A lo largo de la vida profesional se acumulan experiencias que vale la pena recordar y divulgar. Se producen cuando profesores y alumnos traspasamos los límites estipulados en los currículos académicos. Yo las llamo otros límites, pues son incursiones extramuros del círculo perfecto que rodea los programas educativos. De algunas voy a hablar para despedir la sección que concluye con esta séptima entrega. Si lo hago es porque mis alumnos y yo aprendimos de ellas. En su momento fueron adherencias, pero hoy son ya parte de nosotros. Ojalá algo de ellas se adhiera a quienes lean estas líneas.

## Los ciegos ven los poliedros

Ser ciega no le impidió a *L* terminar en 2006 el Bachillerato científico. El sentido del tacto con el que los ciegos perciben las cosas se usa muy poco en matemáticas. *L* venía a clase con una máquina de escribir en Braille bastante ruidosa, pero nadie se quejaba de ello. Las actividades y pruebas escritas de los profesores se remitían a una asistenta de la ONCE que las traducía a Braille para *L*. Las fórmulas presentaban dificultades diversas. Por una parte, la letra *a* y la cifra 1 se escribían con el mismo anagrama, distinguiéndose por un símbolo adicional previo. Por otra, las fórmulas y expresiones matemáticas se escribían en línea. Además de hacerlas muy extensas, eso dificulta mucho la identificación de factores comunes entre numeradores y denominadores, por ejemplo. En fin, que con *L* en clase me di cuenta de que ni las matemáticas ni sus procedimientos se diseñaron pensando en los ciegos. ¿Como serían las matemáticas de los invidentes? ¿Hasta qué punto existen unas matemáticas invisibles?

*L* trazaba figuras a lápiz sobre una hoja de papel plastificado superpuesta sobre una plantilla de goma del mismo tamaño y de varios milímetros de espesor. Gracias a la blandura y el espesor de la plantilla la punta de grafito se hundía en el papel. Lo que trazaba *L* eran, de hecho, surcos que podía reconocer con la yema de un dedo.

Cuando le planteé que tocase algunos sólidos de madera para trazar en el plano lo que 'veía' se mostró sorprendida, pues confesó que nunca se le había planteado semejante actividad. Las figuras 1-8 son las interpretaciones planas realizadas por *L* como consecuencia de su percepción táctil de algunos poliedros. Aquellas figuras marcadas con una flechas corresponden a la versión que ella consideró como definitiva.

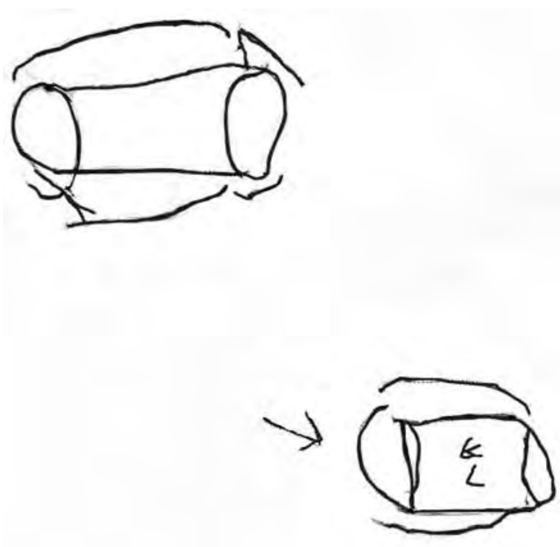


Figura 1: Cilindro (L)

**Miquel Albertí Palmer**
*Institut Vallés, Sabadell*
*adherencias@revistasuma.es*

*L* representa el cilindro (figura 1) mostrando sus dos caras circulares. Esa es una diferencia radical con la perspectiva visual: las dos caras circulares del cilindro no pueden verse al mismo tiempo, pero sí pueden tocarse a la vez. Ambas se conectan por el tubo que las une, de paredes rectilíneas. *L* destaca el carácter redondeado de esa cara tubular añadiendo sendas curvas a cada uno de los lados de la figura.

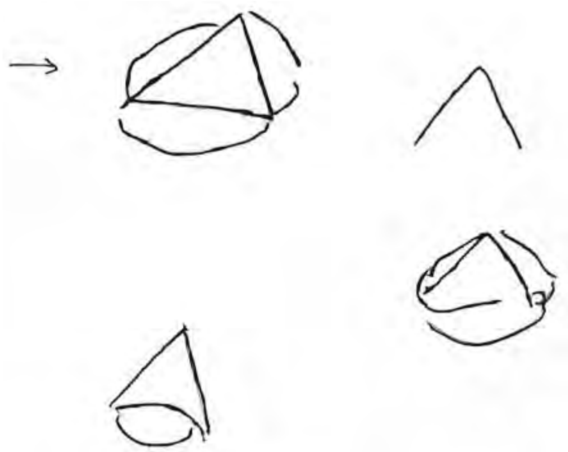


Figura 2: Cono (L)

El estudio del cono (figura 2) comienza con el trazo de un ángulo reflejando el carácter triangular del vértice. Pasa también por la representación estándar que incorpora a ese ángulo el círculo de la base. Como ya sucedía en el cilindro, la cara circular del cono también se hace 'visible', pues se toca al mismo tiempo que el resto. Sin embargo, *L* no parece satisfecha y se decanta por enfatizar el aspecto triangular del sólido redondeando con arcos circulares cada uno de sus tres lados. El resultado es equivalente al que tendría la representación del cilindro anterior con una de sus caras circulares colapsada en un punto.

Figura 3: Tronco de cono (L)

Para la representación del tronco de cono, *L* parece fijarse en la estructura trapezoidal que transversalmente posee el sólido (figura 3) y la completa con una curva para cerrar la circularidad de su cara pequeña. La mayor de las caras circulares no fue rodeada para destacar también su circularidad. Obsérvese el intento de completar la figura con arcos circulares, pero que no acaba de cuajar. La perspectiva táctil del tronco de cono parece diferir un poco de la del cilindro.

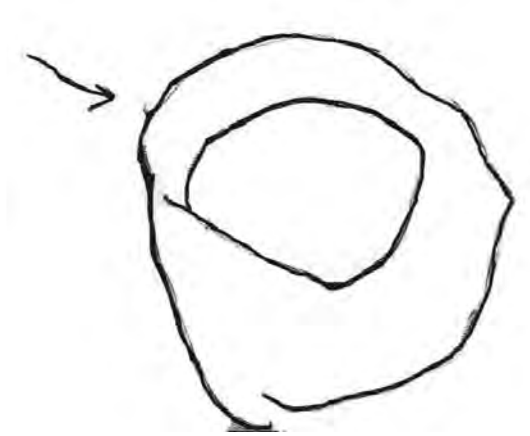


Figura 4: Esfera (L)

La esfera plantea un problema que *L* resuelve trazando dos círculos concéntricos para indicar quizá la disminución del diámetro de la circunferencia a medida que uno se aproxima a los polos del sólido (figura 4).

Figura 5: Semiesfera (L)

La semiesfera (figura 5) comparte perspectiva con la del cono y el cono truncado, pues muestra una 'visión' o tacto transversal de la pieza. Todo ello rodeado del círculo correspondiente a la cara plana del sólido.

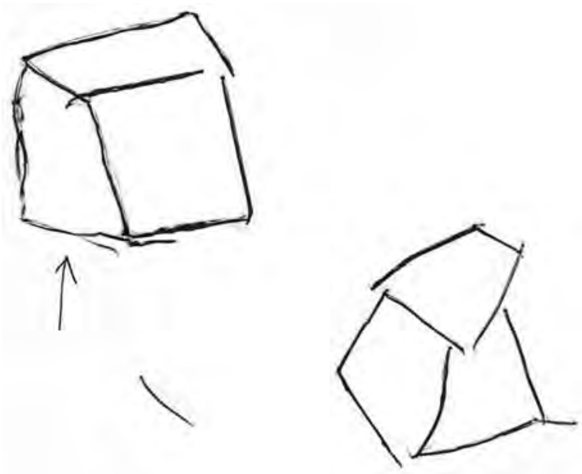


Figura 6: Cubo (L)

Del cubo sorprende su representación tan visual (figura 6). Solo se trazan tres caras. *L* podía tocar las seis caras del poliedro, pero ya su estudio preliminar muestra únicamente tres de las caras. Tal vez para reflejar la perpendicularidad de las aristas, pues su versión definitiva mejora sensiblemente los ángulos formados por éstas en los vértices. Desde luego, no se diría que es esta la representación ciega y táctil de un cubo.

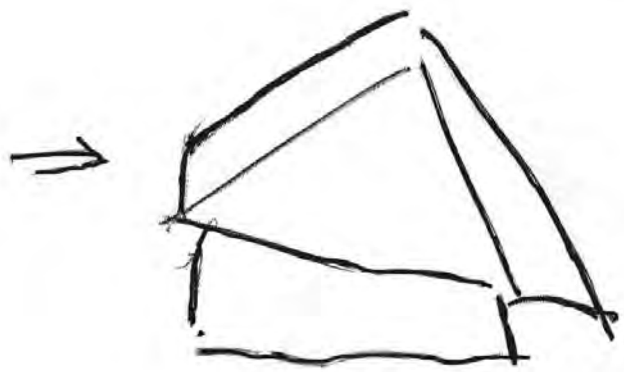


Figura 7: Prisma triangular (L)

Para el prisma triangular, *L* sigue un principio observado en el caso del cono y cilindro, pero con una salvedad importante. Es verdad que añadiendo a un lado de la cara triangular el rectángulo que, de hecho, es la pared del poliedro. Sin embargo, no hace lo mismo con los otros lados de esta cara. Más bien se diría que duplica la cara triangular para mostrar las dos bases paralelas del sólido (figura 7). El rectángulo añadido al lado del triángulo en primer plano conecta los dos triángulos paralelos que componen este prisma.

Figura 8: Tronco de pirámide (L)

La representación que efectúa *L* del tronco de pirámide sigue la misma pauta que la observada en el cubo. La diferencia aquí estriba en que una de las caras cuadradas es mayor que la otra. Eso es lo que da lugar al poliedro y eso es lo que parece inspirar el aspecto trapezoidal de las dos caras laterales dibujadas en primer plano (figura 8).

Entre esas representaciones se distinguen dos grupos principales. Uno se caracteriza por un marcado carácter geométrico. Son las representaciones correspondientes a figuras de caras planas que *L* parece querer trazar respetando los ángulos (cubo, prisma triangular y tronco de pirámide). En el otro grupo impera el carácter topológico donde *L* enfatiza el carácter circular de algunas de las caras (cilindro, cono, tronco de cono, esfera y semiesfera).

## Suma natural de irracionales

En 2009 daba clase a dos grupos de cuarto de la ESO. Un resultado que casi ninguno de esos alumnos acabó de digerir por completo fue que los números decimales cuya parte periódica consta sólo de la cifra 9 sean enteros. Por ejemplo, que 4,99999...sea igual a 5. Una justificación de este hecho es que si este número se multiplica por 10, su parte decimal no cambia:

$$10 \cdot 4{,}99999\ldots = 49{,}99999\ldots$$

La coma se ha desplazado una cifra a la derecha. Todos estuvieron de acuerdo con esto y lo aceptaron. La diferencia entre este número y el anterior proporciona un número cuya parte decimal es periódica y consta únicamente de la cifra 0:

$$\begin{array}{l} 49{,}99999\ldots \\ -4{,}9999\ldots \\ \hline 45{,}0000\ldots \end{array}$$

Se trata del número 45. Y, por lo tanto:

$$9 \cdot 4{,}9999... = 45$$

$$4{,}9999... = \frac{45}{9} = 5$$

Todos comprendieron el proceso. Sin embargo, nadie lo aceptó. Lo veían, pero no se lo creían. Ahondé más en la herida dividiendo 45 entre 9. Sabían que el resultado de la división tendría que dar 5, pero las dudas acudieron cuando el 5 de mi división (figura 9) les pareció diferente del suyo:

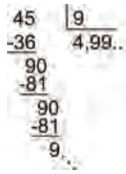



Figura 9: División abierta de 45 entre 9

–Esta división está mal hecha, objetaron algunos.
–El resto tiene que ser siempre menor que el divisor, reclamaron otros.
–¿Por qué?, repliqué. ¿Porque os han dicho que teníais que hacerlo así? No hago sino aplicar el algoritmo de la división que conocéis para demostraros que, efectivamente, cuatro coma nueve periódico es cinco.
–Pero no puede ser, porque siempre quedará algo entre el cuatro coma nueve y el cinco. El cinco viene después, insistieron.
–Esto es porque imagináis una cantidad finita de decimales. No queda nada entre los nueves del período y el cinco. Los nueves no tienen fin y los dos símbolos, el 4,999... y el 5, representan al mismo número.

Se estaban enfrentando por primera vez al hecho de tener que aceptar un resultado lógico que contradice esquemas previos. La demostración obedecía la misma lógica por la que se habían garantizado otros resultados matemáticos a lo largo de la ESO. Pero este contradecía su intuición. Una intuición que debían revisar y domesticar, pues ya no garantizaba la certeza.

La revisión de esquemas propios suele llevar largo tiempo y forma parte del proceso de maduración matemática. El cambio no se produce sin reflexión. Por lo visto, a *M* le dio por reflexionar sobre la cuestión y utilizó este resultado para dar una respuesta insólita a la pregunta de si la suma de números irracionales era siempre un número irracional. Lo hizo un año más tarde, como alumno de 1º de Bachillerato. *M* creó dos números decimales infinitos y no periódicos (irracionales) cuya suma daba como resultado un decimal periódico cuya parte periódica estaba compuesta únicamente de nueves (figura 10). Por lo tanto, la suma de irracionales no es que pudiese ser racional, incluso podía ser entera.

El número *x* de la figura 10 es irracional porque su parte periódica es infinita (basta continuar la secuencia) y no es periódica. El número *y* lo es porque se deriva directamente de *x*, cifra a cifra. La suma de ambos es 2,9999…. Es decir, 3:

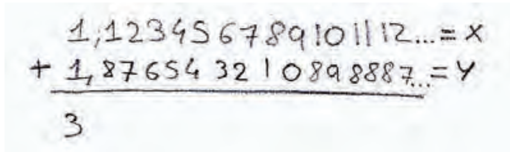



Figura 10: La suma de irracionales puede ser natural (M)

No es este el tipo de respuesta más corriente. Otros cayeron en la cuenta de que bastaba sumar un número irracional cualquiera con su opuesto. Como el resultado es cero, la suma de irracionales puede ser racional y entera:

$$\pi + (-\pi) = \pi - \pi = 0$$

## El teorema de Mambrino

El crucigrama del diario El País del 20 de enero de 2011 incluía una definición sorprendente. Era la diez vertical: todos los números de tres cifras iguales son divisibles por éste (tres palabras). Se trataba de un pequeño teorema en el que jamás había reparado (figura 11). El 37 es un número primo demasiado grande como para hablar de él con frecuencia.

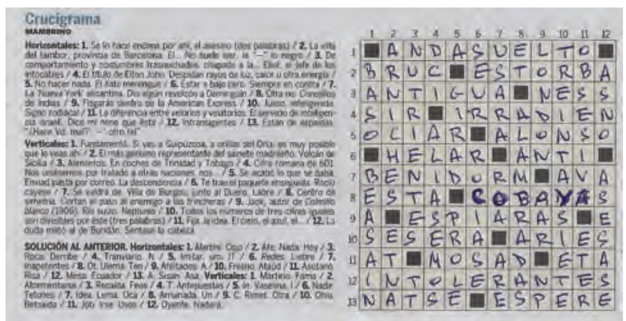



Figura 11: Crucigrama de Mambrino (El País, 20/01/2011)

Pedí a mis alumnos de cuarto de la ESO y de bachillerato que tratasen de redactar una respuesta. Algunos no supieron enfocar el problema; otros lo enfocaron bien, sobre todo dirigiendo su atención hacia la comprobación experimental y exhaustiva de que el teorema es cierto para 111, 222, 333, ...,

999. Fue *S*, alumna de 2º de bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, quien ofreció una explicación más clara. La invité a que la hiciese pública ante toda su clase. Su exposición fue recibida con aplausos. La figura 12 reproduce su redacción autógrafa:

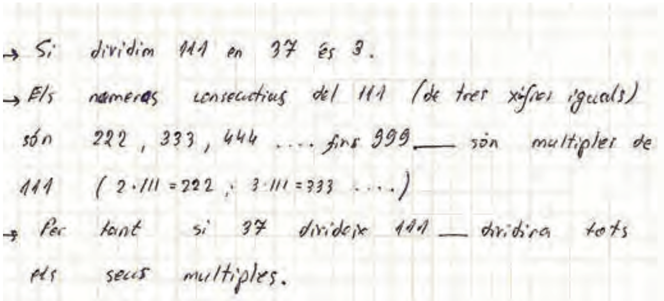

→ Si dividim 111 en 37 és 3.
→ Els nombres consecutius del 111 (de tres xifres iguals) són 222, 333, 444 .... fins 999 ___ són múltiples de 111 (2·111=222 ; 3·111=333 ....)
→ Per tant si 37 divideix 111 ___ dividirà tots els seus múltiples.

Figura 12: Explicación del teorema del crucigrama de Mambrino (S)

*S* redactó su explicación invirtiendo el orden del razonamiento explicado en clase. La primera línea debería haberse escrito en segundo lugar. Esta es la traducción de su autógrafo respetando el orden con el que llevó a cabo su exposición:

– Los números consecutivos al 111 (tres cifras iguales) son: 222, 333, 444, ... hasta 999, son múltiplos de 111 (2·111=222, 3·111=333, ...).

– Si dividimos 111 entre 37 es 3.

– Por tanto, si 37 divide 111, dividirá todos sus múltiplos.

Una vez la cuestión quedó clara, escribí una versión más formal en las pizarras de algunas aulas:

$$aaa = a \cdot 100 + a \cdot 10 + a \cdot 1 = a \cdot (100 + 10 + 1) = a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 37$$

Desde entonces me refiero a este resultado como el Teorema de Mambrino. Invité a mis alumnos y alumnas a que fuesen más allá. ¿Era cierto el teorema para los números con más de tres cifras iguales? Tal vez algunos siguen preocupados por ello.

La clave del problema está en si los números 11, 111, 1.111, ... que son los que dan lugar a números de 2, 3, 4, ... cifras iguales son primos o no. Las factorizaciones de los diez primeros números de esta serie son:

| *Cifras iguales* | *Factorización* |
|---|---|
| 2 | 11 (primo) |
| 3 | 3·37 |
| 4 | 11·101 |
| 5 | 41·271 |
| 6 | 3·7·11·13·37 |
| 7 | 239·4649 |
| 8 | 11·73·101·137 |
| 9 | $3^2$·37·333667 |
| 10 | 11·41·271·9091 |
| ... | ... |
| 19 | 1·111·111·111·111·111·111 (primo) |

Se observan ciertas pautas. Cuando la cantidad de cifras iguales es par, el número correspondiente es divisible por 11:

$$aaaaaaaa = a \cdot 11111111 = 11000000 + 110000 + 1100 + 11 =$$
$$11 \cdot (1000000 + 10000 + 100 + 1) = 11 \cdot 1010101 = \textit{múltiplo de } 11$$

Cuando la cantidad de cifras iguales es múltiplo de 3, el número correspondiente es divisible por 37:

$$aaaaaa = a \cdot 111111 = 111000 + 111 = 111 \cdot (1000 + 111) =$$
$$111 \cdot 1111 = \textit{múltiplo de } 111 = \textit{múltiplo de } 37$$

Esta sección comenzó junto a la vibrante línea, a veces continua, a veces discontinua, que separa la tierra del mar. Todas esas adherencias aluden a los granitos de arena que se te quedan entre los dedos de los pies al volver de la playa. Una incomodidad que el llanto de las ostras convierte en perla. Maestros y profesores somos responsables de la arena que incomoda a niños y adolescentes. Por más que quieren, no consiguen desprenderse de ella. No se lo permitimos. De hecho, anhelamos que la arena que les adherimos jamás se desprenda de ellos. Mientras no la asimilan, es incómoda. Pero en cuanto pasa a formar parte de la persona y se integra en ella, la incomodidad desaparece. La persona educada ha asimilado sus adherencias. Contribuir a dichas transformaciones es un gran privilegio.

*ADHERENCIAS* ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2011 y aceptado en octubre de 2011 para su publicación.

# Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

## Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

**Secretariados:**
Prensa: **Biel Frontera Borrueco**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Juana Mª Navas Pleguezuelos**
Actividades con alumnos: **Jordi Comellas i Blanchart**

## Sociedades federadas

**Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya**
Presidenta: Iolanda Guevara Casanova
FME de la UPC
C/Pau Gargallo, 5
08028 Barcelona

**Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales***
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

**Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas**
Presidente: Daniel Sierra Ruiz
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

**Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes***
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

**Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton***
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

**Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán***
Presidente: Antonio Bermejo Fuertes
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

**Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas**
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

**Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia**
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

**Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira***
**Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira***
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

**Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)**
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

**Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper***
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

**Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo***
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

**Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria**
Presidenta: María José Señas Pariente
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

**Sociedad Melillense de Educación Matemática**
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

**Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas**
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

**Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima***
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Luis de Ulloa, 37. 26004 Logroño

**Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)**
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

**Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi***
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

**Societat Balear de Matemàtiques *Xeix***
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 83-92

Biblioteca



# Mi última presentación

Daniel Sierra Ruiz

Parafraseando a Marx (el del bigote pintado) debería decir que nunca sería coordinador de una sección de una revista que me admita como coordinador… Sin embargo, lo he hecho y debo agradecer a Tomás y Onofre haber confiado en mí. En honor a la verdad, creo que su confianza se basaba en que venía recomendado por Fernando Corbalán, quien en ese momento empezó a perder su crédito como recomendador. Me imagino que eso a Fernando le trae sin cuidado.

Además de la confianza depositada, tengo que agradecer a los directores salientes su paciencia conmigo y, sobre todo, sus buenas y educadas palabras. Siempre enviaban correctísimos mensajes, independientemente de que fuera para recordarme el retraso en la entrega o para corregirme algún error (en lugar de afirmar que me había equivocado, escribían «Daniel, ¿no crees que sería más conveniente…?»). Podría contar algunas más de sus virtudes o hablar sobre los aspectos que han mejorado en *Suma* pero llenaría el espacio que tengo para la presentación. En cualquier caso, valgan estas pocas líneas como reconocimiento, por mi parte, de su valioso trabajo.

En todos estos números, he convertido la sección en mi auténtica biblioteca particular, pues todos los firmantes que por ella han ido desfilando eran personas que a mí me apetecía especialmente leer. De todas formas, aunque haya seguido un criterio tan personal, tampoco ha sido muy original. Todos los que aquí han escrito ya gozaban de gran prestigio en nuestra Federación. Evidentemente, han faltado muchas personas cuya aportación hubiera sido de relevancia, pero tampoco sobra nadie. Personalmente, sólo lamento no haber conseguido que participara en esta sección Ángel Salar a quien tanto debo en mi formación como profesor: siempre digo que por cada café que tomo con él, me tendrían que homologar algunas horas de formación.

Estuve mucho tiempo pensando qué hacer para el último capítulo de *Mi biblioteca particular*. Una opción que estuvo rondando por mi cabeza fue escribir un artículo destacando todos los libros que más han aparecido, el conjunto intersección, haciendo una recopilación de los comentarios más interesantes que se han vertido. Es decir, elaborar una especie de nuestra biblioteca particular. Acabé descartándolo porque, en realidad, no iba a aportar nada nuevo. A estas alturas todos sabemos cuáles son los libros más mencionados.

**Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)**
*IES Alabarracín, Albarracín (Teruel)*
*biblioteca@revistasuma.es*

Así que decidí que lo mejor era buscar una persona que encarnara todos los valores preponderantes en la federación y aunara todos los intereses de sus miembros. Y, claro, la respuesta sólo puede ser una: el presidente, Serapio García Cuesta. Por otra parte, hubiera sido imperdonable acabar la sección sin que una persona tan destacada apareciera en la misma.

Me dio algo de apuro pedirle que escribiera su biblioteca particular, ya que era cargar con más tareas a una persona que realiza una gran cantidad de trabajo y que siempre lleva en marcha un alto número de asuntos, y muchos de gran importancia. Serapio contestó afirmativamente sin dudarlo, fiel a su carácter abierto y colaborador; posiblemente, también pensó que era su obligación como presidente prestar este servicio a la Federación. Porque, creo, el presidente entiende su cargo como un servicio, si no, no se explicaría el hecho de que se presentara a la reelección (damos por supuesto que no va a saltar ningún escándalo tipo SGAE, que sería la otra explicación). Serapio además de encarnar como nadie el espíritu de la Federación, le da un toque de serenidad. Ese punto que sólo pueden poner esas personas que no alardean de sabiduría pero que saben aplicarla casi sin que se note. Es prácticamente imposible que ocupando el cargo que ocupa no haya mucha gente que lo critique…, sin embargo, es así, y ello se debe, sin duda, a su carácter, esa afabilidad mezclada con firmeza cuando tiene que amarrar el barco al puerto que él considera oportuno.

Debido a que esta última presentación es algo especial, la parte del firmante me ha quedado un poco escasa; sin embargo, presentar a nuestro presidente sería como presentar a la FESPM… Así que, nada más tengo que añadir que es para mí un honor escribir delante de un texto en el que Serapio García Cuesta presenta su biblioteca particular.

# Mi biblioteca particular

**Serapio García Cuesta**

*Si tuvieras que empezar tu biblioteca matemática ahora, ¿con qué libro o libros de los de tus primeros años como matemático comenzarías?*

Uno de los libros de los que guardo un gran recuerdo, sobre todo de los años de estudio en la facultad y porque me lo recomendó Miguel de Guzmán, un gran profesor y amigo, ha sido el de *¿Qué es la matemática?* de Richard Courant y Herbert Robbins (Ed Aguilar).

En este libro, los autores, hacen una revisión de las matemáticas desde los números naturales, la teoría de los números, el sistema de números de las matemáticas, el álgebra de los campos numéricos, la geometría proyectiva, la geometría axiomática no euclidiana, algunas nociones de topología, las funciones y los límites, el cálculo, las series y productos infinitos… En fin, como dijo Albert Einstein sobre el libro: «...una brillante exposición de los conceptos y métodos fundamentales de todo el ámbito de las matemáticas... ».

En la edición que yo tengo está agotado, pero ha sido reeditado por el Fondo de Cultura Económica (2002) con el título en plural: *¿Qué son las matemáticas?* con un complemento de Ian Stewart, que hace del texto una obra aún más interesante, pues lo actualiza —hecho necesario considerando que la matemática es una ciencia viva y dinámica—, con aportes tan valiosos como la invención del análisis no estándar por Abraham Robinson, la demostración del teorema de los cuatro colores por Appel y Haken en 1976, la demostración del famosísimo último teorema de Fermat por Andrew Wiles en 1994.

*¿Algún libro de didáctica de las matemáticas ha influido en tu desarrollo docente por encima de otros?*

El que he comentado anteriormente, aunque no pueda considerarse un libro de didáctica de la matemática, ha influido bastante en la visión que yo puedo tener de las matemáticas. En esta línea también he utilizado bastante los libros de Félix Klein: *Matemática elemental vista desde un punto de vista superior* sobre todo el primer tomo dedicado a la Aritmética, Álgebra y Análisis. De éste se publicó una reedición en Nivola en el 2006. En ellos se descubre la gran preocupación que Klein tenía por la enseñanza así como el entusiasmo de las clases originales de las que procedían.

En los tiempos en los que estuve de asesor en el CEP de Albacete y sobre todo para mi trabajo en los centros también utilicé mucho como referencia el libro: *El Aprendizaje de las Matemáticas* de Linda Dickson, Margaret Brown y Olwen Gibson, que publicaron conjuntamente el Ministerio de

Educación y Ciencia y la Editorial Labor. De éste libro resaltaría, sobre todo, los ejemplos que muestra con respuestas reales de los alumnos y que arrojan luz sobre lo complejo que es aprender matemáticas.

*¿Qué libro o libros de didáctica de las matemáticas consideras destacables por lo que en su momento y en el desarrollo posterior de la disciplina supusieron?*

*La verdad es que muy pocos matemáticos han intentado presentar las matemáticas de una manera interesante para el público en general.*

La verdad es que muy pocos matemáticos han intentado presentar las matemáticas de una manera interesante para el público en general. Sin embargo uno de los libros que me resultan más sugerentes en esta línea es *Experiencia Matemática* de Philip J. Davis y Reuben Hersh (MEC y Labor). Davis y Hersh ofrecen una visión personal y atrayente de las matemáticas y muestran el complejo conjunto de factores que determinan su naturaleza, su estructura y aplicaciones desde varias perspectivas, con observaciones acertadas que resuenan inmediatamente en su experiencia cotidiana.

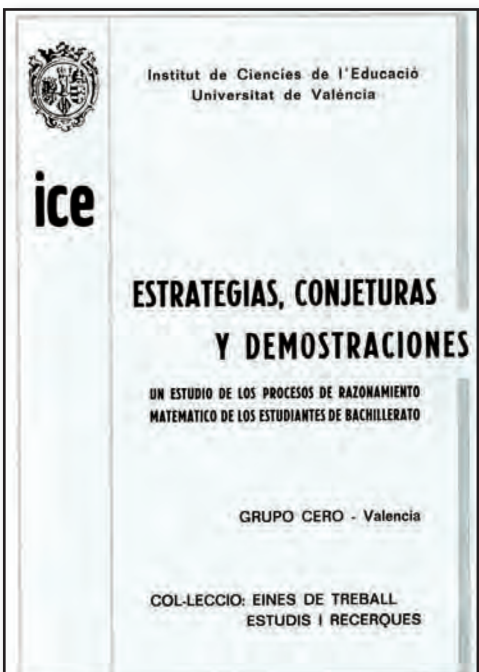
*Aparte de los mencionados, ¿destacarías algún otro libro por su belleza, originalidad, repercusión…?*

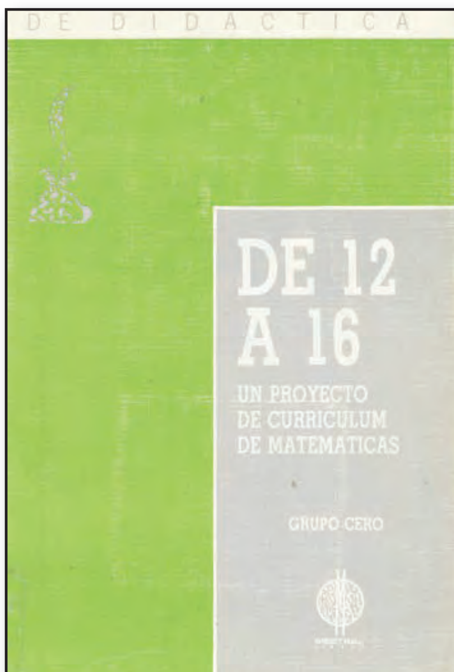
Un libro que siempre me ha resultado útil, atractivo y con un enfoque que me ha ayudado a encarar las clases de matemáticas de otra manera es el de *Geometría* de Emma Castellnuovo. Desde que conseguí la primera edición que se publicó en España (Ed Ketres) siempre me ha gustado la importancia que da a la introducción de los temas, partiendo de un contexto sugestivo y motivador que va desarrollando poco a poco y sobre el cual se trata de orientar el interés del alumno.

Pero si he de hablar de repercusión, sobre todo a nivel personal, no puedo dejar de mencionar los libros del grupo Cero de Valencia que se publicaron en la década de los 80:

— *De 12 a 16. Un proyecto de currículum de matemáticas.*
— *Es posible.*
— *Estrategias, conjeturas y demostraciones.*

Todos ellos supusieron para mí el replantearme de una manera distinta mis clases de matemáticas, haciendo cosas que antes ni se me hubiesen pasado por la imaginación. Además, me hicieron reflexionar sobre lo que debe ser la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas…. Entre otras cosas, que había



que desplazar el centro de gravedad de la enseñanza de las matemáticas de la materia al alumno.

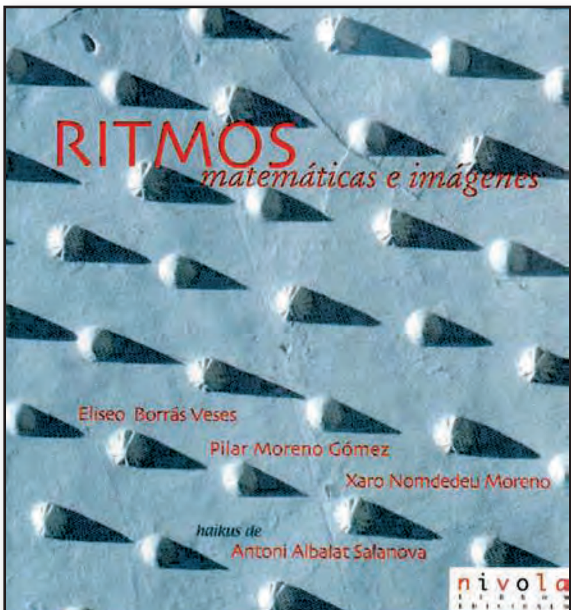
*¿Puedes aportar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas que hayas incorporado a tus referencias?*

También está tomada del Grupo Cero en el libro *De 12 a 16 Un proyecto de currículum de matemáticas* aunque también se la escuché directamente a Francisco Hernán en alguna de las conversaciones que tuve la suerte de entablar con él:

> Todo alumno al terminar sus estudios medios debería haber tenido la experiencia propia de lo que las matemáticas son, tanto si después va a estudiar más matemáticas como si, cosa que ocurrirá en la mayoría de los casos, va a dedicarse a otras actividades. Dos o tres experiencias en las que actúe como matemático, se haga preguntas, explore, investigue, tome decisiones y comunique con claridad el resultado de todo ello, son probablemente suficientes para que aprecie en qué consisten las matemáticas.»

*En tus lecturas ajenas a las matemáticas (literatura, arte,...), ¿has encontrado algún libro recomendable en el que las matemáticas (como resultados o como inspiración) jueguen un papel interesante?*

Ahora mismo me viene a la memoria el libro *Ritmos: matemáticas e imágenes*, publicado en la Editorial Nivola (2002). Se trata de una obra muy especial para mí ya que uno de sus autores Eliseo Borrás Veses, un gran matemático y amigo, nos dejó en mayo del 2010. La obra ha sido realizada junto con dos profesoras de matemáticas, Pilar Moreno Gómez, autora de las fotografías del libro y Xaro Nomdedeu Moreno (primera directora del Planetario de Castellón), y también ha participado Antoni Albalat Salanova, autor de los haikus que encabezan cada uno de los capítulos.




> *[…] había que desplazar el centro de gravedad de la enseñanza de las matemáticas de la materia al alumno*

Este libro, aunque tiene relación con las matemáticas, tiene mucho que ver con la regularidad, con la armonía y con la belleza de las imágenes en la naturaleza y en las cosas que nos rodean en la vida cotidiana. Un párrafo de la introducción de Ritmos puede ser la mejor descripción de lo que supone: «Esperamos que este trabajo cree vínculos afectivos con la matemática, muestre que una mirada matemática de las cosas es siempre posible y que, como en una novela o una canción pueda aparecer la emoción, el misterio y la belleza»…

*¿Qué libro te resulta más interesante entre los últimos que has leído sobre matemáticas?*

Tengo una gran estima por la colección «La matemática en sus personajes» de la editorial Nivola, últimamente he leído el libro dedicado a Pascal: *Pascal. Un genio precoz* de Félix García Merayo.

El texto es fluido y se relata con detalle la situación en la que vivió Pascal, además de sus logros matemáticos. Pascal es uno de los sabios que más atraen, que más subyugan. Presentaba un genio natural y profético para la ciencia y facultades sorprendentes que no se daban en ninguno de sus contemporáneos. Especialmente dotado como pensador y escritor, su psicología se vio influenciada por el entorno religioso y teológico que le tocó vivir. Fue además un gran inventor, un físico, un ingeniero y un buen emprendedor, y estableció muchos de los principios de la aritmética, el cálculo, el infinito y la geometría que luego desarrollarían otros científicos. Sentó las bases, junto a Fermat, del cálculo de probabilidades.

*Coméntanos algún libro no matemático que hayas leído últimamente y que te gustara especialmente.*

*El tío Petros y la conjetura de Golbach,* de Apostolos Doxiadis. En esta novela se narra la vida de un matemático griego que dedica toda su vida a tratar de resolver la conjetura de Golbach. Me enganchó desde el principio por la trama que va siguiendo el relato y tal vez porque yo también traté de hacer pinitos en mi juventud, bastante menos constantes que el tío Petros, con la conjetura de Golbach.

Ante todo hay que aclarar que el protagonismo de la novela se comparte entre dos personajes: el tío Petros y su sobrino, cuyo nombre no se menciona en ningún momento. Aunque la narración la lleva a cabo el sobrino, una vez que el tío Petros ha muerto -un dato que se conoce desde la primera página-; sin embargo, un tercio del libro aparece narrado directamente por el tío Petros, como revelación que hace sobre su vida a su sobrino. Aunque es evidente que el personaje principal es el tío Petros, es el sobrino el que se encarga de llevar todo el peso de la narración y el personaje que por tanto ofrece su punto de vista en la trama. La novela se organiza como una serie de pesquisas realizadas por el sobrino y encaminadas a averiguar el misterio que se esconde detrás de la figura del tío Petros.

*El libro de Apóstolos Doxiadis no sólo no exige tener una sólida base matemática sino que además es un magnífico aporte en la visión poética de las matemáticas.*

La descripción inicial del tío Petros envuelve al personaje de misterio. Se trata de un viejo que apenas sale de casa, que casi no tiene relaciones sociales, que vive apartado y rodeado de pilas de viejos libros y que es constantemente menospreciado por toda su familia. Este enigmático personaje intriga a su sobrino, que no descansará hasta descubrir que tiempo atrás fue un prestigioso catedrático de Análisis en la Universidad de Munich. Será el padre del joven el que complete la información confesándole que Petros desperdició una brillante carrera tratando de resolver «el problema más difícil de las matemáticas». No obstante, la descripción que hace su padre de Petros no hace sino empujar al joven hacia él: «El hecho de que hubiera fracasado en su intento no sólo no lo rebajaba ante mis ojos, sino que, por el contrario, lo elevaba a la más alta cumbre de la excelencia». Este trágico final, que convierte a Petros en una especie de héroe romántico, es lo que lleva a su sobrino a decidirse por estudiar matemáticas. En este sentido puede entenderse perfectamente la afirmación que hace más adelante Petros de que su sobrino no tiene verdadera alma de matemático: no llegó a las matemáticas por su propio camino sino imbuido por la visión idealista del final trágico de su tío. En este caso el matemático no nació, sino que se hizo. Y no es hasta el momento final de la novela en que el sobrino reconoce que no tiene la sangre de un verdadero matemático.

Consciente de ello, Petros prepara una estratagema para evitar que su sobrino se dedique a las matemáticas: le propone un problema que deberá resolver durante el verano para poder estudiar matemáticas. Este problema, en apariencia sencillo, es la demostración de que todo número par mayor que dos es igual a la suma de dos números primos. Se trata de un reto de difícil solución, porque es la conjetura de Goldbach, ese teorema que ha llevado a Petros a desperdiciar su vida intentando demostrarlo. La justificación que Petros da a su sobrino para este engaño la resuelve en un escueto telegrama: «para entender mi conducta tendrías que familiarizarte con el teorema de la incompletitud».

Desde luego, a pesar del título, el libro de Apóstolos Doxiadis no sólo no exige tener una sólida base matemática sino que además es un magnífico aporte en la visión poética de las matemáticas. Es cierto que hay referencias matemáticas a lo largo del libro, pero salvo un par de teoremas, la conjetura de Goldbach y el teorema de incompletitud de Kurt Gödel, no es necesario tener conocimientos matemáticos para seguir el hilo del libro. Aunque las matemáticas son el eje central de *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*, al mismo tiempo son una excusa para tratar un tema más humano, el sacrificio de una vida en pos de una idea. El libro puede considerarse como una de esas lecturas que contribuyen a la visión poética de las matemáticas, e incluso en sus páginas llega a afirmarse: «El verdadero matemático se parece a un poeta o a un compositor musical; en otras palabras, a alguien preocupado por la creación de belleza y la búsqueda de armonía y perfección».

# Escaparate 1: La rebelión de los números


**La rebelión de los números**
**Antonio de la Fuente Arjona**
*Ediciones de la Torre, Madrid, 2010*
*ISBN 978-84-7960-471-9*
*96 páginas*

Algunas veces, cuando el libro que elijo para que aparezca en esta sección tiene alguna característica especial, busco que la persona que lo reseñe sea una experta en el tema tratado o bien posea algún distintivo personal que la haga destacar en un entorno de profesores de matemáticas. Por ejemplo, en cierta ocasión, firmó una profesora cuya relación con nuestra materia se remontaba a sus tiempos de estudiante de bachillerato.

La obra posee como característica especial que es de literatura infantil y esta vez escribo yo la reseña (que no cumplo ninguna de las dos condiciones), pero me he buscado un asesor. Nico es un estudiante de quinto de Primaria que se lee todos los libros que le dejo. Vamos, que es mi asesor personal, pues antes de llevar al aula un texto pasa el filtro de Nico. Como es de imaginar, no sólo lee libros relacionados con matemáticas, si no que, se podría decir, se lee todo lo que cae en sus manos. Tanto es así, que el curso pasado pudo llegar a leer unos cien libros (es capaz de acabar con el cupo del carnet de biblioteca suyo y de sus padres). Resumiendo, podemos decir que Nico es alguien especial (y no sólo en nuestro entorno), y no cabe ninguna duda de que es un experto en literatura infantil.

Así que le pedí que me escribiera algunas líneas al respecto del libro y él, muy diligentemente, se puso a la tarea. Para Nico el libro es recomendable porque, además de ser de «mates», es «super guay» y tiene acertijos, lo que convierte la acción de leerlo en una exploración, una pequeña aventura que vivir en la cama antes de dormir. Que la obra sea de teatro la hace, para nuestro experto más atractiva.

Yo también creo que el libro goza de gran dinamismo gracias, en parte, a que el autor ha conjugado su amplia experiencia tanto en el mundo del teatro como en la literatura infantil para concebirlo como una obra de teatro en ocho escenas. Los protagonistas son un grupo de alumnos que se hacen llamar *Los Últimos de la Clase*, y que ya están acostumbrados a vivir aventuras en otros textos de este autor. En esta ocasión, su misión es rescatar a su profesor, evitando de paso que desaparezcan los números.

La versatilidad es el punto fuerte de este libro, ya que es posible trabajarlo en los últimos cursos de Primaria o en 1.º de ESO, y se puede hacer desde diferentes perspectivas y con distinta metodología. El alumno puede leerlo sólo por su cuenta, se puede hacer una lectura dirigida en clase, realizar dramatizaciones puntuales de los capítulos, o preparar una representación más ambiciosa coordinando a diferentes profesores con alumnos de distintos cursos. Estoy convencido de que habrá muchos compañeros más expertos en estas lides que sabrán sacarle más jugo que el que yo pueda sugerir.

**Nico Andrés Casas**
*CEIP Joaquín Costa, Zaragoza*
**Daniel Sierra**
*IES Albarracín, Albarracín, (Teruel)*

Quizás en el debe hay que anotar la presencia de algunos lugares comunes que en los últimos tiempos se repiten en la literatura de este género. Los números vuelven a desaparecer y con ellos su profesor. Es necesario que algún alumno díscolo entre en el redil para que la catástrofe no se consume. En cualquier caso, la excusa es buena para desarrollar una trama jalonada por los retos que los protagonistas tienen que solventar para poder seguir avanzando en un mundo imaginario pero plagado de referencias culturales e históricas totalmente reales. Estos retos o acertijos son de contenido matemático, pero el autor no olvida la interdisciplinariedad y va introduciendo en ellos contenidos de otras asignaturas. Aunque, a priori, los enigmas pueden parecer de sencilla resolución si se analizan con detenimiento algunos de ellos se adivina algo más de calado.

Para finalizar, me parece importante hablar de un número, el último que aparece en el libro. Está en la contraportada y es 0,7. Obviamente, lo que se obtenga del 0,7 de la venta de estos libros no va a suponer una gran aportación económica a los proyectos del desarrollo del Tercer Mundo, pero lo que sí muestra es el talante y compromiso del autor y la editorial, en unos tiempos en los que parece difícil acordarse de los problemas de los otros. No nos hemos de olvidar de que las crisis siempre golpean más fuerte en las partes más débiles y no está de más recordar que no es precisamente en el primer mundo (y no sólo en sentido geográfico-político) dónde más se sufre. Formamos parte de un sistema educativo, y ese 0,7 es la última acción educativa del libro ■

# Escaparate 2: Una búsqueda épica de la verdad

**Logicomix**
Una búsqueda épica de la verdad
**Apostolos Doxiadis y Christos H. Papadimitrou**
**(Ilustraciones: Alecos Papadatos y Annie Didonna)**
*Ediciones Sinsentido, Madrid, 2011*
*ISBN 978-90-8998-097-7*
*352 páginas*


Mi amigo Daniel, principal responsable de mi labor como reseñador, sabe que soy un gran aficionado a los tebeos. Por eso ha sido una sorpresa muy agradable encontrar un cómic, para ser más precisos una novela gráfica, cuyos héroes no tengan superpoderes, sino que sean matemáticos de carne y hueso (mejor de papel y tinta) enfrascados apasionadamente en encontrar la elusiva verdad.

El equipo creativo de este cómic está integrado por el matemático Apostolos Doxiadis, conocido por su libro *El tío Petros y la conjetura de Goldbach* y estudioso de la interacción entre matemáticas y narrativa. Junto con Christos H. Papadimitrou, profesor de la cátedra de informática de la Universidad de California, han desarrollado una magnífica historia sobre las personas que participaron en la búsqueda de raíces firmes para el árbol de las matemáticas.

**Pedro Latorre**
*IES Vega del Turia, Teruel*

La parte artística es llevada por el matrimonio Alecos Papadatos y Annie Di Donna, ambos con un amplio currículo en animación cinematográfica. El dibujo es alegre y dinámico, tiene cierto aire a los cómics de Tintín. Consigue plenamente que los personajes transmitan sus emociones.

En la introducción de Fernando Savater aparece la expresión "instruir deleitando", aspiración o incluso utopía que algunos nos planteamos para nuestra función docente y que en esta obra se consigue plenamente. La historia de los fundamentos siempre ha tenido todos los ingredientes para servir como base de una obra que mezcle ficción y realidad. ¿Por qué no se hizo antes? Resulta difícil romper el mito de que las matemáticas, y por ende los que se dedican a ellas, son aburridas.

En el cómic aparecen dos planos narrativos. El principal se sitúa en el 4 de septiembre de 1939, día en el que el Reino Unido le declara la guerra a Alemania. Bertrand Russell va a impartir una charla sobre Lógica en una universidad americana. Por su fama de pacifista, le espera un grupo de antibelicistas que le piden que se una a su causa. Argumentando que expondrá su postura sobre la guerra, Russell les invita a oír su charla, en la cual va narrando su vida. Este es el hilo conductor para ir conociendo a los creadores de la Lógica Moderna. La apasionante vida del matemático se irá desplegando ante nuestros ojos. Su infancia, marcada por la sombra de la locura familiar y su refugio en la geometría de Euclides. En la Universidad de Cambridge percibe claramente la falta de una base rigurosa para las matemáticas. Conoce a Whitehead, con sus mismos intereses, que le recomienda hacer un viaje por Europa para conocer a los lógicos pioneros Frege y Cantor. El final del periplo será París, sede del Congreso Internacional de Matemáticas de 1900, con el famoso discurso de Hilbert.

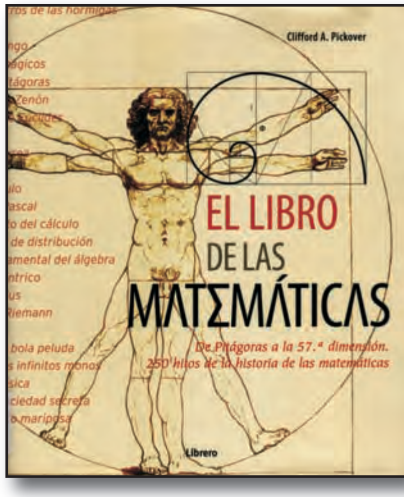
Tras su regreso a Cambridge, seremos testigos de la complicada y larga gestación, 10 años, de su magna obra los *Principia Mathematica*. Las paradojas en teoría de conjuntos, que él mismo descubre, no son superadas plenamente con la teoría de tipos. En este callejón sin salida aparece Wittgenstein, que tomará el relevo de un exhausto Russell. Su solución es radical y sobrepasa el ámbito matemático. Ni el lenguaje, ni en particular la lógica con su lenguaje formal, son suficientes para alcanzar la verdad. Los resultados de incompletitud de Godel confirmarán la existencia de enunciados de los cuales no podemos demostrar que sean ni ciertos ni falsos.

En un segundo plano que se entremezcla con la narración de Russell los propios autores se convierten en personajes. Podríamos considerarlo un "Cómo se hizo Logicomix". A veces son breves interrupciones en las que se exponen las decisiones creativas o se explica algún concepto lógico más peliagudo. Son un poco más extensas las conversaciones entre Apostolos y Christos que sirven de presentación al hilo principal y en general proporcionan una visión actualizada sobre lo que ha supuesto para el mundo en que vivimos esta aparentemente fallida búsqueda. Los autores enfatizan que los matemáticos son mayoritariamente gente cuerda. Pero en el caso que nos ocupa estamos hablando de personalidades muy obsesivas, capaces de dedicar 362 páginas a demostrar que 1+1=2.

Es obligado dejar muy claro que en este pequeño resumen no aparecen las mejores virtudes de la novela gráfica. Tiene muchas situaciones divertidas, profundiza en el carácter de los personajes, y es muy destacable la ambientación histórica. Espero que esta obra sirva de motivación para que los creadores de cómics se arriesguen a realizar más incursiones en el mundo de las matemáticas. ■

# Escaparate 3:
# De Pitágoras a la 57ª dimensión

**El libro de las matemáticas**
De Pitágoras a la 57ª dimensión, 250 hitos de la historia de las Matemáticas
**Clifford A. Pickover**
*Librero, b.v. Kerkdriel, 2011*
*ISBN 978-90-8998-097-7*
*528 páginas*




Tengo que agradecer a mi amigo Joaquín el que me diera a conocer esta magnífica obra. Se trata de un libro singular, poco frecuente y que no debería pasar desapercibido. Creo, sin mi habitual temor a equivocarme, que merece un lugar en nuestras bibliotecas. Durante este verano he disfrutado con su lectura en pequeñas dosis o simplemente mirando las ilustraciones, los santos que decían nuestras abuelas.

Clifford A. Pickover es un polifacético Doctor en Biofísica y Bioquímica Molecular que ha escrito numerosos libros en temas tan diversos como religión, arte o historia. En el caso de divulgación matemática podemos citar *La cinta de Möbius* y *De Arquímedes a Hawking*.

*El Libro de las Matemáticas* consta de 250 hitos de la historia de las matemáticas elegidos por el autor, ordenados cronológicamente. Estructurado a doble página, tenemos en la página izquierda un texto explicativo, evidentemente breve del evento y a la derecha una ilustración referente al mismo. El libro tiene un tamaño adecuado para disfrutar de las imágenes. Al pie del texto, bajo la cabecera «Véase también», aparecen referencias internas a otros sucesos relacionados, para facilitar una lectura temática. Por último cada ilustración viene acompañada de un pequeño comentario. Hagamos una pequeña crítica de cada uno de estos ingredientes.

Los textos cumplen perfectamente una función de introducción al tema tratado, ocupando un lugar preferente la personalidad de los protagonistas. Como explica Pickover, se trata de ir al grano, sin las habitualmente engorrosas explicaciones previas. Si nos interesa profundizar, se proponen lecturas adicionales o enlaces en la web que facilitan la tarea cada vez más complicada, paradójicamente muchas veces por la abundancia, de encontrar un punto de inicio válido en nuestra investigación.

Un profundo conocedor de la historia de las matemáticas podría valorar la selección de hechos, en la que según el autor se ha tenido en cuenta la repercusión científica y social del hallazgo. Me parece buena la mezcla de descubrimientos “serios” con aquéllos de carácter lúdico, en particular con los juegos y su teoría subyacente. Por ejemplo, me ha gustado mucho ver la evolución de las máquinas de calcular: ábacos, calculadoras mecánicas y electrónicas.

Las imágenes que acompañan a los textos me han parecido magníficas y es suficiente recorrer las páginas ojeando las

**Pedro Latorre**
*IES Vega del Turia, Teruel*

ilustraciones para pasar un buen rato. Son destacables las imágenes elaboradas por ordenador donde se plasman de forma artística construcciones geométricas en el plano y en el espacio, los retratos de relevantes pero en muchos casos desconocidos matemáticos o los dibujos para esclarecer el planteamiento de un problema. El único pequeño reparo se lo pongo a los comentarios de las ilustraciones, que en muchos casos están extraídas literalmente del texto.

En la introducción, el autor proclama que uno de sus objetivos es transmitir la belleza de las matemáticas entre toda clase de lectores. Es una labor importante que la gente descubra que nuestra disciplina se puede impartir en los colegios e institutos de manera mucho más atractiva, evitando que el profesor lea en la pizarra, en este caso en el idioma de Shakespeare, expresiones tan lapidarias como «no me gustan las malas personas, las clases de mates y el pescado.» Pickover también afirma que el estudio de matemáticas en niveles preuniversitarios conlleva un mayor éxito en cualquier carrera que posteriormente se curse. En nuestro mundo actual parece imprescindible un poco de pragmatismo.

Una de las mayores virtudes del *Libro de las Matemáticas* es que facilita el conocimiento de muchos hechos curiosos que de otra forma sería muy difícil de descubrir. Se podría argumentar que algunos de los eventos comentados aportan un conocimiento inútil o pueril. Incluso olvidando el aspecto lúdico, siempre he pensado que esa información puede ser útil para enriquecer lo que ya conocíamos y facilitar nuevos aprendizajes.

Este libro pone de relieve que el corazón de las matemáticas no reside en las fórmulas. Hace bastante tiempo, un compañero me comentaba muy disgustado que su vecina le había dicho de forma peyorativa que lo único que hacíamos era utilizar fórmulas. La visión errónea que muchas personas tienen de nuestra actividad se disiparía si aparecieran más obras de divulgación como la presente, atractivas para casi todo el mundo. ■

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 93-102

# Historias de al-Khwārizmī (7ª entrega). Figuras y demostraciones

## Demostración ingenua (con figuras), demostración geométrica (euclídea)

En la entrega anterior de estas historias, "El cálculo con la cosa", acabé examinando cómo al-Khwārizmī demuestra unos cálculos con radicales utilizando para ello la representación de las magnitudes con las que hay que calcular mediante segmentos, y cómo otros cálculos hechos con especies dice que no puede demostrarlos de la misma manera, porque a un cálculo de ese estilo "no le conviene ninguna figura", y los demuestra "por la expresión" o "en palabras". Además, dije que las demostraciones que al-Khwārizmī hace con figuras son demostraciones cuya garantía de verdad se sustenta en lo que se ve, y que no son, por tanto, demostraciones cuya garantía de verdad sea del estilo que los griegos establecieron y que puede encontrarse en práctica en los *Elementos* de Euclides.

En aras de la concisión, hemos llamado "ingenuas" a las demostraciones que al-Khwārizmī hace con figuras (Puig, 2008; Infante y Puig, 2011a, 2011b), queriendo indicar con ese calificativo de ingenuas precisamente que la garantía de verdad está en lo que se ve, y que, por tanto, ni quien presenta una demostración hecha de esta manera ni quien la lee o la escucha pone en duda lo que se ve, lo que se muestra. Y hemos llamado "geométricas" a las demostraciones euclídeas, en las que la garantía de verdad ya no está en lo que se ve, en lo que se muestra, sino en el entramado de nociones comunes, postulados y definiciones, y en los razonamientos que se hacen sobre las figuras. Por otro lado, la demostración que al-Khwārizmī hace con palabras, aunque sea porque en ese caso no puede hacer una figura que es lo que probablemente le hubiera gustado hacer para poder mostrar en la figura la verdad de lo que va sólo a decir con palabras, podemos calificarla de demostración "algebraica", al menos en germen. En el libro de álgebra de al-Khwārizmī podemos encontrar pues, en este sentido, demostraciones ingenuas (hechas usando figuras geométricas) y demostraciones algebraicas en germen (hechas únicamente con palabras, "por la expresión"), pero no demostraciones geométricas (hechas a la manera euclídea, que usa también figuras geométricas).

El hecho de que en al-Khwārizmī no hay demostraciones euclídeas ya lo señaló hace casi setenta y cinco años el historiador austríaco Solomon Gandz al comparar las demostraciones de al-Khwārizmī de las formas canónicas compuestas,

**Luis Puig**
*Universitat de València Estudi General*
*historias@revistasuma.es*

con las proposiciones del libro segundo de Euclides que han querido verse como álgebra tratada en términos geométricos. Gandz rebate la idea de que lo que Euclides está haciendo en el libro segundo de los *Elementos* sea álgebra en el mismo sentido que adquiere el álgebra en el libro de al-Khwārizmī, y califica lo que hace Euclides en ese libro, de forma contundente, como muy antiguo, si se mira como álgebra. Pero es igual de contundente a la hora de calificar el carácter de las demostraciones de al-Khwārizmī:

> Algebraicamente, al-Khwārizmī está 1000 años por delante de Euclides; geométricamente, está 1000 años detrás. Sus demostraciones se basan completamente en la intuición. No tiene ninguna otra cosa en que basarlas. En su geometría, los axiomas, definiciones, teoremas y proposiciones de Euclides se ignoran por completo (Gandz, 1937, p. 519).

Pero no hace falta recurrir a un historiador de las matemáticas nacido en el siglo XIX: el que las demostraciones de al-Khwārizmī no siguen el patrón euclídeo ya lo constataron sus inmediatos seguidores. La mejor prueba de que el asunto se veía así la tenemos en un opúsculo publicado por Thābit Ibn Qurra (836-901), que había nacido en Harran (Turquía) y se instaló a trabajar en Bagdad como ya había hecho años atrás el propio al-Khwārizmī. El opúsculo de Thābit Ibn Qurra es muy breve, dos páginas y media en la edición de Luckey (1941), y lleva un título que no puede ser más explícito: *La rectificación de los problemas del álgebra mediante demostraciones geométricas.*

Las demostraciones que ha presentado al-Khwārizmī en su libro no las ve pues Thābit Ibn Qurra como demostraciones geométricas, y lo que hace en este opúsculo es establecer de nuevo los algoritmos que resuelven las formas canónicas compuestas demostrándolos a partir de las proposiciones 5 y 6 del libro segundo de los *Elementos* de Euclides[1]. Thābit Ibn Qurra ya no acepta como garantía de verdad lo que se ve en las figuras que al-Khwārizmī muestra, sino que precisa una garantía de verdad de otro tipo: la que da el entramado euclídeo. En esta entrega de las historias de al-Khwārizmī examinaremos el aspecto que tienen esas demostraciones no euclideas que hace al-Khwārizmī y qué hace al-Khwārizmī con las figuras que usa en ellas, y veremos un ejemplo de cómo es la rectificación de Thābit Ibn Qurra y qué nuevo papel desempeñan las figuras en ella. Pero antes diré un par de cosas sobre la demostración euclídea.

## Mostrar, demostrar

La demostración matemática se constituye por primera vez en la Grecia clásica, y se constituye precisamente separándose de una manera previa de demostrar cuyo fundamento estaba en mostrar que se ve que lo que se quiere demostrar es así. En Puig (1994) señalé que Árpád Szabó argumenta en su libro *Les débuts des mathématiques grecques* (Szabó, 1977) que la geometría griega era primitivamente una especie de *historía*, una indagación empírica sobre las propiedades de las figuras geométricas, basada en la vista, e indiqué que, “por eso, cuando, como hace Euclides, los objetos de la geometría se definen desprendiéndose de las propiedades sensibles de las figuras geométricas trazadas en la tierra, como medios de organización de éstas (“Un punto es lo que no tiene partes.” “Una línea es una longitud sin anchura.”), esas definiciones han de acompañarse del postulado de las condiciones mismas del discurso en el que ha de dialogar el lector” (Puig, 1994a, p. 6).

La transformación de la demostración basada en la vista en la demostración euclídea tiene ese componente ontológico (los objetos de los que trata la geometría no son las figuras trazadas en la tierra, sino los conceptos que organizan los fenómenos del contorno), y, como consecuencia de ello, tiene también un componente pragmático: como la demostración depende de un marco discursivo, los nuevos objetos exigen un marco discursivo nuevo, ya no basta como garantía de verdad mostrar que algo se ve que es así.

Más aún, como subraya el mismo Szabó en su libro *L'aube des mathématiques grecques* (Szabó, 2000), en el que repasa y amplía años después sus tesis expuestas en (Szabó, 1977), en una demostración por reducción al absurdo, el gran invento griego, “lo esencial del razonamiento no se puede presentar a la vista, no hay que prestar atención a los segmentos que se dibujan, sino sólo a las definiciones” (Szabó, 2000, p. 254). Las figuras dibujadas pueden ser un apoyo para los razonamientos, los razonamientos pueden desarrollarse haciendo referencia a figuras que están dibujadas, pero lo que se ve en éstas ya no puede ser la garantía de la verdad de lo que se afirma. Esa garantía hay que buscarla en otro sitio.

El verbo griego *deíkmyni*, del que deriva la expresión con la que Euclides termina las demostraciones de todos los teoremas, que traducimos corrientemente por “como queríamos demostrar”, significaba en la lengua clásica griega, nos cuenta Szabó (1997, p. 202) tanto “hacer ver, mostrar, indicar” como “hacer conocer mediante la palabra, explicar” o “demostrar”. El significado más primitivo parece ser el de “mostrar”, y, así, arguye Szabó, se puede ver en acción en el famoso pasaje del diálogo *Menón* de Platón en el que Sócrates le enseña al esclavo cómo construir un cuadrado de área doble de un cuadrado dado. Sócrates le muestra al esclavo la figura y le hace ver que si dobla el lado, el cuadrado obtenido no es el doble sino el cuádruple. Todo el peso de la demostración se soporta en la vista, en lo que Sócrates hace ver al esclavo en las figuras dibujadas en la tierra. Sin embargo, las cosas ya no son así en los *Elementos* de Euclides, y cuando en éstos se dice que algo se ha demostrado, lo que se ha hecho no ha sido mostrar la figura construida para que se vea que es así.

En el Menón, Sócrates sólo le pregunta al dueño del esclavo "¿Es griego y habla griego?". Ése es todo el marco discursivo que Sócrates necesita compartir con el esclavo para poder enseñarle, para poder mostrarle la verdad de una proposición matemática. El esclavo aceptará lo que se le muestra como prueba, porque mostrar es demostrar en ese marco discursivo. La demostración que hace Sócrates es, como las que hace al-Khwārizmī, una demostración de las que hemos llamado "ingenuas".

Luis Vega, en su libro *La trama de la demostración*, que subtituló "Los griegos y la razón tejedora de pruebas" (Vega, 1990), señala como acepciones del verbo griego *deíkmyni* tanto mostrar algo, como probar que algo es el caso; y éste probar que algo es el caso puede ser según él "probar de modo vago o genérico", significado que le atribuye a la aparición de ese verbo en la indicación que Sócrates le da al esclavo cuando le dice "Y si no quieres hacer cálculos, muéstrala en un dibujo", refiriéndose a la diagonal del cuadrado que resuelve el problema de encontrar el cuadrado de área doble (Vega, 1990, p. 20). Los cálculos no serían según esto una "prueba vaga o genérica", sino una demostración concluyente, un argumento con poder de convicción en el marco discursivo euclídeo, el significado que *deíkmyni* acaba teniendo.

Al subrayar, como lo estoy haciendo, el papel del marco discursivo en la caracterización de a qué se considera una demostración, lo que estoy queriendo decir, como lo dice Vega (1990) es que un argumento es una demostración por razones pragmáticas. Es decir, una demostración se caracteriza por ser una argumentación que en un determinado marco discursivo se reconoce por quien la realiza y quien la escucha como demostración. Pero no estoy diciendo que se trate de un acuerdo que se establece entre dos personas en el curso de un diálogo, el marco discursivo es un conjunto de reglas pragmáticas socialmente establecidas, en un momento histórico concreto, por una comunidad, en el caso que nos ocupa, por una comunidad matemática.

Cuando se abandona el mostrar con el dedo como forma de presentar una prueba, y la vista como garantía de verdad, es decir, cuando este marco discursivo que sustenta las demostraciones que hemos llamado "ingenuas" deja de regir, y la argumentación, la manera de dar cuenta y razón, toma la forma de una deducción lógica, resulta preciso establecer un nuevo marco discursivo en el que se acuerde qué cosas son las que no va a ser preciso deducir de otras. Esos primeros principios adoptan en el texto euclídeo dos formas: las nociones comunes y los postulados. En el marco discursivo que constituye los *Elementos* el diálogo es posible, la realización de demostraciones es posible, porque aceptamos que hay cosas que no hay que demostrar, y esto por dos motivos: el primero, porque estamos de acuerdo en que son verdaderas, ésas son las nociones comunes; y el segundo, porque aceptamos que son verdaderas para que el diálogo pueda comenzar, ésos son los postulados. Szabó (1977) afirma que la palabra que usa Euclides y que traducimos por postulado, *aitēmata*, designa en la dialéctica una petición a la que el interlocutor no asiente de inmediato, sino ante la que tiene reservas. Por eso Euclides escribe en los postulados en imperativo: "Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera". Y de ahí la historia en particular del quinto postulado, que, puesto en duda reiteradamente, acabó abriendo otros marcos discursivos para la geometría.

Las demostraciones euclídeas, las que hemos llamado "geométricas", son las que se desarrollan en ese marco discursivo compuesto por definiciones, nociones comunes, postulados y deducciones lógicas. Nada de esto está presente en las demostraciones de al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas compuestas.

## Un esquema para describir las demostraciones ingenuas de al-Khwārizmī

En varias ocasiones he mostrado en detalle cómo hace al-Khwārizmī la demostración del algoritmo de solución de la quinta forma canónica (segunda forma canónica compuesta) "tesoro y números igual a raíces". Lo esbocé por primera ver en las *7as JAEM*, que se celebraron en Madrid en 1995 (Puig, 1995), una explicación más minuciosa apareció en México como capítulo de un libro (Puig, 1998) y puede descargarse de mi web en una versión ligeramente retocada en 2003 (http://www.uv.es/puigl/mexico96revisado03.pdf), y, finalmente, una versión inglesa en la que además hablo de los procedimientos de cortar y pegar en el álgebra babilónica tal y como la reinterpreta Høyrup (2002) y de mi uso de ese tipo de procedimientos para entender algunas proposiciones del *De Numeris Datis* de Jordanus de Nemore, ha aparecido como un capítulo del libro *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*, publicado por la Mathematical Association of America (Puig 2011). Aquí voy a mostrar un esquema de lo que hace al-Khwārizmī en este caso.

La quinta forma canónica es el caso más difícil, lo que ha hecho que en álgebras posteriores se presentara en último lugar, en vez de en el quinto. Lo que lo hace más difícil es el hecho de que cabe que la ecuación tenga una solución, dos soluciones o ninguna solución, cosa que no sucede en las otras dos formas canónicas compuestas, y que, por tanto, haya que discutir la existencia de esas posibilidades. Al-Khwārizmī enuncia el algoritmo de solución de esta forma canónica usando como caso genérico "un tesoro y veintiún dirhams igual a diez raíces", es decir, el equivalente a nuestra la ecuación $x^2 + 21 = 10x$. Si escribimos esa ecuación genérica en general $x^2 + c = 10b$, las instrucciones del algoritmo las podemos representar por la siguiente secuencia de operaciones:

$$\frac{b}{2} \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \to \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

En la secuencia hemos señalado conjuntamente las dos opciones finales, que al-Khwārizmī enuncia por separado.

Figura1. Página del manuscrito del libro de álgebra de la biblioteca Bodleyan de Oxford en que aparece la demostración de la quinta forma canónica

En la figura 1, está reproducida la página del manuscrito del libro de al-Khwārizmī conservado en la biblioteca Bodleyan de Oxford[2] en la que al-Khwārizmī presenta la demostración de este algoritmo. En ella puede verse que hay una figura. De hecho, la figura está colocada al final de la demostración, precedida de la expresión "ésta es la figura". Todo el texto que precede a la frase que muestra, indica, la figura lo que hace es construir progresivamente la figura y manipularla mostrando que determinadas partes de ella son iguales a otras, sin más argumento que el hecho de que así se ve en la construcción.
En el anexo 2 presento el texto de la demostración en detalle, acompañado de unas figuras explicativas, que no están en el texto de al-Khwārizmī, y que van siguiendo la construcción de la figura que presenta al-Khwārizmī y las manipulaciones que hace con ella (de hecho, mi figura es la de al-Khwārizmī girada 180º). Indico también la relación entre el texto de al-Khwārizmī y los pasos del algoritmo. Aquí presentaré el esquema de la demostración y sus rasgos fundamentales.

El esquema de la demostración puede describirse así:

1. Justificación de la representación de las especies de números, es decir, de los objetos del álgebra, mediante figuras, y representación de la ecuación.
   1.1. Un tesoro se representa con un cuadrado
   1.2. Representación diferenciada de la raíz del tesoro y de la raíz de la superficie, que permite expresar la ecuación como una adición de áreas.
2. Justificación paso a paso del algoritmo.
   2.1. Primeros pasos que preparan el uso del método akadio.
   2.2. Operaciones de cortar, mover y pegar en las que se busca un gnomon equivalente a un rectángulo (el método akadio).
   2.3. Pasos finales de recorrido del algoritmo en la figura.

Me parece importante señalar que, en la primera parte, al-Khwārizmī justifica cómo está representando las especies de números mediante figuras. Un tesoro no es un cuadrado, sino que se representa mediante un cuadrado. En la entrega anterior de estas historias vimos que al-Khwārizmī no podía representar un trinomio mediante una figura y que decía que a un trinomio

> no le conviene ninguna figura porque está compuesta por tres especies diferentes, tesoros, raíces y números, y no hay con ellas lo que les sea igual, para que pueda ser representado en una figura (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, pp. 246-247).

Es decir, al-Khwārizmī dice que para poder hacer una figura necesita que haya una ecuación. Esto es así porque el modo que tiene al-Khwārizmī de representar las tres especies de números permite combinar las tres especies en las dos dimensiones de las figuras planas que utiliza para representarlas. Para que las tres especies se puedan representar en las dos dimensiones, lo que al-Khwārizmī hace es lo siguiente. El tesoro, que siempre es uno porque las formas canónicas están enunciadas para un tesoro[3], se representa mediante un cuadrado. Las raíces, en plural, se representan mediante un rectángulo. Para ello, al-Khwārizmī recurre a un artificio que explica minuciosamente en la parte 1.2 de nuestro esquema. La raíz del tesoro es lineal y se representa mediante un segmento, en concreto, el lado del cuadrado que representa al tesoro, pero la raíz de la superficie, la raíz del rectángulo, es un rectángulo de largo la raíz del tesoro (el lado del cuadrado) y de ancho una unidad. Es una línea "ancha", como las llama Høyrup (1995), que traza su uso desde el álgebra babilónica. Así, las raíces, en plural, puede ser un rectángulo que se obtiene reiterando la raíz de la superficie tantas veces como sea necesario (como diga el número de raíces que haya). Finalmente, los simples números se representan también como un rectángulo, cuya área mide ese número: esto es lo que permite que se construya la ecuación, el hecho de que finalmente todas las especies aparecen representadas como superficies rectangulares.

En la segunda parte de la demostración, la parte crucial es la aplicación del método akadio, un método propio del álgebra babilónica que cortando, moviendo y pegando partes de un rectángulo, lo convierten en un gnomon de igual área, lo que permite “completar un cuadrado”. Eso es lo que está mostrado en la parte 2.2 de nuestro esquema. El resto de la demostración, antes y después de 2.2, recorre los pasos del algoritmo en la figura.

## Figuras que perduran: al-Khwārizmī, Euclides, Babilonia

He dicho que la parte crucial de la demostración de al-Khwārizmī es la aplicación del método akadio, un método que maneja las figuras de forma concreta cortándolas, moviéndolas y pegándolas, sin tener duda alguna sobre que, al hacer esas manipulaciones, las figuras que se obtienen son las que aparecen a la vista. Se ve que lo que resulta es un cuadrado, o que es un rectángulo, y se muestra: “ésta es la figura”, como dice al-Khwārizmī.

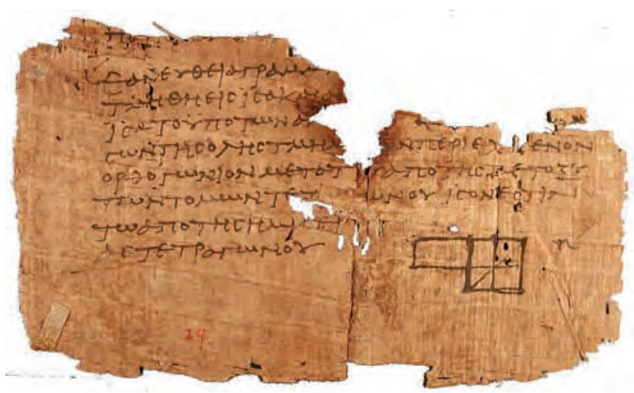


Figura 2. El fragmento más antiguo de los Elementos de Euclides que se conserva

Como señala Høyrup (2002), el libro segundo de los *Elementos* de Euclides se puede interpretar como la crítica de esos procedimientos de cortar y pegar babilónicos. Interpretado así, Euclides está rectificando la ingenuidad de esos procedimientos, el hecho de que su garantía de verdad sea lo que se ve. Euclides usa una figura, pero lo esencial de la demostración ya no está en ella sino en el hecho de que todas las afirmaciones que se hacen sobre ella están fundadas en nociones comunes, postulados y definiciones, y con los argumentos propios del nuevo marco discursivo. Las cosas no son así porque se ven en la figura, sino que lo que se ve se pone en duda hasta que se demuestra que es así.

Euclides y al-Khwārizmī están usando de forma distinta un mismo sustrato babilónico. Uno incorpora el método akadio al nuevo marco discursivo en que la garantía de verdad no está en lo visible, sometiéndolo a crítica, para lo que demuestra las propiedades geométricas que son pertinentes para establecer que lo que se ve es efectivamente el caso, con lo que no hace álgebra, sino geometría. El otro, incorpora el método akadio sin crítica alguna en el marco discursivo del álgebra que él ha constituido. Parafraseando a Gandz (1937), su forma de demostrar está (más de) mil años atrás de Euclides, aunque su álgebra esté mil años por delante de Euclides. Pero como el sustrato es el mismo, las figuras que usan al-Khwārizmī y Euclides pueden verse como ligeras variantes de una figura primaria: la que explica el método akadio.

El fragmento más antiguo que se conserva de los Elementos de Euclides es un papiro que los historiadores dataron inicialmente alrededor del año 300 de nuestra era, y que más recientemente ha sido datado por Eric Turner aún más atrás, entre el 75 y el 125 de nuestra era. En ese fragmento, reproducido en la figura 2, aparece precisamente la figura que acompaña la proposición 5 del libro segundo, una de las proposiciones en que Euclides más explícitamente está rectificando el método akadio.

La figura 3 muestra la reconstrucción de Høyrup (2002) del método akadio aplicado al problema de encontrar el largo y el ancho de un rectángulo cuando se conocen el área y la suma del largo y el ancho.

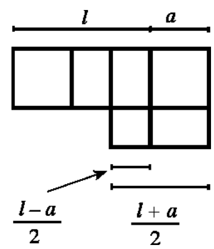



Figura 3

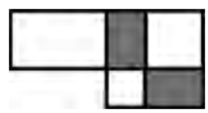


Figura 4

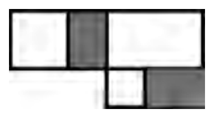


Figura 5

La proposición II.5 de Euclides dice en la traducción de María Luisa Puertas:

> Si se corta una línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de la sección, es igual al cuadrado de la mitad (Euclides, 1991, p. 272).

En la demostración de Euclides el momento crucial es cuando establece que los rectángulos sombreados en la figura 4 son iguales. En la demostración de al-Khwārizmī de la quinta forma canónica, el momento crucial, como ya hemos señalado es cuando establece la igualdad de los rectángulos sombreados en la figura 5. Euclides y al-Khwārizmī no hacen lo mismo, ni en los detalles ni en la intención, ni en el marco discursivo de referencia de sus demostraciones, pero todo está preparado para rectificar la demostración ingenua de al-Khwārizmī con la demostración geométrica de Euclides.

## Thābit ibn Qurra rectifica a al-Khwārizmī

Lo que hace Thābit ibn Qurra para rectificar las demostraciones de al-Khwārizmī sigue un esquema muy distinto del que organiza las demostraciones de éste, y, además, las figuras que aparecen desempeñan un papel bien diferente. El momento crucial de la demostración no va a ser ninguna operación realizada con la figura, sino la identificación del problema que se quiere resolver (la solución de la forma canónica) con un problema que ya está resuelto en los *Elementos* de Euclides. Y la figura por tanto no va a ser objeto de transformaciones de cortar, mover y pegar, sino que, una vez construida de manera que represente la ecuación que se trata de resolver, ya no es más que una referencia para el discurso demostrativo, que se fundamenta en el edificio euclídeo y no en lo que se ve.

En su opúsculo *La rectificación de los problemas del álgebra mediante demostraciones geométricas*, Thābit Ibn Qurra resuelve las tres formas canónicas compuestas. Aquí examinaremos cómo lo hace utilizando como ejemplo la primera de ellas, es decir, la cuarta forma canónica. Para que sirva de referencia, en el anexo 1, presento el algoritmo de solución tal y como lo plantea al-Khwārizmī en su libro de álgebra, y una explicación de su demostración. Como en el caso de mi análisis de la quinta forma canónica que hemos examinado antes, la figura que al-Khwārizmī sólo presenta al final de la demostración tras la frase "ésta es la figura", la construyo yo siguiendo los pasos de la demostración.

Lo primero que distingue a Thābit ibn Qurra de al-Khwārizmī es que lo que hace es resolver la forma canónica tomada como un problema enunciado en términos generales. Thābit ibn Qurra no enuncia un caso concreto numérico, para usarlo como caso genérico, a la manera de al-Khwārizmī, sino que se plantea resolver el problema en la expresión general que es la forma canónica, en el caso de la cuarta, tesoro más raíces igual a números.

La demostración recorre esquemáticamente los siguientes pasos:

1. Anuncio.
2. Justificación de la representación de las especies de números (los objetos del álgebra) mediante figuras, y representación de la ecuación, en términos generales.
3. Reducción a un problema conocido.
4. Recurso a una proposición de los *Elementos*, en este caso la proposición II, 6.
5. Paralelismo con el algoritmo.

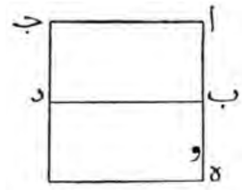
Obsérvese que Thābit ibn Qurra no parte del algoritmo, sino que se plantea resolver el problema, no demostrar el algoritmo. Sólo al final, verá que la solución que él ha encontrado se corresponde con "el procedimiento de los algebristas", es decir, con el algoritmo.

Veamos en parte cómo transcurre la demostración[4].

1. Anuncio.

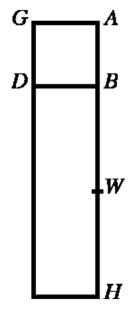
Thābit ibn Qurra comienza anunciando explícitamente que "la manera de resolver esto" se basa en Euclides II, 6.

2. Justificación de la representación de las especies de números (los objetos del álgebra) mediante figuras, y representación de la ecuación, en términos generales.



> Pongamos el tesoro como un cuadrado ABGD y pongamos en BH tantas veces la unidad con la que se miden las líneas como la cantidad dada de raíces, y completemos la superficie DH.
> Así la raíz es AB, porque el tesoro es el cuadrado ABGD, y esto es en el campo de los números y el cálculo como el producto de AB por la unidad con la que se miden las líneas.
> Pero en BH hay tantas veces la unidad como la cantidad dada de raíces, así que el producto de AB por BH es también igual a las raíces del problema, en el campo de número y cálculo.
> Y el producto de AB por BH es la superficie DH, porque AB es igual a BD. Entonces la superficie DH también es igual a las raíces del problema.
> Por tanto, la superficie total GH es igual al tesoro con las raíces añadidas.

3. Reducción a un problema conocido.




> Pero el tesoro con las raíces es igual a un número conocido. Así que la superficie GH es conocida, y es igual al producto AH por AB, porque AB es igual a AG. Por tanto, el producto HA por AB es conocido y la línea BH es conocida, porque el número de sus unidades es conocido.
>
> Y así el asunto resulta ser un problema geométrico conocido:
> La línea BH es conocida, y AB se le añade, y el producto de HA por AB es conocido.

4. Recurso a una proposición de los *Elementos*, en este caso la proposición II, 6.

> Ahora bien, se ha demostrado en la proposición sexta del segundo libro de Euclides que, cuando la línea BH se corta en dos mitades en el punto W, el producto de HA por AB con el cuadrado en BW es igual al cuadrado en AW.
> Pero el producto HA por AB es conocido y el cuadrado en BW es conocido.
> Así que el cuadrado en AW es conocido y AW también es

> conocido, y substrayendo de él BW, que es conocido, resulta AB conocido, que es la raíz.
> Y multiplicado por sí mismo, el cuadrado ABGD es conocido, es decir, el tesoro. Y esto es lo que queríamos demostrar.

5. Paralelismo con el algoritmo.

> Este procedimiento se corresponde con el procedimiento de los algebristas para resolver estos problemas.
> Cuando ellos dividen por dos el número de raíces, es como cuando nosotros dividimos en dos la línea BH [...] y cuando la multiplican [la raíz] por sí misma y conocen así el tesoro, es como cuando nosotros hemos conocido a partir de AB su cuadrado, que es el tesoro. (Luckey, 1941, pp. 105-106 y 110-111; Rashed, 2007, 33-34)

Thābit ibn Qurra obtiene pues el procedimiento para resolver la cuarta forma canónica, que él ve como un problema, de manera independiente del algoritmo de al-Khwārizmī, y luego muestra que su procedimiento de solución, que está demostrado a la manera euclídea, se corresponde con el procedimiento "de los algebristas", que no está demostrado a la manera euclídea. No busca la garantía de la verdad del algoritmo de los algebristas en el marco discursivo de éstos, sino en un marco discursivo distinto: el de la demostración geométrica en práctica en los *Elementos* de Euclides.

Para ello, Thābit ibn Qurra se plantea la solución de la cuarta forma canónica como un problema. Y, a diferencia de al-Khwārizmī, lo plantea en términos generales: se trata de demostrar que si "el tesoro con las raíces es igual a un número conocido", entonces tanto la raíz como el tesoro también son conocidos. Es decir, Thābit ibn Qurra se plantea un teorema, un problema de demostrar, del mismo estilo que los que Euclides se plantea en su libro *Data*, y del mismo estilo de los problemas, en ese caso aritmético-algebraicos, que Jordanus de Nemore de planteó en el siglo XIII en su libro *De Numeris Datis*, que analicé en Puig (1994b). De hecho, usa la proposición II, 6 de los *Elementos*, porque el problema geométrico al que traduce el problema algebraico de resolver la cuarta forma canónica es *Data*, 59, o, por permanecer en los *Elementos*, una generalización de la proposición VI, 29.

Como expliqué en Puig (1994b), un enunciado como el problema de demostrar, el teorema, que se plantea Thābit ibn Qurra, es un teorema sobre la posibilidad de resolver una clase de problemas, en este caso, todos los que se reducen a la cuarta forma canónica. Lo que Thābit ibn Qurra hace es traducir ese problema, que está enunciado en los términos del álgebra, y, por tanto, es un problema algebraico, a un problema geométrico que está en la caja de herramientas para el análisis que son las proposiciones ya demostradas de los libros de Euclides. Eso es lo que hace en la parte 3 en que he dividido su demostración, que es analítica, es decir, sigue el método de análisis y síntesis, al ir de lo que se quiere demostrar a algo conocido. En la parte 4, el argumento sigue también el método de análisis y síntesis desarrollando una argumentación que busca ahora derivar conocido de conocido, gracias a la proposición II, 5 de los *Elementos*. La palabra "conocido" se repite una y otra vez a lo largo de la demostración.

Por otro lado, la figura que Thābit ibn Qurra construye en la parte 2 de la demostración, no se manipula una vez construida, lo que se ha hecho para representar la cuarta forma canónica y poder realizar la traducción a un problema geométrico. La argumentación analítica la usa sólo como referencia para desplegar lo que es importante, que no es lo que se ve en la figura, sino lo que dicen las proposiciones de la caja de herramientas para el análisis que son las proposiciones de los libros de Euclides.

## Coda. Nuevas figuras

Algunos siglos después de esta parte de la historia del álgebra que he presentado, en el Occidente árabe medieval, es decir, en al-Andalus y el Magreb, se desarrolla una forma de representar las especies de números mediante abreviaturas que usan la primera letra de las palabras árabes "número", "raíz", "tesoro", "cubo", y combinaciones de esas letras, colocadas encima de los números escritos con las cifras hindúes que al-Khwārizmī introdujo en el mundo árabe, así como la última letra de la palabra árabe "igual", y con ello se escriben de forma abreviada polinomios y ecuaciones. En la figura 8, tomada de Requena (2008) pueden verse en rojo abreviaturas de ese estilo de dos ecuaciones en un texto del matemático al-Qalasadī, nacido en Baza en 1412, en el reino nazarí de Granada, y muerto en Béja (actualmente en Túnez) en 1486, a donde emigró por la inestabilidad que imperaba en los últimos años del reino de Granada.

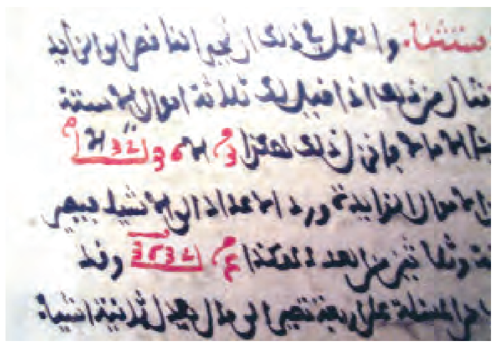


Figura 8

En textos como el de al-Qalasadī, las demostraciones ya no se hacen mediante figuras a la manera "ingenua" de al-Khwārizmī, ni tampoco usando figuras en una demostración geométrica euclídea como Thābit ibn Qurra. No hay recurso de ningún tipo a figuras geométricas, pero, en esos textos, esas abreviaturas también se llaman "figuras", el discurso argumentativo se refiere a ellas, y esas nuevas figuras se manipulan: las demostraciones son algebraicas. Pero ésa es otra historia.

***HISTORIAS*** ■

## Anexo 1. La cuarta forma canónica

Pero tesoro y raíces iguales a un número es como si dices: tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams. Cuyo significado es: ¿qué tesoro al que se le añaden diez de sus raíces, el total que se agrega es treinta y nueve?

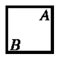
Cuya regla es que divides por dos las raíces, lo que en este problema resulta cinco. Luego multiplícalo por sí mismo, y resulta veinticinco. Añádele treinta y nueve, y son sesenta y cuatro. Cuya raíz extraes, que es ocho. Entonces réstale la mitad de las raíces, que es cinco. Queda pues tres, que es la raíz del tesoro, y el tesoro es nueve. (Hughes, 1986, p. 234; Rashed, 2007, pp. 100-101.)

La ecuación usada como caso genérico es $x^2 + 10x = 39$, o, en general, $x^2 + bx = c$, y el algoritmo de solución lo podemos representar con la secuencia de acciones siguiente:

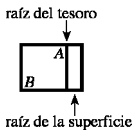
$$\frac{b}{2} \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

La demostración transcurre como sigue:

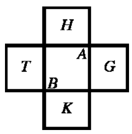
La causa es la siguiente. Un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams. Haz pues para ello una superficie cuadrada de lados desconocidos, que es el tesoro que queremos conocer, así como su raíz. Sea la superficie AB.



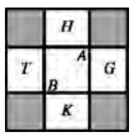

Pero cada uno de sus lados es su raíz, y cada uno de sus lados, si se multiplica por un número cualquiera, entonces el número que se añade por ello es el número de raíces, cada una de las cuales es como la raíz de esta superficie.




Así, ya que se había dicho que había diez raíces con el tesoro, tomemos un cuarto de diez, que es dos y medio, y hagamos con cada cuarto una superficie con uno de los lados de la superficie. Se hacen así con la primera superficie, que es la superficie AB, cuatro superficies iguales cuyas longitudes son iguales cada una a la raíz de AB y cuya anchura es dos y medio, que son las superficies G, H, T, K.




Se engendra pues una superficie de lados iguales y desconocidos a la que le falta lo que se le ha quitado en los cuatro ángulos, a saber, en cada uno de los ángulos falta el producto de dos y medios por dos y medio. Lo que es necesario pues en números para completar la cuadratura de la superficie es cuatro veces el producto de dos y medio por dos y medio. Y la suma de todo ello es veinticinco.




Ahora bien, sabemos que la primera superficie es el tesoro, y las cuatro superficies que la rodean, que son diez raíces, son treinta y nueve en números. Entonces, si les añadimos veinticinco, que son los cuatro cuadrados que están en los ángulos de la superficie AB, completamos la cuadratura de la superficie mayor que es la superficie DE. Pero sabemos que todo esto es sesenta y cuatro. Uno pues de sus lados es su raíz, que es ocho. Restemos por tanto lo que es igual a dos veces un cuarto de diez de los dos extremos de la superficie mayor, que es la superficie DE, y queda de su lado tres, que es el lado de la primera superficie, que es AB, y es la raíz de ese tesoro.

Como puede observarse, la figura que al-Khwārizmī construye no sigue exactamente el algoritmo que quiere demostrar, sino el algoritmo siguiente:

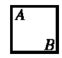
$$\frac{b}{4} \to \left(\frac{b}{4}\right)^2 \to 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 \to 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 + c \to \sqrt{4\left(\frac{b}{4}\right)^2 + c} \to \sqrt{4\left(\frac{b}{4}\right)^2 + c} - 2\frac{b}{4}$$

Esta incongruencia la resuelve al-Khwārizmī estableciendo con palabras una identidad algebraica, la que muestra que lo obtenido al final es igual a lo que se quería obtener:

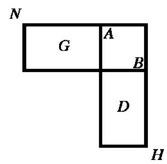
Sin embargo, nosotros dividimos por dos las diez raíces, y multiplicamos eso por sí mismo, y le añadimos el número, que es treinta y nueve, para que se nos complete la cuadratura de la figura mayor con lo que falta en los cuatro ángulos. En efecto, si se multiplica un cuarto de cualquier número por sí mismo, y luego lo que resulta, por cuatro, es igual que lo que resulta del producto de su mitad por sí misma. Nos basta pues con el producto de la mitad de la raíz por sí misma, en vez de cuatro veces el producto de la cuarta parte por sí misma. Y ésta es la figura. (Hughes, 1986, pp. 236-237; Rashed, 2007, pp. 108-111.)

Como lo que ha demostrado con la figura no ha sido el algoritmo que había presentado al principio sino otro y ha tenido que completar la demostración mediante la figura de otro algoritmo, con una demostración con palabras de que los algoritmos son equivalentes, al-Khwārizmī hace en este caso una segunda demostración que ésa sí que sigue los pasos del algoritmo de solución. Esa segunda demostración transcurre como sigue:

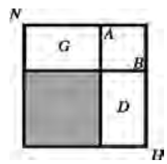
Hay otra figura que conduce a lo mismo: que es la superficie AB, que es el tesoro. Queremos añadirle diez de sus raíces.




Dividimos entonces diez en dos mitades y resulta cinco. Y hacemos de ella dos superficies en las dos partes de AB, que son las superficies G y D, cuya longitud es igual a los lados de la superficie AB, y cuya anchura es cinco, que es la mitad de diez. Nos queda por tanto sobre la superficie AB un cuadrado que es de cinco por cinco, que es la mitad de diez raíces que habíamos añadido en las partes de la primera superficie.




Sabemos que la primera superficie es el tesoro y que las dos superficies que están sobre sus dos partes son diez de sus raíces, y que todo es treinta y nueve, y que falta para completar la figura más grande el cuadrado de cinco por cinco. Éste es veinticinco, que añadimos a treinta y nueve para completar la superficie más grande, que es la superficie NH. Se obtiene de todo esto sesenta y cuatro.




Tomamos su raíz, que es un lado de la superficie más grande, que es ocho. Si le quitamos lo mismo que le habíamos añadido, que es cinco, queda tres, que es el lado de la superficie AB, que es el tesoro, y por tanto es su raíz, y el tesoro es nueve. (Rashed, 2007, pp. 110-113; Hughes, 1986, p. 238)

## Anexo 2. La quinta forma canónica

La ecuación usada como caso genérico es $x^2 + 21 = 10x$, o, en general, $x^2 + c = bx$, y el algoritmo de solución lo podemos representar con la secuencia de acciones siguiente:

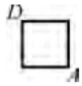
$$\frac{b}{2} \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \to \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

La demostración transcurre como sigue:

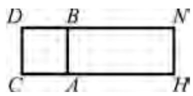
1. Justificación de la representación de las especies de números, es decir, de los objetos del álgebra, mediante figuras, y representación de la ecuación.

1.1. Un tesoro se representa con un cuadrado

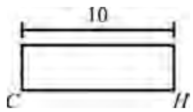
Cuando un tesoro y veintiún dirhams son iguales a diez raíces, representamos el tesoro por un cuadrado cuyo lado no conocemos




A éste unimos un paralelogramo, la superficie HB, cuyo ancho, el lado HN, es igual a uno de los lados de la superficie AD.

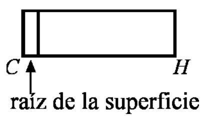



La longitud de las dos superficies juntas es igual a la línea HC. Sabemos que esta longitud es diez en números, ya que un cuadrado tiene los lados y los ángulos iguales, y,

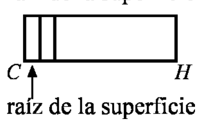



1.2. Representación diferenciada de la raíz del tesoro y de la raíz de la superficie, que permite expresar la ecuación como una adición de áreas.

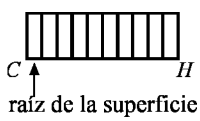
si uno de sus lados se multiplica por uno, es la raíz de la superficie,



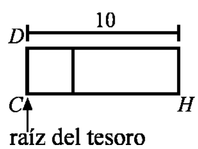

y por dos, dos de sus raíces.




Como se ha dicho que un tesoro y veintiún dirhams es igual a diez raíces, concluimos que la longitud del lado HC es igual a diez,



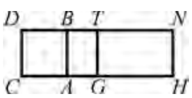

ya que el lado CD es la raíz del tesoro.




2. Justificación paso a paso del algoritmo.

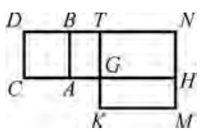
2.1. Primeros pasos que preparan el uso del método akadio.

Por tanto dividimos el lado CH en dos mitades en el punto G y levantemos sobre él la línea GT. Se ve entonces que la línea GC es igual a la línea HG. Y también es evidente para nosotros que la línea GT es igual a la línea CD.

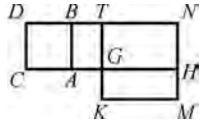



$\frac{b}{2}$

Ahora le añadimos a la línea GT algo igual a lo que supera la línea CG a la línea GT, para cuadrar la superficie, es decir la línea GK. Se hace así la línea TK igual a KM, ya que GH es igual a TN, resulta una superficie cuadrada, la superficie MT.



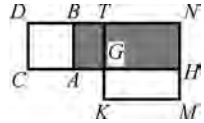

Y ésta es la que se obtiene de la multiplicación de la mitad de las raíces por sí misma, lo que es cinco por cinco, y esto es veinticinco.



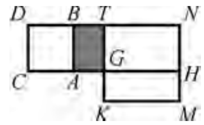

$\left(\frac{b}{2}\right)^2$

2.2. Operaciones de cortar, mover y pegar en las que se busca un gnomon equivalente a un rectángulo (el método akadio).

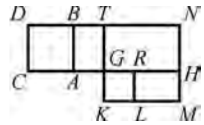
Sabemos que la superficie HB es los veintiuno que fueron añadidos al tesoro.



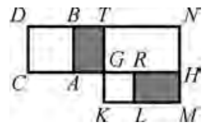

De ella separamos una parte por la línea KT, que es uno de los lados de la superficie MT, de manera que sólo queda la superficie TA.



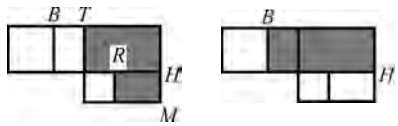

Ahora quitamos de la línea KM la línea KL, que es igual a GK.




Sabemos que la línea TG es igual a ML, y la línea LK, que ha sido separada de KM, es igual a KG. Así que la superficie MR es igual a la superficie TA.

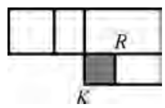



Sabemos que la superficie HT aumentada con la superficie MR es igual a la superficie HB, que es veintiuno.



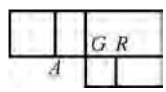

2.3. Pasos finales de recorrido del algoritmo en la figura

Ya vimos nosotros que la superficie MT es veinticinco. Por tanto, si substraemos de la superficie MT la superficie HT y la superficie MR, que son veintiuno, nos queda una superficie pequeña que es la superficie RK. Y ésta es lo que sobra entre veintiuno y veinticinco. Y esto es cuatro,



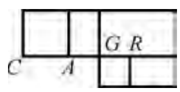

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$

cuya raíz es RG, que es igual a GA, y es dos.



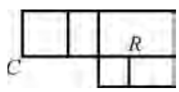

$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

Pero CG es la mitad de las raíces, que es cinco. Si substraemos de ella GA, que es dos, queda tres que es la línea AC, que es la raíz del tesoro. Y el tesoro es nueve.



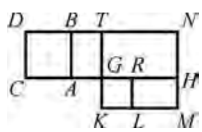

$\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

Pero si la añades a la línea GC, que es la mitad de las raíces, entonces la suma es siete, o la línea RC, que es la raíz de un tesoro más grande. Si añades veintiuno a este tesoro, entonces la suma será también igual a diez de sus raíces.




$\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

Y esto es lo que queríamos demostrar. Ésta es la figura.




(Rosen, 1831, pp. 16-18 de la versión inglesa, y 11-13 del árabe; Hughes, 1998, pp. 238-239; Rashed, 2007, pp. 112-117.)

## NOTAS

[1] El historiador egipcio Roshdi Rashed parece que no puede admitir que al-Khwārizmī no siguiera el estilo euclídeo. En la introducción a su reciente edición del álgebra de al-Khwārizmī (Rashed, 2007) hace equilibrios para afirmar que aunque al-Khwārizmī no parezca seguir a Euclides, en realidad lo que hace está inspirado en Euclides. Así, escribe que una identidad algebraica "sin estar formalmente enunciada por al-Khwārizmī, sin embargo fundamenta su forma de actuar", con lo que "se puede suponer que al-Khwārizmī se había inspirado en la forma de actuar de Euclides" (Rashed, 2007, p. 39). O también que "el estilo geométrico que observa al-Khwārizmī [...] incluso si no casa exactamente con el de Euclides [...] le está emparentado". "Se puede suponer", "inspirado", "emparentado", todo expresado de forma vaga y sin especificar cuáles son las características diferenciales de los razonamientos demostrativos de los *Elementos* de Euclides y los que presenta al-Khwārizmī en su libro. Por supuesto que entre el libro segundo de los *Elementos* de Euclides y esas demostraciones de al-Khwārizmī hay relaciones, lo que hace posible entre otras cosas que Thābit ibn Qurra use esas proposiciones de Euclides para rectificar las demostraciones de al-Khwārizmī, pero lo que tienen en común no es de ningún modo lo que tiene que ver con el estilo de la demostración y lo que constituye la garantía de verdad, sino un hecho que Rashed parece ignorar por completo: que tanto Euclides como al-Khwārizmī están trabajando, de forma distinta y con objetivos distintos, sobre un substrato común: el álgebra babilónica (véase Høyrup, 2002, para más detalles).

[2] El manuscrito Hunt. 212, fol. 1v-54r, de 1342. La ilustración la hemos tomado de la edición árabe de Masharrafa and Ahmad (1939).

[3] Esto afirmación precisaría una explicación que no voy a dar aquí en detalle. En varias ediciones del texto de al-Khwārizmī las formas canónicas aparecen enunciadas con "tesoros", en plural, y así aparece en el texto árabe del manuscrito que se conserva en la Bodleyan. Sin embargo, los algoritmos están enunciados para un tesoro, y en los problemas siempre se transforma la ecuación obtenida mediante dos operaciones específicas del cálculo cuya función es reducir o completar los tesoros o las partes de tesoro para que haya un tesoro. Además, en la traducción latina de Cremona, las formas canónicas aparecen enunciadas con *census* (la traducción latina de tesoro) en singular.

[4] He usado para presentar mi versión española del texto de Thābit ibn Qurra, la edición de Luckey (1941) del texto árabe, con traducción al alemán, y la traducción francesa prácticamente completa que Rashed (2007) presenta en la introducción de su edición del álgebra de al-Khwārizmī.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Euclides (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Traducción de María Luisa Puertas. Madrid: Gredos.

Gandz, S. (1937). The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek and Early Arabic Algebra. *Osiris*, 3, pp. 405-557.

Høyrup, J. (1995). Linee larghe. Un'ambiguità geometrica dimenticata, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 15*, pp. 3-14.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies 48*, 211-263.

Infante, F. y Puig, L. (2011a). Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.). *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 283-301). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Infante, F. y Puig, L. (2011b). Una comparación entre las demostraciones de Pedro Nunes y al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas de la ecuación de segundo grado. *Congresso Ibero-americano de História do Ensino da Matemática*. Comunicación. Covilhã, 26 a 29 de mayo de 2011.

Luckey, P. (1941). Tābit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen, *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte 93*, pp. 93-114

Masharrafa, A. M. y Ahmad, M. M. (Eds.) (1939). *Al-Khwārizmī, Muhammad ibn Mūsa. Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala*. Cairo: al-Qahirah. Reprinted 1968

Puig, L. (1994a). *Semiótica y matemáticas*. Valencia: Episteme.

Puig, L. (1994b). El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis 10*, pp. 47-92.

Puig, L. (1995). Una restauración del álgebra árabe. *Actas de las 7as Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 42-48). Madrid: Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas "Emma Castelnuovo".

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (2009). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting*. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

Puig, L. (2011). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 29-42). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Rashed, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Requena, A. (2008). *Al-Qalasadí. Se desvelan los secretos de la ciencia de las cifras de polvo*. Badajoz: Servicio de Publicaciones de la FESPM

Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund

Szabó, Á. (1977). *Les débuts des mathématiques grecques*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Szabó, Á. (2000). *L'aube des mathématiques grecques*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Vega, L. (1990). *La trama de la demostración*. Madrid: Alianza.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2011 y aceptado para su publicaciónen octubre de 2011 .

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 103-108



# Désargues: un geómetra sin medida

Hace trescientos cincuenta años, en 1661, moría en París, Lyon o Condrieu, no se sabe a ciencia cierta, Gérard Désargues, el padre de un bello edificio geométrico, a caballo entre el arte, la ingeniería y la ciencia.

Désargues había nacido en Lyon en 1591, en el seno de una noble y rica familia. Era el menor de ocho hermanos, de los cuales cuatro eran varones. Su padre, ferviente monárquico al servicio de la Corona Francesa, ocupó diversos cargos en su ciudad de Lyon, desde inquisidor hasta notario real pasando por recaudador de diezmos, tanto de la ciudad como de la diócesis. Su infancia no le resultó nada fácil, debido a la temprana muerte de su madre por tuberculosis, cuando solo contaba con treinta y tres años, y el pequeño Gérard tenía seis.

Dada la buena posición familiar, debió gozar Désargues de todo tipo de facilidades para los estudios y disponer de los mejores maestros, aunque no se sabe con certeza nada sobre el particular. Se sabe que practicó las profesiones de ingeniero y arquitecto, lo que le llevó a reflexionar sobre diversas técnicas, referentes a la perspectiva, al corte y tallado de piedras, a la construcción de relojes de sol, etc. Como ingeniero, por ejemplo, diseñó un sistema para la elevación de aguas en las cercanías de París, y como arquitecto, son de señalar los planos de varios edificios particulares tanto en París como en Lyon. De este modo, a partir de sus trabajos, fue conducido Désargues a la búsqueda de métodos geométricos generales para el tratamiento de las diferentes técnicas a las que debió de enfrentarse.

Era un gran aficionado a las matemáticas, y le gustaba mucho viajar. Así que pasaba varias temporadas en París, donde tenía ocasión de reunirse con los mejores matemáticos de la época. Estableció amistad con Pascal, Mersenne, Mydorgue, Hardy, y conoció a Descartes y Fermat, a todos los cuales comunicaba sus inquietudes y el resultado de sus reflexiones. En 1636, publicó un pequeño texto de perspectiva, a la que consideraba como una aplicación directa de la geometría. Esta obrita fue muy apreciada por Descartes y Fermat, que vieron en ella el gran talento geométrico de su autor. No así ocurrió con los otros matemáticos de la época para los cuales pasó sin pena ni gloria.

Conocedor de la obra de Apolonio, Désargues se interesó por la teoría de las cónicas y elaboró nuevas ideas sobre el tema, siempre en el terreno de la geometría sintética. A finales de 1638, comunicó a Descartes los detalles de su teoría sobre las cónicas que estaba a punto de publicar en un breve tratado. No pareció agradarle mucho a Descartes, discutieron ambos científicos, pero Désargues no desistió de su propósito, y en los primeros meses de 1639, publicó su tratado bajo el título *Brouillon projet d´une atteinte événements des rencontres d´un cone avec un plan* (que Boyer traduce como "Borrador

**Santiago Gutiérrez**
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
*hace@revistasuma.es*

de un ensayo que trata de los resultados de los encuentros de un cono con un plano"), más apropiado para una tesis o un discurso que para un libro.

*El Borrador*, como se lo conoce abreviadamente, está imbuido de las ideas sobre perspectiva de los pintores renacentistas y por el principio de continuidad de Kepler. Se sabe que si se proyecta una circunferencia desde un punto exterior al plano que la contiene, se obtiene un cono, y las formas de las secciones de este cono por un plano varían según la inclinación del plano respecto al eje del cono, del mismo modo que la proyección de los rayos de luz de una lámpara proyectan el borde de su pantalla produciendo distintas figuras según incidan sobre una pared o sobre el techo.

No fue bien acogido *El Borrador*. Recibió ataques desde todos los frentes, de una manera especial por parte de Jean de Beaugrand, pudiendo decirse que fue despreciado y olvidado de forma casi general. Hay que exceptuar a Pascal, que supo apreciarlo en todo su valor, y apoyarse en él incluso para algunos de sus propios trabajos.

Désargues publicó, como era su costumbre, sólo unos pocos ejemplares del librito (50 copias), sin afán crematístico, y para repartir entre sus colegas de París. Del escaso interés con que fue recibido da cuenta el hecho de que han desaparecido los cincuenta ejemplares distribuidos. No se supo nada de Désargues y su obra hasta dos siglos después. Habían sido borrados de la historia. Quedaba, eso sí, una cierta memoria de su paso por este mundo, a través de la referencia que de él hacía Pascal. Así, en su *Essay pour les coniques*, después de citar un teorema de Désargues, escribe, en referencia al autor:

> Quisiera decir que debo a sus escritos lo poco que he descubierto por mi mismo sobre el tema.

Además de *El Borrador*, había publicado Désargues otras obras, como los cuadernos *Lecciones de tinieblas*, sobre las cónicas, y un *Manual de perspectiva dirigido a los teóricos*.

## Los antecedentes

Para comprender la obra de Désargues conviene tener en cuenta las ideas y los problemas planteados por los pintores del renacimiento. A diferencia de los pintores medievales, con sus figuras más bien simbólicas y de formas planas, los renacentistas tienen como principal objetivo la descripción del mundo real. Esto les plantea el problema de cómo trasladar al lienzo plano el mundo real tridimensional. Sobreviene así el uso de la perspectiva.

Aunque algún pintor anterior se ocupó ya de esta cuestión, fue Leon Batista Alberti (1404 – 1472) el primero que dedicó una obra, *Della Pittura* (1435), al tema de la perspectiva. Al tratar de reproducir en el lienzo una escena real, decía, el ojo humano actúa como un punto desde el cual se proyectan los rayos visuales sobre la escena, y de este modo el cuadro resulta ser una sección de esa proyección.

Poco antes de 1480, es Piero Della Francesca el que establece los principios matemáticos de la perspectiva en su obra *De perspectiva pingendi*. Incluso Leonardo da Vinci trató el problema de la perspectiva en un libro que se perdió, y era tan consciente Leonardo del trasfondo matemático del tema que en su *Trattato Della pintura* comienza diciendo: "Nadie que no sea matemático lea mis obras". Desgraciadamente, los matemáticos de la época no se percataron del trasfondo matemático que había en el tema de la perspectiva.

Hubo de pasar un siglo para que surgiera entre los matemáticos la pregunta: ¿Qué propiedades geométricas se conservan entonces en el paso de la escena real a la escena pintada? Este es el problema que trataban de abordar los matemáticos del siglo XVII y que toma Gerard Désargues como principal ocupación. Sin embargo, cabe plantearse por qué no orientó Désargues su actividad a trabajar con los métodos algebraicos siguiendo a los grandes de la época, como Descartes, Fermat, y todos los asiduos al Círculo de Mersenne. Probablemente, porque Désargues era a fin de cuentas un ingeniero y arquitecto, por tanto un técnico más que un científico, que no admite la teoría por sí misma, no le interesan la investigación y la elaboración teórica más que en la medida en que:

> …puedan ofrecer al espíritu un medio de lograr algún conocimiento…de las cosas que puedan traducirse en actos para la conservación de la salud o en sus aplicaciones en la práctica de algún arte.

Cuando elabora su teoría sobre las cónicas, en *El Borrador*, no pretende otra cosa que encontrar los principios geométricos que permitan racionalizar la perspectiva, el trazado de planos, la construcción de relojes de sol… en definitiva, las distintas técnicas gráficas en cuyas aplicaciones trabaja.

Le ocurrió a Désargues con la geometría sintética algo parecido a lo que le pasó a Fermat con la teoría de números. Ninguno de los dos encontró eco entre los colegas para sus preocupaciones.

## EL Borrador

En *El Borrador* trata Désargues de unificar la visión de las cónicas utilizando sus ideas sobre la perspectiva. Considera dos operaciones, la proyección y la sección, y establece una serie de conceptos que le permiten encontrar los invariantes a través de estas operaciones.

**a. El punto del infinito**

Según se ha dicho uno de los elementos inspiradores de sus teorías para Désargues ha sido el principio de continuidad de Kepler. Este principio, lleva a Kepler a considerar que las rectas no se interrumpen en los extremos, sino que continúan a través de un nuevo punto que llama punto del infinito. Resulta así que las rectas pueden ser consideradas como círculos, cuyos extremos se unen a través del punto del infinito, y cuyo centro está así mismo en el infinito.

*Se sabe que practicó las profesiones de ingeniero y arquitecto, lo que le llevó a reflexionar sobre diversas técnicas, referentes a la perspectiva, al corte y tallado de piedras, a la construcción de relojes de sol, etc.*

Désargues, retoma esta idea aunque en un sentido diferente a Kepler. Lo que le interesa no es tanto la continuidad como la generalidad, así en lo que se refiere a la intersección de dos rectas. Al completar los puntos de la recta con el punto del infinito, se puede decir que dos rectas siempre tienen al menos un punto en común, incluso en el caso de las paralelas. Para estas últimas el punto común es el del infinito, resultando ser el mismo punto para cada conjunto de rectas paralelas. Como quiera que hay infinitos conjuntos de rectas entre sí paralelas, semejante convenio introduce en el plano una infinidad de puntos del infinito. Si consideramos el plano determinado por dos rectas paralelas, sobre él existe ya esa infinidad de conjuntos distintos de paralelas, esto es, una infinidad de puntos del infinito, todos los cuales supone Désargues se hallan sobre una recta, que es la recta del infinito del plano, y supone así mismo que esta recta es común a todo conjunto de planos paralelos entre sí.

Estas suposiciones de Désargues no contradicen, antes bien completan, el espacio euclídeo. Lo amplían, evitando tener que recurrir en su discurso a los casos de excepción.

**b. La razón doble**

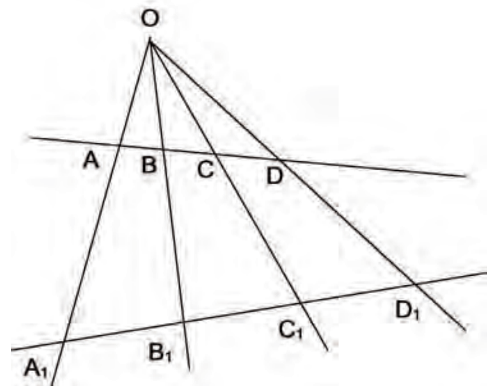
Pappus (s. IV) había definido el concepto de razón doble de cuatro puntos alineados A, B, C y D como el cociente

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$$

de razones de segmentos orientados, esto es, considerados con su signo.

Anteriormente, Menelao (s. II) había introducido este mismo concepto pero sobre círculos máximos de una esfera.

Ambos matemáticos habían probado que dados cuatro puntos alineados, A, B, C y D, para otros cuatro puntos $A_1$, $B_1$, $C_1$ y $D_1$, en posición tal como indica la figura, no varía la correspondiente razón doble.




Désargues vuelve sobre este concepto pero desde su propio punto de vista, a saber, con las operaciones de proyección y sección, si bien conserva la definición de razón doble como un concepto métrico. Prueba entonces que la razón doble de cuatro puntos en línea recta es invariante si se someten los cuatro puntos a las operaciones de proyección y sección. Tal resultado no aparece en *el Borrador*, de 1639, sino en el apéndice de la obra *Manière universelle de G. Désargues pour practiquer la perspective* (1648), de su amigo y alumno Abraham Bosse (1611-1678).

**c. Concepto de involución**

El término de involución es el único de los ideados por Desargues que se ha conservado hasta hoy, y resulta central en el pensamiento del autor. Lo define como la relación que existe entre un par de puntos A, B y otro par $A_1$, $B_1$, situado en la recta AB, si se puede encontrar un quinto punto O tal que

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$$

El punto O es el centro de la involución. Puede haber varias parejas de puntos que estén en una misma involución. En particular, si un punto C es tal que

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OC}^2$$

C es un punto doble de la involución. En ese caso, existen dos puntos dobles simétricos respecto del centro. Los puntos A y B, se dicen conjugados, como cualquier pareja de puntos que pertenezcan a una involución. Un punto doble es conjugado de sí mismo. Désargues se plantea entonces, dado que en una involución cualquier punto tiene su conjugado, ¿cuál es el conjugado del centro? Y responde, el punto del infinito.

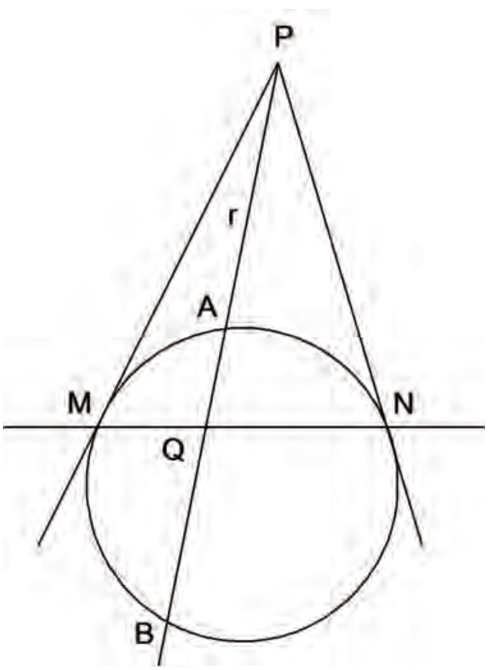
A continuación pasa Désargues a demostrar que cuatro puntos en involución se transforman, a través de proyecciones y secciones, en otros cuatro puntos también en involución. Es decir, una relación involutiva se conserva a través de proyecciones y secciones.

**d. Cuaterna armónica**

Hoy conocemos como cuaterna armónica la formada por cuatro puntos alineados cuya razón doble es igual a –1, según la definición de Möebius (1827), pero Désargues había introducido esta noción de otra forma. Para él, los puntos A, B, C y D forman una cuaterna armónica si pertenecen a una involución en que C y D son los puntos dobles y A y B son conjugados. Como quiera que se trata de una involución, y según se deduce de lo anterior, la cuaterna armónica se conserva a través de proyecciones y secciones.

**e. Polos y polares**

Supongamos una circunferencia y un punto P exterior a ella. Consideremos todas las rectas que pasando por P cortan a la circunferencia, incluidas las tangentes.




Cada recta cortará a la circunferencia en dos puntos, por ejemplo, la recta *r* corta a la circunferencia en A y B. Entonces, en *r* habrá un cuarto punto Q en posición armónica respecto de P, A y B. El conjunto de los cuartos puntos de todas las rectas consideradas demuestra Désargues que están sobre una recta, que llama polar de P. Si el punto P es exterior a la circunferencia, como en la figura, la polar de P une los puntos de tangencia, M y N. Si P es interior, sigue un razonamiento análogo para ver que la polar es exterior a la circunferencia.

Como hace con frecuencia, Désargues proyecta esta figura desde un punto exterior al plano que la contiene, y considera una sección de esa proyección. La circunferencia se transforma en una cónica, y, al conservarse la cuaterna armónica, extiende Désargues sus resultados sobre polos y polares a una cónica cualquiera.

*Conocedor de la obra de Apolonio, Désargues se interesó por la teoría de las cónicas y elaboró nuevas ideas sobre el tema, siempre en el terreno de la geometría sintética.*

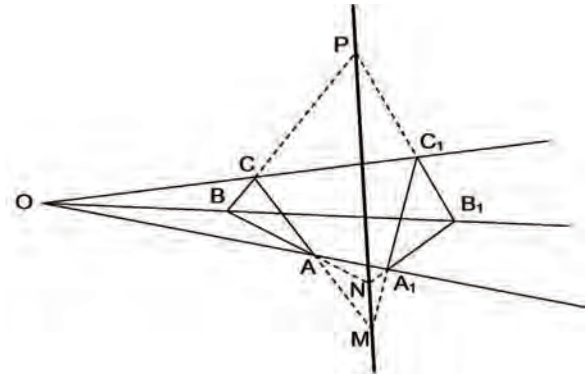
Define entonces un diámetro de una cónica como la polar de un punto del infinito. Demuestra, a partir de aquí, diversas propiedades sobre diámetros, diámetros conjugados y asíntotas.

En todo esto parte Désargues de las teorías de polos y polares de Apolonio, si bien, mientras Apolonio hace su estudio por separado según el tipo de cónica de que se trata, Désargues, como ya se ha indicado, unifica el estudio de todas las cónicas, tratándolas como un solo objeto.

## El teorema de Désargues

Este teorema es quizá lo más conocido y divulgado de Désargues. No aparece en su *Borrador*, y fue publicado en 1648 por su amigo Abraham Bosse, como apéndice de su libro *Manière universelle de G. Désargues pour pratiquer la perspective* (El método universal de Désargues para la práctica de la perspectiva). Dice así:

> Si dos triángulos están situados de manera que las rectas que unen pares de vértices correspondientes concurren en un punto, entonces los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes están en línea recta, y recíprocamente.




Así, las rectas $AA_1$ , $BB_1$ , $CC_1$ concurren en el punto O, y entonces las parejas de lados AB y $A_1B_1$ , AC y $A_1C_1$ , BC y $B_1C_1$ , se cortan, respectivamente, en los puntos N, M y P, que yacen sobre la misma recta.

Désargues demostró este teorema tanto para el plano como para el espacio. La demostración para el caso de las tres dimensiones es bastante sencilla y sólo exige los axiomas de incidencia, pero para dos dimensiones es más complicada y, curiosamente, requiere una hipótesis añadida, la de existencia del espacio de tres dimensiones. Es decir, paradójicamente, hay que salirse del plano para demostrar una propiedad del plano.

## EL fracaso de Desargues

Cabe ahora preguntarse, ¿por qué no fueron aceptadas en su día las teorías de Désargues? Los historiadores suelen aducir dos tipos de razones. Una razón atribuible al propio Désargues, y otra a las tendencias de la época.

El lenguaje que utilizaba era prácticamente ininteligible para los contemporáneos. Así, por ejemplo, llamaba *palmas* a las rectas. Cuando en una recta aparecían señalados varios puntos, la llamaba *tronco*, pero, si en la recta aparecían tres pares de puntos en involución, entonces era un *árbol.* A una sección cónica la llamaba *coup de rouleau* (un golpe de rodillo), etc. Parece que con esta terminología pretendía comunicarse mejor con los ingenieros y arquitectos de poca formación matemática, eliminando por otra parte la ambigüedad de los términos usuales en la época. Lo cierto es que hacía su lectura difícil y engorrosa para los matemáticos.

> El Borrador, *como se lo conoce abreviadamente, está imbuido de las ideas sobre perspectiva de los pintores renacentistas y por el principio de continuidad de Kepler.*

La segunda razón que suele apuntarse como causa del escaso éxito de sus trabajos la puso muy bien de manifiesto Descartes, quien al conocer del propio Désargues los detalles de sus trabajos, aun reconociendo el valor de la obra y el talento de su autor, no pudo por menos de quedarse defraudado por no contemplar Désargues el punto de vista algebraico, caballo de batalla de las ideas de la época. Hay que tener en cuenta que para los problemas científicos del momento y los cálculos requeridos por la nueva tecnología resultaban mucho más efectivos los métodos algebraicos que las consideraciones de la geometría sintética.

## El renacimiento de Desargues

Sin embargo, si resulta sorprendente su fracaso inicial, más sorprende si cabe que, aunque hubo de esperar doscientos años, Désargues surgiera de nuevo de entre las cenizas. ¿Cuál fue la suerte de este su renacimiento? ¿Cómo es posible que esa extraña geometría en que no se postula ningún tipo de métrica, tan despreciada en su día, haya podido convertirse en la base y fundamento de la geometría proyectiva, desarrollada por matemáticos de primera fila de los siglos XIX y XX?


Désargues


Poncelet


Chasles


Philippe de la Hire

En medio de la hostilidad general hacia la geometría sintética, y en particular hacia la geometría proyectiva, fueron dos alumnos y amigos de Désargues, los que se ocuparon de trabajar y comunicar las enseñanzas del maestro. Eran estos, Abraham Bosse (1611-1678), autor del citado libro *Manière universelle de G. Désargues pour pratiquer la perspective*, y Philippe de la Hire (1640-1718), que entusiasmado con las ideas de Désargues, se dedicó a profundizar en el tema, llegando a demostrar unos 300 teoremas recogidos en su obra más importante, *Secciones Conicae* (1685), todo ello después de haber encargado realizar una copia manuscrita de *El Borrador,* para su uso personal, que le serviría de punto de partida en su iniciación. Pero, la copia había sufrido análogo destino que los ejemplares de la propia obra.

Casualmente, en el año 1847, el matemático francés Michel Chasles encontró una copia de *El Borrador* en una librería de viejo de París. No era el original, se trataba de la copia realizada para Philippe de la Hire. Sirvió, al menos, para que N. G. Poudra editara la obra de Désargues en 1864.

*El término de involución es el único de los ideados por Désargues que se ha conservado hasta hoy, y resulta central en el pensamiento del autor.*

Muy recientemente, hacia 1950, las investigaciones de René Taton, con la ayuda al parecer de Pierre Moisy, permitieron descubrir en la Biblioteca Nacional de París un ejemplar del original, que tiene la particularidad de contener un apéndice y una fe de erratas del propio Désargues.

Con todo, puede decirse que Désargues siguió y sigue siendo un desconocido, pues poco se difunde y se comenta de sus trabajos si exceptuamos el citado teorema sobre los triángulos perspectivos, que llegó hasta nosotros no como contenido de sus obras sino a través de uno de sus alumnos, como producto de sus lecciones.

## La geometría proyectiva

Durante el siglo XVIII, lo mismo que en el XVII, no resultó la geometría sintética digna de atención por parte de los matemáticos. Y es en el XIX cuando aparecieron los trabajos de Gaspard Monge (1746 – 1818), bajo el título de *Tratado de geometría descriptiva* (1799), la figura de Charles Brianchon (1785 – 1864) con su estudio sobre la aplicación de la geometría a los problemas militares, y, sobre todo, la obra de J. Victor Poncelet (1788 – 1867), *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*, aparecida en 1822, aunque elaborada ocho o nueve años antes, y en la cual destaca sobretodo su principio de dualidad.

Más tarde, es el suizo Jacob Steiner (1796 – 1863) quien, siguiendo el camino de Poncelet, lleva el principio de dualidad hasta las últimas consecuencias. Así, dice que una cónica, en virtud del principio de dualidad, se puede considerar formada tanto por puntos como por rectas, éstas tangentes a la cónica, que resulta ser de ese modo la envolvente del conjunto de rectas.

En este ambiente de trabajos, ocurre el mencionado hallazgo, por parte de Chasles (1793 – 1880), de la copia de *El Borrador* de Désargues. Se comprende el avance que supuso en el desarrollo de la geometría proyectiva. El propio Chasles después de publicar en 1852 su *Tratado de geometría superior,* y reconociendo sin duda la validez de las ideas de Désargues, saca a la luz un *Tratado de las secciones cónicas* (1865). Todavía define en él la razón doble como razón de longitudes, es decir recurriendo a una métrica. Es el alemán Karl von Staud (1798 – 1880) quien libera a la geometría proyectiva de todos sus recursos a la métrica, definiendo la razón doble a partir del cuadrilátero completo.

***HACE*** ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Kline Morris (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Universidad

Carl B. Boyer (1986): *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos

Jean-Paul Collette (1985): *Historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores

Este artículo fue solicitado por *Suma* en mayo de 2011 y aceptado en septiembre de 2011 para su publicación.

suma+ 68
Noviembre 2011, pp.109-116

# El sonido de las fracciones: una propuesta interdisciplinaria de enseñanza

*Una teoría musical debe ser establecida como un conjunto de axiomas, definiciones y teoremas, cuyas demostraciones deben derivarse por medio de una lógica apropiada.*

Milton Babbitt (1916 –2011), compositor y matemático

Cuando iniciamos la andadura de *Musymáticas*, y de esto ya hace más de tres años, advertíamos de nuestra intención de convertir la sección un espacio abierto a la colaboración. El trabajo que presentaremos a continuación responde a este deseo relacionando profesores de diferentes procedencias con un interés común por la Música y las Matemáticas.

La experiencia didáctica que presentaremos resume parte del trabajo desarrollado en una Tesis de Maestría en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN de México. Una muestra del interés de la propuesta es que muy pronto estará disponible de forma pública y gratuita en la dirección http://www.icyt.df.gob.mx/, gracias a que ha sido seleccionada para esto en un concurso organizado por el Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal (México).

Por mucho que en esta sección se tenga asumida la relación entre Música y Matemáticas, está claro que si en cualquier aula se pregunta a los estudiantes sobre su afinidad por una u otra disciplina, rara vez las matemáticas serían las más favorecidas. Aunque no podemos negar que es complejo conocer todas las razones que contribuyen a configurar los gustos personales de nuestros alumnos, una explicación de su preferencia puede buscarse en la concepción que se construye en la escuela acerca de cada una de ellas.

La música forma parte de las actividades lúdicas que se llevan a cabo en la escuela y emerge de manera natural entre las expresiones emocionales de los estudiantes tanto dentro, como fuera del contexto escolar. Mientras que, a pesar de que saben que las matemáticas ocupan un lugar de gran relevancia académica dentro del currículum escolar, pocas veces viven las matemáticas como una actividad lúdica fuera de la escuela.

Desde una perspectiva pedagógica, la clase de música se asume como un espacio de intercambio de expresiones, actitudes y aptitudes artísticas entre los estudiantes. Por el contrario, las matemáticas generalmente se han cargado de formalismo y complejidad, por lo que muchos alumnos prefieren alejarse de ellas sin lograr apreciar su belleza.

**Luis A. Conde Solano**
**Olimpia Figueras Mourut de Montpellier**
**François C. B. Pluvinage**
*Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México. Departamento de Matemática Educativa.*
**Vicente Liern Carrión**
*Universitat de València Estudi General*
*musymaticas@revistasuma.es*

Las acepciones mencionadas configuran a las matemáticas y a la música en los extremos tanto curriculares, como de aceptación por parte de los estudiantes, y por qué no reconocerlo, también de los docentes, sobre todo de aquellos profesores que tienen a su cargo todas las materias escolares. Esto ha creado un abismo ficticio entre las dos disciplinas, y en consecuencia un desaprovechamiento de la riqueza cognitiva y didáctica que subyace en sus relaciones y que puede emplearse para la construcción de conocimientos significativos.

En este trabajo se describe la estructura general de un acercamiento didáctico interdisciplinario que conecta contenidos escolares de matemáticas, música y física, especialmente ideado para la educación primaria. También se incluyen ejemplos de cómo a través de diferentes experimentaciones que componen la propuesta se favorece una interacción entre maestros y/o estudiantes con dichas relaciones.

## Visión integradora de contenidos

En numerosas publicaciones se pone énfasis en la necesidad de crear propuestas curriculares interdisciplinarias que propicien la construcción de un aprendizaje significativo de las matemáticas. Sin embargo, los ejemplos exhibidos resultan forzados y lejanos de la realidad de los maestros y de los estudiantes. Sin duda, este no es el caso de las matemáticas y la música, entre las que existen vínculos con significado en cada una de ellas.

Por ejemplo, en Liern (2011) se describen relaciones entre las fracciones y algunos elementos musicales que pueden utilizar los maestros para la enseñanza del tema. En esta misma línea se sitúa la propuesta de Conde (2009), diseñada para explorar la interdisciplinariedad entre la música, la física y las matemáticas, mediada además, por la tecnología y la informática. Para estructurar la propuesta se conjugaron los elementos de las distintas disciplinas que se mencionan a continuación:

- de la física se toman aspectos relacionados con el estudio del sonido, el cuál se fundamenta en la percepción y transmisión de ese objeto físico;
- de la música se consideran elementos rítmicos como las figuras y silencios musicales con los cuales se establece un sistema de símbolos que determina la duración del sonido o su ausencia en intervalos de tiempo medidos por una unidad considerada como una unidad relativa;
- de las matemáticas se estudia la medida del tiempo, considerando intervalos determinados en segundos. Al realizar comparaciones entre la unidad de medida establecida y los intervalos de tiempo que se desea medir, necesariamente se debe hacer uso de los números fraccionarios, y
- de la informática, se aprovecha la posibilidad de usar la tecnología como una herramienta cognitiva que posibilita la incorporación de actividades exploratorias en el ambiente real y en el ambiente computacional. Además, permite una representación del paso del tiempo apoyada en la visualización.

La propuesta se estructura por medio de dos componentes: un diseño curricular y un ambiente computacional. Y la secuencia didáctica está diseñada para que, de manera guiada, los alumnos puedan construir relaciones, descubrir propiedades y comprender y realizar operaciones con números fraccionarios en el contexto de la música.

De la matemática escolar se toman los números fraccionarios como objeto de estudio, por su gran riqueza y su complejidad en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Respecto a la música se centra la atención en lo que se ha llamado un sistema de signos musicales (SSM) compuesto por las figuras y silencios musicales, porque cuenta con una estructura matemática asociada al sistema matemático de signos de las fracciones (en el sentido, por ejemplo, de Filloy y Rojano (1991)). Si fijamos el orden redonda, blanca, negra, etc. se cumple la propiedad siguiente:

> *Cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente.*

En este SSM convergen aspectos de las disciplinas mencionadas, cada una de ellas con contenidos específicos: el sonido (contenido de la física), la medida del tiempo y las fracciones (contenido de las matemáticas) y las figuras y los silencios musicales (contenido de la música). Estas nociones se vinculan por medio de un sistema que determina el tiempo de duración de un sonido.

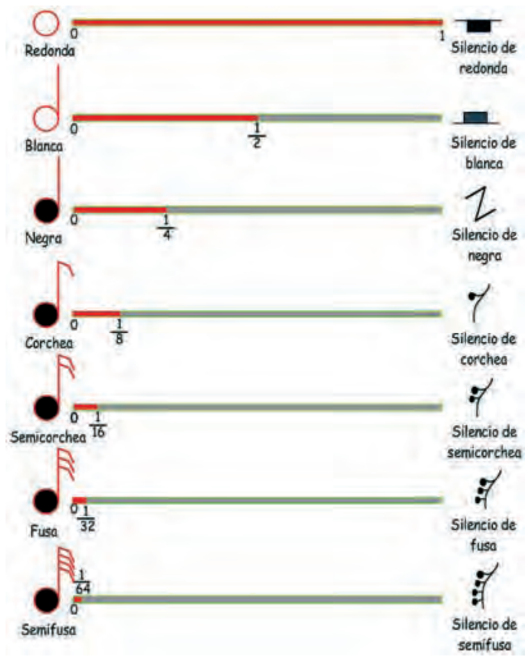



Ilustración 1. Sistema de Signos Musicales (SSM) de figuras y silencios musicales

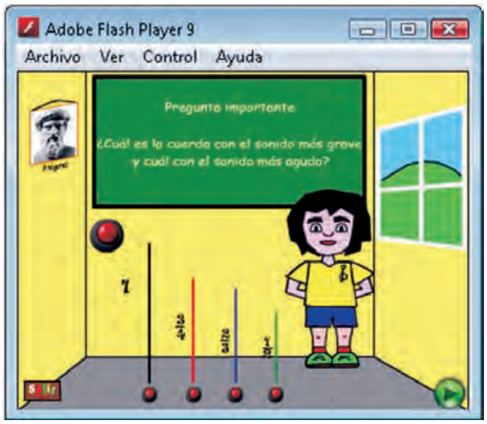
Una de las posibilidades que ofrece el estudio del SSM desde la perspectiva de la matemática escolar y mediante experimentaciones virtuales y reales, es un acercamiento simultáneo a las nociones del tiempo físico y el tiempo musical. Acercamiento que, en la propuesta que se describe, apunta a una de las mayores dificultades enfrentadas por los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las fracciones: la identificación de la unidad en la que se realiza la equipartición. Con este SSM se puede identificar de manera natural la figura redonda, con la *unidad* determinada por *el tiempo de duración del sonido asociado a la figura redonda*. A través del valor de la redonda se pueden deducir los valores de las demás figuras musicales. Cabe precisar que el valor en tiempo físico que se le asigna a la redonda depende de varios factores que se relacionan con la estructura rítmica y la velocidad de la interpretación de una obra, de ahí que a la unidad se le denomine *unidad relativa*.

La forma de articular la propuesta es a través de siete módulos que tienen por objeto conducir a los estudiantes en la búsqueda de respuestas a las cuestiones. Los módulos están conectados entre sí, pero a su vez tienen propósitos de aprendizaje independientes, lo que permite al profesor decidir cuáles y en qué orden desea introducir a sus alumnos al estudio de las nociones en juego, según sus intereses, la disponibilidad del tiempo, y los recursos técnicos y físicos con los que cuenta.

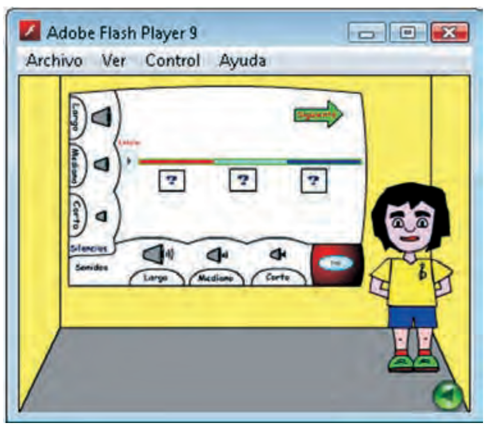
A continuación se describe brevemente cada uno de los módulos, cada uno de ellos con imagen incluida en el ambiente computacional del módulo que lo identifica y a través de la cual se accede a las actividades que lo conforman.

1. ¿Por qué se escucha el sonido?
El primer módulo se centra en el tratamiento del sonido como tema elemental de la música. En él se presentan simulaciones de objetos en vibración y se propone el contacto con objetos reales que también vibran, tales como cajas de resonancia y diapasones. La experimentación que se sugiere en este módulo aporta argumentos para la comprensión de la producción y propagación del sonido.


2. ¿Cómo se distinguen los sonidos?
Se propone la comparación entre la longitud de las cuerdas simuladas en el monocordio, de tal forma que los estudiantes puedan percibir cómo cambia el sonido de acuerdo con la longitud de la cuerda. También se propone la construcción y manipulación de un botellófono, para identificar sonidos graves y agudos y establecer una relación entre el sonido producido y la cantidad de agua de la botella. Subyacen en esta construcción nociones de proporcionalidad.

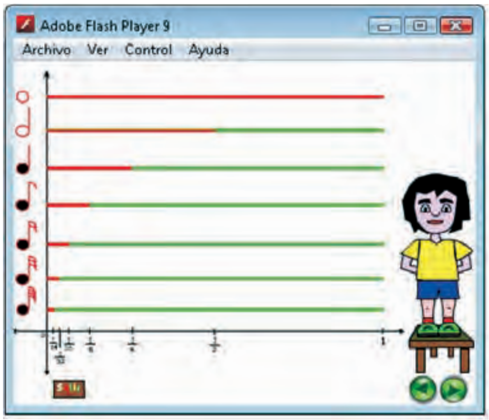



3. ¿Qué es ritmo?
Sin abandonar la noción de sonido, en este módulo se incorpora otro componente fundamental: el tiempo. Mediante múltiples interacciones y comparaciones entre sonidos y silencios, el estudiante puede identificar sonidos y silencios largos y cortos determinando la duración por medio del uso del reloj o cronómetro. Al construir patrones rítmicos se promueve la necesidad de crear un código para representar por escrito secuencias sonoras.

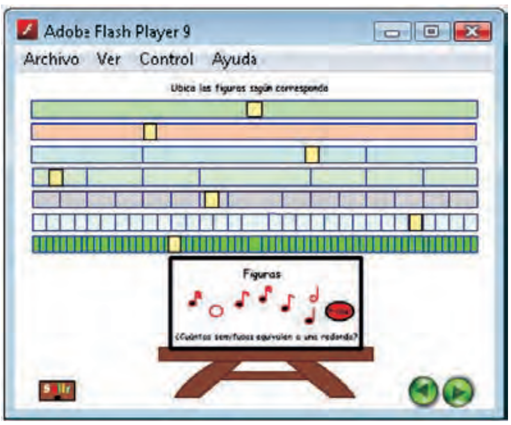



4. ¿Cómo se mide la duración de los sonidos y los silencios en música?
En este módulo se involucra al estudiante con el uso de un lenguaje que se construye a partir del valor relativo de la uni-

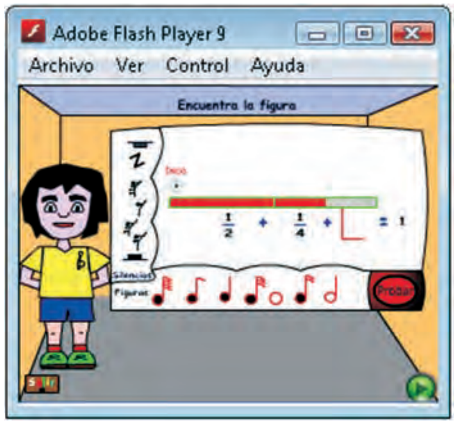
dad de medida. Las representaciones le ayudan a establecer una relación de orden entre las figuras mediante la fracción del tiempo de duración de los sonidos. Las experimentaciones proponen problemas referentes a la composición de una obra con un tiempo determinado para comparar el tiempo físico y el tiempo musical.




5. ¿Cómo se construyen equivalencias?
Se pretende establecer relaciones de equivalencias entre las figuras y silencios teniendo en cuenta la fracción del tiempo de duración. La argumentación se apoya en representaciones visuales, auditivas y corporales mediante la interpretación de patrones. Los alumnos a través de experimentaciones podrán interpretar composiciones de manera simultánea usando diferentes instrumentos musicales.




6. ¿Cómo completar unidades?
Por medio de las operaciones se pueden construir cantidades expresadas en tiempos de duración menores, iguales, y mayores que la unidad. Los ejercicios propuestos tienen una estructura de ecuación, en la cual el estudiante debe identificar el término desconocido. La igualdad entre una fracción y una adición de fracciones es una equivalencia que juega un papel importante en este acercamiento.




7. ¿Qué es compás?
La medida de una obra musical está determinada por una unidad, el estudiante por medio de las actividades de este módulo construye agrupaciones de tiempos o pulsaciones en grupos de 2, 3 ó 4, de esta forma puede llegar a tener una idea clara sobre el compás. En esta situación se puede concebir el compás como un producto o una suma sucesiva de tiempo de duración de figuras musicales, es decir de sonidos asociados a figuras musicales.


## Experiencias matemusicales

Una de las preocupaciones expresadas por maestros en talleres y charlas sobre este tipo de propuestas, es la de no contar con conocimientos suficientes acerca de los contenidos de las disciplinas que se consideran. Sirva como ejemplo el comentario que una maestra hizo al respecto:

> [...] A pesar del interés que los estudiantes manifestaron por la música, debí tomar la decisión de trabajar formalmente los contenidos de las matemáticas y no adentrarme en otros temas, ya que al agregar más elementos al desarrollo de la clase se dificulta el aprendizaje por parte de los estudiantes (Conde, 2009, p. 140).

Estas inquietudes no son ajenas a los intereses de los autores y se coincide con Papert (1993) quien afirma que los procesos de innovación en las escuelas se llevan a cabo de manera lenta debido a la resistencia de los profesores a lo desconocido. La cita de Papert está relacionada con el proceso de incorporación de las tecnologías digitales en el aula por parte de los maestros, y se hace alusión a ella para confrontar las hipótesis de los autores:

*Los objetos musicales, como las tecnologías digitales, pueden ser recursos poderosos para la construcción significativa de los conocimientos matemáticos escolares.*

No obstante, esta secuencia didáctica, como todas las propuestas novedosas que el maestro desee incorporar en sus clases, requiere de una amplia exploración de sus estructuras tanto conceptuales, como didácticas, con el fin de que se logren hacer adaptaciones asertivas para los propósitos de aprendizaje que se quiere promover entre los estudiantes. Precisamente por esto se propone como temas básicos el sonido y el tiempo, que pueden caracterizarse desde cada una de las disciplinas a través de percepciones naturales del ser humano.

En la sección siguiente se incluyen experiencias que forman parte de la propuesta descrita anteriormente y resultados que emergieron de su puesta en práctica con estudiantes de sexto grado de primaria (niños entre 10 y 12 años) de una escuela pública de Ciudad de México.

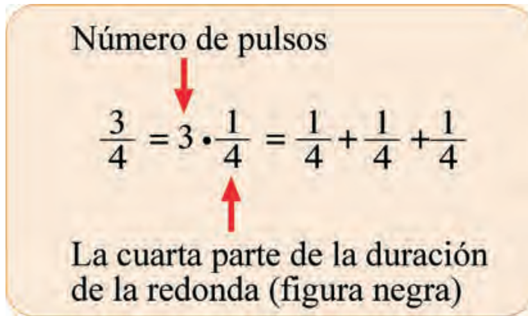
***El pulso y tiempo***

Cuando se habla de figuras musicales, implícitamente se hace referencia al tiempo y su medida. Es necesario aclarar que en este caso se trata de un medio continuo (tiempo de duración de sonido o de ausencia de éste) y el papel de las figuras musicales es discretizar este medio. Por tal motivo, cuando se dice que la blanca es la mitad del tiempo de duración de la redonda lo que quiere decir es que tiene una medida de dos pulsos ya que la medida de la redonda corresponde a cuatro pulsos en el tiempo musical.

Al definirse la redonda como la unidad de duración, surgen inquietudes cómo: ¿por qué se toma como la unidad?, ¿a qué se refiere con duración?, ¿cómo se determina la duración?, ¿cómo se mide la unidad?, ¿con qué instrumento se mide la unidad? Esto puede generar conflictos para los estudiantes cuando se les pide que encuentren la fracción de la unidad sin el uso de representaciones, pues podrían no tener claro qué deben dividir en partes iguales.

La fracción que indica el compás, que está ubicada al inicio del pentagrama, significa que el numerador representa el número de tiempos que tendrá el compás y la fracción 1/n indica la unidad de tiempo de duración, es decir, la figura que llenará un tiempo del compás. Por ejemplo, en el compás de 3/4, el numerador 3 indica que cada compás tendrá tres pulsos o tiempos, y la fracción 1/4 indica la unidad de tiempo, en este caso la cuarta parte del tiempo de duración de una redonda, es decir en este caso, la figura negra será la unidad de medida.

Así, el compás de 3/4 podría expresarse de la forma siguiente para verlo con mayor claridad:




Cuando se escucha un vals, se percibe un patrón rítmico de tres pulsos o tiempos. Durante todo el transcurso de la interpretación del vals se puede sentir que los patrones rítmicos están basados en el conteo: un, dos, tres. Esto indica que el patrón rítmico está agrupado en 3 pulsaciones con un acento en el primer pulso.


El pulso o pulsación se define como la medida que permite saber si un sonido es largo o corto. El pulso es el latido de la música en cada obra, al igual que el del corazón, se mide por medio del número de pulsaciones por minuto que influye en la velocidad de interpretación de la pieza.

En el estudio del pulso en una experimentación con el grupo de alumnos descrito anteriormente, ellos pudieron dar cuenta del aumento de pulsaciones por minuto mediante la comparación de sus ritmos cardiacos. El grupo se dividió en parejas, primero se midieron mutuamente el ritmo cardiaco contando el número de pulsaciones del corazón en un minuto, en estado de reposo. Después salieron a correr al patio y cuando regresaron al salón de clases se volvieron a tomar el pulso een estado de agitación.

Después de esta actividad el maestro usa un símil entre las pulsaciones del corazón y los pulsos en música, para ello él interpreta en la guitarra un ritmo de vals, variaba la velocidad de la interpretación para que los estudiantes identificaran en que situación existe un mayor número de pulsos. Con esta experiencia se pudo deducir que a mayor velocidad de la interpretación, mayor el número de pulsos por minuto y en consecuencia, menor tiempo de duración de los sonidos.

En el ambiente computacional que acompaña la propuesta didáctica se proponen escenas como la que se puede ver en la Ilustración 2, con las que se pretende que el estudiante establezca una comparación entre el tiempo físico medido en segundos y el tiempo musical medido en pulsos. Para lograr el objetivo se hacen simulaciones con animaciones simultáneamente con sonido.

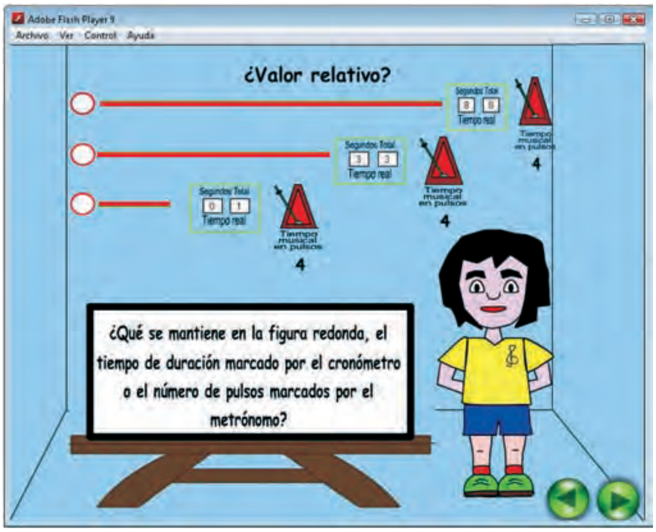



Ilustración 2. Escena del ambiente computacional de la propuesta interdisciplinaria

Los estudiantes, apoyados en la simulación de la escena, pudieron percibir la variación de la figura redonda respecto al tiempo físico y la conservación de la misma en el tiempo musical medida en 4 pulsos. También pudieron comprender la adición de fracciones a través de la construcción de magnitudes, teniendo en cuenta el tiempo medido en pulsos; la unidad ya no está determinada por la longitud de la barra, sino por el tiempo de duración marcado por un metrónomo.

### *Sonidos y tiempo*

Las escenas de la pantalla interactiva que aparece en la Ilustración 3 contiene un ejercicio en el que se disponen tres 'barras de sonido', cada una fraccionada con tiempos de duración de sonidos y silencios. A través de la comparación de estas barras de sonido, apoyada en la representación visual y auditiva, el estudiante puede construir relaciones de equivalencia, por ejemplo: 1/3 de la duración de la barra superior es equivalente a 2/6 de la barra inmediatamente inferior y a 3/9 de la última barra.

Para la pregunta: *¿Qué tienen en común las barras de sonido?*, se esperan dos respuestas:
- *las barras tienen el mismo tiempo de duración total*, con la visualización como apoyo a la justificación; y
- *tienen el mismo patrón rítmico, es decir, en todas las barras se perciben dos sonidos seguidos de un silencio*.

En relación con la pregunta: *¿Qué diferencias encuentras entre las barras de sonido?*, la respuesta esperada es: *las barras tienen diferentes fraccionamientos de tiempo de duración de sonidos, lo que se puede apreciar gráfica y auditivamente*.

Con respecto a la pregunta *¿El tiempo de duración de sonidos son iguales en las tres barras?*, se espera que los estudiantes determinen que tienen diferentes tiempos de duración.


Ilustración 3. Particiones de la unidad, duración de los sonidos y silencios

Posteriormente a la exploración de las animaciones de las barras y frente a la pregunta: *¿Qué tienen en común las barras de sonido?*, estudiantes que participaron en la experimentación opinaron:

–Estudiante 1: "Que todas están divididas en iguales partes".
–Estudiante 2: "Que todas las barras terminan hasta cierto tiempo".
–Estudiante 3: "Cambia el ritmo".
–Estudiante 4: "Que las tres tienen silencios".

Los estudiantes pudieron encontrar las similitudes respecto a la duración total de las barras, empero en un inicio tuvieron dificultades al identificar el patrón rítmico, algunos de ellos consideraron que cambiaba cada barra en su estructura. Sin embargo, con la comparación de dos sonidos sucesivos y un silencio, secuencia que se reproduce en cada barra, se logró disipar la idea inicial sobre un cambio de patrón.

Por medio de la pregunta: *¿Qué diferencias encuentras entre las barras de sonido?*, los alumnos identificaron el tiempo como factor determinante en la duración de los sonidos en cada barra. Sin embargo, surge una situación no prevista en la planeación, los alumnos identificaron dos tipos de tiempo:

- ellos reconocieron que en cada una de las barras el tiempo de duración responde a la misma fracción entre sus sonidos y silencios y
- los estudiantes reconocieron que las tres barras tienen el mismo tiempo total de duración.

Con estos parámetros, los alumnos al realizar comparaciones entre las barras sobre los sonidos y silencios determinaron que las duraciones de los sonidos en los tres casos son diferentes. Se puede poner en evidencia dicha determinación con las respuestas a la pregunta: *¿El tiempo de sonido es igual en las tres barras?*:

–Estudiante 1: "El tamaño es igual" [se refiere al tiempo de duración total de las barras].
–Estudiante 2: "Es más corto" [se refiere a la longitud de la fracción de la barra que se ilumina, comparado con una fracción iluminada de otra barra].
–Estudiante 3: "Es más largo".

Los estudiantes también hallaron la expresión en fracción del tiempo de duración de los sonidos y silencios que compone cada barra y establecieron relaciones de equivalencia entre ellas en términos de sus duraciones. Las relaciones que encontraron los alumnos son:

– "La duración de un sonido de la barra superior (ver Ilustración 3) se expresa como 1/3 de su duración total de la barra" (unidad de referencia).
– "En la barra de la mitad la duración de un sonido es de 1/6 de su duración total".
–"En la barra inferior la duración de un sonido es 1/9 de su duración total".

Aprovechando el momento, de acuerdo con las relaciones anteriores se planteó la pregunta: *¿Cuántos novenos se requieren para completar 1/3?*, a lo que el Estudiantes 1 respondió 3. Esta pregunta no exigió mayor esfuerzo para los estudiantes ya que la expresión fraccionaria de las barras comparadas se percibe de forma inmediata en la Ilustración 3. Luego se planteó la pregunta: *¿Cuántos novenos necesito para completar 1/6?* Se obtuvieron las siguientes respuestas:

–Estudiante 1: "Uno y medio".
–Estudiante 2: "Uno y un cachito".

En este caso se percibió confusión por parte de los estudiantes; la equivalencia no se puede comprobar de forma inmediata en la representación gráfica que aparece en la Ilustración 3. Frente a esto, una niña (la estudiante 2) logró deducir de la gráfica la expresión correcta:

$\boxed{\text{Se refiere a la unidad}}$

① y $\frac{1}{2}$ quiere decir:

$$\frac{1}{9} \text{ y } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{9} =$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} + \frac{1}{18} =$$

$$\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

Simplificando

El maestro puede aprovechar, tanto las expresiones que emergen, por ejemplo la respuesta de la niña, para socializar con todo el grupo, como la pregunta para seguir profundizando en el estudio de los contenidos de la actividad.

Con esta actividad se provee de experiencias a los estudiantes a través de las cuales ellos pueden comparar intervalos de tiempo de duración de sonidos para establecer relaciones de orden y equivalencia expresando unos intervalos de tiempo de duración en términos de otros.

***Figuras fraccionarias***

El propósito de este conjunto de exploraciones es dar significado matemático a las figuras y los silencios musicales, dotando de sonido las figuras vinculadas simultáneamente al movimiento de una barra como representación de la fracción de duración del sonido. Por medio de la experimentación entre sonido y movimiento, el estudiante realiza comparaciones para establecer relaciones entre las figuras considerando sus valores de duración representados por fracciones. El reconocimiento del valor relativo de la unidad es importante en el momento de deducir la duración de las demás figuras.

Durante la puesta en marcha de la propuesta didáctica que se ha descrito se observaron dos aspectos fundamentales. El primero es que, por medio de la exploración de una escena del interactivo que muestra el contenido de la Ilustración 1, el estudiante puede reconocer la unidad y a partir de ella construir las demás figuras. Es preciso mencionar que una de las dificultades en el trabajo con los números fraccionarios es que el estudiante identifique la unidad de medida a tratar, situación que en muchas ocasiones se pasa por alto y se da por hecho originando limitaciones y problemas para el desarrollo del proceso de aprendizaje del campo de los números fraccionarios. El segundo aspecto es que, debido a la representación gráfica y la percepción sonora se hace explicita la partición de la unidad al igual que la partición de las particiones. Con ello se da la posibilidad a los estudiantes de establecer una relación de orden entre las figuras y expresar una fracción en términos de otras. En este caso, no sólo existe una relación simbólica (figura-fracción) sino que además tiene un significado de medida asociado al tiempo de duración de un sonido.

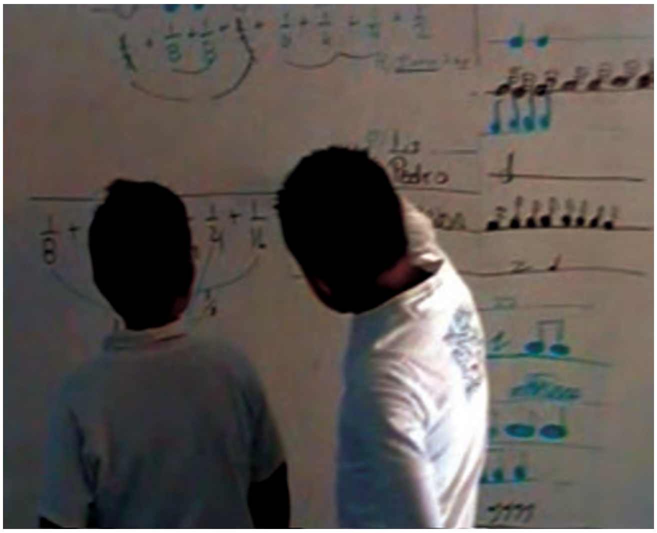


Ilustración 4. Estudiantes practicando con música y fracciones

En cuanto a discusiones en torno a la pregunta: ¿Qué sucede si continuamos reduciendo a la mitad la duración de un sonido?, los jóvenes opinaron lo siguiente:

–Estudiante 1: "Son más cortas las duraciones".
–Estudiante 2: "Se hacen más pequeñas".
–Estudiante 3: "¿Y no se puede escuchar? "
–Estudiante 4: "No".

Este cuestionamiento genera una discusión propicia para indagar sobre el estudio del sonido como fenómeno físico. Situación que el maestro puede determinar de acuerdo con sus intereses, ya sea estableciendo diferencias entre percibir un sonido según su frecuencia, intensidad o duración. Por otro lado, se puede usar esta actividad como transición de un fenómeno real a una construcción abstracta. Es decir, que a partir de la estructura de las figuras podemos extender el proceso profundizando en un campo matemático al desarrollar la sucesión de la forma $1/2^n$, cuya expresión puede ser hallada por los estudiantes, a partir de los primeros términos: 1, 1/2, 1/4, 1/8, etc.

## Reflexiones finales

A partir de las relaciones entre matemáticas y música se proponen nuevos materiales y estrategias didácticas diferentes a las usadas tradicionalmente, como el uso de contextos en los que aparecen galletas, pasteles y/o pizzas, para la enseñanza y el aprendizaje de los números fraccionarios.

Los estudiantes necesitan experiencias versátiles que les proporcionen herramientas de comprobación y argumentación para dar cuenta, por sus propios medios, sobre la construcción y el significado de un concepto estudiados. Estos diferentes acercamientos y representaciones que el estudiante tiene con los objetos matemático-musicales caracterizan los procesos de concretización de dichos objetos (Wilensky, 1991). En consecuencia el maestro también requiere de propuestas flexibles que le permitan realizar ajustes y adaptaciones teniendo en cuenta los actores del contexto escolar para potenciar las herramientas y favorecer la actividad matemática de la clase.

**Agradecimientos**

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto de investigación TIN2008-06872-C04-02 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

***MUSYMÁTICAS*** ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Conde, L. A. (2009). *Las fracciones al ritmo de la música.* Tesis de Maestría no publicada, México D. F. : Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Filloy, E. and Rojano, T. (1991). *Translating from natural language to the mathematical system of algebraic signs and viceversa*, en R.G. Underhill (ed.), Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North American 1, pp 29-35. Blacksburg,USA.

Liern, V. (2011). Música y matemáticas en educación primaria. *Suma*, 66, pp. 107 – 113.

Papert, S. (1993). *La máquina de los niños. Replantearse la educación en la era de los ordenadores.* Barcelona: Paidós.

Wilensky, U. (1991). Abstract Meditations on the Concrete, and Concrete Implications for Mathematics Education. En Harel, I. & Papert, S. (Eds.) *Constructionism*, pp. 193 – 204. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation,

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2011 y aceptado en octubre de 2011 para su publicación.

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 117-124



# Azar y probabilidad

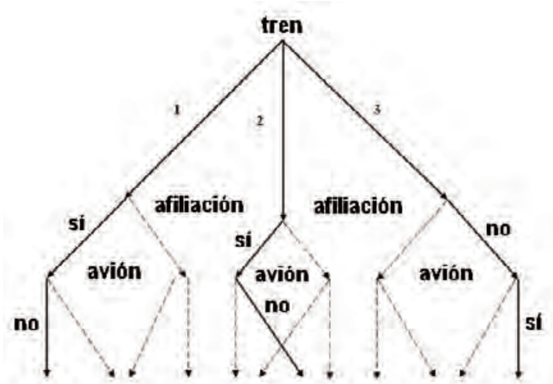
La Probabilidad, ese tema que tan a menudo en Secundaria queda postergado por estar al final del libro de texto, es sin embargo uno de los rostros de las matemáticas que más veces aparece en nuestras vidas y más se muestra en el cine, que intenta reflejarlas.

## Azar vs. destino

La primera cuestión que cabe plantearse al respecto, y el cine lo hace con profusión, es filosófica: ¿existe el azar o estamos abocados a un destino? La respuesta puede orientar nuestras vidas. La tragedia griega clásica recurrió al destino, lo que implicaba fatalmente la negación de la libertad individual. Sin embargo, en la película *Big Fish* (Tim Burton, 2003) se ofrece un enfoque diferente del destino cuando éste es conocido. El personaje principal tiene acceso a la visión de su propia muerte, lo cual le lleva a encarar la vida con optimismo y valentía, a sentirse más libre. ¿Qué miedo podía tener a situaciones y decisiones atrevidas si sabía que su final estaba aún por llegar?

Desde nuestra ignorancia del futuro, parece que aceptando el azar la libertad queda a salvo, aunque limitada por los caprichos de la fortuna. Escribe Pascal Mercier: "El verdadero director de escena de nuestra vida es el azar; un director lleno de crueldad, de misericordia y de encanto cautivador" (*Tren nocturno a Lisboa*). Es la idea que preside desde la primera escena *Match Point* (Woody Allen, 2005).

En *El Azar* (*Blind chance*. Krzyzstoff Kieslowski, 1982) se escenifica esa tesis mediante la ficción hipertextual que anticipara Borges[1]. Ficción donde el argumento no es lineal, sino que tiene una estructura arbórea que admite varios recorridos o desarrollos posibles. Asistimos a tres versiones distintas de lo que hubiera sido la vida del protagonista según hubiera cogido o no un tren hacia Varsovia. Un acto insignificante, sujeto a circunstancias externas, decide su futuro. En una versión, sube al tren; se afilia al Partido Comunista gobernante y vive su decadencia; al final no llega a tomar un vuelo. En otra, pierde el tren y tiene un conflicto en la estación; se hace católico e ingresa en una organización clandestina; tampoco consigue tomar un avión. En la tercera, perder el tren le trae el amor; se hace médico y se mantiene alejado de la política; embarca finalmente en un vuelo donde le espera un trágico azar. Se presentan 3 posibles desarrollos (trazos continuos del diagrama[2]) y en cada uno de ellos hay 3 disyuntivas (tomar el




**José María Sorando Muzás**
*IES Elaios, Zaragoza*
*decine@revistasuma.es*

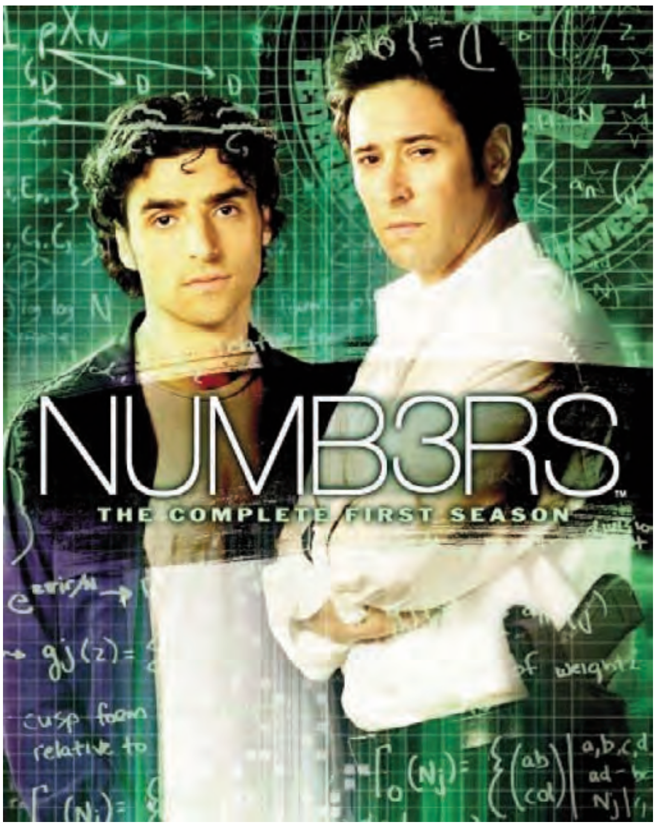
tren, oferta de afiliación y viaje en avión). Queda abierta para el espectador la exploración del resto de ramas (trazos discontinuos) en un diagrama arbóreo de 12 posibles argumentos.

Hay, por otro lado, un género de películas en las que una sucesión de hechos aparentemente independientes crean las condiciones para llegar a la situación dramática. En *Babel* (Alejandro González Iñárritu, 2006) las acciones de personajes en lugares tan distantes como EEUU, Marruecos, Japón y México, están interconectadas a pesar de que ellos no se conozcan entre si. En esos casos, según Manuel Arias[3]: "Nuestra mirada es creadora de destino". Se buscan conexiones entre lo azaroso hasta tejer un hilo conductor que llamamos destino. La mirada retrospectiva convierte así la casualidad en causalidad.

Volviendo a Borges[4], tal vez, como en *La lotería de Babilonia*, la vida se construya sobre una sucesión permanente de sorteos, que regulan cualquiera de sus aspectos, y no sea otra cosa que "un infinito juego de azares".

## Qué es el azar

Si hemos aceptado el azar, ¿cómo distinguirlo? En matemáticas lo identificamos, en oposición al determinismo, con la ausencia de pautas que nos puedan permitir predecir hechos futuros, algo que no se debe confundir con la ausencia de pautas casuales en lo que ya ha sucedido, ni tampoco con una obligada dispersión de los sucesos.




En el *Episodio piloto* de la serie *Numbers* (2005), el matemático Charlie Eppes acude a la central del FBI donde trabaja su hermano Donald para exponer, a partir de las localizaciones de varios crímenes en serie, un mapa de zonas de probabilidad del lugar donde puede vivir el asesino.

–Charlie: A la hora de elegir lugares para atacar o arrojar un cuerpo, el asesino buscará zonas que parezcan elegidas al azar. No quieren que vds. saquen conclusiones sobre dónde vive o qué zonas frecuenta.

–Donald: Claro…

–Ch: ¿Saben? Haremos una demostración elemental. Bueno, ayúdenme a retirar esta mesa, vamos a desplazar esto… (dejan libre la sala) y vds. acérquense. Distribúyanse al azar por esta zona de aquí. (Todos se reparten por la sala).

–Ch: Así está muy bien, pero ¿saben? Han hecho una cosa. Vds. se han distribuido a intervalos regulares, mientras que algo hecho al azar incluiría amontonamientos. Porque es difícil elegir conscientemente una secuencia al azar. El criminal lo ha intentado, pero, como vds, ha terminado con unos intervalos similares.

–Agente: Ha terminado formando unas pautas en su afán por evitarlas.

–Ch: Sí, sitios alejados adrede de un lugar que no está marcado en su mapa, pero que sí está en la mente del asesino. Es decir, su casa. Y aquí tenemos (señala el mapa) la probabilidad de cada zona de ser la base del sujeto.

Enlace: http://vimeo.com/26738195

En efecto, el azar no excluye el agrupamiento de resultados. Está muy extendida la creencia contraria, según la cual, por ejemplo, no pueden salir números consecutivos en la Lotería Primitiva. En *El hombre que copiaba*[5] (*O homem que copiava.* Jorge Furtado, 2002) se escenifica ese prejuicio. Dos amigos se reúnen en la calle, cuando uno sale de una oficina de apuestas.

–¿Qué? ¿Todo bien?

–Todo bien.

–¿A qué números jugaste?

–A los primeros.

–¿Cómo a los primeros?

–1, 2, 3, 4, 5 y 6.

–¿Estás de broma? No jugaste eso, ¿no? ¿Y ella no desconfió?

–¿Desconfiar de qué?

–¡Nadie juega 1, 2, 3, 4, 5, y 6! ¡Nunca van a salir esos números!

–Es igual que otros, las mismas posibilidades[6].

–No, es imposible que salgan seis números seguidos.

–Es tan imposible como cualquier otro.

–Y ahora, ¿qué vas a jugar? ¿2, 4, 6, 8, 10, 12?

–Buena idea.

Enlace: http://vimeo.com/26740291

Con un sentido no numérico, sino espacial, encontramos la misma idea en *La Ciencia del sueño*[5] (Michel Gondry, 2006). Los protagonistas están preparando una decoración con papeles de colores.

–Ella: Deberías poner más blancos, más papeles blancos.

–Él: Sí (los va repartiendo).

–Ella: No, un poco más a la izquierda. La aleatoriedad es muy difícil de conseguir. Si no tienes cuidado, la organización siempre vuelve a colarse.

–Él: Muerte a la organización.

Enlace: http://vimeo.com/2389261

Se confunde el azar con un desorden deliberado; pero si la voluntad interviene en los resultados, ya no hay azar.

## Juegos de azar, racionalidad y riesgos

Decía Albert Einstein (1879 – 1955): “La mejor forma de ganar dinero en un casino es asaltándolo”. Con humor, recordaba que, por muy racional que sea nuestro análisis probabilístico, nunca nos garantiza que el azar nos vaya a ser favorable. Es más, éste puede sonreír a quien ignora del todo esos análisis. También con gracia, se expresaba en un diálogo de *Mañana será otro día*[7] (Jaime Camino, 1967):

–Las quinielas, cuando se hacen con lógica, siempre se aciertan. Es un problema matemático. Es un problema de factores combinatorios y de probabilidad.

–¡Pues mira que gana cada paleto a las quinielas!

Los juegos de azar legales organizados (loterías, casinos, quinielas, etc.), no son equitativos, son de esperanza no nula. Tal y como están reglamentados, la esperanza matemática del jugador es negativa, mientras que la esperanza de la banca es positiva. Recordemos que la banca juega siempre, con lo que la Ley de los Grandes Números actúa a su favor, convirtiendo esa esperanza de ganancias en práctica certeza. Saberlo nos permite remedar a Einstein así: “La mejor forma de ganar dinero en un casino sin delinquir es ser el dueño del casino”. O también así: “La mejor forma de no perder dinero en un casino es no jugar”.
Y sin embargo, personas nada simples se aferran a la esperanza (no matemática) en el azar. La escena precitada de *Numbers*, continúa de esta forma:

–Charlie: Hay un 87% de probabilidades de que (el asesino) viva ahí (señala una zona del mapa).

–Comisario: Yo no sé mucho de matemáticas, pero esto no tiene sentido para mí.

–Ch: Tiene más sentido que esto (saca del bolsillo de la camisa del comisario un boleto de lotería).

–C: Si no compras, no te puede tocar.

–Ch: Es cierto. Sin embargo, las probabilidades de que tenga premio son de 1 entre 41 millones. O sea que, si comprara 20 billetes a la semana, le tocaría la lotería una vez cada 40.000 años.

–C: ¿De verdad?

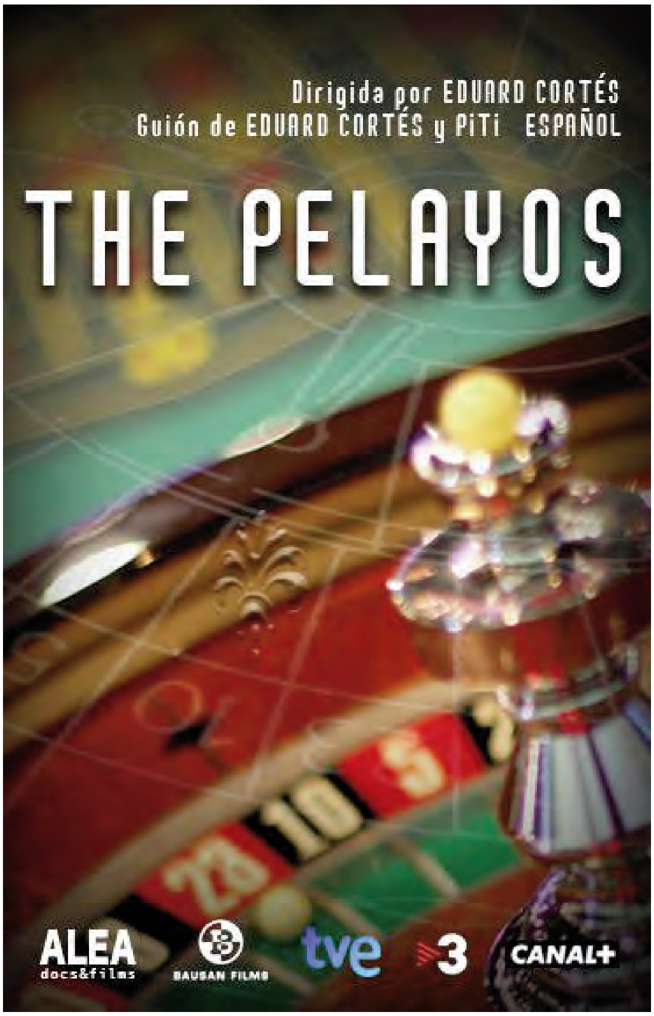
–Ch: Sí, teoría básica de probabilidades.

Enlace: http://vimeo.com/26738195

Las matemáticas aplicadas a los juegos de azar ilegales nos pueden llevar por una vía peligrosa. En *Un tipo serio* (Joel y Ethan Cohen, 2009) Arthur, el hermano mayor de Larry, el serio profesor protagonista, trabaja incansablemente en una libreta que llama el *Mentaculus,* un mapa de probabilidades del Universo que luego aplica en el juego. Es detenido en una partida ilegal de póker. Mientras se lo lleva la policía, Larry grita:

> –¡Son sólo matemáticas! ¡No pueden detener a nadie por las matemáticas!

Pero también en el juego legal las matemáticas tienen sus riesgos. Ya vimos que sus normas siempre favorecen al organizador. Pues bien, algunas de ellas son directamente antimatemáticas. Así, en el blackjack ¡se prohíbe contar las cartas! La película *21 Blackjack*[8] (Robert Luketic, 2008) narra la historia, basada en hechos reales, de un profesor de matemáticas del MIT y sus estudiantes más aventajados, quienes lograron ganar mucho dinero en Las Vegas usando sus conocimientos y sus capacidades en ese juego de casino.




El juego del blackjack consiste en competir contra la banca, no contra los otros jugadores. Se piden cartas hasta que el total de éstas sume 21, o se acerque lo más posible, sin pasarse de 21 (si se pasa, se ha perdido la mano). El jugador puede "plantarse" cuando quiera, pero el croupier (el casino) no puede hacerlo antes de haber llegado a 17, valor en el que se planta. El método se basa en contar las cartas que van saliendo; calcular en cada momento probabilidades sobre las que quedan por salir; saber si es más o menos probable que salga una carta alta y nos pasemos o no; y jugar en consecuencia, sabedores de la estrategia del croupier.

El método de "contar cartas" en el blackjack ya aparecía en la película *Rain Man* (Barry Levinson, 1988), a cargo de un "autista inteligente" con altas capacidades memorística y de cálculo, que eran explotadas por su desaprensivo hermano. La normativa de los casinos lo prohíbe; hay cámaras y software de reconocimiento facial que intentan detectar a los "infractores" habituales y fornidos empleados que los "disuaden" para abandonar. Esto no son fantasías cinematográficas[9] ni tampoco historias "made in USA".

En 2012 se estrenará *La fabulosa historia de los Pelayos* (*The Pelayo's*. Eduard Cortés, 2011). Los Pelayos son una familia española famosa por haber roto la banca en casinos de todo el mundo contraviniendo sus normas, que es decir sus intereses. ¿Cuál era su perseguida actividad?... registraban series largas de resultados hasta detectar alguna ruleta defectuosa[10]. Después, aplicando la Ley de Estabilidad de las Frecuencias, apostaban a los números más probables.

¡Quién nos iba a decir que razonar matemáticamente podía ser algo aventurero y arriesgado! Mejor será que no se enteren los padres de nuestros alumnos.

## Cálculo de Probabilidades

Si bien es abundante la presencia del azar en los guiones cinematográficos, la del razonamiento probabilístico es escasa. La probabilidad de un suceso es una asignación numérica (en nuestro caso razonada) que expresa su factibilidad. Ante tantas situaciones inciertas, no debía ser tan extraño ver cómo los personajes asignan probabilidades y, a partir de ellas, toman decisiones… pero lo es. Lo habitual es que decidan desde la intuición o desde el prejuicio; y cuando en el cine vemos calcular probabilidades también lo usual son los errores. El error frente al caprichoso azar se convierte en ironía en *Fútbol Kung Fu* (*Shaolin Soccer - Siu lam juk kau*. Stephen Chow, 2001), una de tantas películas orientales del género de artes marciales. Un atareado ejecutivo es solicitado por sus amigos de juventud para volver a formar un equipo de fútbol. Responde airado:

–Por si fuera poco, nuestras posibilidades[6] (teclea en la calculadora) son mínimas. ¿Quieres que te diga la verdad? Nuestras posibilidades de ganar el próximo campeonato son exactamente de un 0%. Mira, para que entiendas, te voy a demostrar cómo opera el azar.

Tira una moneda al aire que, tras forcejeos, cae al suelo y se va rodando.

–¡Las posibilidades de ganar son las mismas de que la moneda caiga de canto!

–Déjame intentarlo, es muy probable que lo logre.

–¡Ya váyanse de aquí! ¡Estoy muy ocupado!

Cuando ha quedado solo, se agacha y ve con sorpresa que la moneda ha caído... de canto.

Enlace: http://www.vimeo.com/26954440

Tan habitual es el error que todos los ejemplos que he encontrado de escenas de películas con cálculos de probabilidades tienen –en mi opinión- fallos. Y eso los hace buenos para su uso didáctico, pues pocas cosas hay tan estimulantes como pillar el "gazapo" ajeno; lo cual sirve tanto para las siguientes escenas como para mis propios comentarios (soy consciente de ello y animo a los lectores a que lo hagan).

La asignación de probabilidad emana de la experiencia, pero no de cualquier manera. En *Chicago* (Rob Marshall, 2002), el abogado dice en la prisión a la homicida, que es su defendida:

–En 47 años, el Condado de Cook no ha ahorcado a ninguna mujer. Así, las apuestas están 47 a 1 a que no te ahorcarán.

Lo cual se puede traducir en: la probabilidad de que la próxima persona ahorcada sea una mujer es 1/48; y la de que sea un hombre, 47/48.

Razonar por cálculo de frecuencias relativas y "paso al límite" (si es viable con tantos casos como ejecutados hubo en esos 47 años), nos llevaría a que el suceso "el próximo ahorcado será un hombre" tendría probabilidad 1 (suceso seguro) y su contrario, "será una mujer", probabilidad 0 (suceso imposible).

¿De dónde viene entonces ese "47 a 1"? Seguramente, es sólo una forma de insertar el dato "47" en el enunciado de la apuesta.

Pero, aunque esté bien calculada, de la probabilidad no se deriva certeza. En *Giro al infierno*[7] (*U Turn*. Oliver Stone 1997) se escucha en un bar:

–Éste dice que si tiras 10 veces al aire una moneda, 5 veces sale cara y 5 cruz. ¿Os lo creéis?

–No tienes ni idea de Estadística.

–Y tú, ¿qué te crees? ¿Un genio de las Matemáticas?

Ese razonamiento confunde las esperanzas matemáticas de las variables aleatorias binomiales[11] "número de caras" y "número de cruces" con resultados de cumplimiento seguro.

## Probabilidad Compuesta

Las dos siguientes escenas tratan la probabilidad de la intersección de sucesos, también con poco acierto.

*El puente sobre el Río Kwai (The Bridge on the River Kwai*. David Lean, 1957) es una famosa película ambientada en la II Guerra Mundial, ganadora de 7 premios Óscar. Un comando tiene la misión de volar el puente. En su preparación surge un contratiempo: uno de sus miembros nunca ha saltado con paracaídas.

Mi coronel, lo siento. Con el tiempo de que disponemos es inútil que se ejercite en el salto. Si saltase una vez, tendría el 50% de probabilidad de herirse. Si saltase dos veces, un 80%. Y a la tercera, aterrizaría en el hospital.

Enlace: http://vimeo.com/23755295

Aunque no tengamos conocimientos de paracaidismo, podemos asegurar que las afirmaciones segunda y tercera son incorrectas. Usaremos esta notación de sucesos:

$A_1$ = accidente en el primer salto

$A_2$ = accidente en el segundo salto

$A_3$ = accidente en el tercer salto

Se afirma que: $P(A_1) = 0{,}5$. Luego: $P(A_1^c) = 0{,}5$.

Sabemos que la probabilidad de accidentarse en el segundo salto es igual a la de no haberse accidentado en el primero (si se hubiese accidentado ya no seguirían los saltos), multiplicada por la de accidentarse en el segundo sabiendo que salió ileso del primero.

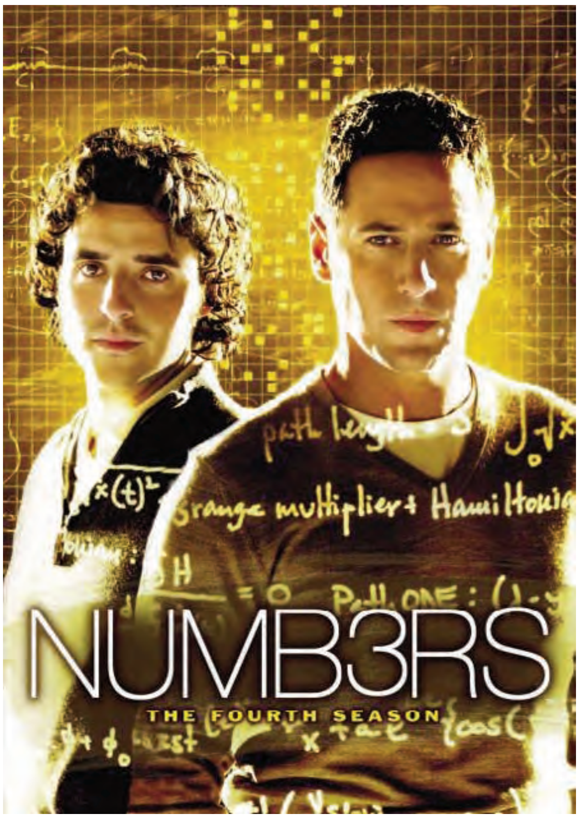
$$P(A_1^c \cap A_2) = P(A_1^c) \cdot P(A_2 \mid A_1^c) = 0{,}5 \cdot P(A_2 \mid A_1^c)$$

Pero se dice que esta probabilidad es 0,8; lo cual es imposible porque en tal caso:

$$0{,}5 \cdot P(A_2 \mid A_1^c) = 0{,}8 \quad \text{de donde}$$

$$P(A_2 \mid A_1^c) = 0{,}8 : 0{,}5 = 1{,}6$$

y una probabilidad es siempre un valor menor que 1.




De igual modo, es imposible la última afirmación ("Y a la tercera, aterrizaría en el hospital", es decir, el accidente sería seguro), ya que:

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c \mid A_1^c) \cdot P(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c) = 0{,}5 \cdot P(A_2^c \mid A_1^c) \cdot P(A_3 \mid A_1^c \cap A_2^c)$$

Si multiplicamos 0,5 por dos números menores que 1, el valor resultante será menor que 0,5, nunca 1 (100% como se indica en el diálogo). La probabilidad de una concatenación de sucesos siempre es menor que la probabilidad del primero de ellos, ya que supone sucesivos productos por valores positivos menores que 1.

Como en cualquier aprendizaje, en paracaidismo la ejercitación aumenta la destreza y reduce los riesgos; no al revés.

En *Intacto* (Juan Carlos Fresnadillo, 2001), un desconocido visita en el hospital al único superviviente de un accidente de avión y le dice:

> –La probabilidad de que ocurra un accidente aéreo es de una entre un millón. La probabilidad de que ocurra y de que usted sea el único superviviente, en su caso que iba acompañado de 237 pasajeros, fue de una entre 237 millones.

Enlace: http://vimeo.com/23477090

El suceso "ser el único superviviente" es en realidad un suceso compuesto, que podemos desglosar así:

A = que haya un accidente aéreo

B = que en un accidente aéreo haya un único superviviente

C = que el único superviviente de un accidente aéreo sea esa persona

De modo que: $p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B \mid A) \cdot p(C \mid A \cap B)$

Se dice que $p(A) = 1/\ 1.000.000$

Si viajaban 237 pasajeros, $p(C \mid A \cap B) = 1/\ 237$

(al pié de la letra, eran 237 y él, así que 238, pero pasemos ese detalle por alto)

Con esos datos, resulta:

$$p(A \cap B \cap C) = 1/1.000.000 \cdot p(B \mid A) \cdot 1/237 = p(B \mid A)/\ 237.000.000$$

Es decir, en la argumentación y en el cálculo falta incluir un dato: la probabilidad de que en un accidente aéreo haya un único superviviente. La conclusión sería correcta si se hubiera dicho: "La probabilidad de que ocurra un accidente aéreo y haya un único superviviente es de una entre un millón".

En este panorama, la serie *Numb3rs* es una honrosa excepción, aunque haya una crítica que hacerle. En ella abundan las referencias a la probabilidad, explicando por encima qué ideas son la que el genio Charlie ha aplicado para llegar a sus conclusiones. Pero no se entra en datos ni en detalles, resultando imposible analizar el razonamiento (con la excepción del Problema de Monty Hall[8]). Se usan recursos correctos pero algo elevados y, al no ser explicados, quedan muy lejos del público, cual arcanos adivinatorios. Sirva como ejemplo la interesante escena enlazada, donde se alude a probabilidades a posteriori (análisis bayesiano).

Enlace: http://vimeo.com/26770342

## Es complicado decidir

La probabilidad nos puede orientar pero, en muchas situaciones, la decisión es algo comprometido, que pone en juego no sólo cálculos, sino ante todo valores personales. Cuando las consecuencias pueden ser importantes, una opción escapista es delegar la responsabilidad en el azar. En *Micmacs* (Jean-Pierre Jeunet, 2009), un cirujano tiene que extraer una bala alojada en la cabeza del paciente sobre la mesa del quirófano. Si no la extrae, la bala puede matarle en cualquier momento; si la extrae, el paciente puede morir en la operación. ¿Qué hacer? Decide así:

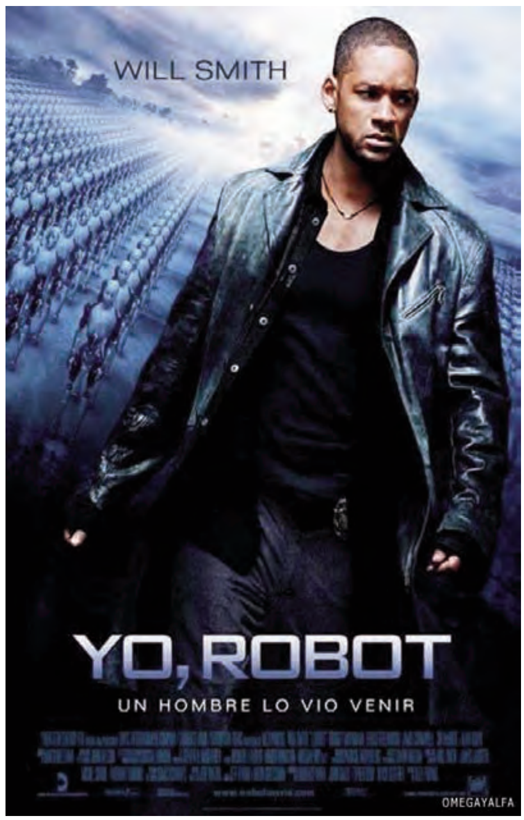
> Cirujano: ¿Alguien tiene una moneda?
>
> Enfermera: ¡Cara!
>
> C: Muy bien, no toco nada.

La Inteligencia Artificial decide en base a algoritmos de probabilidad, pero en los humanos interviene además la conciencia, que conlleva el remordimiento por cuanto con la elección ha sido negado[12].

*Yo robot* (Alex Proyas, 2004) es la adaptación a la pantalla de la famosa obra de Isaac Asimov (1920 – 1992). En 2035 se vive en completa armonía con robots inteligentes que trabajan para nosotros. Se confía plenamente en ellos debido a que se rigen por las Tres Leyes de la Robótica[13] que nos protegen de cualquier daño. En ese escenario, el detective protagonista arrastra una herida moral, una desazón que la razón numérica no consigue mitigar.

> Detective: Iba hacia la comisaría. Un día normal, una vida normal. El conductor de un trailer se durmió al volante (…) Embistió el coche de un tipo (…) Murió al instante. Pero su hija, de 12 años iba al lado. No llegué a conocerla, pero no he olvidado su carita... Sara, esto era suyo (enseña una cadena con su nombre). (...) El camión arrolló los dos coches y nos echó al río. Estaba atrapada. Yo también. El agua empezó a entrar y... soy "poli", así que sabía que de ahí no salíamos. Sólo nos quedaban unos minutos. Un (robot) NS4 que pasaba por allí vio el accidente y se tiró al agua.
>
> En la imagen retrospectiva:
>
> Robot: Está en peligro.
>
> D: ¡Salva a la niña! ¡Salva a la niña!
>
> El robot salva al protagonista y la niña queda encerrada en el coche que se sumerge.
>
> De nuevo en el presente:
>
> D: Y no lo hizo. Me salvó a mí.
>
> Chica: El cerebro del robot es una máquina diferencial. Lee las constantes. Debió de calcular que...
>
> D: Lo sé. Yo era la elección lógica. Calculó que tenía un 45% de probabilidades. Sara sólo tenía un 11%. Era tan sólo una niña... Un 11% es suficiente. Un ser humano lo hubiera sabido. Los robots no tienen nada aquí (se golpea sobre el corazón), sólo luces y engranajes.

Enlace[14]: http://vimeo.com/21792255



Decidir es elegir, pero también, casi siempre en mayor medida, es negar. Agustín García Calvo[15] escribió: “Parece que decentemente no os podéis quedar con lo uno o con lo otro, pues que ambos os invaden necesariamente, aunque sea, al parecer, con dos necesidades diferentes”. Su propuesta, subversora del orden y la definición, es no elegir: “… vamos a negarnos a elegir (ni honradamente cabe en cabeza humana más fruto que la indecisión)”. No se refiere a casos de urgencia extrema, como el del robot salvador; más bien a una actitud vital ante las grandes cuestiones interiores, para las que no han faltado argumentos de seducción probabilistica, como la célebre apuesta pascaliana[16]. No son cálculos aritméticos los que rigen los asuntos del ser y del querer.

**CineMATeca** ■

## NOTAS

1 Jorge Luis Borges (1899 – 1986) escribió en 1941 *El jardín de senderos que se bifurcan* dentro de la colección de relatos del mismo nombre (publicado en Ficciones. Alianza Emecé. Madrid 1971), donde el espía Yu Tsun descubre el laberinto, diseñado en forma de libro por un antepasado. En sus ficciones, “hay diversos porvenires” y “el tiempo se bifurca perpetuamente hacia innumerables futuros”. “Creía en infinitas series de tiempos divergentes, convergentes y paralelos. Esa trama de tiempos que se aproximan, se bifurcan, se cortan o que secularmente se ignoran, abarca todas las posibilidades”.

En la misma colección, el relato *Examen de la obra de Herbert Quain*, hace una inversión temporal de la propuesta y nos habla de una “novela retrospectiva ramificada”, en la que ya no se plantean posibles futuros, sino posibles pasados.

2 Ver: *Alternate futures, contradictory pasts: Forking paths and cubist narratives in contemporary film* de David Scott Diffrient. Revista digital Screening the past nº 20. URL: www.latrobe.edu.au/screeningthepast/

3 Blog *Azar y destino* (http://azarydestino.blogspot.com).

4 La lotería de Babilonia es otro relato incluido en *El jardín de senderos que se bifurcan*.

5 Escena localizada en el blog *No sólo Mates*. URL: http://nosolomates.es

6 La confusión entre posibilidades y probabilidades es universal.

7 Escena localizada en *Las Matemáticas en el Cine*. Alfonso Jesús Población. Proyecto Sur – RSME 2006.

8 Ver *Escenas* en Suma 61, pp. 121 y 122.

9 Si vd. se anima a empezar la aventura de contador de cartas, le conviene leer: *No ser expulsado del casino por contador*.

URL: www.trucosycasino.com/no-ser-expulsado

10 Documental dramatizado: www.youtube.com/watch?v=IFp7BJInzYQ (en 6 videos).

11 $E[X] = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}5 = 5$

12 Meryl Streep lo encarnó magistralmente: con intensidad emocional en *Los puentes de Madison* (Clint Eastwood, 1995) y con dramatismo desgarrador en *La decisión de Sophie* (Alan J. Pakula, 1983).

13 Primera Ley: “Un robot no puede dañar a un ser humano o, por su inacción, dejar que un ser humano sea dañado”. Segunda Ley: “Un robot debe obedecer las órdenes que le dé un ser humano, excepto cuando éstas estén en oposición a la Primera Ley”. Tercera Ley: “Un robot debe proteger su propia existencia, siempre y cuando esta protección no se oponga a las dos primeras leyes”.

14 Escena localizada en Matemáticas de cine. URL: http://matedecine.wordpress.com/

15 *Sermón de ser y no ser*. Agustín García Calvo. Visor. Madrid. 1977.

16 “Dios o es, o no es. ¿Hacia qué lado nos inclinaremos?... se está jugando un juego en el que saldrá cara o cruz… Pensemos la ganancia o la pérdida, tomando como cruz que Dios existe. Estimemos estos dos casos: si ganáis, ganáis todo; si perdéis, no perdéis nada. Optad, pues, porque exista sin vacilar” Pensamientos, 223. Blas Pascal. Espasa Calpe. Madrid. 1940. Para Pascal, la esperanza matemática de ganancia del creyente es: $0{,}5 \cdot \infty + 0{,}5 \cdot 0 = \infty$. Propone llegar a la fe a través de la esperanza matemática, sustituyendo la convicción por la conveniencia.

Directorio de enlaces

En los artículos de esta sección se indican enlaces para poder ver en Internet las escenas que se comentan. Con el tiempo, algunos de esos enlaces quedan rotos o pueden ser ampliados. Por ello, ha parecido conveniente mantener actualizado un directorio de todos ellos, que incorpore los cambios y novedades. Se puede consultar en:

http://catedu.es/matematicas_mundo/Cinemateca.htm

Este artículo fue solicitado por *Suma* en abril de 2011 y aceptado en septiembre de 2011 para su publicación.

suma+ 68
Noviembre 2011, pp.125-130

# Bucles creativos

*Construímos el mundo literalmente*
*entre todos,*
*nadie pasa sin dejar rastro.*
*No decidimos nuestras vidas,*
*las vivimos*
*...*
*El goteo de nuestros éxitos y fracasos*
*se acaba derramando*
*y construye como un torrente el futuro ...*

Suart Kauffma

Así terminó Eliseo Borrás su conferencia "Lo uno y lo múltiple", dictada en la Universitat Jaume I, en el marco del Congreso Internacional "La Europa del Mediterráneo: encrucijada de lenguas y culturas", que tuvo lugar entre noviembre de 2005 y mayo de 2006, en Castellón, organizado por Marisa Villanueva.

Me gusta la frase, pero quiero matizarla: construimos, sí, pero unos más que otros. Nadie pasa sin dejar rastro, sí, pero unos más que otros. Las vivimos, sí, pero unos, como Eliseo, más que otros. Como un torrente, eso fue el goteo de la vida vivida por Eliseo, un torrente que fertilizó nuestras vidas.

Como dicen sus queridas amigas Marisa Villanueva y Rosaura Serra: "Existen discursos que estimulan el deseo. Eliseo estimulaba, te llevaba de la mano, te hacía inteligente. Cuatro comentarios suyos te desbloqueaban. Su palabra daba sentido a las cosas"...."Tenía capacidad para despertar la imaginación". Podía convertirse perfectamente en un travieso bucanero. "Eli, pirata", le decían los niños, con quienes establecía un contacto vital, pues compartía con ellos la curiosidad, la apertura para encontrar lo desconocido, la alegría de vivir, que se traducía en un perpetuo sentido del humor, omnipresente en sus juegos de palabras, en su sentido del absurdo.

**Xaro Nomdedeu Moreno**
*Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"*
*ariadna@revistasuma.es*

La curiosidad le llevaba a bucear en variadas áreas del saber y a descubrir su complejidad. Decía en la mencionada conferencia:

> La colaboración entre ciencias y humanidades es más necesaria que nunca para comprender el universo complejo. La deducción no es suficiente para construir la vida, la metáfora es más necesaria que nunca para guiar nuestra acción.

Estas palabras, unidas al título de la conferencia "Lo uno y lo múltiple" parecen evocar aquellas otras de María Zambrano: "El drama de la cultura moderna es la falta de contacto entre la verdad de la razón y la vida. Si la vida no es reformada por el entendimiento, si la verdad no sabe enamorar a la vida, ésta se declarará en rebeldía".

Palabras que me recordó Eduardo Galeano, hace unos días, en una de las plazas del 15 de mayo, concretamente en Barcelona. Decía: "Cuando veo uno que sólo siente pero no piensa digo este es un cursi. Cuando veo uno que sólo piensa pero no siente digo ¡qué horror! Éste es un intelectual"

Porque, según Galeano, cuando la razon se divorcia del corazon, el ser humano crea monstruos, como mostró Goya en su pintura.

Así pues hay que razonar y sentir, para ser personas, hay que unir la razón a la emoción, la deducción a la metáfora, para construir vidas humanas.

Quienes hemos tenido la suerte de compartir un poco de tiempo, siempre supo a poco, con Eliseo Borrás, sabemos qué quiere decir que la verdad enamore a la vida, que la vida acepte la verdad sin violencia, que vida y verdad formen una unidad, que pensar y sentir no sean términos antagónicos sino complementarios necesarios para darle sentido a la vida.

Volviendo a María Zambrano: "Esa luz que es el amanecer de la conciencia, que no siempre ha de ser la de la razón, o no sólo, o no del todo, pues la razón habrá de estar asistida por el corazón para que esté presente la persona toda entera".

Como dice Marisa Villanueva, citando a Deleuze y recordando a Eliseo: "Caminamos por el rizoma movidos por el deseo y por eso buscamos la multiplicación de los contactos, que conducen a la complejidad".

Complejidad a la que hace referencia la mencionada frase de Eliseo, quien insistió en la conferencia que estamos comentando, en que "el mundo es increíblemente complejo: partículas elementales, moléculas, virus, bacterias, células, vegetales, animales, planetas, galaxias... Por complejo no debemos entender una mera acumulación de elementos diversos, sino las relaciones entre ellos. Tal vez el origen latino de esta palabra, complexus, participio pasivo de complecti, que significa enlazar, se aproxime mejor a su significado. Un sistema complejo presenta propiedades que no tienen sus componentes. Edgar Morin (pensador multidisciplinar, especialmente como sociólogo y epistemólogo, pionero en los estudios sobre complejidad, que ha publicado recientemente "La Vía", recomendable para meditar sobre la complejidad de la actual crisis estructural y la necesidad de actuar para salir de ella) lo define como una trama de constituyentes heterogéneos inseparablemente asociados, que presenta la paradoja de lo uno y lo múltiple. Para él existen tres principios que ayudan a definir la complejidad:

1. El principio dialógico, que asocia dos términos a la vez complementarios y antagonistas, lo cual permite mantener la dualidad en el seno de la unidad.

Vuelvo a recordar a María Zambrano en su análisis del surrealismo como confesión, donde cita a André Bretón, quien declara en su segundo manifiesto que "Todo lleva a creer que existe un cierto punto donde la vida y la muerte, lo real y lo imaginario, lo comunicable y lo incomunicable, lo alto y lo bajo cesan de ser percibidos contradictoriamente. Y es vano que se busque a la actividad surrealista otro móvil que la esperanza de encontrar ese punto". Continua María Zambrano su análisis haciendo mención de esa unidad sugerida por Bretón: "Se trata de una unidad a la par humana y productora de obra de arte. Sin duda es lo que se quiere manifestar con esos gritos esporádicos de la vuelta a un arte humano. La humanidad del arte no puede ser otra cosa que la unidad del origen, en ese centro interior y último; el que la creación que la obra de arte nos presenta haya brotado de ese íntimo centro activo, de esa unidad viva y actuante".

2. El principio de recursividad organizacional, de modo que el efecto retroactúa sobre la causa.

Quien conozca el trabajo de Eliseo Borrás, sabe lo querida que le era la recursividad, llave para explicar la complejidad, tanto la fractal como la del origen de la vida.

3. El principio hologramático, que busca el todo en las partes y viceversa.

Evocando la propiedad de autosimilitud de los objetos fractales que, según este principio, se revelan como modelos más adecuados a la complejidad del mundo natural que la linealidad de la geometría euclídea, donde "complejo no implica siempre complicado".

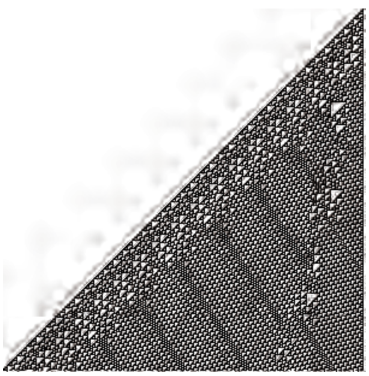
El juego de la vida de Conway, demuestra que sistemas de reglas muy simples pueden producir "propiedades emergentes" con un alto orden de complejidad, que es mucho más que la suma de sus partes. El caos aparece de nuevo.

En realidad, el Juego de la Vida es un caso particular de autómata celular. Los autómatas celulares fueron creados por John Von Newman y absorbieron totalmente la atención del controvertido Stephen Wolfram, el creador de Wolfram Research, empresa productora del programa MATHEMATICA.

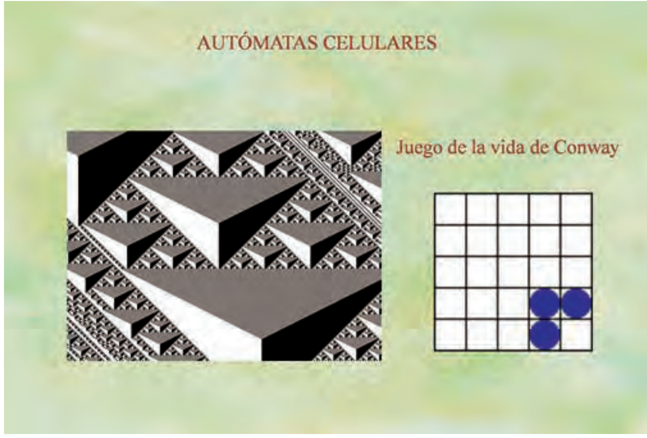
En un principio, Wolfram estaba interesado en la física de partículas y en la cosmología, más concretamente en la evolución desde el Big Bang hasta las estructuras galácticas. Aunque, en realidad, lo que le interesaba no era explicar un fenómeno complejo, sino la complejidad misma.

Se dio cuenta de que, para realizar los cálculos que exigía su investigación, necesitaba un procesador algebraico. El SMP fue el primero de ellos, considerado como la versión cero de MATHEMATICA.

Los autómatas celulares tenían el arte de crear complejas estructuras a partir de sencillas condiciones iniciales, eso también era interesante para investigar la evolución de las primeras galaxias. Obtuvo otras configurciones que le llevaron a pensar y crear lo que él llamó primeras obras de arte generadas por ordenador. Una sencilla configuración inicial podía generar, por ejemplo, un triángulo de Sierpinsky:



Pronto descubrió interesantes paralelismos entre las estructuras que generaban sus autómatas celulares y algunos patrones de la naturaleza: copos de nieve, cristales, meandros de ríos, diseños sobre conchas marinas y pieles de serpientes, y otras estructuras naturales.

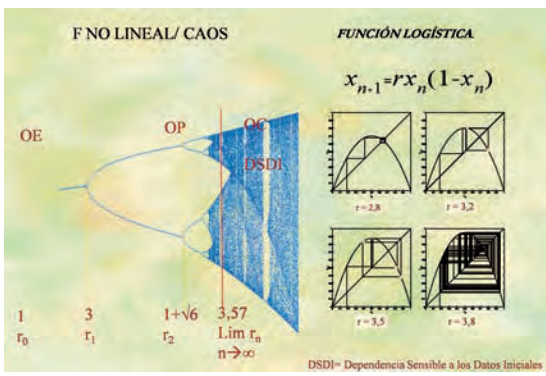



Wolfram estaba convencido de que los autómatas celulares eran la clave no sólo de la materia, sino también de la mente y desde ese convencimiento se propuso crear ordenadores basados en el procesamiento en paralelo, a partir de autómatas.

Nadie se sorprenderá hoy de ese calificativo "caótico" referido al sistema financiero, pero éste no es más que uno, aunque muy peligroso para la mayoría y más rentable para la minoría que controla sus variables, uno, digo, entre la pléyade de sistemas dinámicos que la ciencia estudia en la actualidad.

En este sentido, Eliseo comenta la influencia que el descubrimiento y estudio de estos sistemas ha ejercido sobre la investigación científica:

> El descubrimiento del caos ha creado un nuevo paradigma en la construcción de los modelos científicos. Por una parte, establece nuevos límites fundamentales a la capacidad de avanzar predicciones. Pero, por otra, el determinismo inherente en el caos muestra que muchos fenómenos aleatorios son más predecibles que lo que se había pensado



La naturaleza puede usar el caos de manera constructiva. A través de la amplificación de pequeñas fluctuaciones puede facilitar a los sistemas naturales el acceso a lo nuevo.

El mismo proceso del progreso intelectual se basa en la inyección de nuevas ideas y en nuevos modos de conectar las viejas. Bajo la creatividad innata podría haber un proceso caótico subyacente que amplifica selectivamente pequeñas fluctuaciones y las moldea en estados mentales coherentes y macroscópicos que se experimentan como pensamientos.

> ...en la frontera entre el orden y el caos, allí donde las fluctuaciones son importantes focos de creación. El universo se construye a sí mismo mediante la acción complementaria de la selección natural y la autoorganización, con aumento de la diversidad y de la complejidad.
>
> Sin caos, no hay sorpresa, no hay información. El caos es creativo. Somos criaturas del caos.

Como dice un personaje, inspirado en Eliseo, en la novela "La llave que te di" de su amigo Agustín Santos, "somos una fluctuación de la nada".

Una fluctuación que crea pensamiento mediante fluctuaciones entre el caos de las ideas previas y el orden que surge tras la chispa creativa, tras el ¡eureka!, pero, a pesar de que complejo no implica siempre complicado, existe gran resistencia al esfuerzo que supone el pensamiento matemático, hasta tal punto que, a pesar de lo que dice J.A. Paulos "Usted puede elegir entre tener o no ciertas nociones numéricas pero, si no las tiene, será más manipulable", es frecuente que ocurra lo que dice Quirós: "En un restaurante a nadie le preocupa decir 'haz la cuenta'; pero nos costaría mucho pedir que nos leyeran el menú".

Recientemente, en referencia a estos asuntos, comentaba el profesor de Historia de la Filosofía y académico Emilio Lledó, en El País, que las matemáticas son como una luz para alumbrar un mundo de manipulación informativa. "Esta ciencia es una lucha constante con la verdad porque en ella, en su exactitud, no caben las ideas mentirosas". Lledó recuerda su etimología: del griego mathema, aprender. Y no sólo aprender, sino experimentar. Y no sólo experimentar, sino deducir. Y no sólo deducir, sino demostrar. Y no sólo demostrar, sino estar en contacto con lo verdadero. "Y todo esto", lamenta, "no puede estar muy de moda en un universo que tiende a la falsedad". Un mundo que o no piensa o piensa para manipular.

Reivindicar la razón no implica olvidar el corazón claro, pero tenerle en cuenta a él, no debe llevarnos a olvidar la importancia que ella tiene, por eso insistimos sobre los peligros del anumerismo.

La excusa habitual para justificar el anumerismo que infecta a la sociedad sin distinción de razas, credos, género, clase social o nivel cultural es que las matemáticas son muy complejas, donde subyace la confusión aludida por Eliseo entre los términos complejo y complicado.

A la lucha contra los efectos perniciosos del anumerismo dedica la Real Sociedad Española de Matemáticas su centenario en este 2011 para mostrar que las verdades matemáticas nos pueden enamorar, pues son divertidas, bellas, complejas y no siempre complicadas.

## Soluciones a los problemas del número anterior

En el número anterior, previendo que el actual sería el último, no propuse problemas, pero, para no romper la estructura de los capítulos anteriores, comentaré los que han ido surgiendo en la trama del texto que acabáis de leer y que apareció en el *Suma* 66, con el que me despido agradeciendo la atención que hayáis podido dedicar a esta sección, elaborada con la ilusión y la esperanza que caracteriza a las gentes de nuestra profesión, ilusión y esperanza sin las que la profesión perecería sin remedio.

**El juego de la vida (autómatas celulares)**

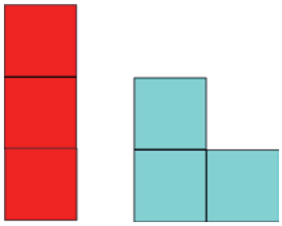
Eliseo Borrás presenta el juego del siguiente modo:

> *Fue inventado en 1970 por el matemático inglés John Conway, es uno de los autómatas celulares más famosos. Las reglas de nacimiento y muerte de cada célula de una retícula cuadrada son sencillas: Cada célula (cuadradito) de la retícula está rodeado (vecinas) de ocho células. Cada célula puede estar viva o muerta. Una célula viva permanece viva si sólo tiene como vecinas 2 o 3 células vivas, en otro caso muere de soledad o de superpoblación. Una célula muerta nace cuando está rodeada exactamente por tres células vivas.*
>
> *El comportamiento de estos autómatas es increíblemente complejo, a pesar de la sencillez de las reglas de funcionamiento. No hay forma de predecir de antemano, y de forma general, cuando una configuración inicial de células será estable, morirá, será oscilante.*

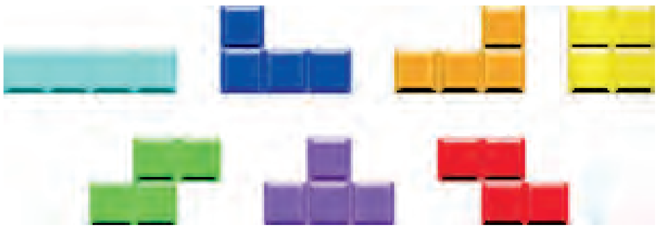
Seguramente, para obtener una semilla que produzca una configuración estable tendremos que dedicar bastante tiempo a pensar con papel cuadriculado y lápiz al lado. Jugar sólo a cambiar la semilla y observar los distintos resultados puede convertirse en un pasatiempo trivial si no se utiliza esta información como retroalimentación de un trabajo más reflexivo.

Desde luego, es imprescindible ese trabajo con papel y lápiz, para comprender el proceso que esas sencillas reglas dirigen.

En una clase hipotética, los alumnos de Eliseo comenzarían por estudiar los casos más sencillos y recorrer, en cada nivel, todos los casos, así, una semilla de un sólo cuadro, morirá de insoportable soledad, lo mismo les ocurrirá a los dominós. Los triminós empiezan a dar un poco más de juego, nos ofrecen ejemplos de configuraciones oscilantes –el bastón oscila entre su posición vertical y la horizontal– y la ele se estabiliza en un bloque.

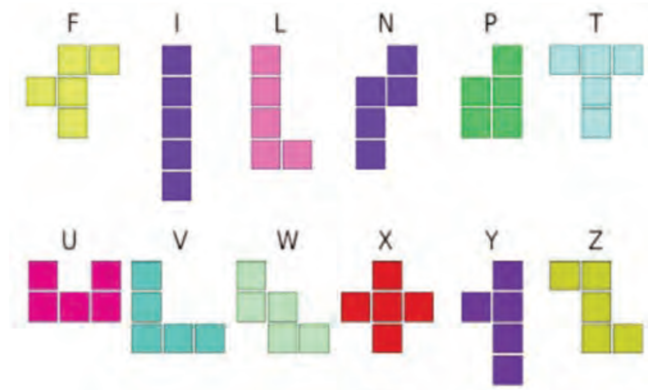


Los tetraminós permiten descubrir la dificultad de aplicación de las reglas si no se comprende que los nacimientos y las muertes son simultáneos y sólo dependen de la configuración presente.



Entre los pentaminós, el pentaminó F, también denominado *r* por su similitud con dicha letra del alfabeto, ofrece ya una situación más interesante.

Con los poliminós se pueden realizar actividades paralelas que ayuden a modular los ritmos de aprendizaje del aula: puzzles, tangrams, tetrix, cubo soma, desarrollos del cubo u otros.




Sin ánimo de resolver las arduas cuestiones arriba indicadas, ni mucho menos resolver lo irresoluble anunciado por Eliseo, podemos seguir el estudio sistemático del juego de la vida a partir de los poliminós y aprovechar otras muchas de sus peculiaridades lúdico-didácticas.

Luego, una vez realizado el trabajo inicial de comprensión, podemos ayudarnos, para agilizar la tarea, con algún programa creado a propósito.

En los primeros cursos de programación de los niveles universitarios, es un clásico crear el programa del juego de la vida. Ayuda a aprender programación y a conocer las reglas del juego muy profundamente. Es otra aplicación didáctica de este autómata celular, pero no necesariamente implica esa reflexión que antes apuntábamos.

Hoy, existen en línea multitud de páginas en las que podemos apoyarnos para ensayar distintas semillas y reflexionar sobre la evolución de las configuraciones que ella va generando. Por ejemplo: http://demos.sftrabbit.co.uk/game-of-life/ nos permite conocer el estado final del pentaminó *r* en pocos segundos, a pesar de que se trata de un Matusalen que requiere 1103 generaciones para alcanzar una configuración oscilante, con sus 6 deslizadores, un barco, una nave, una barra de pan, cuatro colmenas, ocho bloques y 4 triminós que alternan su configuración entre las posiciones horizontal y vertical, responsables de la oscilación de la configuración total.

**Recursividad**

El concepto de recursividad fue, como ya he dicho, muy querido por Eliseo y muy utilizado. No es extraño, pues, que disfrutara durante horas programando en lenguaje LOGO, paradigma de los lenguajes capaces de recursividad, creado por el Seymour Papert, colega de Piaget.

Su virtuosismo programando en este lenguaje, su dominio de la recursividad, produjeron reproducciones gráficas casi perfectas de las fotografías que Pilar Moreno extrae de la naturaleza. Ved para comprobarlo las siguientes ilustraciones del aromático hinojo:

Pero, éste no es un concepto fácil ni carente de polémica. Desde las bifurcaciones del prehistórico BASIC, tan naturales ellas, pero peligrosamente productoras de ilegibles códigos espagueti; pasando por el sesudo FORTRAN, lenguaje de elección del mundo científico, incapaz de sentencias recursivas, condenado en muchas ocasiones a complicados bucles y sentencias de control; los lenguajes de programación estructurados vinieron a "limpiar" esos caóticos códigos, pero, la recursividad del LOGO seguía siendo su baza fundamental y la falta de estructuras de control, su talón de Aquiles. Hoy unos y otros se han aproximado y entre los usuarios se mezclan conceptos como repetición, inducción, iteración, recursividad, bifurcación. Reconocida la potencia de la recursividad, la polémica se centra en distinguir la recursividad de los restantes conceptos y en determinar cuándo usar la recursividad de modo adecuado.

Existen dos bellos problemas, cuya resolución algorítmica ilumina los dos aspectos de la polémica: las torres de Hanoi y la sucesión de Fibonacci. El primero muestra que, en su caso, la estrategia adecuada es el uso de la recursividad, el segundo ilustra que la inducción puede ser mejor solución que la recursividad en otros casos.

Existen multitud de páginas en la red que resuelven estos problemas, pero es recomendable, como siempre, resolver el algoritmo con papel y lápiz, antes de jugar y, tras el juego, muy conveniente intentar elaborar el programa.

La construcción de árboles es el caso paradigmático de la recursividad:

*versión informal (Eliseo Borrás)*

```
   para árbol3d (l, nivel)
si nivel=0: alto
dibuja en perspectiva lo que sigue
adelante l
cabecea hacia abajo 45°
árbol3d (l/2, nivel-1)
cabecea hacia arriba 45°
balancea a la derecha 120°
cabecea hacia abajo 45°
árbol3d (l/2, nivel-1)
cabecea hacia arriba 45°
balancea a la derecha 120°
cabecea hacia abajo 45°
árbol3d (l/2, nivel-1)
cabecea hacia arriba 45°
balancea a la derecha 120°
retrocede l
fin
```

En un sentido poético, podemos asociar la recursividad a la teoría del eterno retorno, del eterno retorno del recuerdo de Eliseo, que en cada uno de sus bucles, en cada una de sus vueltas, nos refresca su capacidad creativa y nos alegra con la quimera de que algo de aquella creatividad podrá contagiarnos.

*Volverás a mi huerto y a mi higuera:*
*por los altos andamios de las flores*
*pajareará tu alma colmenera*
*de angelicales ceras y labores.*
*Que a las aladas almas de las rosas*
*del almendro de nata te requiero,*
*que tenemos que hablar de muchas cosas,*
*compañero del alma, compañero.*

Miguel Hernandez, "Elejía a Ramón Sijé"

Este artículo ha sido realizado con la colaboración de Pilar Moreno, Vicente Calixte Juan, Magda Morata y Juan Carlos Orero.

***EL HILO DE ARIADNA*** ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borrás Veses, Eliseo (2008): *Lo uno y lo múltiple. El Mediterráneo y la cultura del diálogo*. P.I.E. Peter Lang y UJI, Castellón.

Zambrano, María (1988): *La confesión: Género literario*. Mondadori 2ª ed., Madrid.

Allen Paulos, John (1988): *El hombre anumérico*. Tusquets S.A., Barcelona

Marín, Bernardo (2011): El País del 6 de abril.

Este artículo fue solicitado por Suma en junio de 2011 y aceptado en octubre de 2011 para su publicación.

suma+ 68
Noviembre 2011, pp.131-136

# Nos vemos en Palma 2013


Y es que las JAEM nunca se acaban…

Cuando, después de haber clausurado las 15 JAEM, estábamos tomando la copa de despedida en la capilla de la Laboral, se arremolinaba en nuestra mente un torbellino vertiginoso de sensaciones, de sentimientos…y de agradecimiento.

Sí, de agradecimiento a todos los compañeros que estaban allí con nosotros, dando sentido a los esfuerzos, el trabajo, la dedicación, el entusiasmo y la ilusión que durante tanto tiempo habían ocupado gran parte de nuestro tiempo libre.

Y de agradecimiento a nuestras familias, que habían aceptado la locura quijotesca en la que nos habíamos embarcado hacía ya dos años, cuando en Girona aceptamos el encargo de organizar las JAEM en Gijón.

Y es que en una trayectoria de dos años, habíamos tenido momentos tanto para pensar que todo iba a salir como deseábamos, como para flaquear y temer que "no íbamos a ser capaces". Pero lo fuimos.

¿Ya se habían acabado las 15 JAEM? No: las JAEM nunca se acaban…

Y no se acaban porque los contactos hechos, las carreras por los pasillos, las comidas en aquel espectacular espacio, los chistes tomando el café, los debates, el cansancio, las risas, las cenas por las terrazas de la ciudad y hasta algún que otro enfado rápidamente desaparecido, todo eso permanece en todos nosotros. Las JAEM nunca se acaban.

Nos vemos en Palma 2013.

*Comité Local*: **Oscar Corte Sánchez, Pilar Fernández Tejeiro, José María García Carpintero, José Ignacio Miguel Díaz , Begoña Navas Canales, Luis Vaamonde Portas, Eduardo Zurbano Fernández**

**Juan Antonio Trevejo Alonso**
*Presidente de SADEM*

**Belarmino Corte Ramos**
*Coordinador general de las XV JAEM*

Las 15 JAEM han supuesto para la Sociedad Asturiana de Educación Matemática "Agustín de Pedrayes", una Sociedad de las más pequeñitas de la Federación, un gran desafío. Desde el momento en que, en Girona y en el marco de las XIV JAEM, habíamos aceptado el encargo de la FESPM para la organización de las siguientes, procedimos a completar el incipiente equipo que hasta entonces éramos, un equipo que pasaría desde las cinco personas iniciales hasta las nueve que acabaríamos siendo en el comité Organizador Local, y hasta las 53 que acabamos siendo, al incorporar a los profesores colaboradores y a los alumnos voluntarios.

Y simultáneamente se constituyó también el Comité de Programa, que realizaría una labor impagable: suya fue la organización estructural de las 15 JAEM en siete bloques temáticos, suya fue la selección de los ponentes, tanto para las Conferencias Plenarias como para las Ponencias de los Núcleos Temáticos, y suyo fue también el filtrado de los trabajos que finalmente fueron admitidos para su presentación en las distintas sesiones del congreso. Nuestro reconocimiento, por tanto, a esos "siete magníficos".

Y llegó el 3 de Julio…

Inauguramos las 15 JAEM en el teatro de Laboral Ciudad de la Cultura, sede del congreso. En este impresionante marco, 800 personas asistieron al acto de apertura de las jornadas. Posteriormente tuvo lugar la primera sesión plenaria a cargo de José Luis Álvarez y Rafael Losada. En su divertida intervención, titulada "Está pasando, lo estás haciendo" nos presentaron con ironía y buen humor el proyecto Gauss, un conjunto de aplicaciones matemáticas basadas en Geogebra. Una vez terminada la conferencia actuó el coro Luis Quirós y tras un cocktail en la capilla, se clausuró la jornada inaugural.


Acto de inauguración de las 15 JAEM

Del lunes 4 de julio podemos destacar la conferencia plenaria a cargo de Encarnación Reyes, quien nos deleitó con su presentación sobre los aspectos matemáticos de la arquitectura y las realizaciones más espectaculares de los arquitectos más renombrados.

Conferencia plenaria a cargo de Encarnación Reyes


Conferencia inaugural de las 15 JAEM

El martes se alternaron un alto contenido de actividades por la mañana con las visitas de carácter cultural de la tarde. La sesión plenaria en el teatro corrió a cargo de Miquel Albertí, que nos transportó a Sulawesi, para sumergirnos en las formas geométricas del arte Toraja, lo que dio lugar a una interesante reflexión sobre las matemáticas no aprendidas en la escuela y las diferencias culturales: la Etnomatemática y todas sus implicaciones.

A continuación se procedió a la entrega del premio Gonzalo Sánchez Vázquez, que en esta ocasión recayó en Fernando Alonso Molina, por su dilatada trayectoria profesional dedicada a las matemáticas. Con un emotivo discurso, el galardonado recogió el premio entre el aplauso de todos los presentes. Y por la noche, llegó la hora de la cena de gala de las Jornadas, en el recinto de la Feria de Muestras de Gijón.

Conferencia de Miquel Alberti

Fernando Alonso Molina, VII premio *Gonzalo Sánchez Vázquez*

Miembros del grupo Alquerque

El último día de las 15 JAEM empezamos un poco más tarde, para compensar los excesos de la noche anterior. La mañana estuvo dedicada a talleres y comunicaciones, que permitieron a todos los participantes alternar de aula en aula para, después de la comida, asistir a algunas comunicaciones más antes de la Conferencia de Clausura, en la que los integrantes del Grupo Alquerque de Sevilla nos deleitaron con sus interrogantes acerca de la relación entre las matemáticas y la cultura. Unos interrogantes llenos de una buena dosis de humor, y un broche perfecto para las que ya se conocen como las JAEM de Gijón.

## Actividades en las JAEM

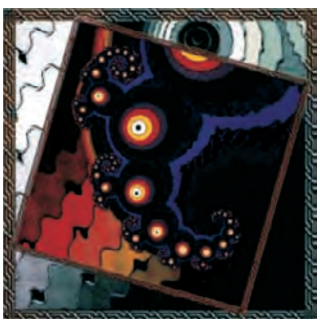
Si el hilo conductor de las JAEM, cuyo lema era “Matemáticas, base de nuestra cultura”, fueron las conferencias plenarias, el complemento perfecto de unas JAEM siempre son el resto de actividades desarrolladas.

Espacios de debate, muestra de clips de aula, pósteres, presentación de proyectos y de casas comerciales y las exposiciones promovidas por el Comité organizador local.

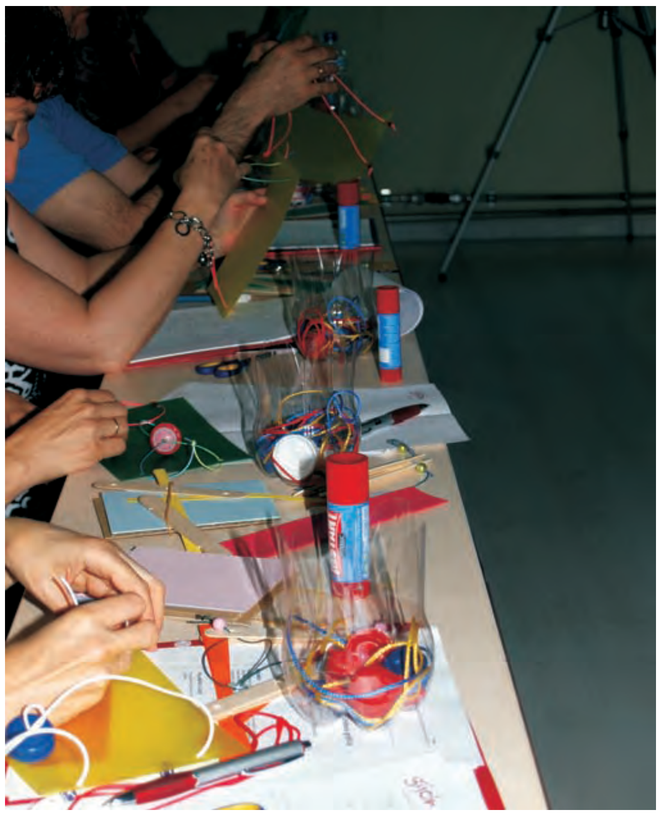
Imaginary, en colaboración con la Real Sociedad Matemática Española (RSME), abierta durante los meses de julio y agosto.

**mathsLAB**, taller de matemáticas, arte, tecnología y creatividad que acoge Laboral Centro de Arte y Creación Industrial. Este proyecto, en activo durante las JAEM, se ha convertido desde su inauguración, en abril de 2010, en un referente para todos los IES de Asturias y varios centros de E. Primaria. Casi 10.000 alumnos y alumnas y más de 200 profesores y profesoras han contribuido a su éxito.

Arte fractal, abierta durante la celebración de las JAEM.



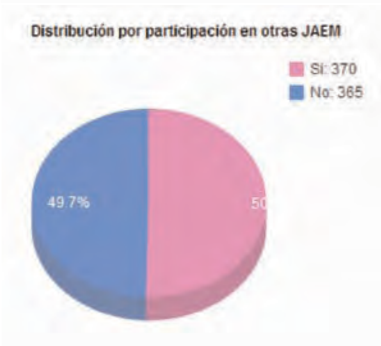
Zoco y exposiciones de los participantes



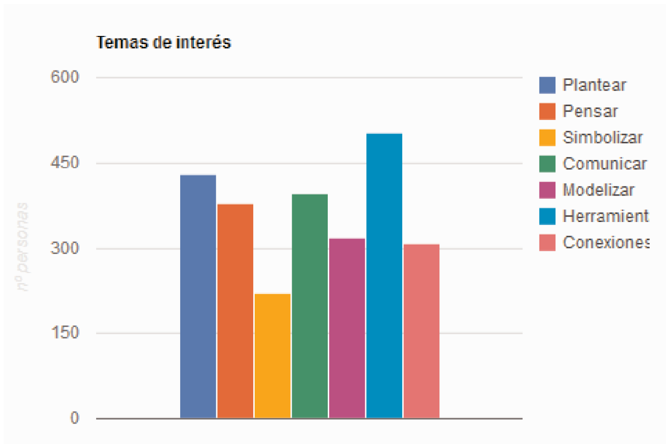
Talleres de variada temática

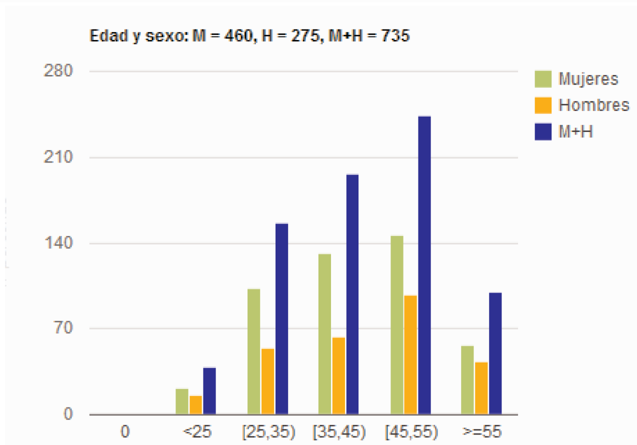
## Estadísticas de las 15 JAEM





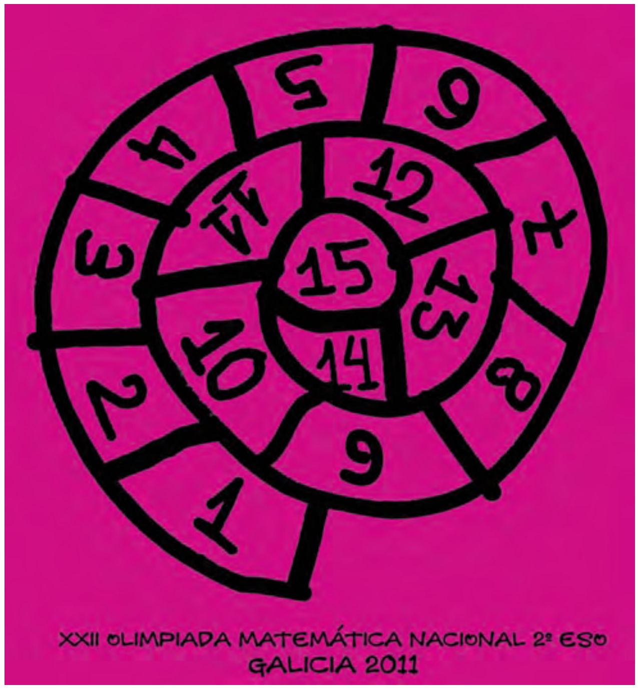



¡Nos vemos en Palma 2013!

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 137-140

# XXII Olimpiada Matemática Nacional para alumnado de segundo de ESO. Galicia, del 26 al 30 de junio de 2011




Del 26 al 30 de junio de 2011 se celebró en Vigo la XXII Olimpiada Matemática Nacional para alumnado de 2º de ESO, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), y organizada por la Asociación Galega de profesores de educación matemática, AGAPEMA. En ella han participado 61 alumnos y alumnas acompañados de 21 profesores y profesoras de las diferentes Sociedades de Matemáticas, junto con los invitados de Euskadi, Andorra y los Institutos Españoles de Marruecos, además del equipo local organizador formador por 8 profesores y profesoras.

Recogemos el testigo de nuestros compañeros de Mallorca, así como también esta crisis que nos acompaña desde hace tres años y que cada vez es más profunda. No nos ha sido nada fácil encontrar ayudas económicas o subvenciones para la realización de esta Olimpiada. A pesar de todas estas contrariedades, creemos que la Olimpiada cumplió su fin, pues los 61 jóvenes que estuvieron en Vigo establecieron unos lazos de amistad y compañerismo que permanecerá en su recuerdo a pesar del paso del tiempo. Algo que creemos fue común puesto que, en general, todos los asistentes quedaron encantados de la organización y el clima de cordialidad que reinó durante este tiempo. Así pues, la despedida fue triste aunque siempre nos queda el recuerdo de la alegría vivida en estos días.

## La Olimpiada

El domingo 26 de junio, ya de mañana, comenzó con la llegada de los participantes al Centro Residencial Docente, algo que se prolongó hasta la noche.

**Ascensión Fernandez Vicente**
*Coordinadora del equipo organizador de la XXII Olimpiada Matemática Nacional*

Procedimos, a medida que llegaban los participantes, a la distribución de habitaciones y las presentaciones; conocerse era primordial, pues todos eran extraños entre ellos.

Después de la cena, se presentó el programa de actividades; se entregaron las credenciales y se explicaron las bases del concurso de fotografía. Para finalizar el día, presenciamos la actuación del mago-clown Popín, que nos hizo pasar una hora y media muy divertida.

El lunes 27 de junio, después del desayuno, nos encaminamos al Salón de actos de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Vigo, donde se celebró el acto oficial de inauguración de la Olimpiada a cargo del vicerrector de la Universidad de Vigo.

A continuación, tuvo lugar la prueba individual, que consistió en la resolución de cinco problemas con una duración de dos horas. Después de una visita a los edificios más emblemáticos de la Universidad, paramos a comer en el restaurante de la Facultad, gentileza de la Universidad de Vigo.

Por la tarde, disfrutamos de una visita panorámica por la ciudad de Vigo: dando un paseo por la playa de Samil, recorriendo los astilleros, la fabrica de Citröen, el puerto de embarque, el puerto pesquero y quedando en la Plaza del Berbés para dar comienzo la prueba por equipos en el casco viejo y el puerto deportivo de Vigo, emocionante prueba de dos horas de duración en la que los participantes estuvieron muy participativos y causaron la admiración de los allí presentes.

Para terminar el día, asistimos a la actuación, después de la cena, del Cuentacuentos: Guti, que dejó maravillados a todos.

El martes 28 de junio por la mañana, partimos hacia Santiago de Compostela. La visita turística comenzó a media mañana. Guiados por Carmen Pueyo, hicimos un alto en la Plaza del Obradoiro, en la cual asistimos a una breve información sobre su historia y los cuatro edificios que la forman: Catedral, Hostal, Rectorado y Ayuntamiento. Luego, pasando por debajo del arco del Palacio Arzobispal, llegamos a la Plaza de la Azabachería donde hicimos otra parada para admirar la correspondiente fachada de la Catedral y el monasterio de san Martín Pinario. Continuamos por la plaza de la Quintana, en la que se encuentra la Puerta Santa que da acceso a los peregrinos en el Año Santo y terminamos en la Plaza de las Platerías.

Por la tarde, realizamos un paseo matemático guiado por tres compañeros de Agapema: Pilar, Carmen y Josecho. El paseo comenzó en la triple escalera de caracol de Santo Domingo de Bonaval. Continuó en el parque del mismo nombre, donde descubrimos figuras geométricas y encontramos el número $\pi$ para, seguidamente, caminar hasta la fachada de San Martín Pinario en la que redibujaron una elipse que da acceso a la iglesia y, posteriormente, llegar a la plaza de la Azabachería, en la que los alumnos hicieron una actividad para comprender la utilidad de las coordenadas cartesianas. La ruta se continuó hasta la plaza de la Quintana, en la que calculamos

cuando iban a ser los próximos Años Santos y comprobamos cómo en el empedrado de la plaza estaba el cuadrado de un binomio. La actividad final nos llevó a la alameda, en la que un banco en forma semielíptica les sirvió a los alumnos para hablarse de lejos pero oírse como si estuvieran cerca.

Después de la cena, tuvimos la sesión de resolución de problemas y pronto a dormir, porque mañana nos esperaba un día muy largo.

Tras desembarcar en Cíes, nos encaminamos en una ruta de 3 kilómetros para subir al punto más alto, un faro, desde el que se divisa toda la ría de Vigo y los acantilados, en los que hay una reserva de gaviotas y cormoranes. Después, bajamos y comimos en los pinares junto a la playa de Rodas, considerada una de las mejores playas del mundo. En ella pasamos la tarde, disfrutando de sus aguas cristalinas de color esmeralda y de su fina y blanca arena.

El miércoles 29 de junio ya llevábamos tres días y, con agrado, descubrimos que las amistades comenzaban a florecer. El día se presentaba largo pero interesante. A las siete de la mañana, después del desayuno, nos acercamos al puerto de Vigo, para visitar la lonja de altura y bajura. Allí descubrieron la gran variedad de pescado que se comercializa en Vigo y la enorme cantidad de gente que estaba trabajando desde muy temprano y asistieron a la subasta del pescado, viendo como, inmediatamente después, éste se introducía en cajas y se transportaba a toda España. Después, realizamos una travesía en barco por la ría de Vigo y nos acercamos al Parque Natural de las Islas Cíes, donde pasamos el día.

Regresamos a Vigo, después de la cena. Visualizamos un video de todos esos días que habíamos pasado juntos, en el que pudimos ver la evolución de la confraternidad desde el primer día que no se conocían hasta el actual en el que los jóvenes ya sentían una profunda amistad. Las imágenes nos permiten guardar para siempre esos momentos vividos tan intensamente. El día acabó con el reparto de los regalos que diversas empresas habían gentilmente donado.

El jueves 30 de junio comenzó con el desayuno, recogida de habitaciones y consciencia de que la Olimpiada tocaba a su fin. Sólo quedaban las menciones especiales, aunque todos sabía-

mos que el verdadero premio había sido estar en Vigo confraternizando. Nos encaminamos al Pazo Quiñones de León en el Parque de Castrelos de Vigo, donde se hizo entrega de un diploma y una memoria usb a todos los participantes, con todos los problemas, fotos y el video del día anterior. También se procedió a las menciones de honor al equipo ganador de la pruebas de fotografía, al equipo ganador de la prueba por equipos y cuatro menciones a la prueba individual. El acto fue presidido por el Excelentísimo Sr. Alcalde de Vigo.

Tomó la palabra el coordinador de la Olimpiada agradeciendo a todos los que habían hecho posible que se pudiese celebrar este proyecto. Seguidamente hicieron uso de la palabra alumnos y profesores participantes en la Olimpiada, destacando sus sensaciones y experiencias vividas esos días. Después tomaron la palabra el Secretario de la Federación y el Presidente de AGAPEMA para, finalmente, clausurar el acto el Alcalde de Vigo. Seguidamente, se hizo entrega de los diplomas correspondientes y se dió el relevo a Ana Fernández de Betoño Saenz de Olamendi que se encargará de la organización en Euskadi de la XXIII Olimpiada. En el aperitivo comenzaron las tristes despedidas…

**Premios en la XXII Olimpiada Matemática Nacional**

**Concurso de fotografía**
Mención de honor como mejor equipo clasificado al formado por:

Crsitian Lavado Rosales de la Ciudad autónoma de Melilla
Carlos Martín Sáenz de La Rioja
Jesús Molina Rodríguez de Vera de la Región de Murcia
Ibai Pérez Unanua de la Comunidad Floral de Navarra
Ana Sánchez Rivero de Extremadura
Marina Soler Lacruz de la Comunitat Valenciana

**Prueba por equipos**
Mención de honor como mejor equipo clasificado al formado por:

Juan Manuel Cano Vila de Galicia
Mario Cordón Martínez de Quel de La Rioja
Eduardo Cubillo Lechuga de Andalucía
María Elena González Herrero de Castilla y León
Julia Guerrero Viu de Aragón
Alejandro Martos Berruezo de la Comunitat Valenciana
Pablo Manuel Valle Concepción de Canarias

**Prueba individual**
Mención de honor a los cuatro mejores, ordenados alfabéticamente:

Luis Crespo Ruiz de Cantabria
Alex Gállego Casals de Catalunya
Alejandro Martos Berruezo de la Comunitat Valenciana
José Antonio Moya Ocaña de Andalucía ■

# Normas de publicación

1.- Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de SUMA(articulos@revistasuma.es) o su dirección postal:

Revista SUMA, Apartado de Correos 498, 46900 Torrent.

2.- Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CDRom, DVDRom o Pen drive).

3.- Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato MS Word o rtf –tipo de letra Times New Roman y tamaño 12– adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:

i. El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

Y a efectos de comunicación:

ii. El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.

4.- Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por “Autor, 2009” o “Autor et al., 2009”. En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.

5.- Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…

6.- Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

Ejemplo: *Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.*

7.- El texto estará en una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25000 caracteres sin incluir espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.

8.- Es imprescindible que los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes sean guardados en formato **TIF, EPS** o **JPEG**, a una resolución de 300 ppp. y en color original. Éstos se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

9.- Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de equaciones, fuera del texto y si no fuera posible se incorporará como imagen.

10.-La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, siguiendo las normas APA.

Ejemplos

Libros:

Apellido del autor, coma, inicial/es del nombre, punto, fecha entre paréntesis, punto, título en letra cursiva, punto, lugar de edición, dos puntos, editorial, punto.

Filloy, E., Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Capítulos en libros

Cuando se cita un capítulo de un libro, el cual es una compilación (reading), se cita en primer lugar el autor del capítulo y el título del mismo, seguidamente el compilador (Comp.), editor (Ed.) o director (Dir.), coordinador (Coord.), título (las páginas entre paréntesis). Lugar de edición: y editorial, igual que en la referencia de cualquier libro.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Artículos en revistas

Lo que va en letra cursiva, es el nombre de la revista. Se debe especificar el volumen de la revista y las páginas que ocupa el artículo separadas por un guión. Se especificará el volumen y el número de la revista, cuando cada número comienza por la página uno.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Para consultar más ejemplos de citas bibliográficas, visitar:
http://www.revistasuma.es

11.-Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12.-Si durante el texto se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión et al. (y otros). Por ejemplo, "Bartolomé et al. (1982)", "Gelpi et al. (1987)". Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.

13.-Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.

14.-Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

15.-Después de haber recibido el trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.

16.-Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, de acuerdo con las normas, criterios y recomendaciones propios de la revista SUMA.

17.-Si los dos informes son positivos el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos se rechazará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o su rechazo.

18.-Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como –en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

19.-No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo. ■

Propuesta de categorias para las palabras clave

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Teoría<br>Innovación didáctica<br>Divulgación<br>Investigación didáctica<br>Experiencia de aula<br>... | Álgebra<br>Análisis<br>Aritmética<br>Estadística<br>Probabilidad<br>Geometría<br>Resolución de problemas.<br>Topología<br>... | Números (Naturales Enteros, ...).<br>Resolución de problemas de ...,<br>Ecuaciones,<br>Figuras en el plano, en el espacio<br>Funciones<br>Modelización<br>Lógica<br>Errores, dificultades<br>... | Libros de texto<br>Historia<br>Cognición<br>Metacognición<br>Razonamiento<br>Demostración<br>Legislación y reformas(LOGSE, LOU, LOE ...)<br>Actitudes<br>Destrezas<br>Procesos<br>Conceptos<br>Enseñanza, aprendizaje, educación<br>... | Infantil<br>Primaria<br>Secundaria<br>Bachillerato<br>Universidad<br>... |

suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 143



# El último clip... por ahora

Queridas/os lectoras/es de *Suma*:

Durante muchos años he colaborado en el Poliedro de *Suma* con esta singular sección que siempre he denominado El Clip. Ha sido un placer y me gustaría haber contribuido a animar al profesorado de matemáticas a localizar presencias curiosas de las matemáticas en todos los apartados de nuestra vida cotidiana. Mirar el pasado tiene su interés pero sintonizar con el presente creo que es un gran recurso didáctico. Para hacer esto posible es suficiente mirar publicaciones, oír la radio, devorar programas de televisión, observar anuncios y reglamentos, visitar supermercados y tiendas de diseño, aprender recetas, etc. Al movernos por nuestro entorno más inmediato es posible ver usos geniales de números o geometría o bien descubrir usos perversos y miserables de fórmulas y datos.

A lo largo de esta sección fija nos hemos podido aproximar a hélices, sistemas duodecimales, escalas, escaleras, figuras varias, paraguas, números callejeros, taxis, bares, sex-shops, farmacias, edificios, normas de bomberos, medias, esperanzas, cuentas económicas, créditos, cervezas, productos light, terrenos, números especiales, rombos, calculadoras insólitas, cajas, aparcamientos, fórmulas inútiles y engañosas, mesas bien servidas, productos de belleza… Creo que cualquier lector puede, a partir de estos clips, salir a la caza de todos los clips que nuestro mundo nos ofrece. Cazar clips y compartirlos, proponer su búsqueda y entablar diálogos sobre los mismos. Personalmente seguiré recopilando todos los clips que me pasen por delante. Es una colección gratis e interesante. Los clips también son adictivos pero por ahora ninguna ley ha regulado ni su caza ni su consumo.

Pero la razón principal para cerrar esta sección fija reside en el deseo de que nuevos colaboradores tengan la oportunidad de aportar nuevas ideas y nuevos temas. *Suma*, a la que vi nacer, siempre se planteó la idea de hacer honor su nombre, que no era un imperativo para "hacer sumas" sino ser un lazo de colaboración entre profesores. Todos podemos contribuir y compartir entre nosotros experiencias e ideas.

Agradezco a los directores de *Suma* su amable invitación a que estos clips fueran posibles y a todas/os las/os lectoras/es su atención.

Desde los clips con amor, Claudi

**Para saber más**

Los clips de Suma 2003-2011

*EL CLIP* ■

**Claudi Alsina**
*Universitat Politècnica de Catalunya*
*elclip@revistasuma.es*

# Boletín de suscripción

| **Tarifas** | Suscripción anual | Número suelto | Monografía |
|---|---|---|---|
| Particulares | 25 € | 10 € | 15 € |
| Centros | 40 € | 15 € | 15 € |
| Europa | 50 € | 20 € | 15 € |
| Resto del mundo | 60 € | 22 € | 15 € |

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ____________

☐ N.os sueltos ____________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

---

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: ____ Oficina: ____ DC: __ Cuenta: __________

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ISSN 1130-488X
9 771130 488006 00068

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.