suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

67

Junio 2011

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
***Curvas de acero** - elepé*
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax:+*(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

67

Junio 2011

actividades de la FESPM

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+ 67
Junio 2011

Las matemáticas que enseñamos

Mucho se ha escrito al respecto de cuáles son las matemáticas que debemos enseñar para formar a los ciudadanos del siglo XXI. Todo el mundo coincide en pensar que igual que la realidad ha cambiado, también las necesidades de los ciudadanos han cambiado, y por tanto, los contenidos de matemáticas que deberíamos enseñar a nuestros alumnos tendrían que estar sujetos a cambios. Hay ciertas matemáticas que antes se enseñaban y que ahora no se necesitan. También hay ciertas matemáticas que antes no se podían enseñar y que ahora los medios tecnológicos permiten enseñar. Y por último, hay ciertas matemáticas que antes no existían y ahora es necesario enseñar para mejorar en la comprensión del mundo. Podemos recordar con cariño algunas clases de segundo curso de bachillerato, cuando alguna profesora nos enseñaba el método de cálculo del logaritmo de un número, cómo determinar su característica y su mantisa, y la necesaria interpolación a partir de las tablas logarítmicas para aproximar a los decimales necesarios. Esto hoy en día queda obsoleto ya que la necesidad del cálculo queda suplido por la calculadora. La tecnología nos permite obtener un resultado mucho más exacto y de manera más rápida y efectiva. Esto no quiere decir que no debemos enseñar el concepto de logaritmo y el papel de la función logarítmica, pero hoy en día no es necesario como herramienta para realizar ciertos cálculos.

Por otro lado, los profesores de matemáticas pecamos de proponer actividades y ejercicios a los estudiantes cuyos cálculos están lo suficientemente 'preparados' para que el resultado sea exacto o no añada dificultades al cálculo. Esto no favorece el contacto con la realidad, ya que ésta no es siempre exacta, y en los problemas reales suelen intervenir números cuyas expresiones decimales no son necesariamente enteras o con decimales finitos. Sin embargo, la tecnología hoy en día nos permite hacer los cálculos fácilmente sin necesidad de centrar nuestra atención en la dificultad de las operaciones o de los valores numéricos sino en el método de resolución.

Podemos hacer muchos cálculos en muy poco tiempo, manejar expresiones con muchas cifras decimales y por tanto enfrentarnos a problemas que antes no podíamos por las dificultades que suponían los largos y tediosos cálculos.

Pero el reto profesional que se nos plantea hoy en día no está centrado en los contenidos conceptuales o en el uso de la tecnología. Pensamos que no se ha avanzado suficiente en el método que favorece cómo se aprende. Siguen existiendo en nuestras aulas prácticas más centradas en el aprendizaje de algoritmos que en la comprensión de los mismos, en la transmisión de saberes más que en la estimulación por el descubrimiento, así como en la memorización de fórmulas y expresiones.

Sin embargo, las propuestas metodológicas actuales nos orientan a que centremos más nuestra atención en los procesos de aprendizaje de los contenidos. Cuando hablamos de procesos nos referimos a los mecanismos mentales que permiten enlazar el conocimiento que se tiene adquirido con el nuevo conocimiento, mediante el razonamiento. Esto debería implicar que se favoreciera entre los estudiantes la búsqueda de pautas y regularidades, el análisis exploratorio de los datos mediantes gráficas y esquemas, la posibilidad de enfrentarse a verdaderos problemas y no solamente a resolver ejercicios, la resolución de situaciones próximas a la realidad de los estudiantes lo menos artificiales posibles, etc. Actualmente existen los medios necesarios para llevar adelante propuestas de trabajo en cualquier etapa educativa que permita a los alumnos descubrir por ellos mismos el conocimiento matemático y aprender a aprender. Así, por ejemplo, podemos descubrir lo que ocurre cuando hacemos cálculos iterativos, o cómo utilizar ciertos materiales que sirven de modelo conceptual.

La legislación actual en vigor pide al profesorado que trabajamos dentro de etapas escolares obligatorias que dotemos a nuestros alumnos de la competencia matemática necesaria para ser ciudadanos del siglo XXI. Pero esta idea no debemos interpretarla solamente en términos de qué contenidos matemáticos se deben saber, sino también qué técnicas y métodos, propios de las matemáticas, deben dominar todos los ciudadanos. Y estas técnicas y métodos que conocemos como heurísticos y que se utilizan en los contextos de resolución de problemas, van ligados directamente a cómo se aprende, pues haciendo se aprende a hacer. ■


Estudio de la curvatura en coord. curvilíneas

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

suma+ 67
Junio 2011, pp. 7-20

Realidades de GeoGebra

El objetivo de este artículo es demostrar cómo podemos acercarnos al entendimiento de diversas realidades. El método básico consiste en proporcionar a los estudiantes escenarios de GeoGebra que les ayuden a descubrir gradualmente los contenidos matemáticos subyacentes. En la dimensión física, el sentido de la realidad es obvio; pero hay otra dimensión sobre la realidad ideal pero objetiva del razonamiento y la construcción de estructuras mentales. Además, hay una realidad subjetiva, de percepción estética del mundo. Profesores y estudiantes tienen que adaptarse a su realidad del aula.

Palabras Clave: GeoGebra, Modelos de la realidad, Secundaria, Aprendizaje y Educación.

Realities from GeoGebra

The goal for this article will be to demonstrate how to manage to understand several kinds of reality. The underlying method consists on providing students with GeoGebra situations that will help them gradually discover the mathematical issues involved. In the physical dimension, the meaning of reality is obvious; nevertheless, there is also another dimension concerning the ideal but objective reality of reasoning and the construction of mental structures. Furthermore, there is a subjective reality, concerning our aesthetical perception of the world. The teachers and students have to adapt to their classroom reality.

Key words: GeoGebra, Reality models, Secundary, Learning and Education.

Introducción

Todas las imágenes incluidas en este capítulo corresponden a construcciones realizadas con GeoGebra que se pueden usar directamente en la página web de G4D[1].

Los programas que permiten construcciones dinámicas e interactivas son los responsables, sin duda, de un considerable y generalizado aumento del interés por el aprendizaje de la geometría en todos los niveles académicos. La animación e interactividad con que dotan a las clásicas y estáticas figuras geométricas, tanto en el proceso de observación y análisis de los conceptos como en el de la resolución de problemas geométricos, están revolucionando el modo de acercar a los estudiantes los contenidos matemáticos. Un destacado ejemplo lo encontramos en Intergeo[2], el proyecto a cuatro años (2007-2010) puesto en marcha en la Unión Europea con una importante dotación económica. Su objetivo es, precisamente, facilitar la disponibilidad, uso y evaluación de contenido digital geométrico de calidad en la enseñanza de las matemáticas mediante la creación de una plataforma común que puedan compartir desarrolladores, profesores y estudiantes.

De entre los diversos programas que ayudan de esta forma al estudio y aprendizaje de la geometría, GeoGebra destaca por poseer algunas ventajas que podemos resumir en dos palabras: facilidad y conexión.

Facilidad para casi todo: para aprender a manejarlo y desenvolvernos con rapidez en su intuitivo entorno, bastando un par de sesiones para adquirir autonomía en su manejo, para usar los comandos y buscar ayuda en nuestro idioma (prácti-

Este artículo fue publicado en: *MSQ Conections Vol9 No 2 May–July 2009*. Agradecemos a sus editores la autorización para publicar su traducción.

José Manuel Arranz
IES Europa, Ponferrada (León)
Rafael Losada
IES de Pravia (Asturias)
José Antonio Mora
IES Sant Blai, Alicante (Alicante)
Manuel Sada
CAP de Pamplona (Navarra)

camente, sea cual sea), para crear nuestras propias herramientas, para seleccionar en cada caso las herramientas permitidas a los alumnos, para convertir nuestras construcciones en páginas web interactivas, y sobre todo, para redefinir los objetos en cualquier momento sin necesidad de recomenzar toda la construcción.

Además de fácil, GeoGebra consigue conectar distintos elementos que lo convierten en una aplicación diferente: asocia las expresiones gráficas a las simbólicas, la medida a la cantidad, la propiedad geométrica a la ecuación algebraica; combina la precisión con la estética, el álgebra y el cálculo con la geometría. Todo en GeoGebra parece diseñado y desarrollado alrededor de esta idea: la coordinación de los distintos códigos de información que se usan en matemáticas e informática.

La facilidad de aprendizaje y uso es muy importante para su rápida y eficaz implantación en el aula. La conjugación de las expresiones visuales potencia enormemente las capacidades didácticas ayudando tanto a la comprensión de las variaciones observadas como a la profundización en los conceptos relacionados. Los variados y muy didácticos comandos de análisis funcional permiten aprovechar su uso en el aula tanto para el aprendizaje de la geometría como del álgebra y el cálculo.

Y es gratuito.

En este capítulo se mostrarán diversas posibilidades de GeoGebra para estudiar modelos de la realidad. Este término, *realidad*, se suele identificar con la realidad física, mientras que aquí deseamos referirnos a una realidad más general. Por ello, en adelante usaremos el plural, *realidades*, especificando en cada caso a qué tipo de realidad aludimos.

Efectivamente, existe una realidad física, dimensional, neutra. Pero también existe una realidad lógica, de razonamientos y estructuras ideales, comunicativa, humana pero objetiva. Y por último existe una realidad perceptiva, estética, subjetiva.

Estas tres formas de realidad se entremezclan no solo en cada persona sino también entre ellas. Para el profesor y sus alumnos constituyen lo que denominaremos simplemente "realidad de la clase de matemáticas".

GeoGebra es una herramienta que facilita la exploración de todos estos tipos de realidad. Evidentemente, GeoGebra fue creado y concebido para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y el cálculo en particular y de las matemáticas en general. Sin embargo, como toda herramienta, su utilidad depende en gran medida del objetivo perseguido y de la forma de emplearla.

Una forma de uso consiste simplemente en trasladar las construcciones matemáticas de los libros de texto al espacio dinámico de las ventanas de GeoGebra. La posibilidad de observar cómo varían tanto expresiones numéricas o algebraicas como gráficas (¡al mismo tiempo!) al efectuar algún cambio en los valores iniciales, añade un inmenso valor pedagógico. De esta forma, el estudiante puede comprender más rápida y fácilmente la naturaleza de las relaciones representadas en el modelo, y el profesor puede formular preguntas más profundas acerca de las mismas.

Otra forma de usar GeoGebra es bajo la consideración del aprendizaje de las matemáticas como medio para un fin más ambicioso: la comprensión, análisis y construcción de modelos de las realidades.

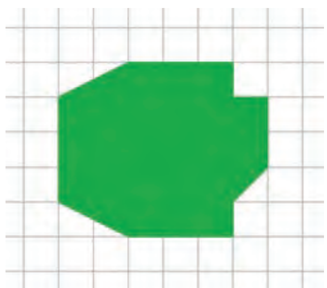
En cualquier caso, es recomendable que la metodología empleada se ajuste al principio del descubrimiento gradual. Esta graduación facilitará el asentamiento de las ideas y ayudará a atender a la diversidad de alumnos. Empezaremos por mostrar un ejemplo de esta metodología.

Matemática = Método

Una forma de enseñar el teorema de Pitágoras consiste en mostrar su veracidad por cualquier medio: demostración rigurosa, comprobación en casos particulares, disecciones o transformaciones geométricas... Es decir, se presenta el resultado y se comprueba que es cierto.

Otra forma, más profunda, es relacionar previamente los conceptos de perímetro, área y simetría mediante ejemplos que nos conduzcan hacia el teorema:

Actividad 1. Hallar el área del decágono (porque es un decágono, ¿verdad?) que aparece en la figura, sabiendo que cada casilla mide un centímetro cuadrado. ¿Qué estrategia será la mejor para calcularla?



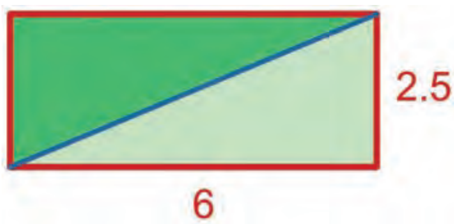
Es importante observar que para realizar con éxito esta actividad no es preciso el conocimiento previo de ninguna fórmula de áreas, ni siquiera la del rectángulo. Basta saber dividir y sumar, o multiplicar y restar.

Presentar actividades como la anterior lleva segundos con GeoGebra. Además, como la construcción es dinámica, podemos proponer con toda facilidad diversas figuras más o menos complicadas.

Ahora se pueden proponer actividades orientadas a la comprobación de que, normalmente, si solo conocemos las longitudes de dos lados de un triángulo no podemos averiguar el tamaño del tercer lado, pues no queda determinado con esos datos. En cambio, si además sabemos que el triángulo es rectángulo ya disponemos de suficiente información.

Actividad 2. En la figura aparece un rectángulo de lados 2.5 y 6 unidades, junto con una de sus dos diagonales.

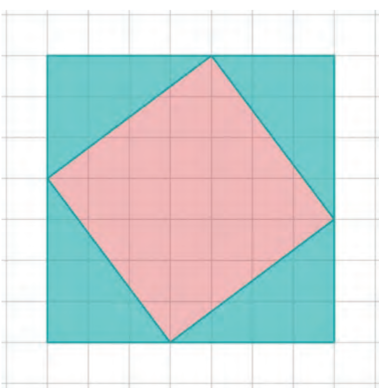
- ¿Todos los rectángulos que tengan lados de 2.5 y 6 unidades son congruentes, es decir, iguales en tamaño y forma (si se recortasen se podrían superponer)?
- ¿Las diagonales de todos ellos medirán lo mismo?
- ¿Pasará lo mismo con todos los rectángulos cuyas dimensiones coincidan?



Si las cuestiones anteriores tuvieron respuesta afirmativa, deducimos que la longitud de la diagonal de cualquier rectángulo queda determinada por la longitud de sus lados, o lo que es lo mismo, la hipotenusa de un triángulo rectángulo queda determinada por los catetos. Pero... ¿cómo calcular la longitud de esa hipotenusa a partir de la longitud de los catetos?

Actividad 3. En la figura hay cuatro triángulos congruentes (en verde) y un cuadrado rojo (porque es un cuadrado, ¿verdad?).

- ¿Cuánto miden los catetos de cada triángulo rectángulo?
- ¿Cuánto vale el área del cuadrado rojo?
- ¿Se puede deducir, a partir de esta área, cuánto mide la hipotenusa de cada triángulo?



Podemos aprovechar para comentar el momento histórico en que aparecen este tipo de problemas. Procedimientos similares a este, es decir, solo válidos para triángulos rectángulos particulares, ya los empleaban en la Antigua Babilonia para hallar el valor de la hipotenusa, milenios antes del nacimiento de Pitágoras.

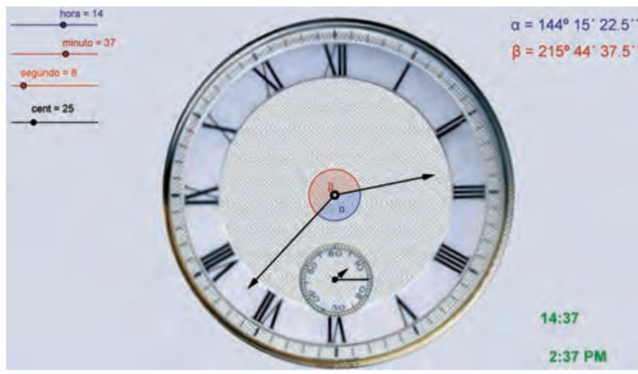
Obsérvese la relación entre las tres actividades propuestas. Es esta relación la que es “rica en ideas”, más que la simple formulación del teorema. Después de estas actividades, estamos en condiciones óptimas para exponer distintas comprobaciones, demostraciones y aplicaciones del teorema.

Modelar la realidad

Los siguientes ejemplos ilustran cómo se pueden presentar con GeoGebra algunos tipos de problemas bastante conocidos.

Ejemplo 1. Ángulos y proporcionalidad

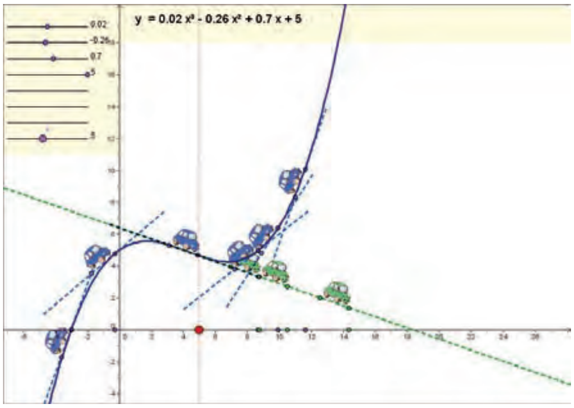
La imagen corresponde a una construcción que permite observar las relaciones de proporcionalidad entre las velocidades de las agujas de un reloj y comprobar los ángulos que forman en cada momento. El reloj, un objeto cotidiano, sirve de puente entre la abstracción y la realidad.



Ejemplo 2. Variaciones funcionales

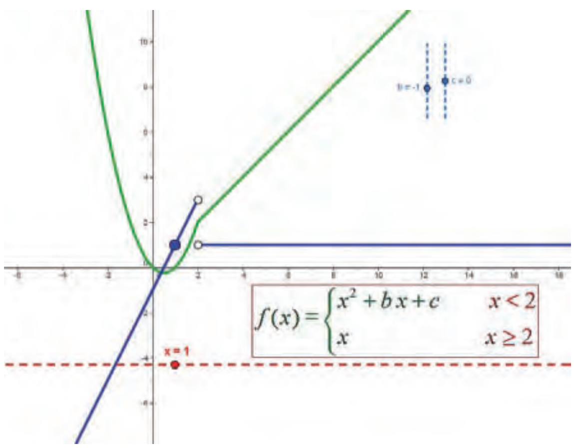
La siguiente imagen muestra sucesivos instantes en el uso de una construcción pensada para distinguir entre comportamiento local y global en distintos tipos de funciones.

El coche azul recorre la trayectoria de la curva como si estuviera en una montaña rusa y en un lugar determinado descarrila y sale por la tangente, movimiento que es representado por el coche verde. Todos los parámetros son modificables en segundos: el punto de descarrilamiento, los coeficientes y el tipo de función. Gracias a esta construcción, los alumnos pueden apreciar una función como “la ley que rige un comportamiento determinado en cada momento" y contrastar ese modo de comportarse entre distintos "momentos" y funciones. La diversidad de funciones facilita la comparación en su estudio global y local, permitiendo introducir ideas como la continuidad o la derivabilidad en el punto de descarrilamiento.



Si la construcción anterior sirve de ejemplo para introducir esos conceptos, la siguiente construcción propone el análisis de las ideas que se derivan del estudio de la continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

Se pretende averiguar para qué valores de los parámetros *b* y *c* la función es continua y para cuáles es derivable, cuando la variable independiente vale 1. El dinamismo propio de este tipo de construcciones permite realizar numerosos y rápidos ensayos para observar el correspondiente visual al cálculo algebraico habitual, completando la orientación algebraica con otra más intuitiva.



La Realidad Física

La palabra geometría significa, como sabemos, "medida de la tierra". La medición de longitudes y ángulos es imprescindible para resolver la mayor parte de los problemas físicos.

Pero, tradicionalmente, el proceso de medir era muy costoso. ¿Cómo medir la distancia entre dos ciudades? No es que no se supiese cómo hacerlo, el verdadero problema significaba llevar la teoría a la práctica. Los antiguos medios de transporte, las penosas condiciones en que se realizaba y la relativa exactitud de los instrumentos de medición originó que la elaboración de mapas precisos costase mucho tiempo e ingenio.

Hoy contamos con sofisticadas herramientas que nos permiten visualizar fácilmente amplias regiones terrestres. Lo que antes era una arriesgada aventura de años, ahora lo podemos hacer en unos minutos.

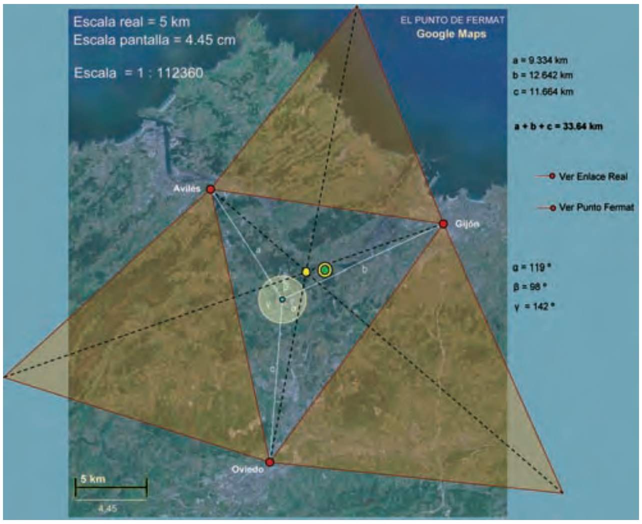
Ejemplo 3. Mediciones directas

Dentro de ciertos márgenes, podemos considerar algunas superficies terrestres como prácticamente planas. Si disponemos de una foto a escala conocida tomada desde el cenit, o próximo a él, importándola a GeoGebra podremos realizar diversas mediciones: distancias, áreas y ángulos. La siguiente imagen corresponde a la medición del área de una dársena usando los comandos Polígono y Area de GeoGebra.

Ejemplo 4. Optimización

Tal vez no deseemos medir, sino buscar un punto determinado que cumpla una serie de requisitos. También aquí GeoGebra nos puede ayudar. En este ejemplo se desean interconectar tres ciudades mediante una autopista de forma que la longitud total sea mínima, para ahorrar costes. La solución teórica se conoce como punto de Fermat (o primer punto de Fermat).

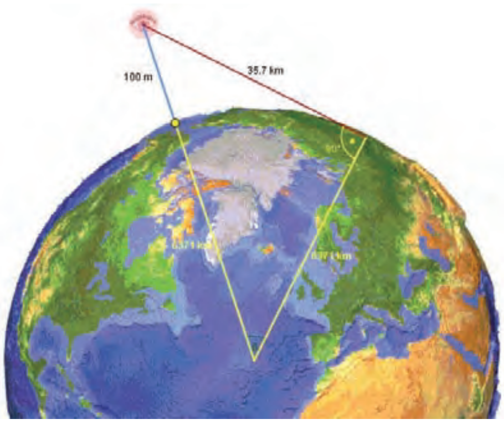
Normalmente, las restricciones impuestas por la presencia de poblaciones, accidentes geográficos y naturaleza del terreno, no permiten ubicar el enlace de las vías en la posición exacta del punto de Fermat. Pero podemos apreciar en la imagen que la solución teórica, donde los ángulos que forman las semirrectas hacia las ciudades son iguales, no se aleja mucho de la encontrada por los ingenieros.



Ejemplo 5. Esquemas

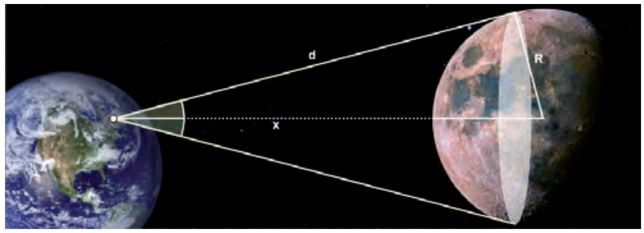
A veces las dimensiones de los objetos implicados no permiten una correcta visualización proporcional, es decir, a escala. Un conocido ejemplo es la representación habitual de los planetas orbitando alrededor del sol. Deberemos entonces sustituir la escala por un esquema.

En la siguiente imagen tenemos un ejemplo. Se desea calcular la distancia entre los ojos de una persona (situados en la imagen a 100 m sobre el nivel del mar) y la línea de horizonte. La elevación de la persona es muy pequeña con relación al radio de la Tierra, así que, con el fin de crear una figura que nos ayude en la resolución del problema, diseñamos la construcción de forma que los objetos no sean proporcionales.



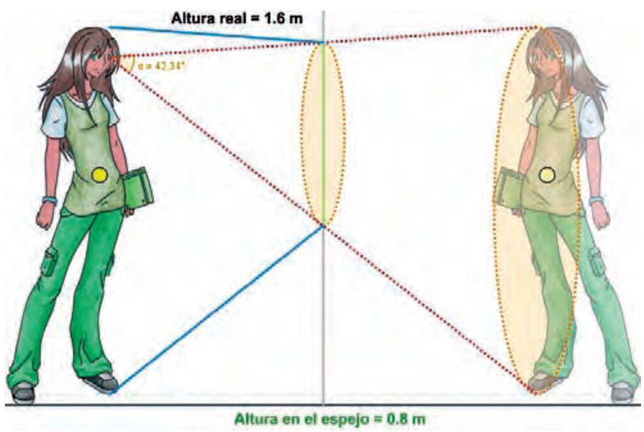
Lo importante es que la mirada del estudiante se dirija hacia dos claves: el ángulo recto que forma la línea de visión con el radio de la tierra en el horizonte y la diferencia de altura con respecto al centro del planeta. El teorema de Pitágoras se encarga del resto.

De forma similar, el siguiente esquema permite averiguar qué porcentaje de la superficie lunar es visible desde nuestra posición en un momento dado. Un sencillo ejercicio para iniciarse en la trigonometría.

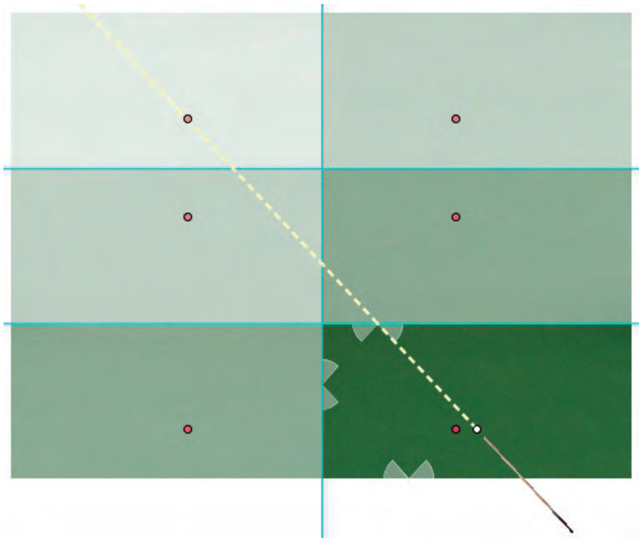


Ejemplo 6. Observaciones cotidianas

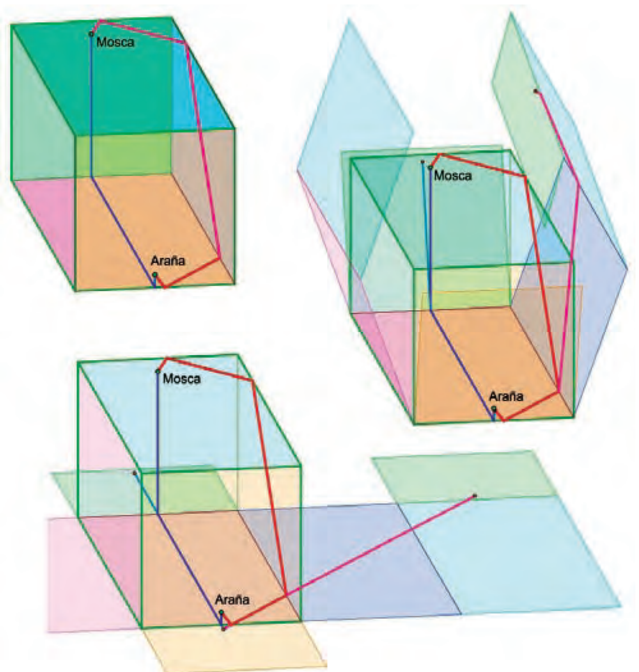
Todo el mundo sabe, o al menos sospecha, que la imagen virtual correspondiente al reflejo de su cuerpo que ve al otro lado del espejo tiene sus mismas dimensiones. Pero desde el punto de visión del que así se contempla, lo que ve *sobre* el espejo es una imagen más pequeña. ¿Cuánto más pequeña? ¿Cuánto mide la imagen que se forma en el espejo? La construcción correspondiente ayuda a entenderlo mejor. Primero *observamos* que la longitud de la imagen en el espejo no varía, da igual lo cerca o lejos del espejo que situemos a la chica. Después intentamos descubrir *por qué*. La semejanza existente entre los dos triángulos que comparten ángulo en el ojo de la chica nos da la respuesta.



Los espejos no solo plantean problemas. También ayudan a resolverlos. La siguiente imagen muestra una mesa de billar y sus reflejos especulares. La bola roja también ha sido reflejada. El objetivo que se presenta es averiguar en qué punto debe golpear a la primera banda o bien qué ángulo deberá mantener el taco al golpear la bola blanca para que esta contacte con la roja después de rebotar en tres bandas.



La construcción permite relacionar la simetría de los ángulos de incidencia y reflexión con una simple línea recta, facilitando tanto la resolución del problema como su comprensión. Este mismo enfoque también permite resolver fácilmente el cálculo de la ruta de mínimo recorrido entre dos puntos situados en caras distintas de un poliedro, por ejemplo, como en el problema de la araña que quiere atrapar a la mosca.



Ejemplo 7. Lugares

El GPS es un sistema de localización basado en un receptor que usa el tiempo que tarda en llegar las señales procedentes de como mínimo tres satélites (cuatro si se desea precisión) para determinar la posición que ocupa en el espacio (latitud, longitud y altura).

Este sistema, muy conocido y usado actualmente, tiene un precedente en dos dimensiones. Se conoce como *navegación hiperbólica*. Todavía hoy lo utilizan muchos barcos para conocer su posición en el mar.

Los emisores de las señales son radiofaros situados en la costa. Todas las emisiones están sincronizadas, algo fundamental para el funcionamiento del sistema. Desde el barco se puede medir la diferencia de tiempo entre la recepción de la señal procedente de un radiofaro y de otro y traducirlo a diferencia de distancia. La curva de los puntos cuya diferencia de distancia a dos puntos permanece invariante es una hipérbola, así que tres radiofaros -Cabo de Peñas, Santander y Donostia- generan tres hipérbolas, pues cada par genera una. Allí donde se corten estas hipérbolas estará el barco. En la imagen, las líneas discontinuas corresponden a los puntos equidistantes de cada par de radiofaros (mediatrices).

La realidad lógica

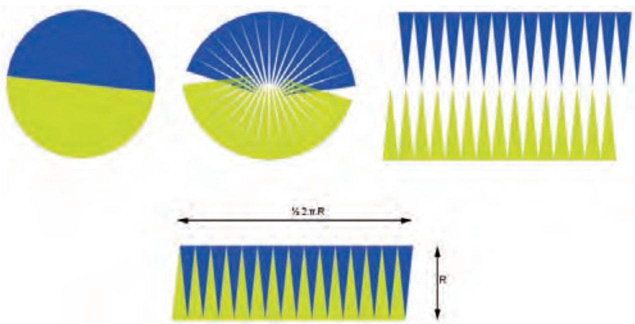
Para un efectivo aprendizaje de las matemáticas es necesario desarrollar las capacidades de observación y razonamiento, de análisis y argumentación. Estas competencias son requeridas para la correcta comprensión de la realidad, para la resolución de los problemas y para la comunicación eficaz de las ideas.

El dinamismo que caracteriza las construcciones de GeoGebra propicia la fácil comprobación de nuestras conjeturas e incluso, como veremos más adelante, la creación de nuevas conjeturas.

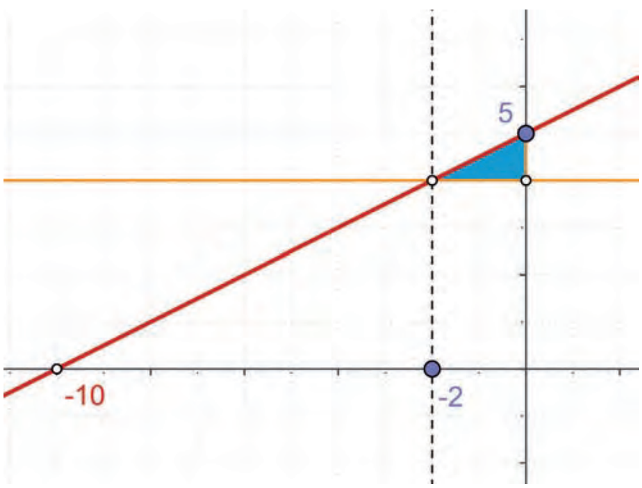
Por otra parte, el poder de la imagen como recurso de aprendizaje es enorme. Incluso cuando no existe una imagen evidente correspondiente a una propiedad o relación, intentamos buscar alguna otra imagen que ayude a su comprensión.

Ejemplo 8. Interconexiones matemáticas

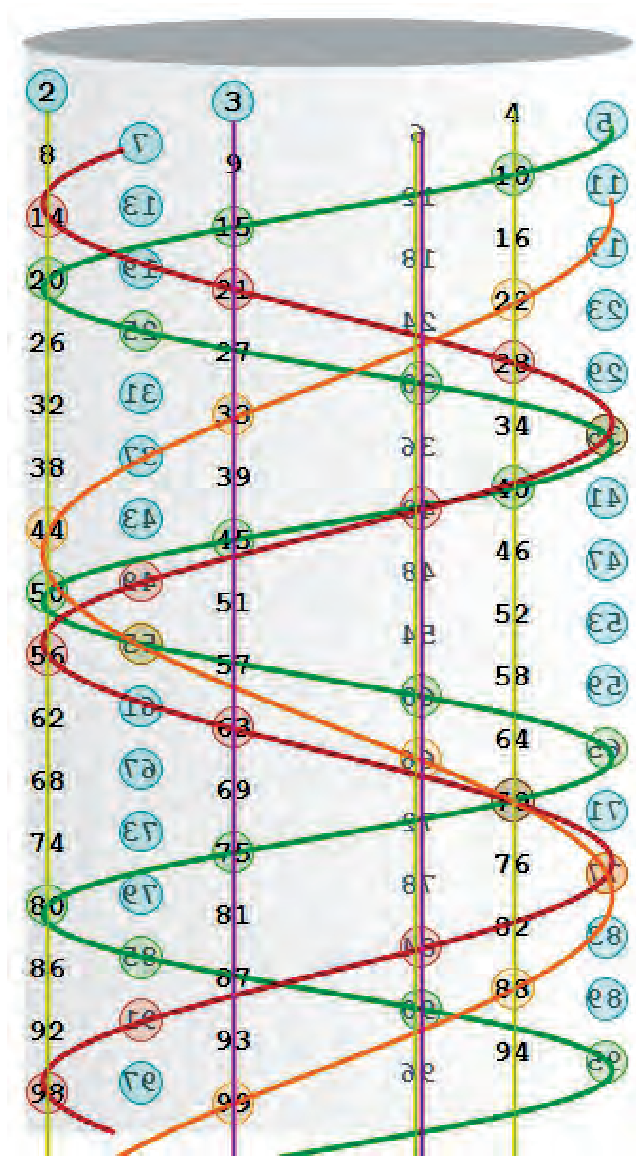
En la siguiente imagen se muestran cuatro fases de la misma construcción dinámica diseñada para encontrar la fórmula del área de un círculo. De nuevo, las ideas de perímetro, área y simetría se encuentran conectadas.



En el siguiente ejemplo se muestra una construcción geométrica que representa el producto de dos números reales. La relación 5 (-2) = -10 se puede escribir como -2/1 = -10/5. Se trata pues de una proporción que puede interpretarse como una relación de semejanza entre dos triángulos... ¡incluso respetando la regla del producto de signos!



En el siguiente ejemplo, la criba de Eratóstenes nos sirve de soporte para observar cómo los múltiplos de cada primo se encuentran sobre hélices cilíndricas si se interpreta el gráfico en tres dimensiones, o sobre sinusoidales si se interpreta en dos.



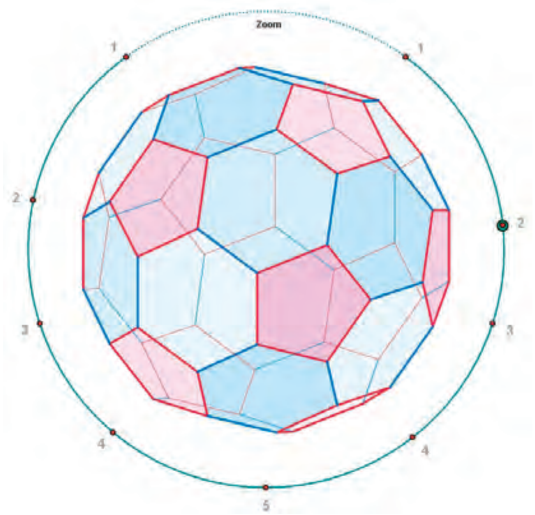
Ejemplo 9. Proyecciones

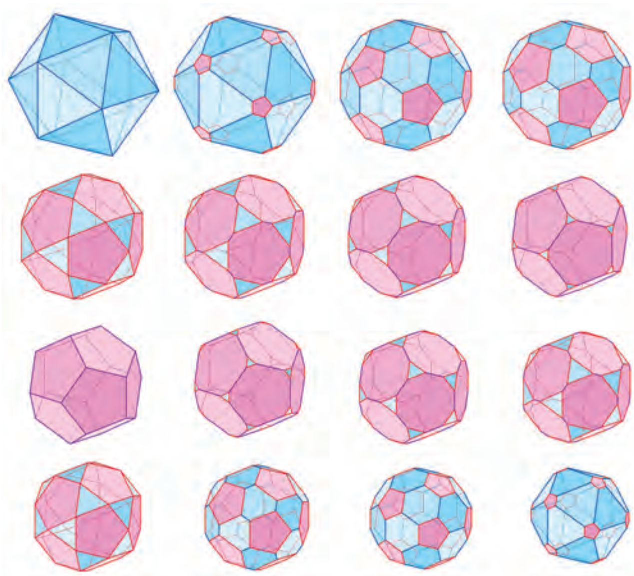
Aunque GeoGebra no dispone (al menos de momento) de un entorno tridimensional, es posible realizar proyecciones de puntos espaciales mediante el uso de listas que recojan las tres coordenadas de cada uno. Luego nos servimos de un cálculo automático (el producto por una determinada matriz) que realiza la proyección usando uno, dos o tres ángulos como parámetros. La variación de estos ángulos permitirá la rotación de la construcción como si diésemos vueltas a una esfera (por un solo círculo máximo, como el ecuador, si usamos un ángulo, también por los meridianos si usamos dos ángulos y por cualquier círculo máximo si usamos tres ángulos).

Tanto en los ejemplos anteriores de “la araña y la mosca” y el “cilindro de Eratóstenes” como en los ejemplos siguientes se han empleado dos ángulos de rotación, a (horizontal) y b (vertical). Así, para un punto P representado por una lista con tres coordenadas, el punto proyectado es:

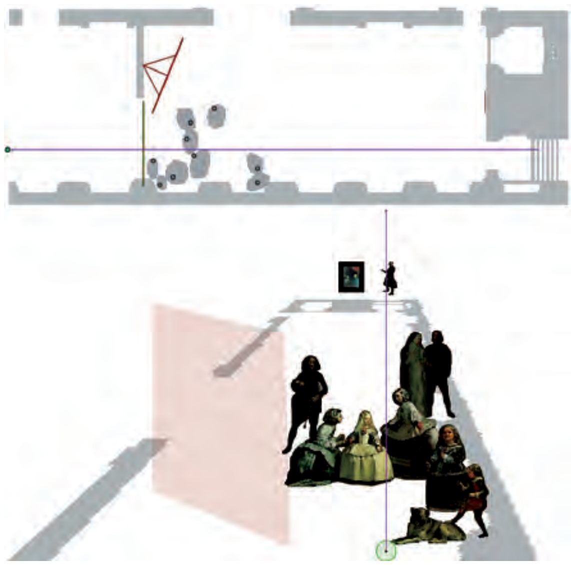
P’ = (Elemento[P,1] sin(a) + Elemento[P,2] cos(a), – Elemento[P,1] cos(a) sin(b) + Elemento[P,2] sin(a) sin(b) + Elemento[P,3] cos(b))

La siguiente construcción se inicia con un icosaedro y permite la observación de las transformaciones que sufre el poliedro al someterlo a un proceso continuo de truncamiento mediante secciones planas perpendiculares a los segmentos que unen el centro del poliedro con los vértices. Vemos así cómo van apareciendo distintos poliedros irregulares, y algunos semirregulares como el icosaedro truncado (figura) y el dodecaedro truncado, hasta llegar al poliedro regular dual del icosaedro que es el dodecaedro, y a partir de este de nuevo hacia el icosaedro.

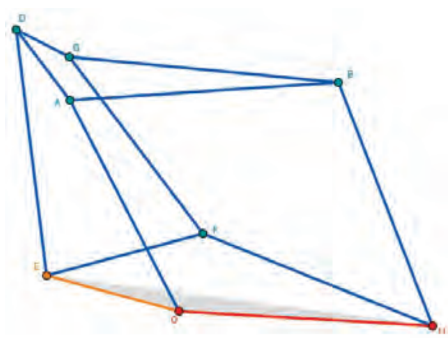




Incluso podemos ir más allá, y explorar en el plano, pero también en el espacio, objetos que en principio solo tenían dos dimensiones, como el cuadro *Las Meninas* de Velázquez. Para ello, basta asignar a cada objeto o personaje del cuadro sus correspondientes coordenadas en la estancia. Así, podemos intentar determinar la posición de los reyes en el cuadro introduciendo en nuestra estancia virtual un personaje invitado (infiltrado) y observando cómo se comporta en las distintas posiciones.

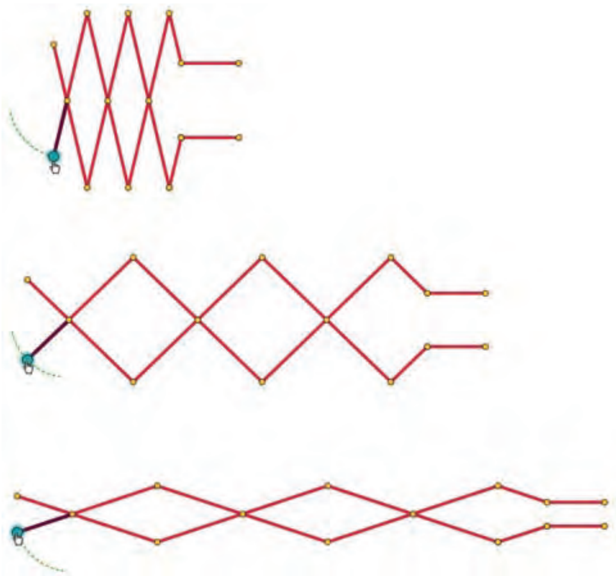


Las proyecciones también permiten analizar la flexibilidad o rigidez de estructuras de puntos y barras. Es conocido que un triángulo es rígido, mientras que un cuadrilátero no lo es, es decir, el cuadrilátero mantiene algún *grado de libertad interno*, es flexible. En la siguiente construcción se muestra una estructura espacial formada por 12 barras de igual longitud conectadas entre sí como lo harían en un “cubo sin caras”. Observemos que los vértices de los cuadriláteros que rodearían cada “cara” no tienen por qué ser coplanarios. La ausencia de caras rígidas dota de flexibilidad a la estructura (si bien existen poliedros flexibles incluso con caras rígidas). El análisis de cuántos grados de libertad internos mantiene esta estructura constituye un excelente ejercicio matemático.



Ejemplo 10. Mecanismos

La construcción anterior recuerda a un artilugio móvil. En efecto, en muchas ocasiones es posible crear modelos de la estructura básica que permite a un mecanismo cumplir con el fin para el que fue diseñado. Estas construcciones son particularmente notables por mostrar el uso que se hace de las propiedades geométricas para conseguir el funcionamiento deseado. A su vez, el estudio de esas propiedades resulta para muchos alumnos más atractivo si aparecen relacionadas con un propósito específico y conocido.

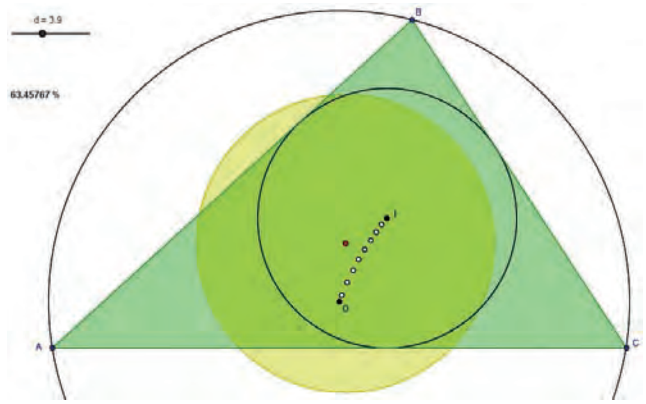


Ejemplo 11. La estrategia de Pulgarcito

El potente zoom de GeoGebra es una magnífica herramienta para dejar marcas del trayecto en puntos precisos que formen un rastro, al estilo Pulgarcito. Este modo de proceder es de gran utilidad para determinar lugares geométricos desconocidos a priori.

En la siguiente construcción se mide, por disección del círculo amarillo de radio variable, el porcentaje de área de intersección de este círculo con el triángulo acutángulo ABC. Movemos el círculo y observamos cómo varía ese porcentaje. Cada vez que encontramos, para distintos valores del radio, el valor máximo del porcentaje dejamos una marca (puntos blancos). Observamos que la trayectoria nos conduce del incentro I hacia el circuncentro O.

Podemos imaginar la figura como un intento de optimizar la iluminación de una región triangular con un foco de luz de alcance limitado y perpendicular a ella, como una linterna o una farola. En cada marca, el área iluminada es máxima.



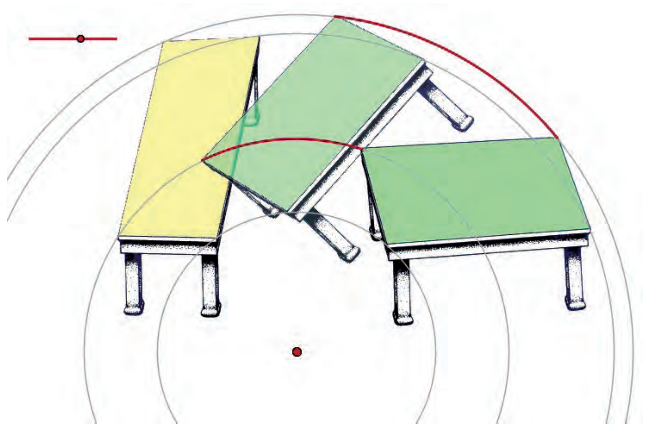
La precisión alcanzada nos permite asegurar que tales puntos no están ni en la misma recta ni en la misma circunferencia, sino en una hipérbola equilátera que pasa por el incentro, el circuncentro y los tres excentros y por el punto simediano, llamada hipérbola de Stammler. De esta forma tan sencilla hemos determinado un lugar geométrico que sin esta ayuda sería difícil descubrir.

La realidad perceptiva

Ejemplo 12. Estimación versus medición

Las mediciones son necesarias para averiguar distintas características de un objeto, como áreas, volúmenes, inclinaciones, pesos, etc. Pero además evitan que nos dejemos engañar por nuestra percepción visual.

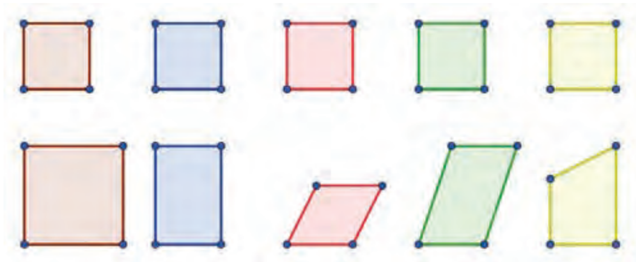
En la siguiente construcción las superficies amarilla y verde de las mesas son congruentes: tienen la misma forma y dimensiones. Sin embargo, percibimos la superficie amarilla como “menos ancha y más larga” que la verde, percepción que se mantiene incluso girando la figura completa. Una rotación dinámica de solo una de las mesas nos puede sacar de nuestro error.



Ejemplo 13. Construcción versus dibujo

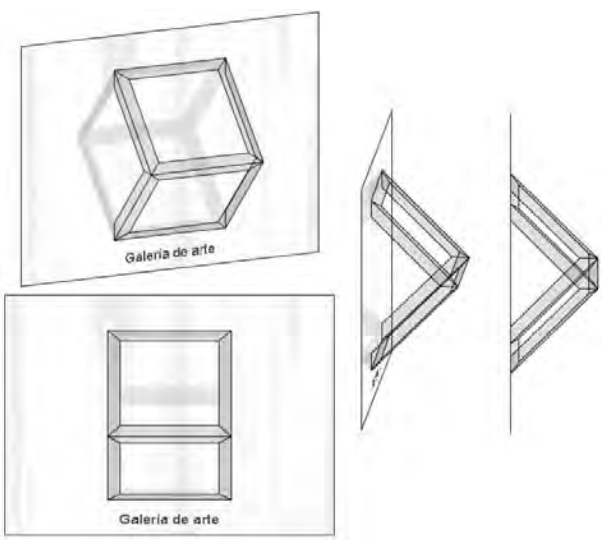
Las construcciones geométricas no son simples dibujos sino expresiones gráficas de la variación o permanencia de ciertas propiedades, dependiendo del proceso constructivo empleado.

En la parte superior de la siguiente imagen podemos ver lo que parecen cinco cuadrados iguales, solo diferenciados por su posición y color. Pero únicamente el de la izquierda lo es. Es decir, si movemos los vértices libres de cada uno, el de la izquierda permanecerá cuadrado, mientras que los demás descubrirán realmente qué tipos de cuadriláteros son: rectángulo, rombo, romboide y trapecio rectángulo. Existen más posibilidades: un trapecio isósceles, un trapecio cualquiera, un cuadrilátero cualquiera e incluso la proyección plana de una infinidad de objetos tridimensionales.



Ejemplo 14. Percepción tridimensional

La siguiente imagen muestra distintos puntos de vista de la misma construcción dinámica. Se trata de una réplica del logotipo de una galería de arte. Podemos observar el uso de los planos de simetría para producir el efecto de cubo con solo siete aristas.



Ejemplo 15. Fotografía y cine

La posibilidad de introducir en escena cualquier imagen, ya sea para emplearla como fondo sobre la que trabajar como para usarla como un objeto geométrico más, permite aumentar tanto la calidad estética como el atractivo de algunas construcciones.

En la siguiente figura se ve el resultado de aplicar una homotecia a una imagen. Observemos las tangentes comunes a las circunferencias correspondientes al London Eye. El centro y los radios de la noria también están construidos con GeoGebra.

Ejemplo 16. Artes plásticas

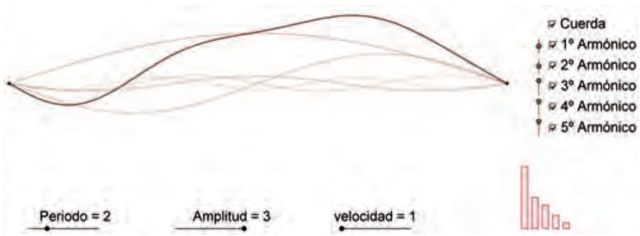
Al poder incorporar imágenes de fondo, GeoGebra nos permite analizar la composición de distintas obras artísticas.

En la siguiente figura, podemos observar las líneas fundamentales de la composición del cuadro *Anunciación* de Leonardo da Vinci. El lado mayor se ha dividido en cinco partes iguales. La franja central determina un cuadrado, con dos de sus lados definidos por dos cipreses, utilizado para hacer entrar la luz y dirigir la mirada del espectador hacia las montañas. Las figuras del ángel anunciador y de la Virgen están enmarcadas por triángulos isósceles congruentes, con sus vértices superiores equidistantes del centro.

Ejemplo 17. Estética del movimiento

Variando de forma continua el valor de un parámetro, podemos dotar a las construcciones de movimiento. Así podemos no solo observar las variaciones entre dos imágenes consecutivas sino el movimiento completo como objeto propio de exploración.

En la siguiente imagen se muestra una "instantánea" de la animación producida por la vibración de una cuerda de una guitarra al ser pulsada. La compleja curva resultante no es más que una suma baremada (las cinco primeras parciales de la serie de Fourier) de las distintas funciones sinusoidales correspondientes a los armónicos del sonido emitido.



La realidad en la clase de matemáticas

Hasta ahora hemos ejemplificado las realidades mediante una colección de situaciones matemáticas que podemos encontrar en la mayoría de los currículos de matemáticas escolares de secundaria y que son susceptibles de ser tratadas con GeoGebra en clase. El profesor puede construir sus propios diseños o tomarlos de ejemplos encontrados en Internet que han sido evaluados por otros profesores en sus clases (ver Recursos[3] de Intergeo). En otros casos los mismos alumnos habrán podido realizar sus construcciones.

Un breve resumen de los conocimientos de tipo conceptual tratados en los apartados anteriores sería:

- Geometría clásica: elementos y formas de la geometría sintética, medida de ángulos. Áreas: medida, estimación y cálculo.
- Triángulos semejantes, proporcionalidad (fracciones), teorema de Pitágoras, trigonometría.
- Estudio de funciones, continuidad, derivabilidad. Series de funciones.
- Movimientos en el plano y en el espacio: isometrías y homotecia.
- Geometría del espacio: poliedros, truncamientos. Proyecciones. Simetría.
- Flexibilidad y rigidez de las construcciones.

También se han diseñado ejemplos con GeoGebra que se dirigen más al corazón de la actividad matemática: cómo se hacen las matemáticas. La mirada se ha enfocado desde el principio de este artículo hacia la forma de hacer partiendo de la identidad matemática = método. Esto nos ha permitido introducirnos en temas como:

- Acercar al estudiante a la forma de pensar del matemático.
- Proponer una colección de situaciones de modelización matemática y resolver problemas de optimización.
- Abrir un amplio abanico de conexiones de las matemáticas con otros campos de conocimiento: con la tecnología, la física, los juegos y las distintas manifestaciones artísticas (música, pintura, arquitectura, etc.).

Como hemos visto, la geometría dinámica ha resultado muy útil cuando queremos provocar el acercamiento a un concepto matemático, sugerir un método para la resolución de un problema o proporcionar práctica en ciertas destrezas. Pero aún hay más, GeoGebra puede convertirse en una herramienta fundamental en el trabajo de la clase de matemáticas y provocar cambios en la misma organización de la clase. Lo veremos en un ejemplo en forma de investigación que se inicia desde un punto de partida muy abierto que se puede modelar en clase para alumnos de distintos niveles.

Ejemplo 18. Investigaciones en clase. La mitad

El enunciado no puede ser más sencillo para un curso de secundaria ya que intentaremos que todos los estudiantes puedan entrar en el juego propuesto en la clase las matemáticas:

Enunciado

Dado un cuadrado, una forma de construir, dentro de él, un polígono cuya área sea la mitad consiste en tomar los puntos medios de dos lados opuestos y unirlos con un segmento.

Investiga otros procedimientos.

El problema, además de ser inicialmente fácil de abordar, contiene una intencionada ambigüedad que permite cuestionarse una colección de preguntas. ¿Valen curvas? ¿Se pueden cruzar las líneas? ¿Qué entendemos por procedimiento? ¿Qué entendemos por polígono? ¿La solución ha de darse dibujada, expresada verbalmente, nombrada por el polígono resultante o las tres cosas a la vez? ¿Cómo demostrar que es realmente la mitad? ¿Qué significa demostrar para un alumno de secundaria? ¿Cuándo daremos una demostración por válida? Y así un sinfín de preguntas que profesor y alumnos deben responder como corresponde a una investigación.

Es muy sencillo obtener en clase distintas soluciones a la pregunta planteada y dibujar polígonos dentro del cuadrado cuya área sea la mitad; los alumnos obtienen como soluciones distintos tipos de triángulos, cuadriláteros y polígonos con mayor número de lados. GeoGebra también puede ofrecer las mismas soluciones que el dibujo sobre papel con igual o mayor facilidad. La aportación principal que ofrece es la posibilidad de obtener soluciones dinámicas, es decir, permite que dejemos uno o varios puntos libres y hacer que la construcción dependa de ellos con lo que realmente estamos yendo más allá en la búsqueda de procedimientos.

En el siguiente applet tenemos la versión fija de algunos procedimientos en la que el polígono está estrictamente determinado por las condiciones de la construcción. Junto a ella a su derecha se ha diseñado la versión *animada* en la que se han dejado puntos móviles representados con un estilo grueso y en color rojo.

Hasta ahora hemos centrado el punto de vista en la idea de polígono, de esta forma:

- Pasamos del rectángulo inicial (puntos medios de lados opuestos) a otro rectángulo que tiene por base la mitad del cuadrado y por altura el lado del cuadrado.
- Transformamos el triángulo isósceles (que tiene dos vértices en un lado del cuadrado y el tercero en el punto medio del lado opuesto) en un triángulo escaleno al considerar que el tercer vértice puede estar en cualquier punto del lado opuesto.
- El paralelogramo formado por dos vértices opuestos y los puntos medios de dos lados opuestos se ha convertido en otro paralelogramo distinto que solo ha de tener por altura el lado del cuadrado y por base su mitad.
- El rombo formado por dos triángulos iguales que tienen por base una diagonal y por altura la cuarta parte de la otra se transforma en un cuadrilátero cualquiera tomando un par de paralelas.

Todas estas ideas tienen un componente algebraico añadido al geométrico. Pero además podemos dirigir la mirada a un proceso matemático de otro nivel como es el de la generalización y ver cómo unas soluciones no son en realidad más que casos particulares de otras más globales: el rectángulo del enunciado o el triángulo rectángulo e isósceles (unir dos vértices opuestos con un segmento) no son más que casos particulares del trapecio construido al tomar una línea recta que pase por el centro del cuadrado.

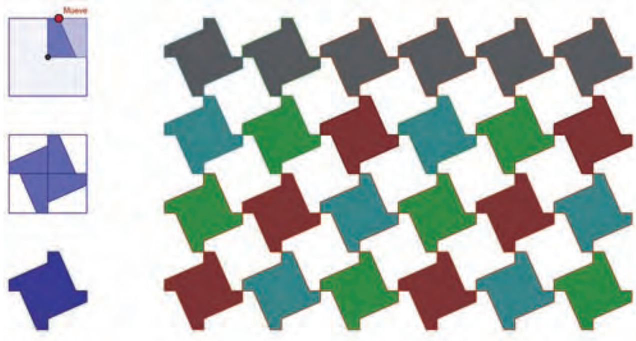
Ejemplo 19. Isometrías

GeoGebra proporciona una excelente herramienta para estudiar los movimientos en el plano. Uno de los lugares más espectaculares para hacerlo es el análisis de las simetrías en los mosaicos. Con geometría dinámica no solo podemos ver cómo un mosaico queda invariante por una traslación, una rotación, una simetría axial o una simetría con deslizamiento, sino que además podemos idear secuencias animadas para representar estas transformaciones en el mosaico.

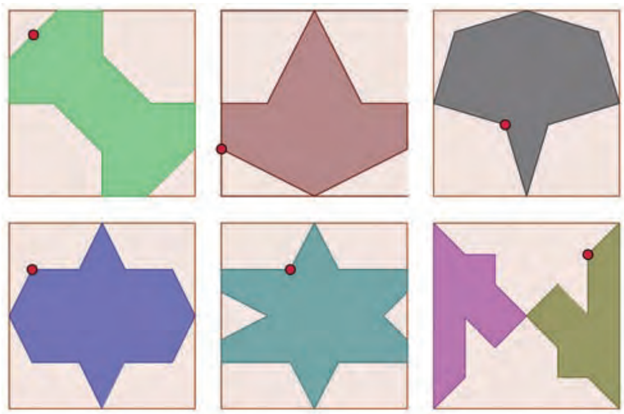
Ejemplo 20. Mosaicos con medio cuadrado

El que hayamos buscado la mitad de un cuadrado da pie a proponer una nueva situación con el punto de vista añadido de los movimientos en el plano. ¿Qué pasaría si coloreamos el polígono (mitad) obtenido y hacemos copias como si fuera una celosía?

Aquí vemos lo que le ocurre a un trapecio rectángulo cuando lo giramos cuatro veces alrededor de uno de sus vértices y después trasladamos la baldosa así obtenida en dos direcciones:



La utilización de distintos procedimientos y movimientos da lugar a soluciones sorprendentes como la que encontramos para el hueso de la Alhambra de Granada y también para generar otras baldosas que encontraremos en los mosaicos nazaríes como el avión, un par de estrellas, la aguja o la hoja.



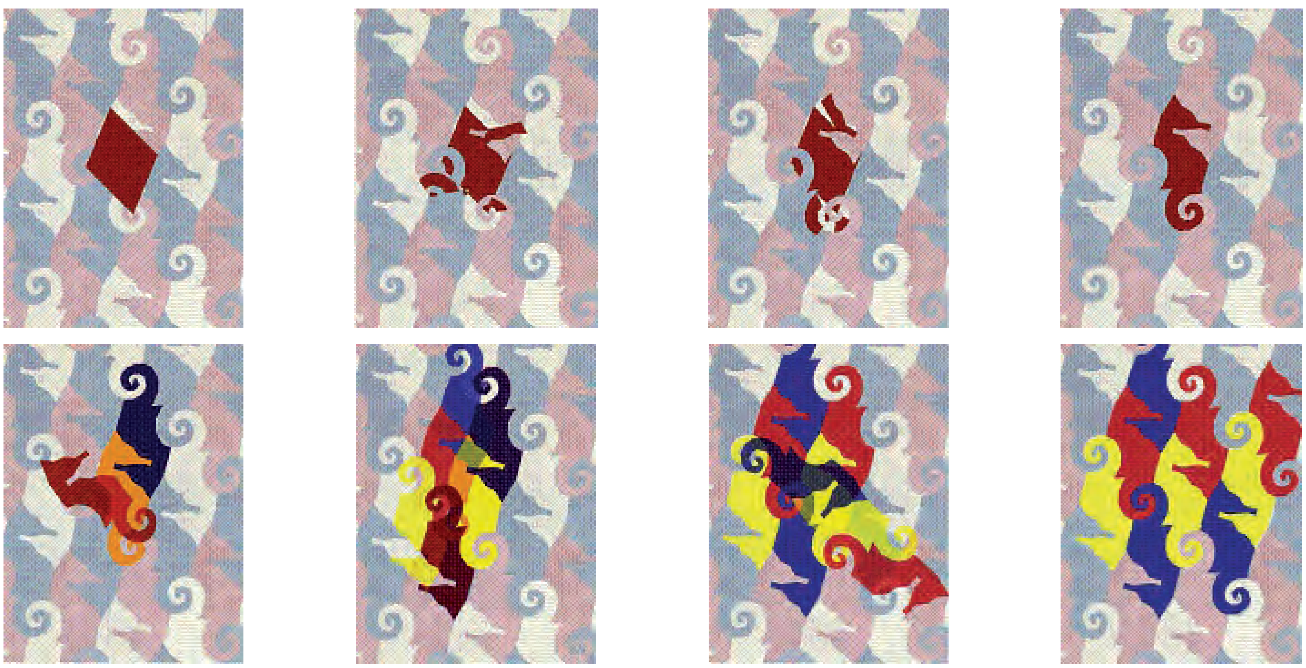
Como en el mosaico de los trapecios rectángulos, también en las siguientes construcciones de baldosas se ha dejado algún punto con un cierto grado de libertad representado por el punto más grueso de cada uno de las figuras.

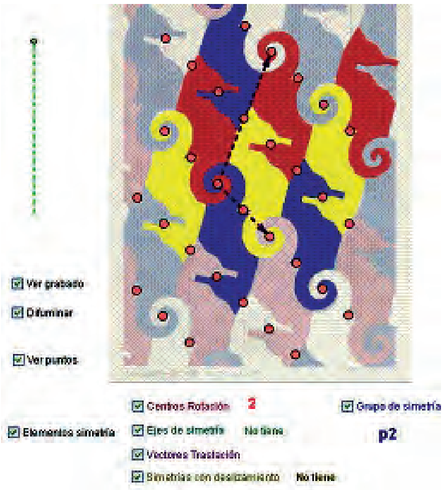
La investigación se inició con medio cuadrado y ya estamos construyendo mosaicos mediante isometrías. Un paso más y podemos analizar los mosaicos a partir de sus elementos de simetría, comprobar que cada uno de estos mosaicos corresponde a uno de los 17 grupos cristalográficos, que pueden disponer de centros de rotación, ejes de simetría y de simetría con deslizamiento y dos vectores de traslación independientes. Podemos realizar una construcción con GeoGebra en la que aparezcan paso a paso tanto el mosaico como sus elementos de simetría.

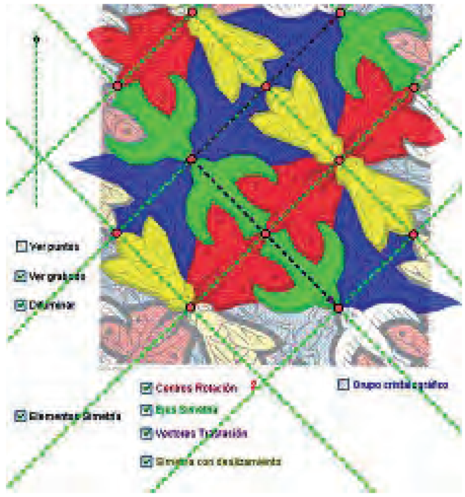
Ejemplo 21. Mosaicos de la Alhambra y de Escher

En el ejemplo anterior han aparecido baldosas utilizadas en la Alhambra por los geómetras nazaríes. El paso siguiente consiste en visitar los trabajos de uno de los grandes admiradores de estos mosaicos: M.C. Escher dedicó gran parte de su obra a crear originales recubrimientos periódicos del plano.

GeoGebra facilita la creación de secuencias que se inician con un polígono (lo más pequeño posible) al que se deforman los lados para ir convirtiéndolo en una baldosa que normalmente representa un animal o un objeto; seguidamente las simetrías hacen surgir nuevas copias de esta figura para rellenar el plano.

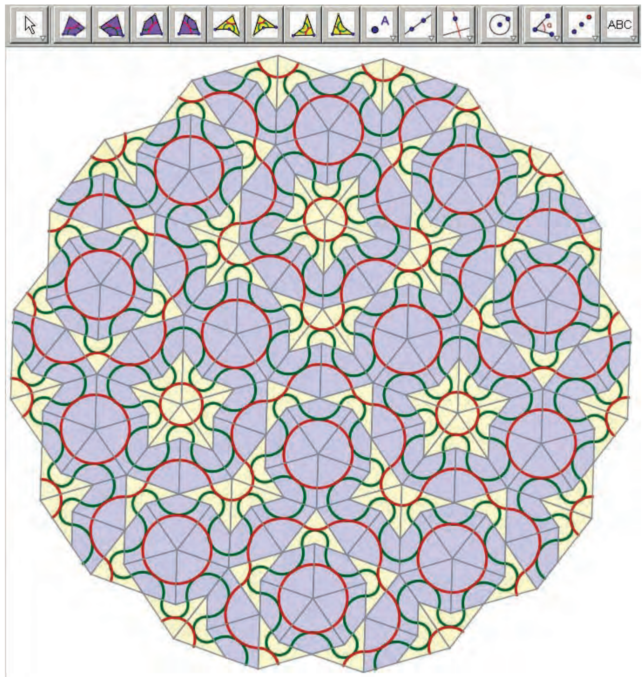






Ejemplo 22. Arte matemático

Para finalizar, un ejemplo que condensa en una sola imagen todas las realidades que hemos mostrado: física, lógica, perceptiva y su desarrollo en el aula. Se trata de un embaldosado muy particular. La posibilidad que brinda GeoGebra de crear herramientas personales, como los *Dardos y Cometas* de Penrose que configuran este diseño, facilita enormemente la creación de construcciones en las que intervengan procesos iterativos.



NOTAS

[1] http://geometriadinamica.es
[2] http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Main/
[3] http://i2geo.net/xwiki/bin/view/Main/

Este artículo fue recibido en *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en abril de 2011

suma+ 67
Junio 2011, pp. 21-26

Consideraciones didácticas para la enseñanza de los números escritos en las primeras edades

Se solicitó a niños de tres a seis años (n=221) que anotasen números dígitos presentados en su forma oral. A partir de los resultados obtenidos se establecieron tres niveles: 1) ausencia de código simbólico, que se caracteriza por notaciones concretas (dibujos, etc.) que parten de una correspondencia uno a uno; 2) aparición de código simbólico, en la que se usan notaciones pictóricas (cruces, etc.) en las que se mantiene todavía una correspondencia término a término; 3) consolidación del código simbólico (alfabetización), en la que se usan ya los numerales escritos, aunque con múltiples inversiones.

Palabras Clave: Sistemas externos de representación, notación numérica, alfabetización matemática, educación infantil.

Didactic considerations for teaching written numbers in the early ages

Three- and six-year-old pre-school students (n=221) were asked to write down digital numbers presented to them orally. The results revealed three levels among the pre-schoolers: 1) the absence of symbolic code, characterized by specific notations (drawings, etc.) based on the principle of a one-to-one correspondence; 2) the appearance of symbolic code, in which pictorial notations are used (crosses, etc.) and a term-to-term correspondence is still maintained; 3) the consolidation of the symbolic code (literacy), in which written numbers are used, although often reversed.

Key words: External representation systems, numerical notation, mathematical literacy, childhood education.

Introducción

En España existe una práctica docente muy afincada en las primeras edades de escolarización que consiste en acceder a los sistemas externos de representación –sobre todo números y letras escritos– sin asociarlos a su comprensión, es decir, se tiende a enseñar de forma mecánica los signos sin considerar otros conocimientos y formas de representación preliminares –concretas y pictóricas– que faciliten su comprensión. Desde esta perspectiva, una de las prácticas más habituales en muchas aulas de Educación Infantil consiste en que los niños y niñas resigan, copien o dibujen números a partir de un modelo dado. Esta actividad todavía tan arraigada proviene de perspectivas que históricamente han atribuido un carácter estrictamente instrumental a los sistemas externos de representación (Tolchinski y Solé, 2009).

Sin embargo, desde hace ya bastantes años las directrices curriculares apuntan en otra dirección. Así, por ejemplo, ya en el marco de la LOGSE, el Real Decreto 1330/1991, de 6 de Septiembre, por el que se establecen los aspectos básicos del currículo de la Educación Infantil, se ofrecían las siguientes orientaciones:

> En lo que se refiere a la forma de representación matemática, hay que tener en cuenta que el origen del conocimiento lógico-matemático está en la actuación del niño con los objetos y, más concretamente, en las relaciones que a partir de esta actividad establece entre ellos (...). Por esto, la aproximación a los contenidos de la forma de representación matemática debe basarse en esta etapa en un enfoque que conceda prioridad a la actividad práctica; al descubrimiento de las propiedades y las relaciones que establece entre los objetos a través de su experimentación activa” (pág. 29622).

En las directrices curriculares surgidas a raíz de la LOE (Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Infantil) se señala:

> El gusto e interés por manipular textos escritos en diferentes soportes (libros, revistas, periódicos, carteles o etiquetas), participando en la interpretación de imágenes e iniciándose en la diferenciación entre las distintas formas de expresión gráfica (dibujos, números, lengua escrita)(pág. 1029).

Àngel Alsina
Universidad de Girona

Desde este marco, este trabajo se propone analizar la práctica en el aula para comprender mejor cómo se aprende a representar los numerales escritos, e indagar a partir de los resultados obtenidos cuál es el momento más adecuado para fomentar su aprendizaje.

El aprendizaje de los numerales escritos

Martí (2003) establece que la construcción de los sistemas externos de representación se extiende, en las culturas occidentales, desde los 2-3 años hasta los 9-10 años aproximadamente, y distingue las notaciones como objetos gráficos y como objetos semióticos. Este autor señala que, desde el punto de vista gráfico, en primer lugar es imprescindible diferenciar los sistemas figurativos (dibujos, imágenes) de los sistemas arbitrarios (especialmente escritura y numerales escritos).

Respecto a la evolución de la notación numérica, Scheuer, Sinclair, Merlo de Rivas y Tièche-Christinat (2000) sostienen que se trata de un proceso lento y complejo, en el que los usos de formas convencionales y no convencionales conviven durante un largo periodo.

> *La evolución de la notación numérica, se trata de un proceso lento y complejo, en el que los usos de formas convencionales y no convencionales conviven durante un largo periodo.*

El primer eslabón del itinerario de adquisición de la notación numérica es la correspondencia término a término (Sinclair, 1991). En este nivel los signos varían según los niños (formas geométricas, dibujos, etc.), pero no dependen de la edad. Estas primeras producciones notacionales se refieren exclusivamente a la cantidad; la notación se compone de caracteres discretos, alineados; y en muchas producciones, un mismo signo es repetido varias veces. Martí (2003) indica que el siguiente paso es la producción de un signo único como representante de la cantidad. Se trata de un rasgo inherente al sistema de numeración decimal de difícil comprensión, dado que se usa un solo signo para designar a toda una colección.

El hecho de que exista un objeto semiótico ya elaborado –los números escritos– que se transmite culturalmente ayuda a esta construcción, y no es hasta que los niños comprenden que un solo signo puede representar una pluralidad cuando empiezan a usar los números escritos. A partir de este momento los niños pueden comprender de forma progresiva las reglas del sistema (Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994). En este nivel, la comprensión del valor cardinal (una única expresión para representar una cantidad) es fundamental, puesto que constituye el punto de partida para que los niños puedan ir adentrándose en la comprensión de las reglas del sistema de numeración decimal: valor posicional, etc. Otros estudios se han centrado en el análisis de los distintos tipos de notaciones que realizan los niños y niñas durante el itinerario de adquisición (Hugues, 1982, 1987; Pontecorvo, 1996; Scheuer et al., 2000).

> *No es hasta que los niños comprenden que un solo signo puede representar una pluralidad cuando empiezan a usar los números escritos.*

Los estudios de Hugues y Pontecorvo, a pesar de que mantienen algunas diferencias como por ejemplo el hecho de no contemplar la representación de la correspondencia biunívoca entre los signos y los objetos a ser contados por parte del primero, mantienen un cierto paralelismo respecto a los niveles posibles en la representación de la cantidad: el primero, en la que no existe sensibilidad o precisión hacia los aspectos cuantitativos (representaciones idiosincrásicas); el segundo, donde se pone en correspondencia un signo de representación con aquello que se representa (representaciones pictográficas e icónicas); y el tercero, donde se usa el numeral convencional, aunque no siempre en un modo exclusivo (representaciones simbólicas).

El estudio de Scheuer et al. (2000) se centra en las estrategias que utilizan niños de edades comprendidas entre los 5 y 8 años, con diferente historia escolar y familiar, en tareas en las que se les pide anotar diferentes números.

Un análisis cualitativo de las respuestas de los 162 niños de la muestra permite identificar siete categorías de notaciones que van revelando la laboriosa adquisición del conjunto de reglas convencionales que subyace a la representación numérica de las cantidades.

Se trata de categorías mutuamente excluyentes, aún considerando que un mismo sujeto puede presentar varias estrategias a la vez:

- notaciones numéricas convencionales acordes con los numerales convencionales;

- notaciones múltiples, en las que se regulan el número de formas gráficas en la notación de acuerdo al número de elementos en la colección basándose, por lo general, en procedimientos de correspondencia uno a uno (una forma gráfica para cada elemento);

- formas para números, que consisten en la producción de una única grafía arbitraria; formas para clases de números, que registran características particulares de los números pero la notación no identifica de forma concluyente el número representado;

- notaciones logográmicas, que resultan del establecimiento de una correspondencia estricta entre la forma oral de un número y su notación; notaciones compactadas, en las que además de la correspondencia anterior, se empieza a integrar el principio de notación posicional;

- y otras notaciones, que incluyen formas que se desvían de las descritas debido a errores suplementarios o de otras particularidades, o bien producciones que registran la naturaleza de los objetos que forman la colección en lugar de su cantidad.

Metodología

En este estudio, que forma parte de una investigación más amplia en la que se analizaron las concepciones del profesorado respecto al aprendizaje de la notación numérica, participaron 221 niños y niñas y niñas de 3 a 6 años de tres centros escolares públicos de Girona. Se trata de niños y niñas que provenían mayoritariamente de sectores socioeconómicos medios (los padres habían completado la escolaridad primaria como mínimo) y el resto de sectores altos (con estudios secundarios o universitarios). De todos los participantes, 73 cursaban 1º de Educación Infantil (3-4 años); 75 eran de 2º de Educación Infantil (4-5 años) y 73 estaban escolarizados en 3º de Educación Infantil (5-6 años).

En las aulas de Educación Infantil españolas existe la costumbre de exponer los numerales del 1 al 9 a través de murales, con dibujos que representan las cantidades.

Al afectuarse el estudio, los números escritos estaban muy presentes en las aulas ya que en las aulas de Educación Infantil españolas existe la costumbre de exponer los numerales del 1 al 9 a través de murales, con dibujos que representan las cantidades (se puede observar la grafia 2 junto con dos patitos, por ejemplo). En los últimos meses del 2º trimestre, cuando se realizó el estudio, se trabajaba con los numerales 1 a 9, propiciándose en general un pasaje rápido de las colecciones concretas a través de la manipulación de materiales hacia la simbolización convencional mediante prácticas que consistían en copiar, seguir el trazo o bien dibujar numerales escritos en cuadernos y fichas. En algunos casos, se detectó también un uso informal de los numerales escritos.

Instrumentos y procedimiento

Siguiendo el mismo procedimiento que en estudios preliminares (Scheuer et al., 2000) se empleó una tarea sencilla de producción de notaciones. Se proponía al niño que anotara las siguientes cantidades, en el siguiente orden: 1 - 2 - 3 - 4 en 1º de Educación Infantil 1- 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 en 2º de Educación Infantil y 1- 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 en 3º de Educación Infantil: todas las cantidades eran dictadas oralmente, en catalán, a partir de la siguiente instrucción: "Te voy a ir diciendo unos números. Quizás aún no los hayas aprendido en la escuela, pero seguro que tienes ideas para escribirlos". La elección de estas cantidades responde al hecho de que en la mayoría de aulas de Educación Infantil existe la creencia que debe enseñarse a escribir los números hasta el 4 en 1º de Educación Infantil; hasta el 7 en 2º; y hasta el 9 en 3º.

Se optó por un interrogatorio de tipo clínico, ya que cuando un adulto requiere a los niños y niñas tareas notacionales, es frecuente que éstos no empiecen ofreciendo su respuesta más idónea. En función de las respuestas de los sujetos, eventualmente se modificaban o introducían algunos ítems. Además, se exploraban las posibilidades de los niños para integrar diferentes intervenciones de apoyo si era necesario (repetición, propuestas de comparación de notaciones diversas, etc.)

Se analizaron las notaciones de los niños. Cada notación fue analizada de acuerdo a dos criterios. El primero, de carácter conceptual, intentaba especificar los aspectos numéricos que el niño integraba en su notación (correspondencia término a término, cantidad, palabra numérica, etc.). El segundo era el análisis morfológico, que especificaba las formas empleadas (numeral convencional, signos como por ejemplo cruces, etc.) Al analizar cada notación se tuvieron en cuenta los gestos, comentarios, notaciones previas o sucesivas del niño, lo que resultaba indispensable para dar a las interpretaciones el mayor grado posible de coherencia y objetividad. La clasificación de cada producción se trianguló con cada maestra tutora de forma independiente, con un acuerdo superior al 90%.

Resultados

Partiendo de la base que para realizar el estudio se usó una tarea notacional muy simple en la que los niños anotaban números que se dictaban oralmente, el nivel de producciones no fue idéntico en todos los casos, sino que fue variable. Pese a esta producción desigual de respuestas, ligada fundamentalmente a la edad y al curso, a partir del criterio conceptual se clasificaron las notaciones en tres grandes categorías, que se muestran en la Tabla 1.

Notación de la cantidad	
Nivel 1: ausencia de código simbólico	Los niños usan dibujos para representar cantidades. En sus representaciones, que son concretas, realizan una correspondencia término a término: se trata de un sistema de notación aditivo. Por ejemplo, para representar que se han roto dos huevos, dibujan dos huevos rotos.
Nivel 2: aparición de código simbólico	Los niños usan símbolos pictóricos para representar cantidades, realizando de nuevo una correspondencia término a término. Por ejemplo, para representar dos huevos rotos usan diferentes tipos de representaciones que todavía mantienen la correspondencia término a término: **// XX oo**
Nivel 3: consolidación del código simbólico (alfabetización)	Los niños usan códigos simbólicos, transmitidos culturalmente, para representar cantidades. Estos símbolos tienen una particularidad "muy abstracta": un solo símbolo permite representar muchos objetos. Por ejemplo, para representar dos huevos rotos usan el número convencional 2. **2**

Tabla 1. Niveles de producción notacional de números presentados oralmente

El nivel 1 se caracteriza por la ausencia de código simbólico. En esta fase los participantes demostraron tener ya un cierto conocimiento de los números, dado que habían recibido formación en la escuela, pero su conocimiento era sobre todo de tipo pragmático, es decir, habían memorizado el valor del número, pero para representarlo necesitaban que la instrucción se acompañase de una contextualización. En consecuencia, el tipo de representación que realizaban los niños eran sobre todo dibujos. Como se indica en la tabla, en esta primera fase los niños realizaron mayoritariamente una correspondencia término a término, por lo que emplearon un sistema de notación aditivo. A pesar de esta similitud a nivel conceptual, a nivel morfológico las producciones de los niños fueron muy distintas. Aunque en todos los casos se trataba de dibujos, éstos fueron diversos debido sobre todo a la contextualización que se acompañaba a la instrucción.

En el nivel 2, en la que ya aparece el código, los niños mayoritariamente usaban un signo arbitrario como por ejemplo una cruz para representar las cantidades. Durante esta fase se observó también que, a nivel conceptual, los niños estudiados eran capaces de realizar una correspondencia uno a uno, aunque a nivel morfológico hubo mucha disparidad, tanto en relación al uso de signos diversos como al tamaño de los signos y su disposición en el papel: cruces, círculos u otras figuras geométricas, palitos, etc. La tendencia más habitual, sin embargo, fue alinearlos en disposición horizontal, uno detrás de otro.

En el nivel 3 los niños utilizaban una notación numérica convencional. La Tabla 2 presenta la distribución de las respuestas en los cursos objeto de estudio, de acuerdo con los tres niveles de producción notacional presentados.

	1º Educación Infantil (3-4 años)	2º Educación Infantil (4-5 años)	3º Educación Infantil (5-6 años)
Nivel 1 Ausencia de código simbólico	51 (69,9%)	6 (8%)	6 (8%)
Nivel 2 Aparición del código simbólico	9 (12.3%)	11 (14.6%)	8 (11%)
Nivel 3 Consolidación del código simbólico	13 (17,8%)	13 (17,8%)	62 (89%)
Total de respuestas	73 (100%)	75 (100%)	73 (100%)

Tabla 2. Frecuencias y porcentajes de las respuestas para curso

Al analizar la tabla 2 se observa que las respuestas del nivel 1, básicamente dibujos, fueron muy habituales en primero de Educación Infantil, al ser necesario contextualizar, en cambio en tercero ningún niño necesitó ya una contextualización y, por lo tanto, no usaron dibujos para anotar los números. Respecto a las respuestas de nivel 2, en el que se usan representaciones pictóricas, el porcentaje de uso fue relativamente escaso en los tres grupos de edad. En relación a las respuestas del nivel 3, en primero de Educación Infantil hubo pocas notaciones convencionales, pero se incrementaba considerablemente con la edad y el curso. Por su relevancia, se quiere hacer notar que en este último nivel se detectaron dos tipos de producciones a nivel morfológico: independientemente del tamaño, un grupo reducido de niños anotaron números en su disposición convencional, mientras que la mayoría tendían a invertir alguna de las grafías de los números, como se muestra en la tabla 3.

	1º Educación Infantil (3-4 años)	2º Educación Infantil (4-5 años)	3º Educación Infantil (5-6 años)
Notación convencional	0 (0%)	16 (27,6%)	21 (33,9%)
Notación convencional invertida	13 (100%)	42 (72,4%)	41 (66,1%)
Total de respuestas	13 (100%)	58 (100%)	62 (100%)

Tabla 3. Frecuencias y porcentajes de respuestas convencionales

Conclusiones

Los resultados ponen de manifiesto, como en trabajos precedentes (Martí, 2000; Pontecorvo, 1996; Scheuer et al., 2000, entre otros), que la adquisición de la notación numérica es un proceso que sigue diversas fases. Aunque en todos estos trabajos no existe una coincidencia unánime en relación a dichos estadios, a grandes rasgos hay un acuerdo generalizado en que las primeras notaciones de los niños son concretas (dibujos, etc.) y parten de una correspondencia uno a uno, para pasar posteriormente a utilizar notaciones pictóricas (cruces, etc.) en las que se mantiene todavía una correspondencia término a término y, finalmente, se usan ya los numerales escritos convencionales.

Hay dos aspectos de los resultados que son especialmente significativos: por un lado, en todas las aulas en las que se ha realizado el estudio, la enseñanza de la notación numérica es una práctica educativa muy establecida que se realiza, sobre todo, a través de estrategias didácticas que responden a una metodología tradicional (copiar, seguir el trazo o dibujar números escritos). Por otro lado, debe resaltarse también el alarmante número de niños de mayor edad y nivel que siguen realizando inversiones de numerales escritos.

El elevado nivel de inversiones de números podría ser un indicador que desde un punto de vista estrictamente evolutivo la etapa de Educación Infantil no es la etapa escolar más adecuada para aprender la notación escrita de los numerales, tal como indica Berdonneau (2008):

> La caligrafía de las cifras no es indispensable en educación infantil, y es mejor esperar a la etapa sensible propia de cada niño, es decir, el momento en que está realmente maduro para este aprendizaje, que se realizará de forma más rápida, fácil y segura (pág. 295).

Este aspecto se señaló ya en el Real Decreto 1330/1991, de 6 de Septiembre:

> El acceso a los códigos convencionales, que como criterio general debe realizarse en el primer ciclo de la educación primaria, es un largo proceso en el que las posibilidades evolutivas del niño y la intervención pedagógica del educador han de estar en relación para un tratamiento educativo adecuado (pág. 29622).

Como puede apreciarse, ya desde la década de los noventa del siglo pasado las directrices curriculares que dirigen la intervención en el área de matemáticas señalan que el acceso a los códigos convencionales debería realizarse como criterio general en el primer ciclo de la Educación Primaria. Asimismo, se señala también, como se ha puesto de manifiesto en la introducción, que durante la etapa de Educación Infantil la aproximación a los contenidos de la forma de representación matemática debe basarse en un enfoque que conceda prioridad a la actividad práctica.

En síntesis, pues, en este trabajo se concluye que:

a) La enseñanza formal de la notación numérica debería retrasarse hasta el primer ciclo de Educación Primaria, mientras que en la etapa de Educación Infantil –tal como ya sugieren las directrices curriculares– únicamente debería iniciarse a los alumnos en este aprendizaje, ayudándoles sobre todo a diferenciar las distintas formas de expresión gráfica;

b) Los modelos tradicionales, que han enfatizado la enseñanza de la notación numérica a través de prácticas pedagógicas como por ejemplo copiar, dibujar o seguir el trazo números, repercuten sobre todo de manera negativa en la alfabetización matemática en las primeras edades, por diversos motivos: porque se propicia que los alumnos escriban números sin garantizar su comprensión, cuando en realidad sólo deberían representar simbólicamente aquello que comprenden; y porque la representación del código escrito convencional implica habilidad motriz, es decir, los niños y niñas deben aprender la direccionalidad de los signos, representarlos en espacios limitados, etc. Este tipo de aprendizaje “consume” mucho tiempo, puesto que los niños y niñas de las primeras edades, tal como se ha justificado, no tienen la suficiente madurez para realizar este tipo de aprendizaje.

Es necesario, pues, seguir realizando en el futuro nuevos estudios que traten de analizar, sobre todo, las concepciones del profesorado entorno a este tema para intentar promover una transformación de éstas, y, como no, informar sobre las prácticas educativas más adecuadas durante la etapa de Educación Infantil para avanzar hacia una enseñanza de los numerales escritos menos instrumental. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años).* Barcelona: Editorial Graó.

Hughes, M. (1982). Rappresentazione grafica spontanea del numero nei bambini. *Età Evolutiva, 22,* 5-33.

Hughes, M. (1987). Il bambino e il numero. *Età Evolutiva, 27,* 62-66.

Lerner, D., Sadovsky, P. y Wolman, S. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En P. Parra y I. Sáez (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 95-184). Barcelona: Paidós.

Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente.* Madrid: Visor.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). REAL DECRETO 1330/1991, de 6 de septiembre, por el que se establecen los aspectos básicos del currículo de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 215,* 29619-29622.

Ministerio de Educación y Ciencia (2008). Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado, 5,* 1016-1035.

Pontecorvo, C. (1996). La notación y el razonamiento con números y nombres en el periodo preescolar y en la escuela primaria. *Infancia y Aprendizaje, 74,* 3-24.

Scheuer, N., Sinclair, A., de Rivas, S.M. y Tièche-Christinat, C. (2000). Cuando cienta setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y Aprendizaje, 90,* 31-50.

Sinclair, A. (1991). Children's production and comprehension of written numerical representations. En K. Durkin y B. Shire (Eds.), *Language in mathematical education* (pp. 59-68). Buckingham: Open University Press.

Tolchinsky, L. y Solé, I. (2009). Las condiciones de aprendizaje de la lengua escrita. *Infancia y Aprendizaje, 32*(2), 131-140

Este artículo fue recibido en *Suma* en noviembre de 2010 y aceptado en mayo de 2011

suma+ 67
Junio 2011, pp. 27-40

Buscando modelos matemáticos: "El caso de las malas notas"

Es difícil encontrar situaciones cercanas en las que se pueda apreciar la importancia del trabajo con funciones y la modelización matemática. Presentamos una experiencia didáctica basada en un problema inicial sobre la de modificación de las notas de un examen utilizando diferentes modelos funcionales. La primera parte describe el trabajo previo de los profesores: primeras soluciones, generalizaciones, problemas análogos, etc. La segunda analiza la fundamentación didáctica de la propuesta para el aula para, a continuación, presentar varios ejemplos de actividades y tareas para el alumnado.

Palabras Clave: Modelización matemática, modelos funcionales, representación de funciones, resolución de problemas, matematización.

Searching mathematical models: "The bad marks case"

It is really difficult to find nearby situations in which you can appreciate the importance of working with functions and mathematical modelling. We present an educational experience based on an initial problem on modification of the marks of an exam using different functional models. The first part describes the previous work by some teachers: first solutions, generalizations, analogous problems, and so on... The second one analyzes the didactic basis of the proposal for the classroom to, then, submit several examples of activities and tasks for the students.

Key words: Mathematical modelling, functional models, representation of graphing functions, problem solving, mathematization.

Algunos modelos matemáticos

El origen de la experiencia lo podemos localizar en algunas de las actividades, unas cotidianas y otras no tanto, de cualquier profesor o profesora:

- Al modificar una nota final, a algún estudiante, en alguna sesión de evaluación.[1]
- Al participar en el proceso de selección de aspirantes a profesores[2] de Secundaria (obligatoria, ESO, y Bachillerato) y plantearse la modificación de las calificaciones obtenidas por los participantes.
- Al leer una revista de didáctica de las matemáticas y encontrarnos con una referencia expresa al problema del que estamos hablando, concretamente en Arcavi (2007) podemos leer:

> Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra/profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección de esta forma: si la calificación original era x, en una escala de 0 a 100, pasaría a ser $10\sqrt{x}$. Es decir, si la calificación inicial fue x=81, la corregida sería y=90.[3]

Este último párrafo nos interesó desde el primer momento, ya que mencionaba una función radical apenas mencionada en el aula (recíproca de una polinómica de segundo grado, muy utilizada en clase). También nos pareció motivador el uso de la teoría de funciones a la hora de enfocar las posibles soluciones del problema y, por último, nos animó a profundizar en el tema la conexión de la situación con el proceso de modelización matemática.

Algunos resultados matemáticos

Antes de pasar a presentar la propuesta didáctica, llevamos a cabo un estudio, desde un punto de vista puramente matemático, para descubrir, por nosotros mismos, los principales resultados que se pueden obtener a partir del problema inicial.

Abraham Arcavi
Weizman Institute, Israel.
Constantino de la Fuente Martínez
IES C. López de Mendoza. Burgos
Enrique Hernando Arnáiz
Colegio La Merced - Jesuitas. Burgos

En primer lugar, hay dos cuestiones que, aunque van apareciendo a lo largo del proceso, conviene acordar inicialmente:

- Por un lado, parece lógico que los modelos o factores de corrección f de los resultados de un examen deben cumplir lo que a partir de ahora denominaremos *la norma*: si el rango posible de notas es el intervalo $[a, b]$ se debe cumplir que, $f(a)=a$ que $f(b)=b$ y que $f(a)=a\leq f(x)\leq f(b)=b$, $\forall x\in [a, b]$, es decir, las notas corregidas no deben salirse del intervalo de notas permitidas.

- Por otra parte, otra condición que deberán cumplir nuestros modelos de corrección es la condición que llamaremos de *justicia:* una nota inferior en la prueba no puede resultar, una vez hecha la corrección, por encima de notas originalmente superiores, es decir, si $x_1<x_2 \Rightarrow y_1=f(x_1)<y_2=f(x_2)$. Esta condición puede controlarse fácilmente al hacer un estudio gráfico de la función de corrección pues la pendiente de la gráfica no puede ser negativa. ¿Será *justo* que la pendiente pueda ser cero, es decir, que notas inferiores igualen (no superen), una vez corregidas, a notas superiores? Admitiremos en un principio que no[4]. Otra cuestión a tener en cuenta en este punto es la siguiente: si la idea es que la nota corregida nunca sea menor que la original –queremos mejorar las malas notas, es decir, que el factor de corrección aplicado beneficie siempre al alumno–, tenemos que ampliar esta condición de "justicia" con una segunda condición (de muy fácil y eficiente verificación gráfica además): el gráfico de la función del factor de corrección que usemos no sólo debe ser monótono creciente (condición anterior), sino además estar por encima del gráfico de la función identidad $f(x)=x$ (salvo para el valor maximo, y algunas veces para el minimo, segun queramos o no aumentar el cero). Para el caso en que queramos bajar las notas de un examen muy fácil habría unos criterios análogos.

Centrándonos ahora en el problema inicial, el de Arcavi (2007), vamos a adaptar esa situación al contexto español. Las principales conclusiones de ello las presentamos en los siguientes enunciados:

- Como comentaba el profesor Arcavi[5], parece que un factor radical, como el que utilizó la profesora aludida en esta historia, no será de los primeros que nos vengan a la mente, al abordar la cuestión de la modificación de los resultados del examen. Lo normal es que empezásemos valorando modelos del tipo proporcional, mucho más sencillos, que conviertan la máxima nota que se obtuvo en la prueba, a, en el máximo valor posible a priori N, cambiando las demás de forma lineal; es decir, modelos del tipo[6]:

$$P_a^N(x)=\frac{N}{a}x$$

donde $x\in [0, N]$ es el valor de la nota original, y $P_a^N(x)$ el valor de la nota modificada, o también los que hemos visto utilizar a compañeros/as profesores/as:

– Subir a todos una misma cantidad fija c, $y=x+c$
– Aumentar un porcentaje, r, cada nota,

$$y=x+\frac{rx}{100}=\left(1+\frac{r}{100}\right)x$$

– Redondear la nota al número entero más próximo, que sea mayor que la nota, $y=Ent[x]+1$.

Sin entrar a valorar las debilidades y limitaciones de estos modelos, cuestión que dejamos como uno de los cometidos de la propuesta didáctica, sí señalaremos que son los que habitualmente surgen en clase al plantear esta cuestión.

Modelos con funciones radicales

Volviendo al modelo de corrección radical, si las notas conseguidas pueden oscilar en el intervalo $[0, N]$, siendo N la nota máxima, lógicamente, el modelo de corrección análogo al de la profesora israelí sería[7] $y=\sqrt{Nx}$ donde $y(0)=0$, $y(N)=N$, cuyo dominio es el intervalo $[0, N]$ y en la que imagen, rango o recorrido también se mantiene dentro de este intervalo[8]. En el caso de notas pertenecientes al intervalo $[a, b]$, tenemos que el factor de corrección análogo a $y=10\sqrt{x}$ será $f(x)=\sqrt{(x-a)(b-a)}+a$ con $x\in [a, b]$. Téngase en cuenta que f no existe para valores de x menores que a, ya que se cumple que: $(x-a)(b-a)\geq 0 \Rightarrow x(b-a)-a(b-a)\geq 0 \Rightarrow (b\neq a) \Rightarrow x(b-a)\geq a(b-a) \Rightarrow x\geq a$.

Además la función cumple la *norma,* es decir, $f(a)=a$, $f(b)=b$, es siempre creciente (por ser $b>a$), y cumple que la nota corregida que nos proporciona es siempre mayor que la original($\sqrt{Nx}>x$ siempre que $x<N$, lógicamente), condiciones que se deben cumplir en todos los factores de corrección. Este último modelo puede ser muy útil (y aprovechable) de obtener tras un interesante trabajo en la clase.

Por otra parte, si nos planteamos la construcción de otros modelos de corrección *análogos* a $y=\sqrt{Nx}$, podemos utilizar las ideas de Hofstadter (1990) sobre algunos aspectos del proceso de creación y descubrimiento en matemáticas, concretamente las que él denomina *giros de botón*[9]. En nuestro caso *las variables,* que son las que componen la estructura del problema inicial, serían: índice de la raíz, exponente de N y/o exponente de x. En este caso podríamos llegar a dos familias de modelos de corrección que cumplen *la norma*: dejar invariantes los valores 0 y N. Concretamente:

$$F_n(x)=\sqrt[n]{N^{n-1}x}, G_n(x)=\sqrt[n]{Nx^{n-1}} \text{ siendo } x\in[0,N]$$

Vamos a estudiar en profundidad las principales características de esta familia de factores, que hemos denominado F_n y G_n:

- $F_n(0)=0$, $F_n(N)=N$. También $G_n(0)=0$, $G_n(N)=N$.

- La forma en que varían estas funciones la apreciamos gracias a sus derivadas:

$$F_n(x)'=\frac{1}{n}\left(\frac{N}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}, G_n(x)'=\frac{n-1}{n}\left(\frac{N}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$$

en las que se descubre una curiosa simetría que parece dar pie al estudio del papel del coeficiente y del exponente en cada una de ellas.

- También se verifica que:

$$\lim_{x\to 0+} F_n(x)'=+\infty \text{ y } \lim_{x\to N-} F_n(x)'=\frac{1}{n}$$

Por tanto el crecimiento de F_n es mayor cuanto más cerca estamos de la nota 0 y menor cuanto más cerca estemos de la mayor nota, N.

- Por otro lado:

$$\lim_{x\to 0+} G_n(x)'=+\infty \text{ y } \lim_{x\to N-} G_n(x)'=\frac{n-1}{n}$$

- Si nos fijamos en las representaciones gráficas de algunas funciones F_n y G_n, figura 1, para notas en el intervalo cerrado [0, 10], que es el intervalo de variación de las notas en España, un sencillo estudio comparativo nos da idea del comportamiento de los factores de corrección en relación con la función $y=x$, que representa el factor de corrección identidad (el que no modifica la nota). Como podemos ver en la figura 1, los factores F_n aumentan cada vez más las notas, a medida que aumenta , contrariamente al efecto de los del tipo G_n, que las suben cada vez menos al aumentar el índice n. Esto lo podemos resumir utilizando la idea de límite:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)=\begin{cases}0 \; si \; x=0\\ N \; si \; x\in(0,N]\end{cases}; \lim_{n\to\infty} G_n(x)=G(x)=x$$

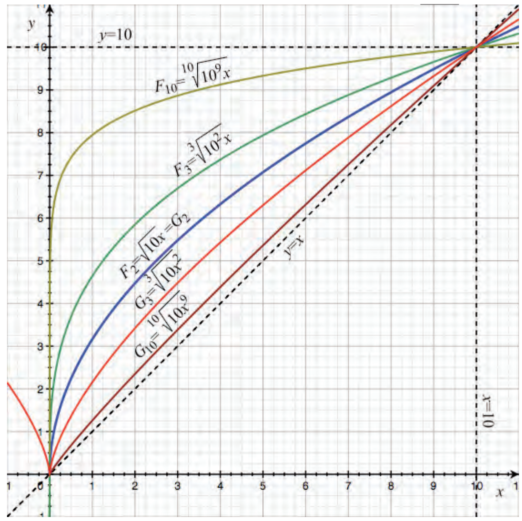


Figura 1

Podríamos decir que la función $F_2(x)=G_2(x)=\sqrt{10x}$ separa las funciones que tienden a llevar todas las notas a la nota máxima, las F_n, de las que tienden a dejarlas como estaban inicialmente, las G_n. Además el modelo $F_2\equiv G_2$ es el único factor de corrección que pertenece a las dos *familias* de modelos.

- Otra cuestión de interés es averiguar, para cada n, la nota que se transforma en un *aprobado raspado*, $N/2$, para cada uno de los dos tipos de modelos, F_n y G_n. Resolviendo las ecuaciones:

$$F_n(x)=\frac{N}{2} \text{ y } G_n(x)=\frac{N}{2}$$

y obtenemos los valores de x para cada uno de los modelos:

$$F_n \longrightarrow x=\frac{1}{2^n}N, \text{ y para } G_n \longrightarrow x=\frac{1}{2^{n/n-1}}N$$

Al ir variando el índice del radical, podemos ver cómo se concretan los diferentes valores de x que se transforman en la menor nota satisfactoria:

$$\text{si } n=2 \longrightarrow x_F=\frac{N}{4}, x_G=\frac{N}{4}, \text{ si } n=3 \longrightarrow x_F=\frac{N}{8}, x_G=\frac{N}{\sqrt{8}},$$
$$\text{si } n=4 \longrightarrow x_F=\frac{N}{16}, x_G=\frac{N}{\sqrt[3]{16}}\ldots$$

Se diría, por tanto, que los factores G_n no benefician tanto a las notas muy bajas, como los F_n. Con F_n aprueban notas menores que con G_n, excepto cuando n=2, en donde los dos factores hacen que aprueben las notas a partir del valor[11] $N/4$.

Como el factor verifica que si $x=N/2^n$ entonces $F_n(x)=N/2$ y como:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N}{2^n}=0$$

la nota que se transforma en $N/2$ puede ser todo lo pequeña que queramos, con tal de tomar un índice n suficientemente grande.

De forma análoga, como el factor G_n verifica que si:

$$x=\frac{N}{2^{n/n-1}} \text{ entonces } G_n(x)=\frac{N}{2} \text{ y como } \lim_{n\to\infty}\frac{N}{2^{n/n-1}}=\frac{N}{2}$$

la nota que se transforma en $N/2$ está tan cerca de $N/2$ como queramos, con tal de tomar n suficientemente grande, es decir, podemos hacer que se apruebe con la nota que nos parezca razonable, por debajo de $N/2$ y tan cerca de ese valor como queramos.

- También podemos plantearnos una situación distinta a la anterior, aunque relacionada con ella: encontrar el índice con el que se conseguirá que una determinada nota c se transforme en la menor nota de aprobado, $N/2$, tanto para los modelos F_n como para los G_n. Se trataría de calcular el índice n de la raíz para que se cumpla que si $c\in[0, N]$, entonces $F_n(c)=N/2$. Resolviendo la ecuación correspondiente, despejando n y teniendo en cuenta que es un número natural, debe ser:

$$n = Ent\left[\frac{Ln(N)-Ln(c)}{Ln(2)}\right]+1$$

Análogamente, haciéndolo para las funciones:

$$G_n(x)=\sqrt[n]{Nx^{n-1}} \text{ resulta } n = Ent\left[\frac{Ln(N)-Ln(c)}{Ln(N)-Ln(c)-Ln(2)}\right]+1$$

Como vemos, lo que hemos conseguido con estos resultados de n es que tengamos la seguridad de que:

$$F_n(c)\geq\frac{N}{2} \text{ y que } G_n(c)\geq\frac{N}{2}$$

sólo obtendremos la igualdad cuando c sea un valor para el que n sea un número natural, que no siempre lo tendremos asegurado; de ahí la necesidad de ayudarnos de la función parte entera.

- Otra cuestión interesante podría ser la siguiente: ¿Cuántas veces será mayor la nota corregida respecto de la antigua? Se trata de analizar los cocientes:

$$p=\frac{F_n(x)}{x}=\frac{\sqrt[n]{N^{n-1}x}}{x}=\left(\frac{N}{x}\right)^{n-1/n};$$

$$q=\frac{G_n(x)}{x}=\frac{\sqrt[n]{Nx^{n-1}}}{x}=\left(\frac{N}{x}\right)^{1/n}$$

Si lo queremos, por ejemplo, para $p=2$, podemos calcular x para que la nota modificada por F_n sea igual a $2x$. En este caso tendríamos:

$$x=\frac{N}{2^{n/n-1}}$$

Para el caso general, cuando:

$$p=\left(\frac{N}{x}\right)^{n-1/n}\Rightarrow x=\frac{N}{p^{n/n-1}}$$

Haciendo lo mismo para G_n, obtenemos que:

$$q=\left(\frac{N}{x}\right)^{1/n}\Rightarrow x=\frac{N}{p^n}$$

- El estudio anterior, aunque en algunos momentos pudiera parecer artificial, ha permitido familiarizarnos con los modelos F_n y G_n y, como resultado de todo ello, hemos encontrado una nueva familia de modelos que engloba a las dos anteriores y generaliza la situación. A estos nuevos modelos los denotamos por:

$$H_n^i(x)=\sqrt[n]{N^i x^{n-i}} \quad n\in\mathbb{N},\ i\in\{0,\ 1,\ 2\ \dots\ n-1\}$$

En este nuevo *contexto*, generalización de los modelos F_n y G_n, volvemos a situar los factores de corrección conocidos hasta ahora, verificándose que:

– Para $i=1$, obtenemos los factores G_n.
– Para $i=n-1$, obtenemos los factores F_n.
– Para $i=n/2$, obtenemos el factor $F_2=G_2$.
– Para $i=0$, obtenemos el factor Identidad $y=x$.

De esta forma, hemos conseguido generalizar el modelo de corrección de notas que, inicialmente, era una función radical de índice dos, a una familia de funciones, del mismo tipo o análogas, que contiene a todas las obtenidas anteriormente.

- Por último, si las notas de un examen se distribuyen en el intervalo $[0, a]$, siendo $a<N$ la máxima nota obtenida en la prueba, podemos encontrar un factor de corrección análogo a los anteriores que transforme la nota a en la máxima nota posible a priori, N, y a las demás notas las modifique como lo hace el factor radical. Este factor será:

$$\mathrm{H}_{n,a}^i=\frac{N}{a}\sqrt[n]{a^i x^{n-i}}=N\sqrt[n]{\left(x/a\right)^{n-i}}=N\left(x/a\right)^{\frac{n-i}{n}}$$

Como podemos observar, el factor $H^{i}_{n,a}$ es el resultado de operar, mediante la composición de funciones, los modelos:

$$P_a^N(x)=\frac{N}{a}x \text{ y los } H_n^i(x)=\sqrt[n]{N^i x^{n-i}}$$

es decir, que:

$$H^i_{n,a}(x)=H^i_n\left[P^N_a(x)\right]$$

El colofón de todo lo anterior es una línea de trabajo que simplemente dejamos apuntada y que es muy interesante:

Si las notas del examen fueran muy altas y la profesora quisiera modificarlas a la baja; es decir, deseara disminuir los valores de las calificaciones obtenidas, ¿qué modelos podría utilizar?

Después del estudio anterior, la respuesta es sencilla: las funciones recíprocas de las anteriores, para la composición de funciones, sirven para ese cometido, ya que son funciones potenciales, polinómicas[11], y son simétricas de las funciones radicales respecto de la bisectriz del primer cuadrante, por lo que sirven para disminuir los valores de las notas.

Llegados a este punto podría parecer que el tema está agotado, pero no es así. Siguen apareciendo nuevas preguntas que surgen de manera natural:

¿Podrían servirnos, como modelos de corrección de las notas de ese examen, otros tipos de funciones?

La respuesta a esta pregunta nos ha permitido obtener unos cuantos resultados nuevos, algunos de ellos realmente curiosos, a la vez que nos ha obligado a profundizar en el tema y a utilizar de nuevo los *giros de botón*. Para no extender excesivamente el artículo, presentamos los principales resultados conseguidos:

Modelos con funciones logarítmicas

Deben ser funciones f de tipo logaritmo, que cumplan, por supuesto, *la norma*: $f(0)=0$; $f(N)=N$, y no sean decrecientes en ningún intervalo de su dominio. Podrían ser de la forma[12] $f(x)=\log_a(bx+1)$, $(a>1)$. Claramente $f(0)=0$. Para que $f(N)=N$ se debe cumplir:

$$\log_a(bN+1)=N \Rightarrow a^N=bN+1 \Rightarrow b=\frac{a^N-1}{N}$$

Por tanto podemos considerar la función, que depende de la base a, a la que podemos denotar por:

$$f_a(x)=\log_a\left(\frac{a^N-1}{N}x+1\right)$$

Para el caso de disminuir las notas, podríamos considerar la correspondiente función exponencial[13] (figura2).

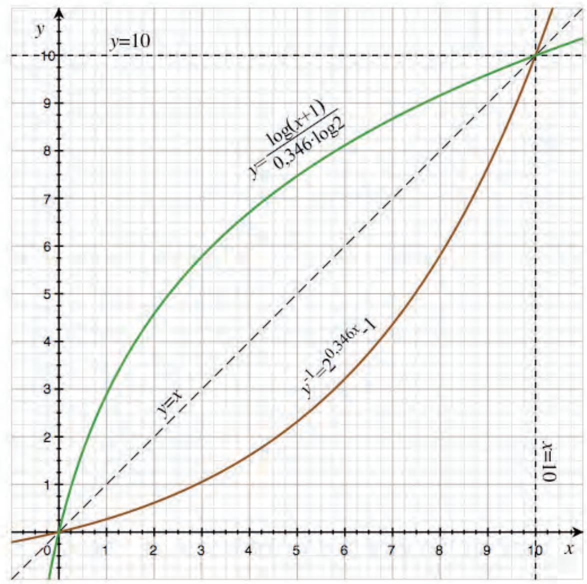


Figura 2

Modelos con funciones trigonométricas

La búsqueda de funciones trigonométricas que respondan a la cuestión inicial del cambio de notas es un problema muy interesante desde el punto de vista matemático y, con la ayuda de un programa informático de representación gráfica, podemos hacer que el proceso tenga características experimentales, sea mucho más ágil y nos permita identificar de forma rápida los modelos que son coherentes con la situación inicial y la resuelven; posteriormente vendrá el análisis de los puntos fuertes y débiles de cada modelo. Aquí vamos a presentar algunas familias de modelos de este tipo que, con el fin de dar la mayor generalidad posible, se han obtenido dependientes de un parámetro:

- La primera de las familias de modelos trigonométricos son las de la forma:

$$T_p^N(x)=x+p\cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right)$$

Estas funciones satisfacen las condiciones acordadas al principio (los valores 0 y N son invariantes) y, dependiendo del valor de p pueden dejar de ser válidas. Analizando sus representaciones gráficas, para el caso $N=10$ y algunos valores de p, en la figura 3 podemos ver que, para ciertos valores de p, las funciones tienen máximo en el intervalo abierto (0, 10), lo que las invalidaría para resolver el problema por dos razones: la imagen o recorrido de la función se sale del intervalo [0, 10] y, además, la función no es siempre creciente en su dominio, que era la condición de *justicia* acordada inicialmente.

Se pueden calcular los valores del parámetro p para los que estas funciones tienen sentido como respuesta al problema inicial. La respuesta a esta cuestión es $p=10/\pi$, que es el mayor valor para el que la función:

$$T_p^N(x)=x+p\cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right) \text{ verifica que } T_p^N(x)\leq 10,\ \forall x\in\left[0,\ 10\right]$$

Además, estas funciones alcanzan el máximo para:

$$x=\frac{10}{\pi}\cdot arc\cos\left(\frac{-10}{\pi\cdot p}\right)$$

que es el valor que anula a la primera derivada de T_p^N.

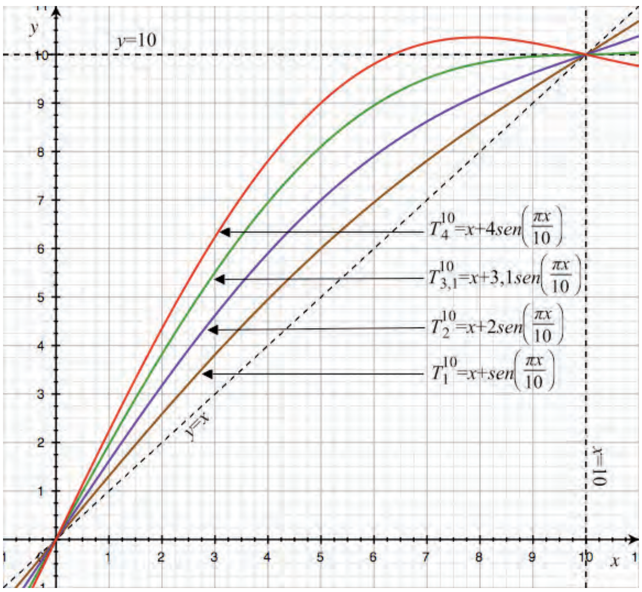


Figura 3

- La otra familia de modelos trigonométricos es la dada por la ecuación:

$$S_p^n(x)=x+p-p\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot x}{N}\right)$$

Estas funciones también verifican las condiciones impuestas inicialmente, ya que los valores 0 y N son invariantes, pero, en función de los valores de p, pueden dejar de ser válidas si dejan de ser estrictamente crecientes. Como vemos en la figura 4, para N=10, el cálculo de los posibles valores del parámetro p, para los que el modelo es adecuado a la realidad, es un bonito problema para el que podemos dar algunas orientaciones que ayuden a su resolución: las funciones sirven y no tienen máximo si $p<5/\pi$.

Para los valores $p\geq 5/\pi$ las funciones tienen máximo aunque su imagen sigue siendo el intervalo [0, 10]; estas funciones podrían valer si relajamos la condición de ser estrictamente creciente en todo el intervalo. Por último, utilizando un programa informático de representación gráfica, podemos ver que para $p\approx 2{,}2$, la función alcanza el máximo en el valor x=6,3386 y su imagen es aproximadamente 10. Para los valores de p mayores que el anterior, la imagen de la función correspondiente se sale del intervalo [0, 10], por lo que no es válida.

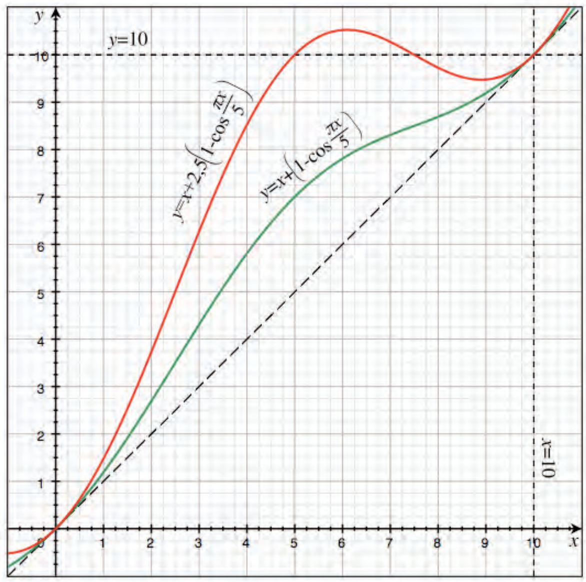


Figura 4

Nos queda responder a la cuestión inversa: ¿qué funciones podrían resolvernos el problema de bajar las notas? En el caso de las funciones trigonométricas, vamos a presentar algunos de los modelos que nos lo resuelven:

$$T_p^N(x)=x-p\cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right);\ S_p^n=x-p+p\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)$$

Queda para el lector la tarea de averiguar los posibles valores de los parámetros, para los que la función correspondiente se adapta a las condiciones del problema real. También es muy interesante, para la clase, trabajar los distintos sistemas de medida de ángulos y ver la necesidad de utilizar el radian como unidad.

Algunos modelos para la ficción

Las conexiones entre el mundo real y el mundo matemático nos desvelan, a veces, una multitud de posibilidades que, aunque no sean válidas desde el punto de vista de la realidad, desde el punto de vista matemático formal son coherentes y podrían ser válidas en *otras realidades.* ¿Qué queremos decir con esto? Nos estamos refiriendo a situaciones de ficción, que surgen de manera natural cuando nos adentramos en la realidad. Por ejemplo:

¿Hay modelos de corrección de notas que aumenten unas y disminuyan otras?

Proponemos a nuestros lectores el estudio de la familia de funciones de la forma:

$$G_p^n(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{N}\right)$$

Presentamos las representaciones gráficas de algunas de ellas, para que se puedan observar las modificaciones que producen en las notas de la prueba. Como puede observarse en la figura 5, tomando N=10 y valores de p>0, aumentan las notas pertenecientes al intervalo [5, 10) y disminuyen las pertenecientes al intervalo (5, 10], quedando el valor 5 como un invariante de las funciones, además de ser el valor en que se encuentra el punto de inflexión del interior del intervalo [0, 10].

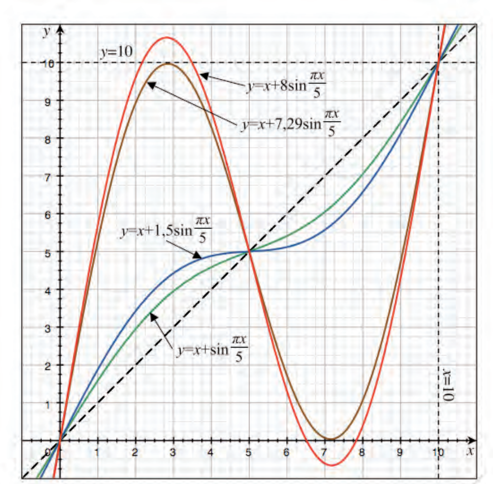


Figura 5

Como podemos ver, p no puede tomar cualquier valor, pues puede ocurrir que la imagen de la función no se mantenga en el intervalo [0, 10]. Dejamos al lector el estudio de los posibles valores del parámetro y lo que ocurre cuando tomamos valores p<0.

Para acabar con este apartado de *ficción*, qué mejor que presentar un modelo absolutamente caprichoso, para un profesor o profesora de *ficción* y unos estudiantes también de *ficción*. Nos estamos refiriendo a la función[14] $y = x+\text{sen}(\pi x)$, de la que presentamos su gráfica[15] en la figura 6.

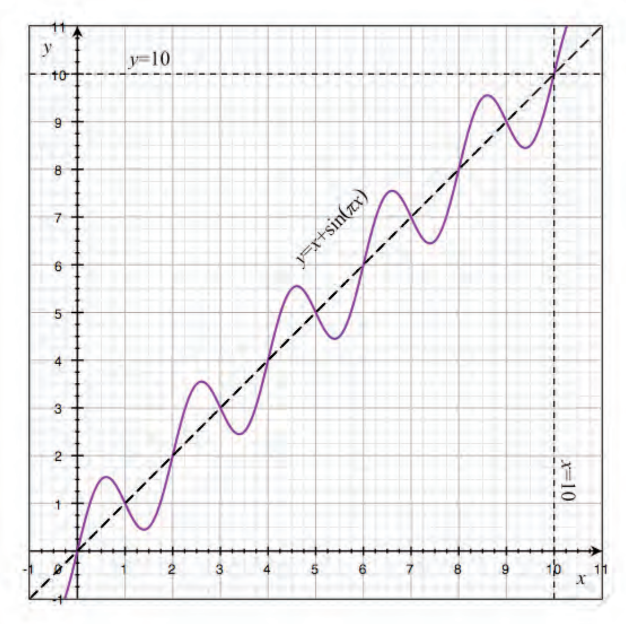


Figura 6

Propuesta para la clase

Fundamentación didáctica

Comenzaremos recordando la situación inicial:

> Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra/profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección de esta forma: si la calificación original era , en una escala de 0 a 100 , pasaría a ser . Es decir, si la calificación inicial fue x=81, la corregida sería y=90[16].

El enunciado responde perfectamente a la idea de *problema semilla*, de Davis y Hersh, (1988) y resaltamos esto porque tiene mucho interés y utilidad para clase. En ningún caso como en este ejemplo se puede ver cómo de la semilla se produce un bosque entero:

> Comienzo con un enunciado inicial, al que llamaré "semilla". Este enunciado ha de ser interesante y muy sencillo. El ejercicio tiene por propósito regar la semilla y hacerla crecer y convertirse en una planta recia. De ordinario ofrezco a mi clase una variedad de "simientes", y ellos eligen la que quieren regar, en función de su experiencia[17].

Por otra parte, como se ha podido ver a lo largo de la exposición de los resultados matemáticos previos, la situación inicial es un ejemplo típico de modelización matemática, entendida como una de las competencias matemáticas que aparecen, entre otros, en Niss, (2003) y OCDE, (2004). Más adelante, en la propuesta didáctica, se intenta trabajar todas las capacidades incluidas en la competencia de *modelar matemáticamente.*

Partiremos de la noción de modelo matemático extraída de Davis y Hersh, (1988):

> Un modelo matemático es cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones matemáticas, diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad. Tal prototipo puede ser una entidad física, biológica, social, psicológica o conceptual; tal vez, incluso, otro modelo matemático.
>
> El término ecuaciones puede ser reemplazado por el de *estructuras* pues no siempre se trabaja con modelos numéricos[18].

Sobre el proceso de modelización matemática, debemos tener en cuenta que, en la actualidad se están dando pasos importantes en la descripción del mismo, sobre todo en lo referente a los procesos mentales que el estudiante pone en marcha en sus distintas fases, así como en los bloqueos que pueden surgir en algunos momentos.

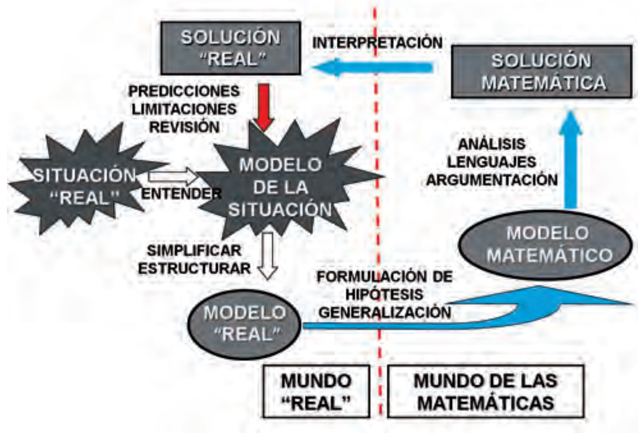
Para representar el proceso completo de modelización, vamos a utilizar una adaptación del esquema de Blum (2005), que mejora la anterior propuesta de Blum y Niss (1991). En esta representación aparece una nueva subdivisión de la parte del mismo que describe el proceso en el mundo *real*; esto, que anteriormente no se había descrito explícitamente, profundiza en varios aspectos que evidencian la complejidad de la realidad.

Sin entrar a analizar en profundidad el proceso de modelización, sólo señalar dos elementos de interés:

a) el paso del modelo real al modelo matemático también es denominado matematización horizontal y es cuando se conecta el mundo real con el mundo matemático;

b) la conexión entre el modelo matemático y la solución matemática es denominada como matematización vertical, que se produce dentro del mundo de las matemáticas.

Lo presentamos[19], a continuación, acompañado de algunos procesos mentales que aparecen en cada uno de los momentos y que, desde nuestro punto de vista, son muy importantes en cada fase:



Por otra parte, en la propuesta didáctica también ocupa un papel importante *la contextualización* como forma de conexión entre lo académico y lo cotidiano[20], que aparece en Arcavi (2002) expresado de la manera siguiente:

> Es notablemente evidente el éxito de este enfoque [matematización]. No obstante, la matematización aparece como una vía de sentido único: desde lo cotidiano a lo académico. Propongo considerar otra idea que podría resultar importante cuando se trate de conectar significativamente lo académico con lo cotidiano: la noción de contextualización. La contextualización va en sentido opuesto de la matematización, pero la complementa. Así, para dar significado a un problema presentado con vestido académico, se puede recordar, imaginar o, incluso, construir un contexto, de manera tal que las particulares características contextuales sirvan de andamio y ampliación de las matemáticas relativas a dicho problema [21].

Para aquellos lectores que tengan dudas sobre si la contextualización siempre se da entre el mundo matemático y el mundo real, él mismo nos ha aclarado la idea:

> Concuerdo con que la contextualización puede ser un nexo entre dos situaciones o temas cualesquiera y no necesariamente cuando uno de ellos es de la "vida real", sino cuando una sirve de contexto (o de modelo) para la otra[22].

Otro aspecto fundamental es la búsqueda de conexiones entre diferentes contextos y estructuras matemáticas, que es una actividad esencial en todo proceso de investigación matemática. Para mostrarlo, vamos a apoyarnos en las ideas de Cañón (1993) sobre el papel de las conexiones en el proceso de creación y descubrimiento en matemáticas:

> Los nuevos objetos sólo llegan a serlo si el mundo de los objetos y relaciones anteriormente existentes encaja dentro de lo nuevo. En la actividad del matemático, *su alumbramiento* requiere una familiaridad previa con el universo de relaciones con el que trabaja, y su aportación consiste precisamente en ofrecer la explicitación de nuevas conexiones, nuevos niveles de abstracción desde los que resituar lo ya conocido[23].

Las conexiones nos permiten, entre otras cosas, encontrar nuevos contextos en los que dar sentido a las ideas matemáticas, reformularlas, transformarlas, situarlas en un nuevo marco y allí estudiarlas. Por eso al trabajar las conexiones estamos profundizando, también, en la contextualización.

> La creación se manifiesta de varios modos conducentes a alumbrar relaciones y objetos no existentes –no expresables en lenguaje- anteriormente. El descubrimiento consiste, sin embargo, en hacer patentes las relaciones entre lo nuevo y lo heredado y eso se da en el lenguaje[24].
>
> Lo nuevo sólo entra a formar parte del universo matemático en la medida en que sus nexos con lo originario se hacen patentes. Por eso, los avances son siempre de la creación de lenguajes que faciliten esta tarea y junto con ellos, nuevos métodos de demostración y posibles principios de validación de esas nuevas formas de demostración[25].

Como podemos ver en las dos últimas citas, el *alumbramiento de relaciones y objetos* forma parte del proceso creativo, y el descubrimiento se sitúa a partir del encuentro de conexiones entre los dos contextos, el inicial y el nuevo, jugando, el lenguaje, un papel muy importante, ya que nos permite expresar y hacer entendibles esos nuevos objetos, las relaciones y los métodos propios.

Por otra parte, también creemos que este tipo de búsqueda aparece, con mayor intensidad, en la fase de *matematización vertical* del proceso; es decir, dentro del campo de las matemáticas, en contraposición con la *matematización horizontal*, que intenta encontrar las leyes generales y regularidades del *modelo real*.

Por último, señalaremos que la propuesta didáctica quiere hacer de la resolución de problemas y la investigación matemática los ejes principales de su desarrollo, entendiéndolos no sólo como una *opción metodológica o didáctica* para la clase de matemáticas, sino como una *opción epistemológica*[26], una forma de entender y mostrar la estructura del conocimiento matemático, y una forma de aprenderlo. A este respecto, conviene recordar las ideas de Legrand (1996) sobre *el debate científico en clase de matemáticas:*

> Un principio epistemológico: aquel que no haya tenido realmente la ocasión de jugar con auténtica libertad un verdadero juego científico, no tendrá muchas ocasiones de interesarse por los razonamientos esenciales de la ciencia, de comprender la amplitud real de los resultados que establece (comprender la potencia, pero también los límites, de estos algoritmos y formas de pensar) y a continuación, explotar pertinentemente sus resultados para resolver más científicamente los problemas que se le presenten[27].

Propuesta didáctica

La propuesta didáctica se puede plantear a partir del 4º cursode Educación Secundaria Obligatoria (ESO), aunque los modelos y problemas más complejos son más adecuados para alumnos/as de Bachillerato que pueden hacer uso de sus conocimientos de análisis matemático para resolver algunas cuestiones de mayor dificultad.

Por otra parte, la propuesta responde a unos planteamientos que, en la medida de lo posible, vamos a intentar hacer explícitos en las líneas que siguen.

Objetivos, metodología y orientaciones didácticas

En primer lugar vamos a enumerar los principales objetivos que nos proponemos. Éstos son los siguientes:

- Profundizar en el conocimiento de algunos modelos funcionales que habitualmente se trabajan menos en clase: radicales, logarítmicos y trigonométricos.
- Practicar la modelización matemática como una de las competencias matemáticas más importantes conectada al proceso de matematización de la realidad.
- Reflexionar sobre la utilidad e idoneidad de los modelos matemáticos utilizados, haciendo explícitas sus limitaciones y proponiendo modificaciones que los hagan más adecuados a la situación y a las condiciones que se tengan.
- Utilizar programas informáticos de representación gráfica, valorando su potencia como herramientas indispensables en el quehacer matemático y el tratamiento de algunas situaciones.
- Contribuir al desarrollo de la competencia matemática que hace referencia a la habilidad para comunicarse con las matemáticas y comunicar sobre las matemáticas.
- Acercar al alumnado al verdadero rostro de las matemáticas, a los modos y métodos de trabajo específicos de resolución de problemas, cuando se llevan a cabo pequeñas investigaciones.
- Preparar a nuestros estudiantes para la *invención*, incrementando el gusto por ella y regando sus *gérmenes inventivos* [28].
- Diseñar modelos matemáticos cuyo resultado cumpla ciertas premisas establecidas de antemano[29].

En segundo lugar, la metodología a emplear, entendida en su acepción etimológica como *camino* a seguir para conseguir los objetivos, tiene unas características que se concretan en las siguientes ideas:

- Los contenidos que se trabajan van aumentando gradualmente su complejidad y abstracción: desde los modelos funcionales más pegados a la realidad, se van introduciendo otros menos habituales hasta llegar a algunos que, aunque no son propios de la vida cotidiana, son igualmente válidos desde el punto de vista matemático y formal.
- El uso del ordenador y de programas de representación gráfica facilita mucho las tareas y provoca en el alumna-

do una actitud muy positiva para seguir investigando, mejorando los modelos y preguntándose cuestiones de mayor dificultad y complicación.

- La forma de trabajo del alumnado en clase es en pequeños grupos, entre dos y cuatro componentes. En ellos elaborarán un documento colectivo que servirá para la evaluación. Posteriormente, en la parte final, de mayores complicaciones, se propondrá pasar al trabajo individual, en función del interés suscitado en el alumnado. En esta fase, los alumnos/as que tengan interés en profundizar en los modelos, llevarán a cabo un informe individual, en el que recogerán los resultados conseguidos, que también servirá para la evaluación de los aprendizajes y su conexión con el desarrollo de las competencias matemáticas.
- El papel del profesorado se vertebra alrededor de dos aspectos fundamentales: por un lado plantea secuencialmente las cuestiones y problemas a resolver, y por otro orienta a los grupos en las dificultades y en los resultados que vayan encontrando, estimulando al alumnado a seguir profundizando y a que se planteen ellos mismos las preguntas y busquen las respuestas más adecuadas.
- El ambiente del aula es de enorme interacción entre el alumnado, en los grupos de trabajo, y entre éstos y el profesorado. Las periódicas puestas en común dirigidas por el profesorado facilitan la reestructuración de los esquemas mentales, la reflexión personal de cada alumno o alumna y, por tanto, el aprendizaje significativo.

Como decíamos más arriba, el trabajo en clase debe ir acompañado de una reflexión previa en la que tomemos algunas decisiones sobre, entre otros, estos asuntos:

- Nivel académico en el que se va a desarrollar la experiencia didáctica. Esta propuesta no está destinada, en un principio, a ser puesta en práctica en un nivel único y concreto, depende del tipo de funciones que se utilicen a modo de "modelos de corrección de los resultados del examen" y de lo que se pretenda hacer con ellas: medias, porcentajes, gráficas, inversas, comparaciones, propiedades y, para niveles superiores, límites y derivadas.
- Objetivos didácticos que nos planteamos. En función del contexto de la clase y de las intenciones que nos planteemos, podemos llevar a cabo la propuesta con mayor o menor profundidad. Lo que es claro es que puede ser adecuada para profundizar en algunos de los tipos de funciones que, por lo general, menos aparecen en los niveles de ESO y Bachillerato: las funciones radicales (a las que hemos dedicado fundamentalmente nuestro estudio) y las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas diferentes a las típicas, pues nuestro objetivo será determinar sus argumentos, ajustar sus gráficas a unos fines realistas y, en definitiva, crear nuestras propias herramientas, más que trabajar con otras ya dadas.
- La metodología que vamos a emplear. Conviene tener claro si vamos a trabajar en grupos, en parejas o de forma individual, así como el papel de profesor y alumnado en el proceso, el uso de nuevas tecnologías, etc.
- Actividades previas de modelado. Si la temporalización lo permite, sería también aconsejable realizar algún ejercicio previo como ejemplo de modelado con funciones, como pueden ser el del forense de la policía científica, tan en boga en las series televisivas actuales, en las que, usando las longitudes de los fémures humanos hallados en el macabro escenario de un crimen, pretende estimar la estatura de aquellos a los que pertenecieron; el del fabricante de camisas que debe relacionar el tamaño del cuello con el de los puños, a fin de que entren en los márgenes tolerables para una determinada talla, etc.

Podemos concretar estas actividades haciendo que los chicos y chicas obtengan una colección de datos experimentales lo suficientemente variados y realizando, con dichos datos, pequeños ejercicios para intentar aproximar la relación entre las dos variables que se ponen en juego usando una función como modelo, así como intentando comprender y discutiendo lo que significa que el modelo se ajuste mejor o peor a la situación que se está trabajando. ¿Qué queremos decir con que el modelo se ajusta bien o mal? ¿Cómo medir lo fino que es ese ajuste?

Sería interesante llegar a acuerdos: establecer algunas normas de "baremo" y unos criterios que nos permitan, por consenso, decidir qué grupo ha estado "más cerca" de los datos experimentales.

Por el camino, aprendemos a dibujar e interpretar (y podemos comprobarlo en el ordenador) las gráficas que van saliendo, analizar los tipos de ajustes…

Algunos ejemplos de actividades

Después de haber elaborado un marco de referentes didácticos, pasamos a la acción llevando la propuesta concreta a la clase. Comenzamos planteando el problema origen de esta propuesta, el de la profesora israelí:

Actividad 1

Una estudiante de escuela secundaria israelí regresó a su hogar contando que su profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección en forma de función, $y = f(x)$, en el que la calificación original, en una escala de 0 a 100, usual en aquel país, era x y pasaría a ser y una vez corregida. Es decir, si la calificación inicial fue x=81, la corregida sería y=f(81). ¿Qué factores de corrección podemos proponer a la profesora para que modifique las notas? Expresarlos en forma algebraica y representarlos gráficamente. Analizar las ventajas e inconvenientes de cada uno.[30]

Aplícalos a los resultados siguientes de un examen en una clase de 25 alumnos y alumnas y analiza su idoneidad:

Notas demasiado bajas	1'5	3	2'5	6	4'5	7'25	3'75	5'5	3'5
	6	4'5	5	1'5	3	0'25	2	4	
$\bar{x} = 3'75$	5'5	4	3'25	4'75	2'75	4'25	3'5	2	

¿Cómo afectan los cambios a la media aritmética de las notas?

Actividad 2
La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección: si la calificación original era x (en una escala de 0 a 100), ésta devendría en $10\sqrt{x}$. Es decir, si la calificación inicial fue 81, la corregida sería 90. Aparentemente, este factor es común entre los maestros en Israel.

Adapta el factor de corrección de la maestra israelí a nuestro país, donde las notas están entre 0 y 10. Exprésalo algebraicamente y haz su representación gráfica. Analiza sus ventajas e inconvenientes respecto a los anteriores.

Para que puedas analizar otras opciones relacionadas con la de la maestra israelí, te proponemos el factor de corrección siguiente: a cada nota le asignamos la media aritmética entre ella y la nota máxima posible. Este factor regala la mitad de la distancia que hay entre la nota original y la máxima.

¿Qué factor es más beneficioso para los estudiantes, la media aritmética entre la nota original y la máxima o la media geométrica entre ellas?

Ampliando el estudio anterior, investiga lo que es la media armónica de dos valores y compárala con la media aritmética y la media geométrica. ¿Cuál es la más beneficiosa?

Actividad 3
Averigua el factor equivalente al de la actividad anterior para los casos en los que el intervalo de posibles calificaciones que un estudiante puede obtener en el examen sean los siguientes:

Intervalo de notas	Factor de corrección
[0, 100]	$y = 10\sqrt{x}$
[0, 10]	$y = \sqrt{10x}$
[−5, 5]	
[10, 50]	
$[a, b]$	

Actividad 4
¿Podríamos variar este factor para obtener otros similares? Prueba introduciendo algún cambio en su expresión algebraica: índice de la raíz, exponente de 10 o exponente de x. Analiza las características de cada uno, su idoneidad y sus limitaciones.

Las actividades siguientes proponen profundizar en los modelos de corrección de tipo radical, explorando y descubriendo sus principales propiedades. Pasamos directamente a la actividad en la que se propone otro cambio de modelos.

Actividad 9
Construye algún factor de corrección de tipo logarítmico que sirva para mejorar las calificaciones de un examen respetando las condiciones estipuladas.

Actividad 10
Comprueba que las siguientes funciones trigonométricas:

$$y = x + \left(1 - \cos\frac{\pi x}{5}\right) \text{ e } y = x - \left(1 - \cos\frac{\pi x}{5}\right)$$

también se pueden usar a modo de factores de corrección.

¿Qué tipo de situación problemática en cuanto a los posibles resultados "extraños" de un examen podría resolver cada una?

Haz sus representaciones gráficas y analiza las semejanzas y diferencias que hay entre ellas.

Las actividades siguientes profundizan en los modelos trigonométricos hasta donde se pueda con los estudiantes, teniendo presente que se puede trabajar un mayor nivel de profundización encomendando, a alguno de ellos, la elaboración de algún trabajo monográfico sobre el tema; esto suele dar muy buenos resultados.

Englobamos en la actividad siguiente algunas de las cuestiones posteriores, para no alargar el documento.

Actividad 14

El objetivo principal de las actividades anteriores ha sido subir las notas de un examen, utilizando para ello una familia de funciones como factores de corrección. Para completar el estudio nos vamos a estudiar otras posibilidades que podíamos habernos encontrado:

¿Habrá factores de corrección para bajar las notas de un examen muy fácil?

¿Habrá factores de corrección que aumenten o disminuyan de una forma distinta a como lo hacen las funciones anteriores?

¿Habrá factores de corrección que aumenten unas notas y disminuyan otras?

¿Habrá factores de corrección que aumenten unas notas y disminuyan otras de manera caprichosa, por ejemplo, que aumente las notas entre 0 y 1, disminuya las notas entre 1 y 2, y así sucesivamente?

Conclusiones

Pensamos que uno de los desafíos en la didáctica de la modelización es encontrar situaciones interesantes para los alumnos, de manera que no sólo les motiven, sino que el mundo que se está modelando les sea conocido y, por lo tanto, puedan aportar preguntas, creatividad, etc. más allá de situaciones modelizables que les sean más extrañas, o que requieran conocimientos de base que ellos no tienen, que duplicarían el esfuerzo que ya les supone a los alumnos este tipo de trabajos/investigaciones lamentablemente no muy habituales en clase de matemáticas.

Por otra parte, es bastante complicado intentar reflejar toda la riqueza de la experiencia en unas pocas páginas. Por nuestra parte lo hemos intentado, aunque quizás queden muchos detalles implícitos; si fuera así pedimos disculpas por ello. En cualquier caso, deseamos acabar enumerando una serie de conclusiones[31], que pensamos pueden ser útiles para los profesores y profesoras interesados en estos temas, centrándonos en dos aspectos: a) ideas para el profesor/a sobre las actividades y tareas a proponer al alumnado; y b) sobre el trabajo del profesor/a en este tipo de procesos y con este enfoque:

Sobre las características de las actividades que propongamos a la hora de trabajar en clase, debemos señalar las que nos parecen más reseñables:

- Adecuadas para el uso de la particularización, la analogía y la generalización.
- Susceptibles de variaciones y modificaciones.
- Con pocas variables y que sean fácilmente medibles.
- Propicias para un trabajo posterior a su resolución.
- Surgidas de la realidad, pero no exclusivamente.

Por último, algunas orientaciones que pueden sernos útiles a la hora de plantearnos llevar a la práctica algunas de las ideas presentadas. El profesorado debe:

- Practicar la resolución de problemas con un marco teórico adecuado.
- Conocer la estructura matemática que subyace en cada problema o situación a plantear, excepto en alguna investigación más profunda.
- Plantearse, en sus objetivos para cada curso, trabajar dos o tres de estas tareas.
- Elegir la forma de trabajo que crea más idónea para cada problema o situación.
- Tener como objetivo prioritario el proceso que se genera a partir del problema semilla, no la solución de la actividad.
- Ser consciente de que casi todos los problemas y situaciones pueden hacerse ideales.
- Tener en cuenta que los conceptos de “problema real” o “realidad matematizable” son subjetivos.

Y uno de los ingredientes más importantes de nuestro trabajo*: el entusiasmo del profesorado, el disfrute personal con lo que decimos y hacemos en clase, son virus muy contagiosos para bastantes estudiantes.*

NOTAS

1 Por ejemplo, si subimos un punto la nota de algún alumno, pasar de un 4 a un 5 supone un aumento de un 25% en la nota; en cambio pasar de un 9 a un 10 supone un aumento de algo menos de un12%. En España las calificaciones se sitúan entre 0 y 10 puntos.

2 Este proceso, en España, se denomina cotidianamente *participar en un tribunal de oposiciones*. El tribunal lo componen 5 profesores y lo de oposiciones es para ilustrar la idea de que se compite con el resto de los participantes para obtener una de las plazas de profesor convocadas.

3 Arcavi, A. (2007). *El desarrollo y el uso de los símbolos*, p. 73.

4 Cuando, posteriormente, se trabajen modelos más complicados, y para favorecer que aumente el número de factores que se pueden variar y de tipos de funciones con los que trabajar, sería interesante que se permita a los alumnos utilizar todo tipo de modelos, aunque la función sea decreciente en algunos intervalos. Algunos de nuestros ejemplos más complejos tampoco cumplirán esta norma de *justicia*.

5 En su conferencia plenaria, dentro de las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (XIII JAEM), julio de 2007, Granada, España.

6 En el caso de que alguna nota haya alcanzado el máximo valor posible, a=N,

$$P_N^N(x) = \frac{N}{N}x$$

el factor es el factor identidad, que no modifica la nota.

7 Este modelo de corrección de las notas no es otra cosa que la media geométrica entre la nota máxima posible y la nota obtenida (lo cual ya a una indicación cualitativa del "lugar" al que llegará esa nota, es decir, será más alta que la original pero menor que ~~la~~ mitad entre ésta y la máxima, que sería la media aritmética.

8 En el caso español, el factor análogo es $f(x)=\sqrt{10x}$, $x\in[0, 10]$

9 Hofstadter, D. R., (1990). Analogías con fluidos y la creatividad humana, pp. 89-90. Textualmente, las ideas de Hofstadter son las siguientes:

> El aspecto más importante del descubrimiento matemático (contrariamente a la imagen habitual que se tiene de la demostración como el núcleo de las matemáticas) es la construcción de nuevos conceptos, uno detrás de otro, generalizando cada vez algún aspecto de los anteriores. Por supuesto, cada construcción tiene propiedades que no pueden ser controladas, sino tan sólo descubiertas, en este sentido las matemáticas combinan la invención y el descubrimiento.
>
> La mayor parte de los nuevos conceptos se producen mediante ciertos tipos de recetas no escritas que todos los matemáticos entienden intuitivamente, y que normalmente se pueden caracterizar por gloriosos giros del botón; esto es, partir de un fenómeno familiar, encontrarle algún aspecto que hasta ahora había permanecido fijo (éste sería el botón) convertir explícitamente este aspecto en una variable, y ver qué sucede cuando toma valores distintos del habitual.

10 Cuando n=2 ambos factores de corrección coinciden $F_2(x)=G_2(x)$ como habíamos comentado anteriormente.

11 Por ejemplo, para las funciones $F_2(x)=G_2(x)$ la recíproca es $y= x^2/N$.

12 También podíamos tomar la forma $y = b\cdot\log_a (x+1)$. En este caso debe ser

$$b = \frac{N}{\log_a(N+1)}$$

para que se cumpla que la imagen de la nota máxima, N, sea igual a N.

13 En cada uno de estos casos, podríamos construir la respectiva función recíproca, que sería una función exponencial que corregiría a la baja las calificaciones de un examen demasiado fácil. Se trataría de la función:

$$f_a^{-1}(x) = \frac{N}{a^N - 1}\left(a^x - 1\right), \text{ exponencial de base } a > 1.$$

14 Es un caso particular de la familia de funciones:

$$G_p^n(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{N}\right), \text{ para } p=1, n=10, N=10.$$

15 Si a esta función le sumamos una constante c tal que "eleve" su gráfica por encima de f(x)=x, no cumplimos con la primera condición de justicia de lkas sugeridas anteriormente, pero si con la segunda. Sería interesante analizar si habría algún criterio pedagógico que justifique intercalar intervalos de aumento con otros de disminución de notas.

16 Arcavi, A. (2007). *El desarrollo y el uso de los símbolos*, p. 73.

17 Davis, P. y Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*, pág. 216.

18 Davis, P. y Hersh, R. (1988). Ob. cit., p. 67-68.

19 Adaptado de Blum, W. (2005). "Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling task, p. 17-21. Se le han añadido algunas actividades mentales específicas que se desarrollan en cada una de las fases del proceso.

20 Lo cotidiano en el sentido de familiar y real para el que lo experimenta. Por tanto, lo familiar puede ser totalmente abstracto y formal y formar parte de la realidad.

21 Arcavi, A., (2002). Everyday and Academic Mathematics in the Classroom, p. 13

22 Palabras textuales del profesor Arcavi.

23 Cañón, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento*, p. 356.

24 Cañón, C. (1993). Ob. cit., p. 356.

25 Cañón, C. (1993). Ob. cit., p. 357.

26 Cañón, C. (1993). Ob. cit., p. 343: "La perspectiva abierta por el planteamiento de la HEURÍSTICA, lleva los primeros ensayos de Polya a un nuevo nivel. No es sólo una cuestión metodológica de un quehacer concreto, es también una sistemática epistemológica. La fase creativa en Matemáticas no está regida por los análisis lógicos, sino por una indagación que ha de arriesgar nuevas visiones de relacionar conceptos y de crear otros nuevos. Las consecuencias que este planteamiento tiene para la enseñanza de la Matemática es muy grande, y ya se ha empezado a notar."

27 Tomado de Legrand, M., (1996). El Debate científico en clase de matemáticas. En *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*, p. 171.

28 Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*, p. 465. La idea aparece concretamente así: "El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición. Si esto es así, y yo lo creo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas. La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto por ella. En cualquier caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante."

29 No sólo pretendemos que se analicen los efectos de utilizar los diversos tipos de modelos de corrección que proponemos (a quiénes favorecen, perjudican, cuánto, etc), también es igual o más interesante el problema inverso: diseñar modelos para que se consigan ciertos efectos que nos podamos plantear. Por ejemplo, yo como profesor puedo querer que no se beneficien ni los que tienen las mejores notas ni los que tienen las peores, y quiero que mejoren su nota aquellos que están al borde de aprobar (o cualquier otra exigencia que nos parezca interesante). ¿Qué modelo puedo diseñar para este propósito? Puedo, por ejemplo, dibujar un gráfico que se ajuste a mis demandas y a partir de ahí buscar la expresión analítica que más se ajuste (entre las que ya manejamos o, mejor aún, crear una nueva).

30 Aquí es donde suele aparecer una de las primeras cuestiones aludidas anteriormente. ¿A qué llamamos razonable cuando corregimos los datos de un examen? ¿A que cumplan la "norma" y que sean "justas" como tratamos anteriormente? ¿Otros condicionantes?

31 Que podemos considerar como orientaciones y consejos para los colegas, extraídas de un proceso de innovación y la posterior reflexión sobre la práctica del aula. No son el resultado de una investigación en educación matemática, sino el fruto de la puesta en práctica de algunas ideas fundamentadas, que, con frecuencia nos presentan los verdaderos investigadores en didáctica de las matemáticas, y que vienen a poner en valor las ideas de estos últimos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A., (2002). Everyday and Academic Mathematics in the Classroom. A Monograph edited by M. Brenner and J. Moschkovich (Eds.) *Journal for Research in Mathematics Education*. p. 12-29. Existe una versión en castellano, publicada en la revista *Números.*

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso de los símbolos. *Uno. Revista de las matemáticas*, nº 44, 59-75.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 37-68.

Blum, W. (2005). "Filling Up"–the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling task. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, p. 17-21. San Feliu de Guixols.

Cañón, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento.* Madrid: Universidad Pontificia Comillas de Madrid.

COMAP (2002): *Precalculus. Modeling our world*. New York: WH Freeman and Company.

Davis, P. y Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona: Ed. Labor y MEC.

Hofstadter, D. R., (1990). Analogías con fluidos y la creatividad humana, en Wagensberg, J. (edit) *Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea* (pp. 71-93). Barcelona: Tusquets Editores.

Legrand, M., (1996). El Debate científico en clase de matemáticas. *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica* (pp. 171-190). Francia: Ed. Topiques, Frouard.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En Gagatsis, A., Papastavridis, S. (Edit), *3er Mediterranean Conference on Mathematical Education. Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society*, (pp. 115-124). Atenas, Grecia.

OCDE, (2004). *Marcos Teóricos PISA 2003.* Madrid: Ed. MEC-inecse.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Edit. Tecnos.

Taton, R. (1973). *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos*. Barcelona: Ed. Labor.

Este artículo fue recibido en *Suma* en diceiembre de 2010 y aceptado en mayo de 2011

suma+ 67
Junio 2011, pp. 41-46

Sage: una aplicación libre para matemáticas

Sage es un software que nos permite experimentar con las matemáticas. Gratuito y de código abierto, constituye la apuesta más novedosa para utilizar las TIC en nuestro ámbito. La integración de múltiples herramientas, la posibilidad de acceso remoto por internet y el énfasis por la decencia y la libertad conforman sus más notables características. Por su potencia y versatilidad auguramos que Sage se convertirá en el estándar de facto para la enseñanza con ordenador en las matemáticas de niveles medio y superior.

Palabras Clave: Divulgación, matemáticas computacionales, experimentación, software matemático, secundaria y universidad.

Sage: A free application for mathematics

Sage is a computer application that allows direct experimentation with mathematics. Free and open source, it is the newest asset to use ICT in our area. The integration of multiple tools, the possibility of remote access via the internet and the emphasis for decency and freedom make their most notable features. For its power and versatility we foresee Sage as the de facto standard for teaching mathematics with computers in secondary and university levels.

Key words: Divulgation, computational mathematics, experimentation, mathematical software, high school and university.

Introducción

En los últimos números de *Suma* hemos leído con interés y agrado un artículo (Rodríguez, 2009) y dos partes de una trilogía (Real, 2009-1 y Real, 2009-2) sobre un sistema de cálculo simbólico, Maxima (http://maxima.sourceforge.net/). Insistiendo en el empeño queremos contribuir con estas notas a la difusión entre el profesorado de una herramienta nueva probablemente útil para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: *Sage, Software for Algebra and Geometry Experimentation* (http://www.sagemath.org/). Sage, de hecho, incluye Maxima, además de ofrecer otras nuevas potencialidades para su uso en las aulas.

En este artículo esbozamos en la primera sección el origen de Sage y las motivaciones de su desarrollo, así como algunas reflexiones sobre la libertad. La segunda sección trata sobre las computadoras que pueden ejecutarlo e introduce el *notebook* de Sage, una aplicación para ejecutar Sage desde un navegador web. En la tercera sección se ilustran brevemente algunas características del software y se hace un rápido repaso de algunas de sus posibilidades de cómputo en relación con la enseñanza. La cuarta sección explica cómo y dónde descargarlo y usarlo, y proporciona algunos enlaces y referencias para aprender más y para instalar un servidor de Sage propio accesible a través de Internet. Concluimos con una muestra de las posibilidades que nos ofrece Sage, sacando todo el rendimiento al modelo de desarrollo del software libre.

Historia de Sage

El creador de Sage es William Stein (http://wstein.org/), profesor de la Universidad de Washington. Stein tiene una gran experiencia en la utilización de sistemas de álgebra computacional (CAS, por sus siglas inglesas) para el estudio de problemas en teoría de números. Después de trabajar con diversos sistemas, utilizó y ayudó a desarrollar el sistema Magma (http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/), un CAS comer-

F. Botana
Universidad de Vigo
J. Escribano
Universidad Complutense de Madrid
M. Á. Abánades
Universidad Complutense de Madrid

cial muy especializado desarrollado en Australia. Su amplio conocimiento de Magma le permitió ver las dificultades que entraña el modelo de software comercial en general, y del software científico comercial en particular. A pesar de descubrir y documentar fallos en el sistema Magma, los propietarios del sistema no se mostraron muy partidarios de corregirlos. Es más, tampoco se mostraron especialmente comunicativos a la hora de explicar en detalle el funcionamiento de ciertos algoritmos fundamentales. Lo cual, tratándose de software para el tratamiento de las matemáticas, viene a ser como si un matemático nos dijera que un teorema es cierto, pero se negase a darnos la demostración alegando cuestiones de privacidad comercial.

Después de varios encontronazos con los desarrolladores de Magma, en el año 2004 Stein tiene la *loca* idea de crear un CAS gratuito de código abierto, un CAS que cualquier estudiante o profesor pudiese utilizar sin restricciones de ningún tipo (incluyendo las económicas) y que fuese científicamente riguroso, en el sentido de que todos los algoritmos y métodos utilizados pudieran ser conocidos y mejorados por cualquiera. En palabras de Stein, la misión de Sage era *"creating a viable free open source alternative to Magma, Maple, Mathematica and Matlab"* (crear una alternativa libre y de código abierto a Magma, Maple, Mathematica y Matlab). David contra Goliat.

La empresa parecía titánica, pero no se partía de cero. Había muchas cosas que hacer, pero algunas ya estaban hechas y se podían utilizar: Maxima, Singular, GNUPlot… No se trataba de inventar la rueda sino de construir un coche. Pronto la idea empezó a entusiasmar a numerosos especialistas en el área y la loca idea empezó a tomar cuerpo. Curiosamente, una amenaza de los creadores de Magma (ver Stein, 2009) impulsó definitivamente el proyecto de modo que en febrero de 2006 aparecía la versión 1.0 de la aplicación. La historia de Sage acaba de empezar…

Algunas otras consideraciones acerca de Sage y del software matemático libre en general pueden encontrarse en Abánades et al. (2009).

Cómo utilizar Sage

Utilizar Sage es bastante sencillo una vez que hemos tenido en cuenta algunos detalles. Para empezar, Sage se puede utilizar de varias formas distintas, siendo la instalación clásica en nuestro propio PC una de ellas. Pero también podemos utilizarlo sencillamente lanzando un LiveCD (disponible en http://www.sagemath.org/download.html) o, mejor aún, sin instalar ni descargar nada, solamente conectándonos a Internet.

La instalación en un PC es sencilla, pero depende fundamentalmente del sistema operativo que utilices. Si usas Mac o GNU/Linux la instalación no puede ser más simple: descárgate el fichero correspondiente de:

http://www.sagemath.org/download.html

descomprímelo y ejecútalo. Todo funciona a la primera. Si utilizas un sistema Windows la instalación es algo más laboriosa (ya que Sage, de momento, no tiene una versión nativa para Windows, aunque Microsoft está subvencionándola). Te damos más detalles sobre la instalación bajo Windows un poco más adelante. En todo caso, para instalar Sage en tu PC lo mejor es visitar su página web y seguir los enlaces (un poquito de inglés será de gran ayuda).

Pero suponemos que de momento optarás por la solución más cómoda, que es seguir leyendo sin descargarte nada, y tal vez probar la opción más rápida: usar Sage a través de Internet. Aunque es posible usar cualquier navegador, por razones de seguridad y facilidad de uso te sugerimos el uso de Firefox (http://www.mozilla.com).

Para un primer contacto con Sage, desde tu navegador puedes visitar alguna de las siguientes direcciones:

http://sagenb.org
https://sagenb.kaist.ac.kr:8022/

Te recomendamos utilizar la primera, que es la canónica. La segunda, aunque lejana pues el servidor está físicamente en Corea del Sur, presenta la particularidad de que vive siempre el mismo día: a las 6:00 a.m. todo se pone a cero y ¡vuelta a empezar! Podremos, como Bill Murray en *Atrapado en el tiempo*, hacer lo que queramos sin que nuestros actos tengan consecuencia alguna. Si te decides por esta segunda (o cualquier otro servidor de Sage que use el protocolo seguro https) encontrarás un aviso de seguridad del navegador como el mostrado en la figura 1.

Figura 1. Advertencia de seguridad cuando accedemos a un servidor seguro Sage.

En este caso, éste es un mensaje estándar y es seguro aceptar la excepción. Para ello haz clic en *Entiendo los riesgos*, después en *Añadir una excepción* y por último en *Confirmar excepción* *de seguridad*. Deberías entonces ver en tu pantalla la figura 2. Estás en la página inicial del cuaderno de trabajo de Sage, el *notebook*.

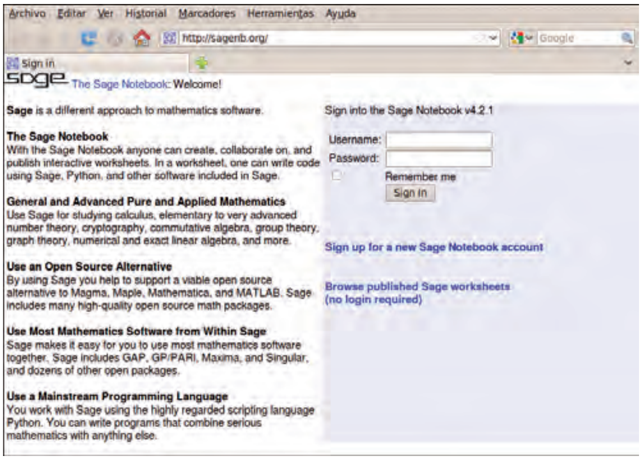


Figura 2. La pantalla inicial del notebook de Sage.

En la parte derecha de la pantalla puedes ver dos enlaces (en azul): el de abajo ofrece la posibilidad de curiosear por las hojas de trabajo, *worksheets*, de otros usuarios, sin necesidad de registrarse. Es interesante hacerlo, pero ten en cuenta que la mayoría de las hojas están en inglés y son documentos sin pulir; además, no podrás ejecutarlos (aunque sí copiarlos una vez tengamos nuestra propia cuenta). Con el enlace de arriba, en cambio, puedes hacerte con una cuenta en ese servidor (¡no, no es necesario enviar ningún SMS!). Hazlo, y empezaremos a usar el notebook. Puede que tengas algún problema con la velocidad de la red. Los servidores de sagenb.org están físicamente en el estado de Washington (EEUU) y, aunque están mejorando continuamente, todavía no tienen la potencia de los servidores de Google.

Una vez dentro del sistema encontrarás una pantalla como la que muestra la figura 3. En ella, haz clic en *New Worksheet* y renombra la hoja si el sistema te lo pide.

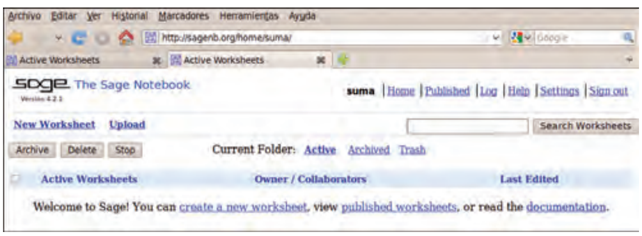


Figura 3. El notebook al entrar por primera vez como usuario/a con cuenta.

Ya puedes empezar a hacer cálculos: haz clic en la celdilla y escribe algo sencillo, por ejemplo, 2*3. Si evalúas (clic en *evaluate* o *shift+Enter* o, en algún Mac, *shift+Return*) obtendrás lo esperado, tal como muestra la figura 4.

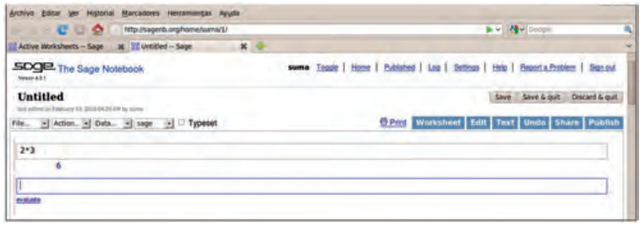


Figura 4. Celdillas de trabajo del notebook de Sage

Si has escogido instalar Sage o probar con el LiveCD, sigue las instrucciones de instalación y ejecuta la aplicación. Encontrarás una pantalla de texto que más o menos dice

```
———————————————————————————————
| Sage Version 4.2, Release Date: 2009-10-24                |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
———————————————————————————————
sage:
```

Teclea notebook(), luego *Enter* y se lanzará el navegador con una página local como la mostrada en la figura 3. A partir de ahí se procede igual que en el acceso web.

Trabajando en el notebook de Sage

En la sección anterior ya has hecho tu primer cálculo. Aquí insistimos con otros ejemplos para que te hagas una idea de cómo funciona el notebook. Mostramos lo que has de escribir alineado a la izquierda y la salida en el mismo tipo de letra indentada a la derecha. Por ejemplo el cálculo anterior será

```
2*3
        6
```

Hay dos comandos clásicos al demostrar las posibilidades de un sistema de cálculo: el primero se refiere a la impresión

```
print "hola,"; print "mundo!"
        hola,
        mundo!
```

y el segundo es el factorial. ¡Un momento! ¿Cómo se invoca: !, fact, ...? Si escribimos fac y apretamos *Tab* obtenemos todos los comandos que empiezan por esas letras

```
fac (+ Tab)
        factor factorial factorization
```

y clicando en la segunda queda escrita como entrada. Para decidir si es la adecuada podemos pedir ayuda añadiendo una interrogación después del comando

```
factorial?
```

con lo que aparece un cuadro de texto como el parcialmente mostrado en la figura 5, que resuelve la duda.

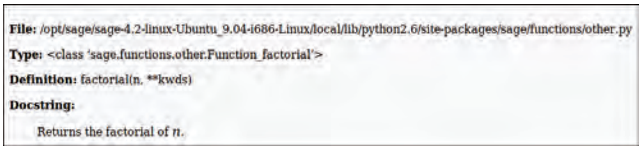

File: /opt/sage/sage-4.2-linux-Ubuntu_9.04-i686-Linux/local/lib/python2.6/site-packages/sage/functions/other.py
Type: <class 'sage.functions.other.Function_factorial'>
Definition: factorial(n, **kwds)
Docstring:
Returns the factorial of n.

Figura 5. Fragmento de la ayuda relativa al comando factorial.

Si añadimos un segundo signo de interrogación obtendremos el código fuente usado en la evaluación del comando, dando así libertad al usuario para comprobar la corrección de los algoritmos usados.

Una de las características más llamativas de los sistemas de cálculo es su capacidad para obtener representaciones gráficas precisas. La sintaxis de Sage en este aspecto es parecida a la de Mathematica. Por ejemplo

```
plot(sin,(-pi,pi))
```

y

```
var('y'); plot(sin(y),(y,-pi,pi))
```

devuelven la gráfica esperada (figura 6). Nótese que en la última línea hay que declarar explícitamente la variable usada.

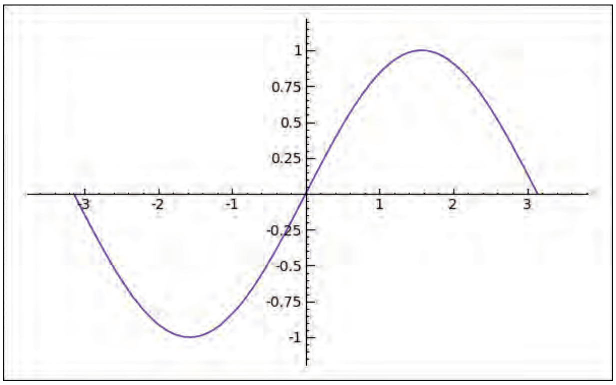


Figura 6. Gráfica del seno devuelta por Sage.

En cuanto a representación tridimensional, Sage integra un applet, *Jmol*, mediante el cual es posible interactuar desde el notebook con la superficie representada. Por ejemplo, la siguiente orden dibuja un cono de eje z (figura 7)

```
var('x y z'); implicit_plot3d(x^2+y^2-z^2,(x, -2, 2),(y, -2, 2),(z,-2,2))
```

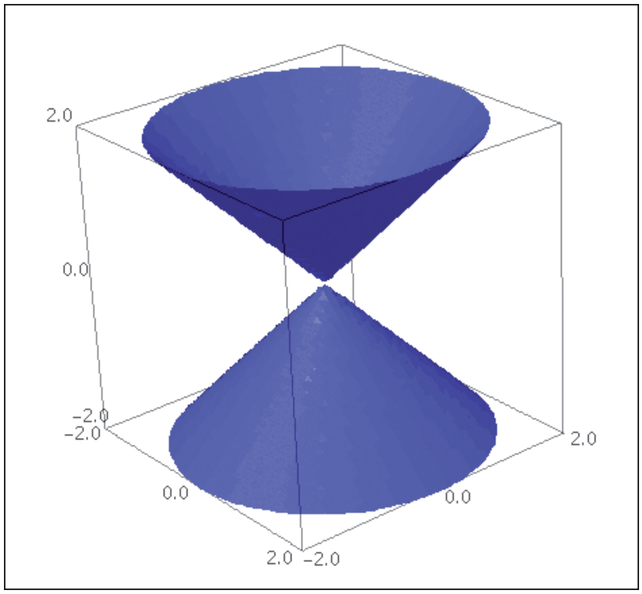


Figura 7. El cono $z^2=x^2+y^2$.

El cálculo de límites, derivadas, integrales… es también el usual en estos sistemas

```
lim((1+1/x)^x,x=oo)
        e
diff(sin(x)*log(x^(1/x)),x)
        -(log(x)/x^2 - 1/x^2)*sin(x) + log(x^(1/x))*cos(x)
integrate(-(log(x)/x^2 - 1/x^2)*sin(x) + log(x^(1/x))*cos(x))
        log(x)*sin(x)/x
maxima.taylor(cos(x), x, 0, 4)
        1-x^2/2+x^4/24
```

Esta última computación (y algunas de las anteriores, si bien de manera no tan explícita) recurre a Maxima: las capacidades de cálculo simbólico en Sage son, en gran parte, deudoras de Maxima.

Esto es un ejemplo concreto de la filosofía de Sage ya mencionada: no reinventa la rueda, construye un coche. Si un software para un determinado campo es libre y es eficiente se incorpora al sistema. Por ejemplo, en:

https://kimba.mat.ucm.es:9000/home/pub/5/

puede verse una hoja de trabajo en Sage que permite calcular la envolvente de un tipo especial de escaleras (las que se deslizan por una pared experimentando, mientras lo hacen, una variación de su longitud). Puesto que los cálculos necesarios para la obtención de la envolvente involucran eliminación de variables en anillos de polinomios se usa un programa específico para ello, Singular (http://www.singular.uni-kl.de/). Aunque teóricamente podría usarse Maxima, nos ha resultado más cómodo utilizar aquel. Otra muestra más de libertad dentro de Sage.

Ha de notarse que esta hoja de trabajo ilustra además otra valiosa aportación del notebook de Sage: la posibilidad de incrustar applets en las hojas de trabajo, como muestra la figura 8 respecto a GeoGebra (http://www.geogebra.org/).

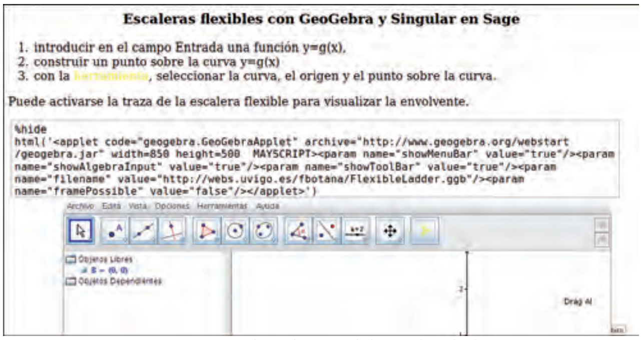


Figura 8. GeoGebra dentro del notebook de Sage

No es el objetivo de este artículo ser un manual de Sage, sino simplemente dar noticia de su existencia y utilidad. Quien lea esto sabrá sin duda por propia experiencia que cuando realmente se aprende es cuando se hace. Como verdaderos documentos de referencia se pueden citar varios, todos descargables del sitio sagemath.org. El manual de Sage (The Sage Development Team 2010), nos familiarizará con el sistema en pocas horas. Si buscamos escritos en castellano, sugerimos Tábara (2009) para ver las posibilidades matemáticas de Sage y una traducción castellana (Yanajara 2008) de un manual para principiantes (Kosan 2007).

La instalación en un sistema MS-Windows

Aunque la manera más cómoda de acercarse a Sage es a través de Internet, donde además se tiene acceso a las hojas de trabajo de otros usuarios y podemos compartir el trabajo con nuestros colaboradores, en muchas situaciones es conveniente tener instalado Sage en nuestro PC.

Como ya hemos indicado, la instalación de Sage en un Mac o PC bajo GNU/Linux consiste básicamente en descargar el fichero adecuado. La instalación de Sage en un entorno Windows no es mucho más dificultosa, pero, al no existir una distribución nativa para Windows, nos obliga a proceder con algo de cuidado.

En primer lugar, tenemos que bajar el fichero de instalación de Sage para Windows, que se encuentra en:

http://www.sagemath.org/download-windows.html

Podemos bajarlo de cualquiera de los servidores secundarios (*mirrors*) disponibles, por ejemplo, de RedIris:

http://sunsite.rediris.es/mirror/sagemath/win/sage-virtualbox-4.3.zip

Es un fichero grande (1 GB), con lo que incluso con las mejores conexiones su descarga va a llevarnos cerca de una hora. A continuación, descomprimimos este fichero zip.

Antes de seguir con la instalación, tenemos que instalar una aplicación auxiliar. Se trata de un programa gratuito de código abierto, *VirtualBox*, en la versión de nuestro sistema operativo. Grosso modo, este programa nos va a permitir simular un entorno GNU/Linux en nuestro PC de modo que podamos usar Sage sin cambiar de sistema operativo. Lo encontraremos en http://www.virtualbox.org/. Es ilustrativo el hecho de que para instalar VirtualBox tengamos que hacer frente a nada menos que seis *amenazas*, aceptando el riesgo que, según Windows, supone la instalación de una aplicación no reconocida por Microsoft, aunque tenga las garantías de *Sun Microsystems*, empresa pionera y líder en el sector de la computación. Este riesgo es, por otra parte, inexistente.

Una vez instalado VirtualBox, desde el menú *Archivo*, elegimos *Importar servicio virtualizado* y seleccionamos el fichero *sage.ovf* de la carpeta *sage-virtualbox-4.3* que está dentro de la carpeta que se generó al descomprimir el archivo *sage-virtualbox-4.3.zip*. Tanto el proceso de instalación de VirtualBox como la importación de Sage desde VirtualBox puede tardar varios minutos.

Una vez instalado Sage, desde la ventana de VirtualBox, iniciamos la máquina virtual Sage, abrimos nuestro navegador con la dirección que nos indica la máquina virtual…y ¡ya está funcionando nuestro notebook!

Nuestra versión de Sage, a pesar de está instalación algo más laboriosa, es plenamente operativa. Todas las hojas de trabajo se guardan en la máquina virtual. Podemos descargarlas todas juntas a un fichero comprimido de nombre *download_worksheets.zip*. Para ello, basta hacer clic en el enlace *Download All Active* en la lista de las hojas activas. Este fichero contiene todas nuestras hojas de trabajo, y se guarda en el directorio de descargas por defecto de nuestro ordenador. Estas hojas se pueden utilizar en cualquier otro ordenador donde tengamos instalado Sage, o en un servidor Sage, subiendo el fichero con el comando *upload*.

Posibilidades de desarrollo

El modelo propio de desarrollo de software libre que se aplica en Sage, en el que grupos de matemáticos y programadores colaboran juntos para mejorar constantemente el sistema, permite que nuevas funcionalidades e ideas de utilización surjan cada día. A este respecto, la regular visita a los grupos de Google relativos a Sage es recomendable para quienes tengan interés en mantenerse informados (en inglés) de las novedades en este sistema. Para encontrarlos basta teclear *sage goo-*

gle y alguna de las palabras *edu*, *notebook* o *support* en cualquier buscador.

Como hemos visto, Sage se puede utilizar vía web siendo posible compartir hojas de trabajo con otros usuarios. Esto abre ilimitadas posibilidades de aplicación en el ámbito docente: clases guiadas en laboratorio, tareas a realizar en casa, trabajos en grupo…Sin embargo, el uso habitual de servidores Sage ajenos puede suponer una limitación técnica. Por ello, de cara a un uso en un contexto amplio, como el de un instituto o una universidad, lo más conveniente es instalar un servidor Sage propio.

Montar un servidor Sage propio, si bien no es una tarea demasiado complicada, sí requiere algunos conocimientos de GNU/Linux y del funcionamiento de un servidor web. Las instrucciones que da Dan Drake en:

http://wiki.sagemath.org/DanDrake/JustEnoughSageServer

garantizan razonables posibilidades de éxito: basta VirtualBox y una distribución de GNU/Linux sencilla (Jeos) para crear nuestro propio servidor web.

Probablemente haya en tu centro algún ordenador al que los virus de Windows y la obsolescencia planificada de nuestra sociedad de consumo hayan arrinconado: ¡Ese es el equipo perfecto para instalarle Ubuntu y crear la máquina virtual que permita ejecutar Sage remotamente!

Otra posibilidad de uso de Sage algo más complicada es ejecutar directamente cálculos en Sage a través del protocolo http sin utilizar necesariamente un navegador web. Esto nos permite, de modo transparente para el usuario, acceder a la potencia de Sage sin necesidad de entrar en una cuenta. Aunque esta característica exige ciertos conocimientos de programación, pensamos que abre vías para la elaboración y uso de nuevos materiales educativos que antes estaban condicionadas por el uso de aplicaciones comerciales caras. La información relativa a esta posibilidad puede encontrarse en: http://sagemath.org/doc/reference/sagenb/simple/twist.html ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abánades, M. A., Botana, F., Escribano J. y Tabera, L. F. (2009). Software matemático libre. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 12 (2) 325-346. Descargable en :

http://itis.cesfelipesegundo.com/secciones/WebPersonal/archivos/1/OpenSourceMath-Gaceta-baja-res.pdf

Real, M. (2009). La potencia de las TIC para el cálculo simbólico. *Suma*, nº 61, 55-61.

Real, M. (2009). El cálculo simbólico de forma gráfica. *Suma*, nº 62, 57-62.

Rodríguez, M. (2009). Maxima, un sistema libre de cálculo simbólico y numérico. *Suma*, nº 60, 7-20.

Internet

Kosan T. (2007). *Sage for Newbies.*

http://sage.math.washington.edu/home/tkosan/newbies_book/

Stein, W. (2009). *Mathematical Software and Me: a very personal recollection.*

http://modular.math.washington.edu/mathsoftbio/history.pdf

Tábara, J. L. (2009). *Matemáticas elementales con Sage.*

http://sagemath.org/es/Introduccion_a_SAGE.pdf

The Sage Development Team (2010). *Sage Tutorial. Release 4.3.1*.

http://sagemath.org/doc-pdf/en/SageTutorial.pdf

Yanajara. H. (2008). *Manual de Sage para principiantes.*

http://sagemath.org/es/Manual_SAGE_principiantes.pdf

Este artículo fue recibido en *Suma* en febrero de 2010 y aceptado en mayo de 2011

suma+ 67
Junio 2011, pp. 47-56

Estudio de algunos engaños en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la didáctica de la matemática (introducción a los fractales)

Analizaremos ciertos casos engañosos que se originan en geometría y que son llamados sofismas o falacias, las cuales debemos tener presente para no caer en conclusiones falsas en el estudio de estas situaciones geométricas. Además, analizaremos la continuidad y el infinito a través de intuiciones geométricas que están relacionadas con procesos potencialmente infinitos, para luego a través del infinito actual generar soluciones analíticas teniendo como base fundamental el estudio de la didáctica del análisis matemático como propuesta en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras Clave: Investigación didáctica, geometría, resolución de problemas, enseñanza y aprendizaje, bachillerato y universidad.

Study of some deceits in teaching-learning process of the teaching of mathematics (introduction to fractals)

We will analyze certain deceptive cases that they are originated in geometry and that sophisms or deceits are called, which we must have present not to fall in false conclusions in the study of these geometric situations. In addition, we will analyze the continuity and the infinite through geometric intuitions that are related to potentially infinite processes, for soon through present infinite generating solutions analytical having as it bases fundamental the study of the Didactics of the mathematical analysis like proposal on the education-learning process.

Key words: Educational research, geometry, problem solving, teaching and learning, high school and college.

Introducción

El campo de la *Didáctica de la Matemática*, durante la década de los noventa, consideró la problemática del aprendizaje de las matemáticas en términos de *procesos cognitivos* y ya no como una simple adquisición de competencias y de habilidades según Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Además, en ese mismo tiempo, se amplia el campo de los problemas investigados, hasta entonces muy centrado en los conceptos básicos de las matemáticas de la enseñanza primaria (que corresponde al "pensamiento matemático elemental" entre los cuales cabe destacar la *Didáctica de la Geometría*, por ejemplo), a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios.

Recordemos que Piaget, J (1896-1980) destaco lo siguiente: en la etapa de las operaciones formales (de los 11 años en adelante) los adolescentes pasan de las experiencias concretas reales a pensar en términos lógicos más abstractos. Son capaces de utilizar la *lógica propositiva* para la solución de problemas hipotéticos y para derivar conclusiones. Son capaces de emplear el *razonamiento inductivo* para sistematizar sus ideas y construir teorías sobre ellas; pueden usar el *razonamiento deductivo* para jugar el papel de científicos en la construcción y comprobación de teorías. Pueden usar un *lenguaje metafórico* y *símbolos algebraicos* como símbolos de símbolos. Son capaces de pasar de lo que es real a lo que es posible, pueden pensar en lo que podría ser, proyectándose en el futuro haciendo planes en *teorías cognoscitivas* en la etapa de desarrollos formales.

Relevancia del trabajo para la Educación Matemática

Cuando nos referimos a *procesos cognitivos* implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie

Julio César Barreto Garcia
Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio (UPEL). Extensión San Felipe.
Liceo Bolivariano "José Antonio Sosa Guillen". Yaracuy-Venezuela.
Liceo Bolivariano "José Antonio Páez". Yaracuy-Venezuela.
Universidad Nacional Abierta. Centro Local Yaracuy.
Asociación de Matemática Venezolana.

de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción, la cual consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. Según Azcárate, C. y Camacho, M. (2003), de los cuales tomaremos parcialmente en cuenta sus reflexiones, no se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente mas psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar. Sin embargo, en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial, interacción con proceptos[1] operacionales), mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones. Debemos estar pendientes ya que saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones.

Marco teórico y calidad bibliográfica

En los *Modelos Cognitivos* se considera de acuerdo a Azcárate, C. y Camacho, M. (2003), por un lado, la definición de un concepto matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se podrá distinguir entre las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado (que se suelen encontrar escritas en los libros y más aún en manuscritos antiguos), y las definiciones personales que utilizan las personas (estudiantes, profesores, matemáticos) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal.

Sfard (1991) habla de dos tipos de *concepciones* de un mismo concepto matemático: las concepciones que llama *operacionales* cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y las concepciones *estructurales* cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien afirma que los dos tipos de concepciones son complementarias "la habilidad para ver una función o un número, a la vez como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de *comprender"* (On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, pp. 1-36). Por ejemplo: la expresión $f(x)= x^2-9$ representa simultáneamente el proceso de cómo calcular el valor de la función $f(x)$ para un valor particular de x y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x. Se habla de un procepto "molde".

En cuanto a las expresiones:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x-1},\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k},$$

representan el proceso de tender a un límite y el objeto valor del límite, pero sin incluir el procedimiento de cálculo especifico para obtener ese valor. En este caso se trata de un procepto "estructural". Según Azcárate, C. y Camacho, M. (2003), de aquí surge la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría, las cuales vamos a tomar muy en cuenta en el desarrollo del presente artículo.

Metodología y resultados

Duval (1996), considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.), se entiende por cambio de registro de representación "a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico". Por ejemplo, "realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función". (Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 6, 3, pp. 349-382. (1999). *Actas del PME 23*, pp. 3-26).

> La actividad geométrica involucra tres clases de procesos cognitivos: La visualización, el razonamiento y la construcción. Los cuales se deben desarrollar separadamente. Bishop (1983).

Falacias y Sofismas Geométricos

La *Falacia* se define como engaño y *Sofisma* mediante "falso razonamiento para inducir a error", "argumento, razonamiento falso a pesar de una apariencia de verdad". Engañar es dar una apariencia de verdad a lo que es mentira, y por tanto entenderemos en matemática a falacia y sofisma como sinónimos y con el significado de que mediante un *razonamiento* falso, pero aparentemente verdadero se obtiene una conclusión falsa la cual proviene de un error en el razonamiento que a veces no es fácil detectar, que puede no ser inmediato de percibir. Veamos los siguientes ejemplos:

a) "Demostrar" que en todo triángulo la longitud de un lado es igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Solución: Consideremos el triángulo ABC y los juntos medios de sus lados A_1B_1 y C_1 como muestra en la figura 1:

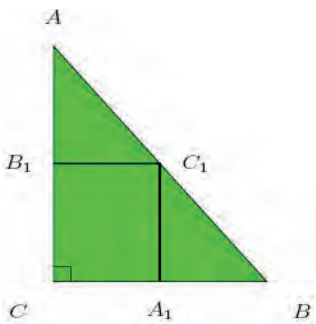


Figura 1: Primera configuración del ejemplo anterior.

donde la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al otro lado.

Al unir los puntos A_1 y B_1 con C_1 se obtiene la poligonal $AB_1C_1A_1B$. Demostremos que la longitud de esta poligonal es igual a $\overline{AC}+\overline{CB}$.

En efecto, como $B_1C_1A_1C$ es un paralelogramo, entonces $\overline{B_1C_1}=\overline{CA_1}$ y $\overline{C_1A_1}=\overline{B_1C}$ como además,

$$\overline{AB_1}+\overline{B_1C}=\overline{AC} \quad \text{y} \quad \overline{CA_1}+\overline{A_1B}=\overline{CB}$$

tenemos que:

$$\overline{AB_1}+\overline{B_1C_1}+\overline{C_1A_1}+\overline{A_1B}=\overline{AB_1}+\overline{CA_1}+\overline{B_1C}+\overline{A_1B}=\overline{AC}+\overline{CB}$$

De manera análoga procedemos con los triángulos y obtenemos la poligonal cuya longitud se demuestra, con un *razonamiento* semejante, que es igual a $\overline{AC}+\overline{CB}$. Veamos la figura 2:

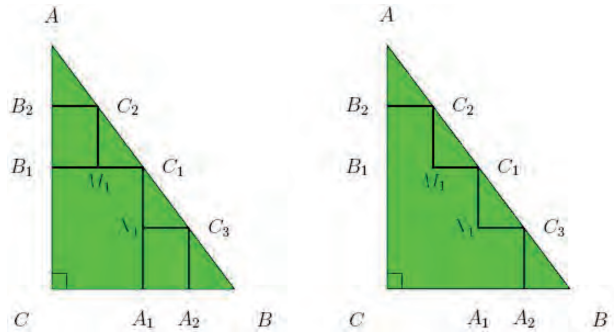


Figura 2: Otras nuevas configuraciones del ejemplo anterior.

Si seguimos con este proceso indefinido, observamos en las sucesivas gráficas que los lados de las poligonales obtenidas se hacen cada vez mas pequeñas y sus vértices "tienden" a estar en el segmento AB, pero, la longitud de las poligonales es siempre igual a $\overline{AC}+\overline{CB}$. Luego, en el "límite" la poligonal que se obtiene es el lado $\overline{AB}$ y por consiguiente $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$. Dé una explicación al por qué de esta conclusión falsa proveniente de un *razonamiento* aparentemente correcto y de observaciones *visuales*.

Sugerencia: Obtenga una sucesión de poligonales $\{L_n\}_{n\geq 1}$ la cual es una sucesión constante con valores iguales a $L=\overline{AC}+\overline{BC}$; luego el "límite" cuando " n tiende a infinito" es la misma constante L distinta de $\overline{AB}$.

Nota: Es importante indicar que cuando se tiene una sucesión de poligonales $\{P_n\}$ como las del ejemplo anterior, que tiene como "límite" una curva, en este caso el segmento $\overline{AB}$ no siempre es cierto que el límite de las longitudes de P_n sea igual a la longitud de la curva límite, en este caso la longitud $\overline{AB}$.

Podemos revisar Barreto (2008b) donde se demuestra geométricamente que en cualquier triángulo rectángulo se cumple la relación Pitagórica:

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$$

Donde $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son las longitudes de los catetos (lados que forman el ángulo recto) y $\overline{AB}$ es la longitud de la hipotenusa (lado que se opone al ángulo recto).

Donde haciendo $\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$ y $\overline{AB}=c$ tenemos que se cumple que $a^2+b^2=c^2$ lo cual se dedujo usando figuras como las de la figura 3.

Ahora bien, de acuerdo con la figura 3 sabemos que la longitud de la hipotenusa en este triángulo denominado isorrectángulo es $\sqrt{2}$, el cual se puede decir que fue unos de los números que dieron origen a los números irracionales. Veamos como un razonamiento falso como el anterior nos conduce a una contradicción.

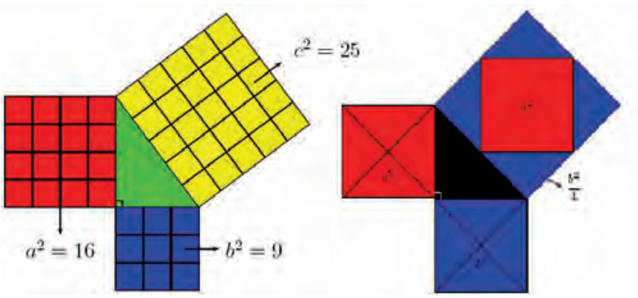


Figura 3: A la izquierda vemos la división de cada cuadrado en tantos cuadraditos como unidades tenga los cuadrados originales construidos sobre los lados del triángulo rectángulo notable, aplicando una aprehensión operativa de cambio (figura 2). A la derecha dividimos los dos cuadrados construidos sobre los lados del triángulo isorrectángulo, siguiendo las diagonales, para obtener ocho piezas de forma triangular, aplicando una aprehensión operativa de cambio figural en el triángulo isorrectángulo.

b) Mediante un *Razonamiento* análogo al del problema anterior, con un triángulo isorrectángulo, *Demuestre que* $\sqrt{2} = 2$.

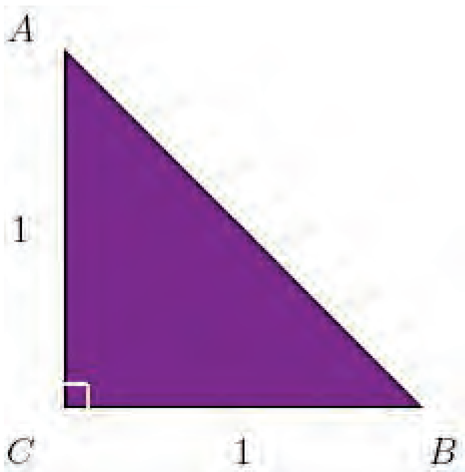


Figura 4: Triángulo isorrectángulo (triángulo isósceles que también es rectángulo y que los lados que forman el ángulo recto denominados catetos son iguales. En este caso iguales a la unidad de medida.

Como según el teorema de Pitágoras tenemos que: $\overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Luego $\overline{AB} = \sqrt{2}$ (1).

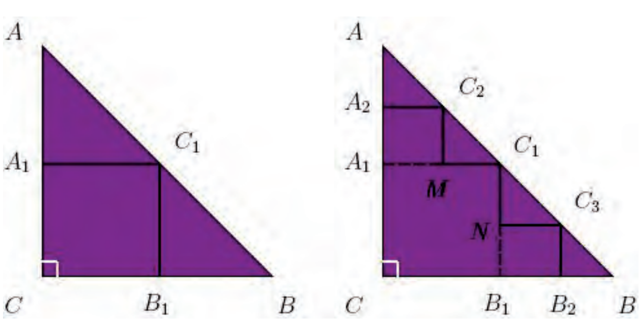


Figura 5: Configuraciones realizadas a la Figura 4 de arriba, de acuerdo con lo realizado en la figura 2 del ejemplo (a).

Si realizamos los cálculos del ejemplo (a) notamos que de acuerdo con la figura 5 tenemos:

$$\overline{AA_1} + \overline{A_1C_1} + \overline{C_1B_1} + \overline{B_1B} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$\overline{AA_2} + \overline{A_2C_2} + \overline{C_2M} + \overline{MC_1} + \overline{C_1N} + \overline{NC_3} + \overline{C_3B_2} + \overline{B_2B} =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

Si continuamos con este proceso observamos que los lados de las poligonales obtenidas se hacen cada vez más pequeñas y sus vértices "tienden" a estar en el segmento $\overline{AB}$ luego en el límite, la longitud de esa poligonal es igual a $\overline{AB} = 2$ (2) Así, de (1) y (2) tenemos que $\sqrt{2} = 2$. Lo cual es una falacia o sofisma.

c) Otra falacia de tipo geométrico es el siguiente: "la longitud de cualquier semicircunferencia es igual a su diámetro."

Sugerencia: razone considerando la semicircunferencia dibujada abajo de centro en O y diámetro $\overline{AB} = 2R$. Veamos la figura 6:

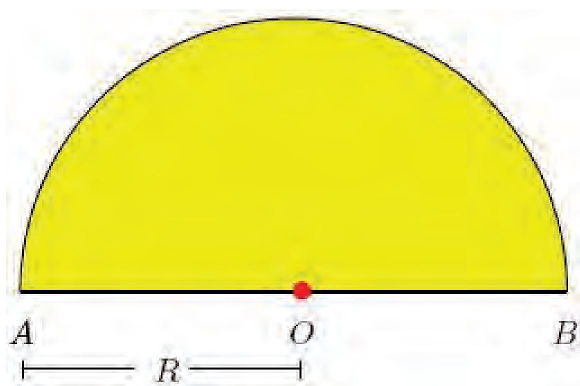


Figura 6: Primera configuración del ejemplo anterior.

Luego, dibujemos semicircunferencias de radio $R/2$ y cuyos centros son los puntos medios de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ respectivamente. Veamos la figura 7:

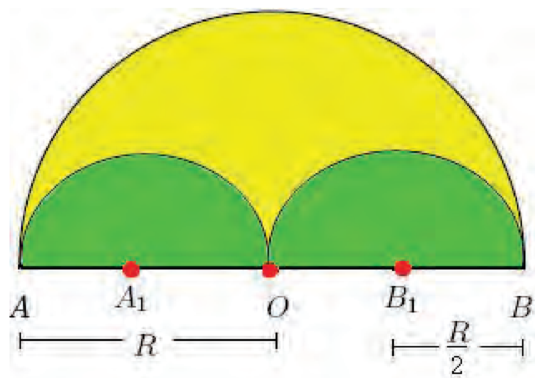


Figura 7: Configuración del ejercicio (c).

Denote por L_1 la suma de las longitudes de estas dos semicircunferencias. De manera análoga proceda con estas dos últimas semicircunferencias. Podemos considerar las semicircunferencias con centro en los puntos medios A_2, A_3, B_2, y B_3 de los segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1O}$, $\overline{OB_1}$ y $\overline{B_1B}$ respectivamente y con radio $R/4$. Denote por L_2 la suma de las cuatro semicircunferencias, y así sucesivamente.

Vea que las semicircunferencias obtenidas tienen longitudes cada vez mas pequeñas y que la curva compuesta por la reunión de todas ellas "tienden" a confundirse con el segmento $\overline{AB}$ y como la suma de las longitudes de todas esas semicircunferencias es igual a πR entonces tenemos que $\pi R = \overline{AB}$. La "longitud de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ es igual a su diámetro". Además, como $\overline{AB} = R$ entonces del resultado anterior obtenemos que $\pi = 2$. ¿Cómo se explica esta falacia.

En un curso de maestría que tome en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Barquisimeto denominado *Historia de la Matemática Discreta* con un destacado profesor llamado Douglas Jiménez, el cual tiene una amplia trayectoria en historia de la matemática y es referencia en este articulo y casi todo lo escrito por este autor, se discutió el origen de la letra π y se tomo en cuenta la *proposición 2 del duodécimo libro de los Elementos de Euclides* que nos dice que: "los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros". En la referencia de Barreto, J (2009b) se dice que en el lenguaje moderno, si es A_i el área de un círculo i de diámetro d_i entonces

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^{\,2}}{d_2^{\,2}} \qquad (1)$$

Independientemente de los círculos y A_1, A_2. El cual en notación de proporción es: $A_1 : A_2 :: d_1^{\,2} : d_2^{\,2}$.

Está demostrada en los *Elementos* con una base teórica provista por uno de los mejores discípulos de Platón, el matemático Eudoxo. Se conoce como método de exhaución y es uno de los antecedentes del moderno cálculo integral. La demostración según vimos en el desarrollo del curso de maestría procede por comparación del área del círculo con las áreas de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia y el análisis de las pequeñas diferencias entre estas áreas, que se reducen al aumentar el número de lados de los polígonos. Sin embargo, demostraciones como estas, basadas en procesos que potencialmente estamos en capacidad de repetir cuantas veces deseemos, es decir lo que hoy llamamos procesos infinitos, mostraban la dificultad de conseguir la cuadratura del círculo. Arquímedes se apoyo en la *proposición 1 del duodécimo libro de los elementos de Euclides* que dice: "los polígonos semejantes inscritos en círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros". Aunque cabe destacar que Arquímedes no uso polígonos circunscritos sino que razono por reducción al absurdo, la cual era un razonamiento muy usado en estos tiempos para evitar los procesos infinitos.

Nos cuenta Jiménez (2004), que manteniendo la línea de pensamiento Griego orientada hacia la comparación de figuras, Arquímedes demuestra que cualquier círculo "es igual" (es decir, tiene la misma área) que un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio del círculo y el otro igual a la circunferencia del círculo, como se muestra en la Figura 8:

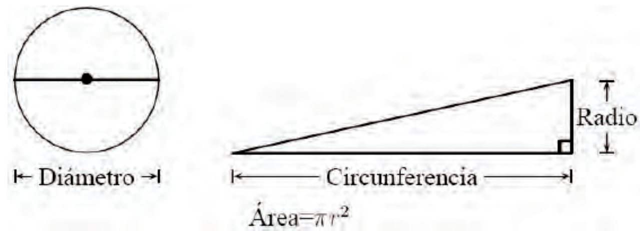


Figura 8: Cuadratura aproximada del circulo según Arquímedes.

En la discusión del curso se noto que si en la fórmula para calcular el área del triángulo deducida en Barreto (2008a, 2009c) tenemos que $A_T = CR/2$, donde denota el área del triángulo rectángulo y el área del círculo calculado anteriormente es $A_C = \pi R^2$, con A_C denotando el área del circulo. La longitud de la circunferencia C es precisamente demostrada por Arquímedes, usando *doble reducción al absurdo,* tenemos que:

$$A_C = A_T \quad (2)$$

De donde obtenemos que $\pi R^2 = CR/2$ así que $C = 2\pi R$. En notación moderna usamos L en vez de C para denotar la longitud de la circunferencia. Aquí sí razona Arquímedes por doble reducción al absurdo suponiendo desigualdades en ambas áreas, las cuales surgen de usar polígonos inscritos o circunscritos.

Ejercicio: Enuncie estos problemas de longitud de la circunferencia y de área del círculo en un lenguaje actual y demuéstrelos usando limites de sucesiones.

El número π aparece como una constante que Arquímedes encuentra de la ecuación (1), donde viéndolo de otra manera es:

$$\frac{A_1}{d_1^{\,2}} = \frac{A_2}{d_2^{\,2}}. \text{ Y de manera general: } \frac{A_1}{d_1^{\,2}} = \frac{A_2}{d_2^{\,2}} = \cdots = \frac{A}{d^2} = k$$

De donde obtenemos usando el hecho de que el diámetro es el doble del radio de la circunferencia lo siguiente:

$$A = kd^2 \Rightarrow A = k(2r)^2 \Rightarrow A = k4r^2 \Rightarrow A = (4k)r^2$$

De aquí, notando que si la constante $\pi = 4k$ observamos que $k = \pi/4$ el cual es la forma que tiene precisamente la constante para hallar aproximaciones de este número irracional. Veamos algún mentor de aproximaciones importantes de este número trascendente (o *trascendental*)[3]: En 1674 el alemán *G. Leibnitz* da la serie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

Pero presenta problema pues tienen que sumarse unos 19 millones de términos para conseguir 7 decimales correctos. La fórmula desarrollada por *Leonhard Euler* quedaría como sigue:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots$$

En esta época se solía utilizar la letra "p" (peripheria) para designar a la razón entre circunferencia y diámetro, aunque algunos, como el inglés *William Jones (1706),* ya utilizaban el símbolo π. Fue *Leonhard Euler* quien introdujo este símbolo de forma definitiva al utilizarlo en su libro *"Introductio in Analysin Infinitorum"*, publicado en 1748. Años más tarde, en 1764, *Euler* encontraría otra fórmula de convergencia rápida. En 1761 *Lambert* demuestra que π es irracional, y en 1794 *Legendre* prueba un resultado un poco más fuerte: que π^2 también es irracional. En *1882* el holandés *Lindemann* demuestra que π es trascendente, lo cual supone (entre otras cosas) que la cuadratura del círculo es imposible. Este problema había permanecido sin resolver durante más de 2000 años.

> Las matemáticas son la única ciencia en la que siempre se sabe exactamente de que se habla y en la que se esta seguro de que cuanto se dice es verdadero. Émile Borel[4] (Francés, 1871-1956).

Ahora veamos algunas falacias aparentes que han surgido revisando un poco la historia de la matemática, estas falacias son comúnmente llamadas paradojas (idea extraña o irracional que se opone al sentido común y a la opinión general) por un filósofo griego que vivió unos 4 siglos antes de Cristo llamado Zenón. Es conocido por sus *paradojas*, algunas de las cuales niegan la existencia del movimiento. Zenón intentó probar que el espacio no está formado por elementos discontinuos y, concretamente, que no existe el movimiento. La paradoja de Aquiles y la tortuga han llegado hasta nuestros días y siguen atormentando a los estudiantes de filosofía. Aristóteles y Simplicio dijeron que los argumentos de Zenón son *falacias.* A veces las representaciones gráficas nos ayudan a la demostración de muchos teoremas; y nos pueden servir de orientación, de guía, en la demostración; nos suministran las "intuiciones[5] geométricas" que nos servirán para formular teoremas y demostraciones.

a) Observe las *construcciones* geométricas que hacemos a continuación en analogía con las paradojas de Zenón, en donde partimos de una barra de longitud 1 (una unidad) y luego dividámosla sucesivamente por mitades, veamos la figura 9:

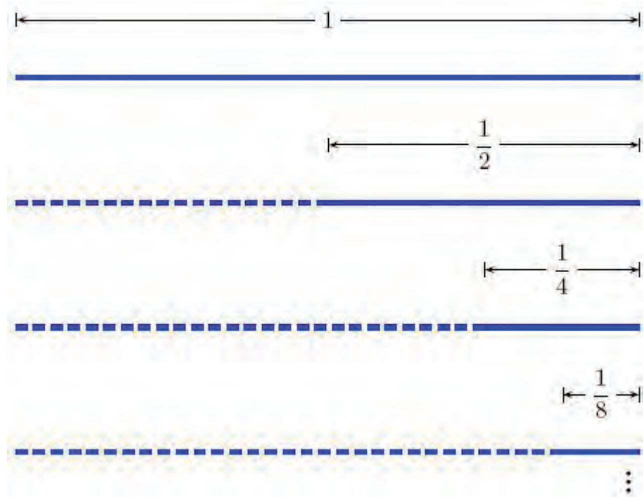


Figura 9: Partición de una barra de longitud 1 (una unidad de medida) en una sucesión de mitades cada vez más pequeñas.

i. Estas *construcciones* geométricas "*sugieren*" cuál puede ser el valor de la siguiente "suma infinita" (Prueba Gráfica):

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

- Justificación de la respuesta anterior: la suma de todos los pedazos obtenidos en la barra es igual a la longitud total de la misma. Por lo tanto, esto "sugiere" que esa suma infinita de partes de la unidad es igual a la unidad.

ii. Demuestre analíticamente la validez de la respuesta que dió en la parte i.

Sugerencia: Forme la progresión geométrica:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Donde a_n es el término n-ésimo, a_1 es el primer término y r es la razón de la progresión. Además, la suma finita viene dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^{n-1})}{1 - r}. \text{ Con } a_1 \neq 0$$

Cuando esta suma es infinita[6] es llamada serie geométrica y escribimos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k$$

Es decir, la suma infinita de S_n y tenemos que cuando $|r|<1$ ocurre que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k = \frac{a_1}{1-r}$$

Solución: Obsérvese que los términos de esa suma constituyen una progresión geométrica de términos, cuyo término enésimo se halla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2},\\
a_2 &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = a_1\left(\frac{1}{2^1}\right) = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^1,\\
a_3 &= \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = a_1\left(\frac{1}{2^2}\right) = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^2,\\
a_4 &= \frac{1}{16} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right) = a_1\left(\frac{1}{2^3}\right) = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\\
&\vdots\\
a_n &= \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Y observamos que la razón es r=1/2 Así, nos queda la suma finita:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donde el primer término es $a_1=1/2$, luego, de acuerdo con la sugerencia para calcular la suma infinita tratamos de calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k$$

La cual es llamada serie geométrica. Como la razón es menor que 1 tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_1 r^k = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Por lo tanto, $a_1+a_1r+a_1r^2+...+a_1r^n+...=1$. Por convención $r^0=1$ y $r^1=r$.

Así:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

b) Observe las *construcciones* geométricas que hacemos a continuación, en donde partimos de un cuadrado de lado 1 (una unidad) y luego vamos tomando puntos medios de los lados de los cuadrados y rectángulos que se van obteniendo sucesivamente, como observamos en los dibujos de la figura 10:

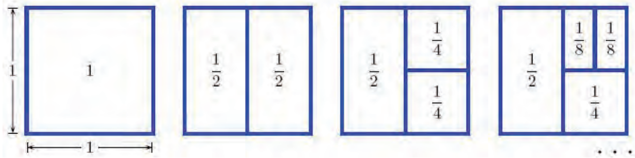


Figura 10: Partición de unos cuadrados o rectángulos, partiendo de un cuadrado de lado 1 (una unidad de medida) y se forman una sucesión de mitades cada vez más pequeñas.

i. ¿Qué indican los números colocados en esos cuadrados y rectángulos?

Respuesta: Son las áreas de los respectivos cuadrados y rectángulos que intervienen en el proceso descrito.

ii. Dibujemos las figuras geométricas que se obtienen en las dos iteraciones que siguen. Veamos la figura 11:

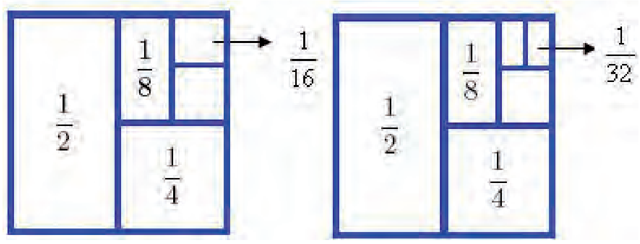


Figura 11: Partición de unos cuadrados o rectángulos y firmamos una nueva iteración.

iii. Las figuras antes dibujadas "sugieren" cuál puede ser el valor de la siguiente "suma infinita" (prueba gráfica):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

- Justificación de la respuesta anterior: estas construcciones sugieren que la suma de las áreas es igual al área total, que en este caso es igual a una unidad cuadrada, puesto que al iterar indefinidamente el proceso resultante es el área del cuadrado más grande que es uno.

iv. Demuestre analíticamente la validez de la respuesta que dio en la parte iii.

Sugerencia: use lo sugerido en la parte ii del ejercicio anterior.

c) Observe las *construcciones* geométricas que hacemos a continuación, en donde partimos de un triángulo equilátero que tiene área A véase la figura 12:

Estado Inicial Primera Iteración Segunda Iteración

Figura 12: A la izquierda notamos el estado inicial, es decir el triángulo equilátero sin ninguna iteración. En el centro tenemos la primera iteración[7] construyendo cuatro triángulos congruentes dibujando el "situado mas al centro" en negro o en un tono de este y continuando con el proceso en cada uno de los triángulos que habríamos dibujado en gris tenemos a la derecha la segunda iteración.

La figura así obtenida por iteración es un *Fractal*[8], denominado *triángulo o fractal de Sierpinski* (polaco, 1882-1969).

i. Hagamos el dibujo correspondiente a la tercera iteración. Véase la Figura 13.

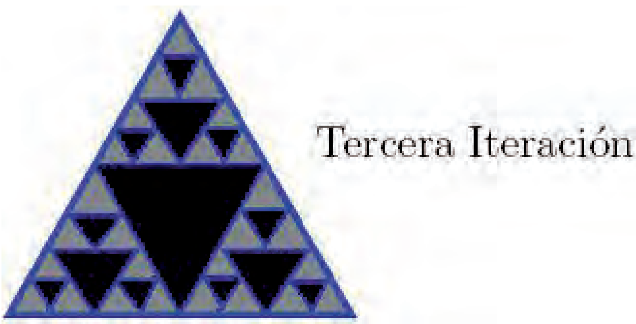


Figura 13: Ahora tenemos la tercera iteración en el triángulo equilátero.

ii. Denotemos $\{A_n\}_{n\geq 0}$ por la suma de las áreas de los triángulos dibujados en negro en la n-ésima iteración ($n\geq 1$) siendo $A_0=A$ el área del triángulo inicial. Calcula A_1, A_2, A_3.

iii. ¿Cuál supone que puede ser el término n-ésimo A_n, en función de A y de n?

iv. Calcule $\{A_n\}_{n\geq 0}$ cuando n tiende a infinito ($n \to \infty$).

Sugerencia: Recuerde que:

$$\lim_{n\to\infty} b^n = 0, \quad \text{si} \quad |b|<1$$

d) Podemos hacer una "comprobación geométrica" (no es una demostración) para la suma de los primeros números impares la cual proviene de la época de Pitágoras[9]. Veamos la figura 14:

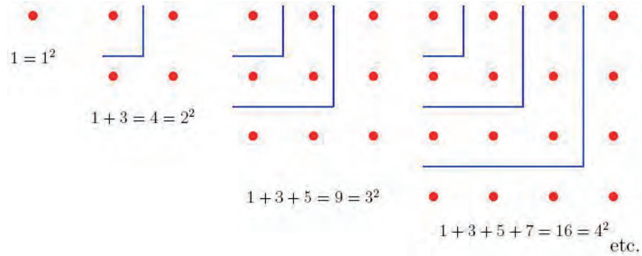


Figura 14: Comprobación geométrica de la suma de los primeros números impares.

En el cual se van formando cuadrados con esos puntos y en los lados del cuadrado hay n puntos ($n\geq 1$). Esta *construcción* geométrica sugiere el resultado n^2, es decir, si la suma de los primeros términos de la progresión aritmética es: $S_n=1+3+5+...+(2n-1)$. Entonces, $S_n= n^2$. (Verificarlo)

Interpretaciones y Conclusiones

En el artículo pudimos hacer el análisis de algunos engaños causados por falacias y sofismas geométricos, en los cuales nuestros estudiantes aprenderán partiendo de situaciones netamente intuitivas, las cuales les servirán para plantear la solución en un plano analítico, el cual no siempre es fácil, pues desde tiempos inmemoriales el ser humano ha tenido problemas con la idea aunque sea intuitiva de infinito. El problema de infinito potencial planteado anteriormente es en muchos casos difícil de entender a primera vista, pero con el tiempo de meditación, mucha práctica mental se logra asimilar, logrando encontrar la solución en el infinito actual. Recomiendo la sabia escritura de Jiménez, D. ampliamente, siendo esta persona un ser excepcional y muy buen profesor, ayudando en el noble deber de la enseñanza y es referencia número uno en todos mis artículos. ■

Dedicatoria: Dedico estas reflexiones de aula a mi Madre Felipa García, a mis hermanos, muy especialmente Juan García y a todas las personas que me han ayudado desde mis comienzos, ayudándome a superar todas las dificultades: Suleima Acosta, Nelly Velásquez, Aurelena Rodríguez, Carmen Lozada (Karmela), Darwin Mendoza, Elvis Aponte y Henry Rodríguez. Además, las dedico a todas las personas amantes de la geometría y de las matemáticas. Así mismo agradezco a la UCLA y la UNA.

No estoy de acuerdo con tus ideas, pero defiendo tu sagrado derecho a expresarlas. Francois Marie Arouet Voltaire

NOTAS

1 Procepto es una traducción que usa Azcárate, C y Camacho, M. (2003), de la expresión original inglesa procept, que proviene de proceso (process) y de concepto (concept).

2 Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos (creando nuevas subconfiguraciones).

3 Esta historia es tomada de parcialmente de la página Web:

http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/numpi.htm

4 Se encuentra entre los primeros matemáticos que emitieron opiniones dentro de la concepción de los intuicionistas, que es una de las escuelas del pensamiento matemático.

5 La palabra *intuición* proviene del latín "intuitio" de "in" que significa "en" y de tueri" que significa "ver". Su significado es el "conocimiento claro o inmediato de verdades que penetran en nuestro espíritu sin necesidad de razonamiento". "Es la captación inmediata y directa de un objeto por un sujeto". Debemos tener cuidado pues podemos caer en falacias geométricas.

6 El símbolo sumatoria P (Letra Griega Sigma) se utiliza para escribir de manera abreviada una suma. Por ejemplo si queremos escribir S $=1^2+2^2+\ldots+n^2$utilizando la notación Σ la hacemos así:

$$S=\sum_{j=1}^{n} j^2$$

que se lee la suma o sumatoria de j^2 por j variando desde j=1hasta n. En lugar de utilizar el índice j, podemos usar otro índice cualquiera, por ejemplo:

$$S=\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{h=1}^{n} h^2$$

7 Iterar significa repetir o reiterar. Iteración es la repetición de acciones análogas.

8 Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica se repite en diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975. En muchos casos, los fractales pueden ser generados por un proceso recursivo o iterativo, capaz de producir estructuras auto-similares independientemente de la escala específica. Los fractales son estructuras geométricas que combinan irregularidad y estructura.

9 Nativo de la isla de samos en el Asia Menor (S. VI a. C). Fue el fundador, en Crotona (Sur de Italia) de la escuela Pitagórica a la cual se deben muchos aportes importantes a la matemática entre ellos el conocido Teorema de Pitágoras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, C. & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Venezuela: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. 10 (2), pp. 135-149.

Barreto, J. (2008a). Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. Versión electrónica. *Revista Números* (69). Revista digital de educación matemática de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. Disponible en:

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_02.php

Barreto, J. (2008b). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Versión electrónica. *Revista Números* (69). Revista digital de educación matemática de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. Disponible en:

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/69/ideas_03.php

Barreto, J. (2009a). Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del teorema de Pitágoras. Versión electrónica. *Revista UNION.* Revista digital Iberoamericana de Educación Matemática (17). Disponible en: http://www.fisem.org/descargas/17/Union_017_007.pdf

Barreto, J. (2009b). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. Versión electrónica. *Revista Números* (70). Revista digital de educación matemática de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. Disponible en:

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf

Barreto, J. (2009c). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. Versión electrónica. *Revista Números* (70). Disponible en:

http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_01.pdf

Jiménez, D. (2004). π la letra griega que los griegos no usaron. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. (Vol. 9, No 1, pp. 103-117).

Jiménez, D. (2007). *Historia de la Matemática*: Una visión del Pitagorismo. TForMa. UDO. Cumana Estado Sucre.

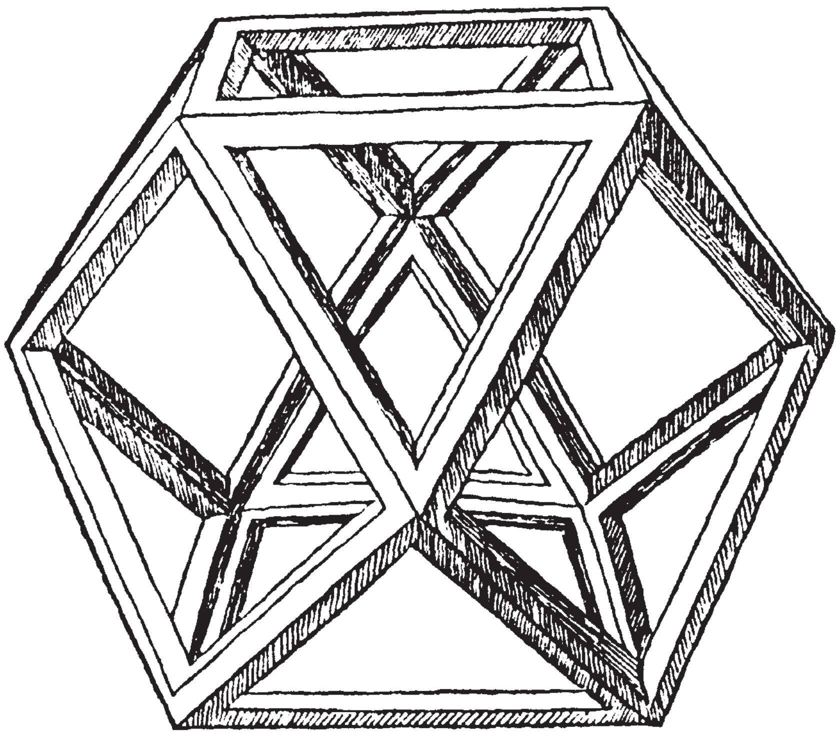
Orellana, M. y Marqués, L. (1998). *Pensamiento Matemático y Modelando con Matemática*. MATEMÁTICA I (177). Módulo IV. UNA Caracas, Venezuela.

Orellana, M. (2000). *Pensamiento Matemático y Modelando con Matemática*. MATEMÁTICA II (179). Módulo IV. UNA Caracas, Venezuela.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime*, 10 (2), 273-300. México: Publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Este artículo fue recibido en *Suma* en enero de 2010 y aceptado en mayo de 2011

poliedro



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

suma+ 67
Junio 2011, pp. 59-63

¡Medidas, las justas!

En la década larga que lleva esta sección "castigando" a los lectores de *Suma* hemos intentado abordar la mayor diversidad de temas posible dentro de nuestros limitados conocimientos. Hemos procurado mezclar juegos de distinto tipo: estrategia, conocimiento, procedimiento conocido, con el deseo de abarcar todos los bloques temáticos de la materia de matemáticas. También nos hemos esforzado por presentar juegos que abarquen distintos niveles educativos, aunque reconocemos que mayoritariamente nos hemos sesgado hacia la etapa de Secundaria. Por eso, en esta ocasión vamos a mostrar una serie de actividades centradas en el nivel de Primaria, aunque nuestra intención es presentarlas de forma que lo interesante no sea el contenido que exponemos, sino el juego en si, pues son fácilmente adaptables a contenidos distintos y a niveles superiores que los que vamos a tratar en esta ocasión.

En nuestra opinión, uno de los bloques temáticos más importantes en Primaria es el de Medidas. Es importante en esas edades que los alumnos aprendan las unidades usuales en longitud, peso, capacidad, volumen y también las medidas horarias y no digamos monetarias. Si hay un apartado en el que el alumno debe desarrollar las competencias básicas para poder desenvolverse en la vida cotidiana es el de las medidas. Podemos recordar la pifia cometida por la NASA cuando estrellaron una sonda espacial por no ponerse de acuerdo fabricante y agencia aeroespacial en las unidades de medida utilizadas.

El bloque de Medidas tiene la característica de su facilidad para trabajarlas en un entorno cercano al alumnado y por consiguiente dentro de contextos reales donde desarrollar las competencias. Las actividades que vamos a incluir aquí sirven, por otra parte, para repasar los conceptos de medidas y evaluar, de una forma más lúdica, cuáles son los conocimientos que el alumno posee, pues es bastante fácil localizar los errores cometidos al desarrollar el juego.

Las tres primeras actividades que presentamos son para realizarlas individualmente, aunque a veces en nuestras clases las resuelvan en grupo para que se tarde menos en completar el juego y puedan ayudarse unos a otros trabajando de forma colaborativa, estando de esa forma pendientes de los posibles fallos de los compañeros y pudiendo aprender unos de otros.

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

Cada oveja con su pareja

Esta actividad está basada en un pasatiempo llamado *Marcarrutas*, muy frecuente hace unos años en el cuadernillo de pasatiempos que acompañaba al suplemento dominical del periódico *El País*.

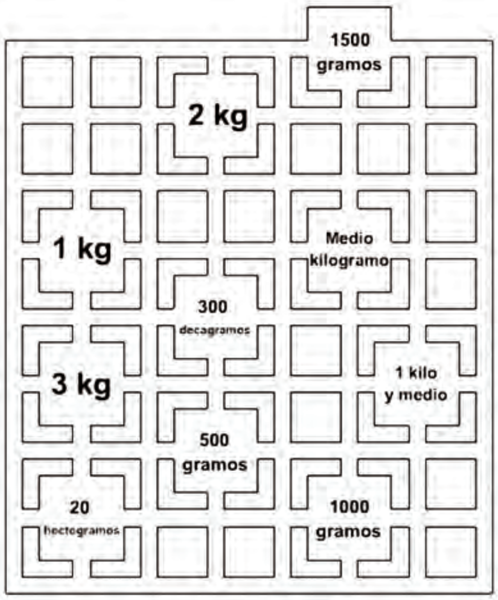


Imagen 1

El tablero simula una ciudad formada por calles paralelas y perpendiculares en las que hay unas plazas donde se incluyen los conceptos que queremos relacionar.

La forma de jugar consiste en unir mediante líneas los conceptos que son equivalentes con las siguientes condiciones:

1. Las líneas tienen que pasar por las calles del enrejado.
2. Las líneas no pueden atravesar las plazas donde están los conceptos.
3. No pueden coincidir dos líneas en la misma calle.
4. No pueden coincidir dos líneas en un mismo cruce y, por consiguiente, dos líneas no pueden cruzarse.

El grado de dificultad para encontrar la solución dependerá de cómo situemos los conceptos en los cuadros dedicados a ello. El pasatiempo suele ser atractivo para los alumnos aunque nuestro interés es que unan adecuadamente cada valor con su correspondiente medida.

En las imágenes 2 y 3 vemos otras posibilidades en las que el nivel de dificultad varía al modificar los lugares donde se colocan.

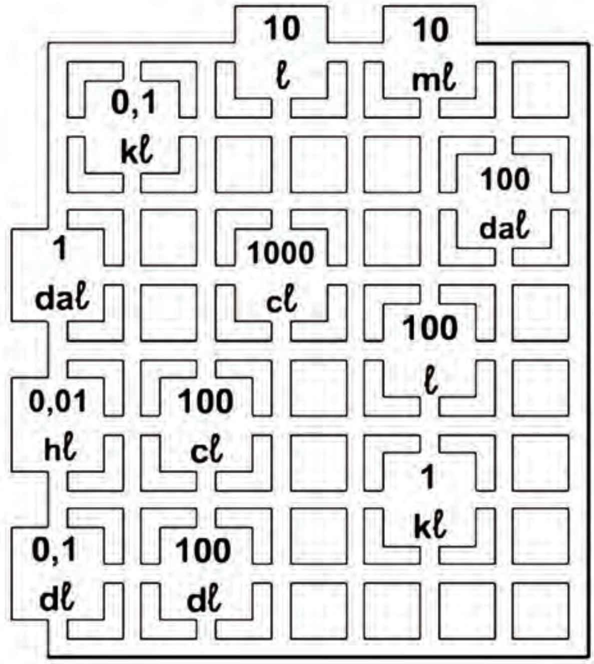


Imagen 2

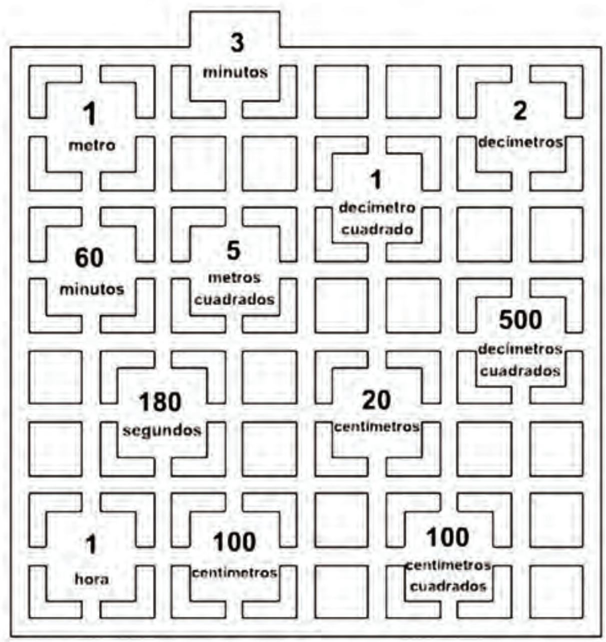


Imagen 3

Como vemos en la imagen 1 tenemos una rejilla con medidas de longitud, en la 2 de capacidad y en la 3 una mezcla con unidades de tiempo, longitud y superficie.

Es fácil imaginar que este tipo de laberinto puede adaptarse a cualquier contenido pues el juego se basa en unir parejas que son equivalentes. Podrían por tanto colocarse ecuaciones de primer grado y sus soluciones, polígonos regulares y sus nombres o ángulos interiores, sucesos de un experimento aleatorio y sus probabilidades, etc. A continuación tenemos un ejemplo en el que trabajamos las unidades monetarias y otro con números romanos. Cuando presentamos ejemplos de esto último solemos llamar a los laberintos *Calzadas romanas*.

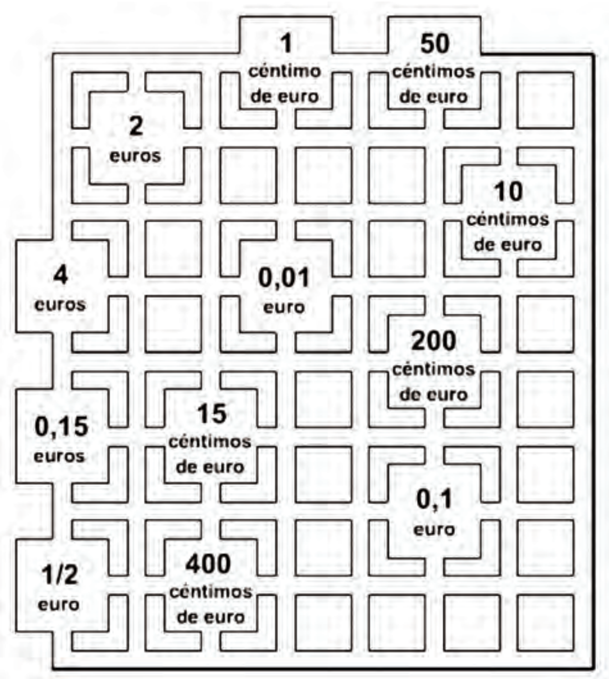


Imagen 4

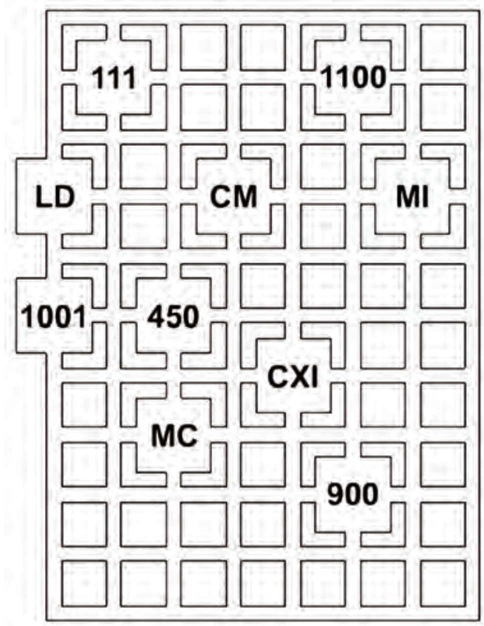


Imagen 5

Puzzles de medidas

Otro de los juegos que se puede utilizar con los alumnos en esta parte de la matemática es el puzzle. Ya hemos incluido puzzles en alguna otra entrega de la sección por lo que debe quedar evidente que éste es un recurso que se puede adaptar sin dificultad a cualquier contenido.

En la imagen 6 aparece uno de los puzzles que hemos utilizado en clase.

Su dinámica es recortar las nueve piezas y reconstruir el puzzle de forma que los elementos que quedan en contacto correspondan a la misma medida.

El puzzle está construido de forma que las piezas deben colocarse en el mismo sentido en que se ven, es decir, no se puede colocar ninguna al revés.

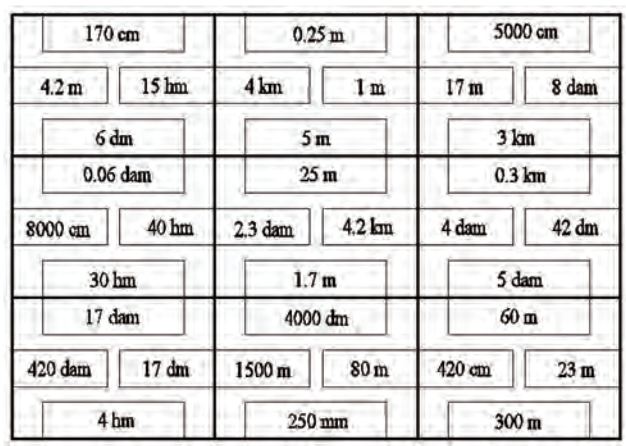


Imagen 6

A la hora de crear un nuevo puzzle el proceso debe ser el inverso al que se sigue al jugar con él. En una plantilla vacía comenzamos a escribir elementos emparejados y, una vez completa, se recorta y se reconstruye de otro modo antes de fotocopiar.

Hay que tener presente que siempre hay 12 elementos que no están emparejados, los que quedan en el borde del puzzle una vez construido. Con ellos podemos jugar para hacer más o menos complicado el puzzle. Basta que en el borde escribamos un dato que va en el mismo lugar de la ficha dentro del puzzle para que la dificultad en encontrar la solución del puzzle aumente y se tarde más tiempo en resolverlo.

Matgram

Para todos nuestros lectores será de sobra conocido el Tangram chino, un puzzle con el que se pueden trabajar muchos conceptos numéricos y geométricos. Hay una forma distinta de trabajar con él y es complementándolo mediante contenidos de cualquier bloque. El objetivo es similar a los dos anteriores recursos, hay que formar parejas de elementos que se deben unir para resolver el puzzle.

Aunque hoy día es posible encontrar muchos Matgram en Internet, la primera persona que los creó y comenzó a trabajar con ellos fue la profesora Lucía Puchalt[1] que ya en el año 1999 publicó cuatro cuadernillos, uno por curso de la ESO, en la editorial Editex.

En los Matgram se sigue el mismo proceso que en el Tangram chino a la hora de hacer una figura. Partimos del cuadrado, del que se recortan las piezas y tenemos que unirlas de otra manera. La diferencia es que ahora no vamos buscando una figura en concreto, sino que el objetivo es unir las piezas de forma que los conceptos que queden juntos sean equivalentes, como hemos visto en los anteriores juegos.

Si el proceso que se ha seguido es correcto nos encontramos al final con una figura reconocible. Esta es la ventaja principal de este juego pues el profesor, que conoce qué figura debe quedar al final, con un simple vistazo puede saber si el juego ha terminado en una solución correcta o no.

En la imagen 7 aparece uno de estos Matgram particularizado a los contenidos de Medidas.

Imagen 7

Antes de terminar el artículo con el siguiente juego convendría comentar, para aquellos compañeros de Primaria que no conociesen los juegos anteriores, que tienen la ventaja de que pueden utilizarse, con la misma estructura, en cualquier otra materia que no sea las matemáticas. Es decir, en todo aquel caso que queramos relacionar dos elementos se pueden aplicar cualquiera de ellos. Por ejemplo, para relacionar un país con su capital, el infinitivo de un verbo con la primera persona del presente, sea en inglés o en castellano, un animal con su nombre, etc.

Dominó

Para terminar queremos añadir un dominó de medidas, que hemos extraído de algún lugar que en este momento lamentablemente no recordamos, en el que se trabajan las medidas de capacidad y volumen.

Suponemos que la dinámica del dominó es de todos conocida, pero el procedimiento que seguimos nosotros es el siguiente:

1. Antes de jugar siguiendo las reglas clásicas, los alumnos manipulan las fichas para comprobar que están todas las familias que componen el dominó. Se aprovecha en este caso para repasar las medidas y sus equivalencias.
2. Se hace una partida de prueba con las fichas visibles, de forma que todos puedan ayudar al compañero, si tiene dudas, a escoger cuál es la que tiene que colocar en cada momento.
3. Por último su juega ya siguiendo las normas básicas y cada uno con sus fichas ocultas.

En una futura entrega tenemos la intención de tratar más extensamente el tema del dominó, explicando en concreto cómo se puede construir uno adaptado a nuestros alumnos y a los contenidos que nos interesen en ese momento.

Para terminar añadimos el dominó de medidas para que podáis trabajarlo en clase.

JUEGOS ■

NOTAS

1 En la siguiente dirección se puede encontrar una intervención en las IV Jornadas Regionales de la Comunidad Valenciana en la que explica en qué consiste este material.

http://www.ua.es/personal/SEMCV/Actas/IVJornadas/pdf/Part89.PDF

Este artículo fue solicitado por *Suma* en enero de 2011 y fue aprobado para su publicación en abril de 2011.

0,1 hl • 100 dm^3	1 dal • 10 dm^3	0,1 m^3 • 10 hl	1 hl • 100 l	1 kl • 1 m^3
0,01 hl • 1000 dm^3	10 dl • 10 dal	0,1 dal • 10 l	1 l • 1 dm^3	0,01 m^3 • 1000 l
1 dl • 0,1 l	0,1 dm^3 • 100 cl	10 cl • 100 dl	100 ml • 0,1 kl	100 cm^3 • 100 dal
1 cl • 0,1 dl	0,001 dal • 0,01 dal	0,01 dm^3 • 1000 ml	0,01 l • 10.000 cm^3	10 ml • 1.000 dl
10 cm^3 • 1 kl	1 ml • 1 cm^3	0,001 l • 0,00001 m^3	0,0001 dal • 0,0001 m^3	0,1 cl • 1.000 cm^3
	0,01 dl • 0,01 kl	0,001 dm^3 • 100.000 cm^3	0,000001 m^3 • 1.000.000 cm^3	Capacidad y Volumen

El juego en clase de Matemáticas

Grupo Alquerque - Sevilla

Publicaciones recibidas

Problemes olímpics
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 59, abril 2011
Valencia
ISSN: 1578-1771

Epsilon
SAEM THALES
Vol. 27 (1), 2010
Sevilla
ISSN: 1131-9321

PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada
Vol. 5 n.º 3, marzo 2011
ISSN 1886-1350

Investigación y ciencia
Prensa Científica, S.A.
Mayo 2011
Barcelona
ISSN: 0210136X

Xla Tangente
Kangouru Italia
N.º 26, aprile 2011
Monza. Italia
ISSN: 1971-0445

Pubicaciones de la Facultad de Educación y humanidades del Campus de Melilla
Universidad de Granada
N.º40, Noviembre 2010
ISSN: 1577-4147

Foro de Educación
Nº. 10 2009
Salamanca
ISSN: 1698-7799

Campo Abierto
Facultad de Educación. Universidad de Extremadura.
Vol. 29 Nº 2 2010
Badajoz
ISSN: 0213-5929

suma+ 67
Junio 2011, pp. 65-67

Números, arrugas y publicidad

La publicidad forma parte de nuestras vidas y nos educa en el arte de esperar pacientemente la continuación de los programas televisivos. Afortunadamente hay canales televisivos de ventas que no nos hacen perder el tiempo con películas, noticias y opiniones y ofrecen directamente sólo publicidad.

La publicidad no es obra de bondadosos samaritanos sino de profesionales cuya importante y audaz misión en la vida no es informar sino vender: un producto (coche, caldo, cava, nevera...) o un servicio (agencia de viajes, taxi, asesoría...) o un efecto (limpieza, felicidad, relax, belleza...). Como en este caso el fin justifica los medios, los creativos de esta profesión recurren a todo tipo de recursos comunicativos. Es en el terreno de la *publicidad engañosa* donde los números pueden ser utilizados con diversos fines perversos. No son pocos los publicistas que no escatiman números en sus anuncios para dar al mensaje un toque de seriedad científica y algunos genios comunicativos no dudarán en sorprender a la audiencia pervirtiendo una igualdad o un concepto.

En mi afán por examinar números en la vida cotidiana el pasado verano me atreví a comprar todo tipo de revistas de belleza y descubrí algunas joyas que quisiera ahora compartir con los lectores de *Suma*.

Arrugas que pronto dejarán de serlo

Lejanos quedan ya los días en que se consideraba que “la arruga es bella”. Durante el verano de 2010 la crema Retinol

de la casa de cosméticos Garnier ha gozado de una promoción publicitaria excepcional:

Borra una de cada cuatro arrugas.

Cabe agradecer que Garnier recupere la sana tradición de llamar a las cosas por su nombre (arrugas) y no haga referencia a las dichosas “líneas de expresión”. Pero la exactitud de la afirmación que contiene el anuncio hace sospechosa a la misma (¿no podría ser media arruga cada vez?) y crea grandes dudas sobre cómo han logrado obtener el resultado. ¿Qué ocurre si alguien tiene sólo tres arrugas?, ¿Cómo decide la crema cual de las cuatro arrugas va a desaparecer?, ¿aplicando cuatro veces el tratamiento desaparecen todas las arrugas?, ¿la desaparición de la cuarta arruga precisa de varios años de tratamiento o tiene lugar el primer día?, ¿alguien con 100 arrugas se quedará con 20?… más dudas que arrugas.

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

Arrugas reducidas rápidamente

Si no le convence la oferta anterior sepa que Q10 de Nivea :

> *…reduce las pequeñas arrugas en sólo unas horas, y en un mes hasta las arrugas más profundas.*

Y debe ser verdad porque la chica adolescente del anuncio no tiene ninguna arruga…

Plan de belleza en siete días

En algunos casos el compromiso de la empresa es temporal. La casa Pond's ha trabajado el tema desde 1846 y aún hoy sigue ofreciendo, entre otros productos, los ingredientes anti-edad. El mítico *Plan de Belleza Pond's en Siete Días* hizo furor en los años 60 al prometer grandes efectos estéticos en tan sólo una semana. Cabe notar que el anuncio era honrado en cuanto le proponía un plan y no entraba en detallar qué tipo de resultados se derivarían del mismo. Pero la insinuación de que el plan era de "belleza" abría perspectivas positivas. Era sospechoso el hecho de que el plan parecía servir igual a cualquiera independientemente del estado de partida, de los surcos y valles de la cara, etc. Pero como además el plan era de "belleza en general", podía ser tentador para personas con problemas de ortodoncia, narices prominentes, pies deformes, etc. También el plan parecía ser universal, para todas las edades.

Tantos por ciento por la cara

La parisina ÉAL (L'Oréal) distribuye la crema para rostro, contorno y cuello REVITALIFT. A página entera y a todo color, en la reconocida revista científica ¡HOLA! Se da toda la información que las futuras usuarias puedan precisar:

> *Reestructura la malla interna de la piel.*
> *Eficacia medible hasta en las zonas difíciles:*
> *Rostro más firme: 88% **
> *Contorno facial redefinido: 85% ***
> *Incluso el cuello se alisa: 88% ****

Y los tres asteriscos llevan al mismo pie de página:

> *Estudio realizado por TNS E-Access Panel en Octubre de 2009 sobre una preselección de productos nuevos de gran consumo a 10.000 individuos representativos de la población española.*

Para quien lea el pie de página quizás resulte claro que los tantos por ciento no se refieren a que rostro, contorno y cuello queden recuperados en las cifras indicadas sino que se trata de que unas 8 de cada 10 personas dicen presentar resultados positivos. Cómo se ha medido la eficacia en la "malla" (¿qué es la malla?) es un misterio. Pero aun es más extraño que hayan logrado tener un criterio claro sobre qué es "ser representativo de la población española". Si representaban a toda la población ¿también incluyeron chicas jóvenes con caras lozanas y tersas?

Este producto fue Gran Premio a la Innovación 2010. También *L'Oreal* tiene el Rellenador de Colágeno "formulado con bioesferas" (?), que debe ser maravilloso.

A partir de febrero de 2010 *L'Oréal-Paris* ha lanzado también los productos *Código Juventud* los cuales son el resultado de 10 años de investigación en la <<ciencia de los genes>>, una <<tecnología pro-gen>> que aseguran <<despierta los genes de juventud dormidos >>. Esto si que son novedades científicas. ¡A despertar genes dormilones!

Sensai Premier

Diversas webs de belleza han celebrado que por la modesta cifra de 660 euros ya sea posible perder diez años con la japonesa Sensai Premier que, entre otras maravillas, << activa la recuperación del ADN dañado>>.Nunca lo del ADN había caído tan bajo. Lo curioso es esa insistencia en los 10 años justos. Y que en estas webs informativas se diga:

> *Las arrugas se producen por los gestos de expresión, por la postura al dormir y por la fuerza de la gravedad; por el paso del tiempo y por la luz ultravioleta.*

Encantador que los efectos del paso del tiempo queden por detrás de la fuerza de la gravedad. Ir a la Luna puede tener sus ventajas.

Una receta excepcional

Si bien algunos cosméticos esconden las composiciones de sus prometedores productos, otros exponen sinceramente sus ingeniosas componentes. El *Diamond Extreme* de la casa Natura Bissé contiene << artemia salina, una infusión de energía y otra de ADN marino y manteca de Karité, además de mango>>. Bien es verdad que no hay números indicativos de estos componentes, pero aunque estuviesen ¿sabría donde ir a buscarlos?.

Cada edad, su crema

Es curioso que se puedan precisar edades para los que un producto esta diseñado. *Gold Future Eye Reviver* de Helena Rubinstein tiene una fórmula <<mágica>> con oro microactivo para las de 40 años, pero *Capture R60/80* de Dior ya hace efecto a los 30.

La gran hidratación

La casa Marionnaud promociona la crema hidratante *Biotherm- Aquasource Skin Perfection* especificando la osada evaluación numérica:

> *...el equivalente a 5.000 litros de agua termal + 35 millones de aquakeep perfeccionadores.*

Parece increíble que en un tarro tan pequeño se escondan tantas sorpresas y que el uso de la crema sea mejor que ducharse bajo las cataratas del Niágara.

Retín-Ox Corrección

La casa Roc ofrece su producto *Retín-Ox Corrección* asegurando un increíble y misterioso resultado sobre un tensor que tiene efectos de estiramiento (lifting) subiendo el pómulo 2 milímetros. Al <<rellenar las arrugas profundas y borrar las líneas de expresión>>...deja la piel 10 años más joven. Una competencia desleal con los cirujanos plásticos... si es que el efecto dura más de unas horas.

§§§§§§

A menudo nos encanta hablar de belleza y matemáticas. Los anteriores anuncios muestran como las matemáticas pueden ser usadas para transmitir esperanzas y de paso vender "soluciones".

Para saber más

Publicidad en revistas semanales de información general.

EL CLIP ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en marzo de 2011 y aceptado en mayo de 2011 para su publicación.

Publicaciones recibidas

petit X
IREM de Grenoble
Nº 84, 2010
Saint Martin d'Hères
ISSN: 0759-9188

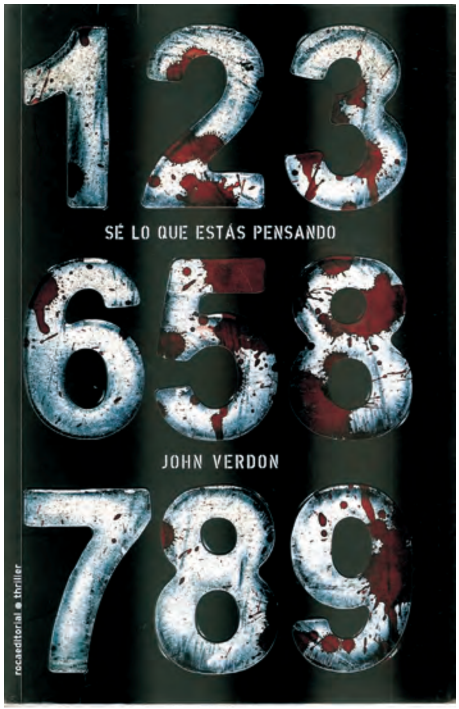
Losanges
SBPMef
Nº. 12. Mars 2011

Educación matemática en contexto: de 3 a 6 años
Àngel Alsina
Cuadernos de Educación, 62
ICE-HORSORI
Barcelona, 2011
ISBN: 978-84-96108-95-0
224 páginas

Boletin das ciencias ENCIGA
ANO XXIV Nº 72, Abril 2011
Santiago
ISSN: 0214-7807

suma+ 67
Junio 2011, pp. 69-75

Sé lo que estás pensando



Sé lo que estás pensando
(Título original: *Think of a number)*
John Verdon
Roca Editorial
Primera Edición en castellano: Junio 2010
ISBN: 978-84-9918-136-3
431 páginas

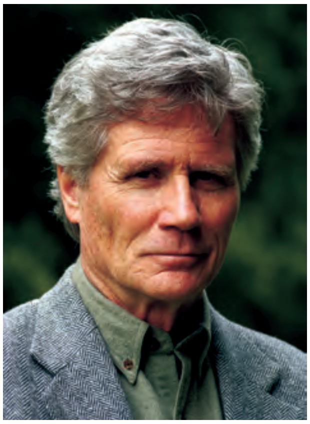
Sé todo lo que piensas,
sé cuando parpadeas,
sé dónde has estado,
sé adónde irán tus pasos.

El título que nos ocupará en este número no nos va dejar indiferentes; al contrario, a medida que vayamos avanzando en su lectura, nos irá atrapando hasta cautivarnos por completo.

La presentación de la obra, en su contraportada, es la que sigue:

> Si alguien te pidiera que pensaras un número, yo sé en qué número pensarías. ¿No me crees? Piensa en cualquier número del uno al mil. Ahora verás lo bien que conozco tus secretos. Abre el sobrecito.
>
> Un hombre recibe una carta que le urge a pensar en un número, cualquiera. Cuando abre el pequeño sobre que acompaña al texto, siguiendo las instrucciones que figuran en la propia carta, se da cuenta de que el número allí escrito es exactamente en el que había pensado. David Gurney, un policía que después de 25 años de servicio se ha retirado al norte del estado de Nueva York con su esposa, se verá involucrado cuando un conocido, el que ha recibido la carta, le pide ayuda para encontrar a su autor con urgencia. Pero lo que en principio parecía poco más que un chantaje se ha acabado convirtiendo en un caso de asesinato que además guarda relación con otros sucedidos en el pasado. Garney deberá desentrañar el misterio de cómo este criminal parece capaz de leer la mente de sus víctimas en primer lugar, para poder llegar a establecer el patrón que le permite atraparlo.

Constantino de la Fuente Martínez
IES Cardenal López de Mendoza, Burgos
literatura@revistasuma.es



John Verdon ha trabajado en varias agencia publicitarias en Manhattan como director creativo hasta que, como su protagonista, se traslada a vivir al norte del estado de Nueva York en un entorno rural. Sé lo que estás pensando es su primera novela.

A este respecto, como hemos podido leer en alguna entrevista, Verdon valora muy positivamente la traducción de su obra al castellano, porque le ha permitido su difusión en muchos países. Después del éxito de Sé lo que estás pensando, tiene diseñadas otras dos novelas con el mismo policía jubilado como protagonista, de las que podremos disfrutar muy pronto.

Un comentario muy personal

Nos encontramos de nuevo con un thriller que, analizado cronológicamente, comienza con un episodio muy conectado aparentemente con la magia y los números, sigue con la resolución de un complejo caso policial, con varios asesinatos de por medio, y acaba con el reencuentro del protagonista consigo mismo, comenzando la superación de un trauma personal.

En cuanto a la acción, diremos que la novela nos va produciendo una creciente adicción, aunque al principio parezca que no va a ser así… Pero, a partir de la aparición del primer asesinado, la acción nos va envolviendo de forma inusual, hasta que quedemos totalmente preso de ella, sin poder dejar de leer para conocer el desenlace de una trama bien planteada y estructurada. Los personajes no tienen ningún tipo de ambigüedad y, además del protagonista, cabe destacar la personalidad de su esposa Madeleine, que sugiere mucho a lo largo de la novela.

Desde un punto de vista temático, la obra presenta tres grandes problemas: el policial, que constituye la trama principal de la novela y que se resuelve; el del día a día en la comunicación de una pareja, que es sin duda el segundo gran tema, planteado magistralmente y dándonos a entender que no es un problema como el primero, sino más bien algo con lo que se debe aprender a convivir; y, por último, el problema personal del protagonista, que se va *enunciando* entre líneas a lo largo de toda obra y del que al final de la misma comenzamos a entrever su superación–resolución. Este último problema es tratado de forma secundaria, pero no por ello de menor interés.

En cuanto al problema de la comunicación entre personas con muchas vivencias acumuladas en común, el autor deja patente, como en muy pocas novelas hemos visto, el papel secundario de las palabras que usamos en el lenguaje oral; es decir, lo que concretamente decimos, frente a todo lo que rodea a ese mensaje que surge del emisor: lo que decimos y lo que queremos decir, lo que decimos y el significado oculto de lo que decimos; lo que decimos y el lenguaje corporal que lo acompaña; lo que decimos y los matices (silencios, tonos, tensión, etc.) con los que lo decimos. Todas estas variables aumentan el nivel de la comunicación, la enriquecen, pero, a la vez, la hacen más complicada y compleja, al llenarla de supuestos implícitos que el receptor interpreta y con los que construye *un significado*, que para él (o ella) es *el significado*. Las diferencias entre el significado del mensaje para el emisor y el receptor configuran uno de los problemas permanentes de la comunicación. Todo esto, como dice mi querido colega y a pesar de ello muy buen amigo, Enrique Hernando, se plantea fenomenalmente en *Sé lo que estás pensando*. Precisamente por eso, no nos parece desacertado el título en castellano, porque continuamente queda patente el intento de saber lo que está pensando la otra persona, no sólo en el motivador acertijo de los números, sino también en los diálogos con la pareja del protagonista y en las discusiones del equipo de investigación al intentar caracterizar la personalidad del asesino.

> *Nos encontramos de nuevo con un thriller que comienza con un episodio muy conectado aparentemente con la magia y los números, sigue con la resolución de un complejo caso policial...*

Otro tema interesante, derivado del tercer problema que plantea la obra, es la dificultad de las personas para enfrentarse a sus experiencias traumáticas y, como consecuencia de ello, la diferencia entre las influencias y los condicionantes que esas experiencias ejercen en sus vidas futuras: los personajes que proyectan sus frustraciones y traumas sobre los demás, provocando perjuicios y hasta tragedias, casi siempre son considerados los *malos;* en cambio, los que las proyectan hacia su interior y viven como las primeras víctimas de esas vivencias que les atormentaron y les atormentan, suelen ser los *buenos*. Ni que decir tiene que esto es la vida misma, que nunca es una película en blanco y negro sino en infinitas tonalidades de grises, y que la pericia del escritor es la que puede conseguir que todo se concrete de manera creíble, atractiva y bella.

...continuamente queda patente el intento de saber lo que está pensando la otra persona, no sólo en el motivador acertijo de los números, sino también en los diálogos...

Si anteriormente analizamos la obra desde un punto de vista temático, ahora lo haremos desde un punto de vista más matemático. Para ello comenzaremos resaltando la idoneidad de un tema matemático como los números para desencadenar una situación aparentemente ilógica, que se contrapone a los esquemas habituales de razonamiento. Tiene su atractivo que las matemáticas, que socialmente están consideradas como lo más lejano a la magia y lo más cercano a la lógica, sean utilizadas por Verdon, de una forma bastante bien fundamentada, para plantear al lector la posibilidad de la adivinación del pensamiento. Este episodio, que es el anzuelo para picar y adentrarnos en la obra, va dejando paso, posteriormente, al verdadero tema matemático, si es que lo podemos denominar así: el paralelismo entre la resolución de un caso policial y la resolución de un verdadero problema en matemáticas. A lo largo de toda la novela, en el transcurso de la investigación, vamos comprobando la infinidad de similitudes con el proceso de resolución de una situación problemática en matemáticas. Este punto lo ilustraremos con más extensión en la propuesta para el aula.

Prosiguiendo desde la óptica matemática, no debemos olvidarnos de otra idea relacionada con la educación en general y con la educación matemática en particular: el trabajo en grupo como generador de ideas, estrategias y procesos más eficaces que los debidos a un solo individuo. Nos estamos refiriendo a ese ente denominado por los expertos como *grupo inteligente*, en el que las ideas no sólo nacen, sino que crecen y se robustecen gracias a las aportaciones de sus componentes. Los debates surgidos en las reuniones del equipo de investigadores, así como las interacciones explícitas e implícitas entre ellos, al analizar el estado del caso, son descritos por Verdon, el autor de *Sé lo que estás pensando,* de manera minuciosa y, en algunos momentos, magistral. Todo ello, a pesar de que David Gurney, el personaje principal, *odiaba las reuniones en general. Su mente trabajaba mejor cuando estaba solo. Pensar en grupo le daba ganas de marcharse de la sala* (pág. 300), pero no duda en aprovechar las ideas sugeridas por los demás para plantear posibles vías de explicación de algunos de los hechos, como en los diálogos entre el sargento Wigg y Gurney en las páginas 331 y siguientes, que ilustran perfectamente la utilidad de las sesiones de *tormenta de ideas*, una de las técnicas propuestas por Miguel de Guzmán en su modelo de resolución de problemas en grupo.

En otro orden de cosas, otra de las características matemáticas del detective Gurney es su cuestionamiento constante de la realidad. Esta capacidad, que desde el campo de la educación matemática se concreta en la competencia de *pensar matemáticamente*, es muy a tener en cuenta en nuestros objetivos educativos, ya que ver la realidad como una fuente constante de preguntas para ser contestadas, de cuestiones problemáticas para ser resueltas, etc., nos obliga a conocerla y comprenderla más a fondo y nos permite transformarla, modificarla y mejorarla. Como decíamos en este mismo párrafo, este es un buen objetivo de fondo para nuestro campo de la educación.

Por último destacaremos otro de los nexos entre el personaje y las matemáticas: el papel de *la certeza como una cuestión sagrada* (pág. 300). La certeza se nos presenta como el grado más alto de fiabilidad, una vez pasados diferentes filtros o niveles de justificación. En palabras de Mason, Burton y Stacey, en su ya clásico de la literatura de la educación matemática *Pensar matemáticamente*, hay tres niveles de justificación de la certeza de una idea: ante uno mismo, ante un amigo y, por último, ante un enemigo. La idea queda completa si se consigue que el enemigo sea uno mismo; en ese caso, la certeza se puede conseguir sin acudir a validadores externos.

En fin, un libro de lectura muy aconsejable, para trabajarlo en clase o simplemente para disfrutar de su lectura.

Una propuesta de trabajo en el aula

El tema central de la propuesta para el aula va a ser la resolución de problemas, haciendo hincapié en algunos aspectos del proceso de resolución que tienen conexión con la obra que nos ocupa.

En principio hay muchos temas que se pueden tratar, pero la extensión limitada de la sección nos obliga a desarrollar solamente tres de ellos. Algunos de los restantes se presentan en la siguiente tabla:

Tema	Páginas
Ver lo que importa y lo que no	201
La situación no encaja, no tiene sentido	227
Supongamos...	230
Hacia atrás	228...
Eliminar posibilidades	252
Pasar por alto el defecto de una teoría o hipótesis	269
Encajar piezas en su lugar	207 y 307
Un patrón en un mar de datos	334
Homicidio como un enigma a resolver	423

Para el tratamiento los temas anteriores en clase, aconsejamos utilizar problemas en los que ya contemos con los protocolos de su resolución. Con los enunciados y los protocolos se pueden escoger las citas adecuadas de la novela y ver que aparecen situaciones similares en el protocolo.

Presentamos las tres propuestas mencionadas más arriba, con sus correspondientes desarrollos**.**

Investigación 1: Todo se reduce a un cálculo de probabilidades

> En nuestro caso, sabemos que la primera comunicación consistía en dos notas de ocho líneas, un total de dieciséis líneas cortas, más una dirección de tres líneas en el sobre exterior. Salvo por las direcciones, las cartas serían todas iguales, lo que haría que la escritura fuera repetitiva y rápida. Calculo que cada una tardaría en completarse unos cuatro minutos. Eso serían quince por hora. Si dedicaba sólo una hora al día, habría redactado más de cinco mil en un año. Dos horas: casi once mil. En teoría podría hacer muchas más, pero existen límites incluso para la persona más obsesiva. (pág. 334)

Como puedes comprobar con un cálculo rápido, podemos verificar las afirmaciones del personaje. Haz las operaciones y analiza su veracidad.

> Supongamos que la carta original (la misma carta, idéntica) se envió a once mil personas pidiéndoles que pensaran en un número entre uno y mil. La teoría de la probabilidad predeciría que aproximadamente once personas elegirían correctamente. En otras palabras, hay una posibilidad estadística de que once de esas once mil personas que pensaran en un número al azar elegirían el número seiscientos cincuenta y ocho. (pág. 336)

El problema está claramente enunciado: ¿Cuál es la probabilidad de acertar un número entre uno y mil? Si repetimos el experimento once mil veces, ¿Cuál es el número esperado de aciertos? Explica razonadamente el resultado.

> No estoy diciendo –dijo Gurney– que exactamente once personas de once mil eligieran el número seiscientos cincuenta y ocho, sólo digo que once es el número más probable. No sé suficiente de estadística para recurrir a las fórmulas de probabilidad, pero quizás alguien puede ayudarme en eso. (pág. 337)

Aquí estamos nosotros para ayudar al policía retirado David Gurney. Todos sabemos de lo que está hablando. Si escribimos once mil cartas con el número 658 oculto, ¿cuántas personas, por término medio, pensarían en ese número?

¡La sorpresa que se llevarían al abrir el sobre con el número y vieran que era el que habían pensado…!

Plantéate un problema análogo para números de 2 cifras. ¿A cuántos deberíamos enviar la carta, para tener la seguridad de que la media de aciertos fuera de 10 personas.

Generaliza la cuestión para números de n cifras y p cartas escritas.

Investigación 2: Del caso policial a la resolución de un problema

> Gurney decidió volver a recorrer la ruta del asesino, pensando que podría reparar en algo de los alrededores que se le hubiera pasado. (pág. 220)

¡Cuántas veces nos ocurre eso en el transcurso de la resolución de un problema! Volver al enunciado, a analizar los datos, a relacionarlos con nuestros conocimientos, etc., debe formar parte de los procedimientos de ataque en la resolución de un problema.

Por ejemplo, imagínate que te proponemos el siguiente problema: averiguar qué números se pueden escribir como suma de números naturales consecutivos.

Imagina que te pones unos ejemplos para familiarizarte con la situación:

$3+4=7$; $7+8=15$;   etc.

Inmediatamente pones $n+(n+1)=2n+1$. A partir de esto dices: la solución del problema es los números impares.

Nosotros te diríamos: lo que has hecho está bien, excepto la solución que propones. Vuelve al enunciado, porque has pasado por alto un detalle del mismo: ¿Qué es lo que habrías supuesto que no está en el enunciado?

> Dejó dos mensajes: quería confirmar que el pez era un salmón y deseaba pedir fotos balísticas que pudieran confirmar que las balas de la pared de Kartch y las de la pared de Mellery habían salido de la misma arma. No tenía muchas dudas en ninguno de los dos puntos, pero la certeza era una cuestión sagrada. (pág. 300)

En la novela pasa como en matemáticas: mientras no tenemos la justificación veraz de un resultado, la cuestión está sin resolver y lo más que podemos decir es que tenemos conjeturas, pero no demostraciones.

Siguiendo con el problema anterior que te hemos propuesto, imagina que te planteas varios ejemplos más, incluso ordenando los números, para ser más sistemáticos:

2=	3=1+2;	**4**=
5=2+3;	6=1+2+3;	7=3+4;
8=	9=4+5;	10=1+2+3+4;
11=5+6;	12=3+4+5;	13=6+7;
4=2+3+4+5;	15=4+5+6;	**16**=
17=8+9;	18=5+6+7;	…

Y así sucesivamente.

Analizando las características de los números 2, 4, 8, 16, ves que son potencias de 2. De ahí concluyes: los números que no se pueden poner como suma de consecutivos son las potencias de 2.

¿Crees que esta respuesta es correcta?, ¿está suficientemente justificada? ¿Podría ser aceptada como respuesta correcta? Expón algunas ideas por las que no puede darse por válida.

> Estamos hablando de notas manuscritas escritas a un puñado de personas, personas para las que el número seiscientos cincuenta y ocho tenía algún significado personal.
>
> Gurney abrió lentamente los ojos y miró a Kline:
>
> Pero no lo tenía. Al principio yo lo supuse, porque ¿de qué otra manera se le pudo ocurrir? Así que no dejé de plantearle a Mark Merllery esa pregunta, ¿qué significaba el número para él? ¿A qué le recordaba? ¿Lo había visto escrito alguna vez? ¿Era el precio de algo, una dirección, una combinación de una caja fuerte? Pero no dejaba de insistir en que el número no significaba nada para él, que simplemente se le había ocurrido de manera aleatoria. Y creo que estaba diciendo la verdad. Así que tiene que haber otra explicación.
>
> –Eso significa que vuelve al punto de partida– dijo Rodríguez, poniendo los ojos en blanco con exagerado cansancio. (pág. 332-333)

A veces conviene volver al punto de partida, al enunciado del problema; eso es lo que te proponemos hacer para continuar con el nuestro. Esto suele ocurrir cuando se nos van acumulando preguntas, sin contestar, sobre el problema.

¿Cuántas preguntas tienes, sin contestar, sobre diferentes aspectos del problema? Enúncialas y escríbelas todas.

Vuelve al enunciado inicial y plantéate alguna pregunta que conecte los resultados que tienes hasta ahora con los datos o la pregunta del problema.

> –Todo el mundo se ha concentrado en los árboles –dijo, en voz lo bastante alta para hacerse oír en una sala mucho más grande que la oficina de Kline–. ¡Estamos olvidando el bosque!
>
> –El bosque es…? –preguntó Kline.
>
> –El bosque tiene que ver con la enorme cuestión de la oportunidad. Todo el mundo se estaba liando con especulaciones y con la locura de pequeños detalles del método. Nos estamos distrayendo de la cuestión número uno: una casa llena de drogadictos y otros repugnantes criminales con fácil acceso a la víctima. (pág. 214)

Después del vuelco en la investigación, que plantea el personaje, con el símil del bosque y los árboles, volvamos a nuestro problema.

Quizás, entre tus preguntas hayas salido algunas parecidas a las siguientes:

–¿Por qué las potencias de dos no se pueden poner como suma de consecutivos? ¿Qué característica tienen las potencias de dos que no comparten con las sumas de números consecutivos? ¿Qué características tienen las sumas de consecutivos que no tienen las potencias de dos?
–Al sumar dos números consecutivos salen los impares, ¿qué ocurre si sumamos tres números consecutivos? ¿Y si sumamos cuatro? ¿Y si sumamos cinco?...

Reanuda la investigación por las dos vías que sugieren estos dos grupos de preguntas. Escribe los resultados que consigas. ¿Qué característica, relacionada con sus divisores, tienen los números que se pueden poner como suma de consecutivos? Comprueba que se cumple para los dos grupos de preguntas.

> Gurney salió corriendo desde la cocina al estudio, cogió la carpeta del caso yla hojeó. ¡Allí estaba! Por segunda vez ese día sintió la emoción de tocar una parte de la verdad. (pág. 307).

Deseamos que algo parecido te esté ocurriendo a ti, en este punto de la investigación. Si has sabido dar con la respuesta a la última pregunta planteada será así.

Finaliza justificando por qué las potencias de 2 no se pueden poner como suma de números naturales consecutivos.

> Se quedaron tumbados en silencio uno al lado del otro en la oscuridad durante varios minuto, con la mente de Gurney yendo y viniendo con velocidad por su reconstrucción del crimen como un hombre que acaba de botar una canoa casera y está comprobándola con atención en busca de posibles fugas. (pág. 233)

Haz un repaso general del proceso llevado a cabo desde el principio y comprueba que no hay ninguna fuga. Si hay alguna duda, escríbelas y, después, trata de resolverlas.

Escribe las principales conclusiones del trabajo realizado: resultados encontrados, ideas aprendidas, dificultades encontradas, posibles continuaciones para seguir investigando el tema, opinión personal sobre el trabajo realizado, etc.

Investigación 3: De la resolución de un problema al caso policial

> Por lo general, veía un homicidio como un enigma a resolver, a un asesino como a un oponente al que vencer. (pág. 423)

Te presentamos un guión para que lleves a cabo una interesante investigación matemática. Además de resolver las cuestiones que te proponemos, queremos que busques en la novela algún párrafo que sirva para enmarcar cada uno de los grupos de preguntas. Si no lo encuentras, invéntate un episodio dentro de una investigación policial, que tenga similitudes con la cuestión resuelta:

Tenemos tres montones de cerillas con 11, 7 y 6 cerillas en cada uno. Queremos conseguir el mismo número de cerillas en cada montón. Para ello debemos cumplir una condición: cada montón puede recibir el mismo número de cerillas que ya tenga, y deben provenir todas del mismo montón. ¿Cómo hacerlo en el menor número de movimientos posibles?

Estos curiosos pasatiempos, a veces esconden leyes matemáticas que son las que rigen su funcionamiento. Vamos a intentar descubrir algunos de estos modelos matemáticos en algún caso no excesivamente complicado. Para ello vamos a estudiar la siguiente situación:

> *Tenemos dos montones de cerillas con distinto número de cerillas cada uno. Pasamos sucesivamente del montón más grande al más pequeño tantas cerillas como haya en éste último. Terminamos el proceso cuando obtengamos el mismo número de cerillas en cada uno. ¿Cuándo llegaremos a la igualdad?*

1. Pon dos ejemplos de pares de montones en los que no se puede llegar a la igualdad nunca y explica las causas de ello; además éstas deben ser distintas en cada caso.
2. Pon dos ejemplos de parejas de montones en los que se pueda llegar a la igualdad y explica lo que ocurre en cada paso, hasta que los dos montones tienen el mismo número de cerillas.

Como podemos ver, hay números de cerillas con los que es imposible conseguir la igualdad, y hay otros en los que se consigue después de llevar a cabo, varias veces, el movimiento permitido entre las cerillas de los montones. Vamos a trocear el problema utilizando la estrategia de *plantearnos subproblemas* del problema inicial.

Supongamos que tenemos dos montones de cerillas con x e y cerillas cada uno, siendo $x \neq y$.

3. ¿Qué relación debe existir entre x e y, números de cerillas en cada montón, para conseguir la igualdad al cabo de un solo paso? Justifícalo matemáticamente. ¿Cuántas soluciones de x e y existen? Pon algunos ejemplos.
4. Resuelve la misma cuestión para el caso en que consigamos la igualdad de los montones al cabo de dos pasos exactamente, demostrándolo matemáticamente. ¿Cuántas relaciones distintas entre x e y existen en este caso? Pon ejemplos para cada una.
5. Responde a la cuestión si queremos conseguir la igualdad al cabo de tres pasos.

Después de resolver esos casos particulares, estamos en condiciones de encontrar la respuesta para el caso general:

6. ¿Cuántas relaciones distintas podrán existir entre x e y, para conseguir la igualdad al cabo de n pasos?
7. Enuncia una conjetura sobre el número posible de cerillas en cada montón, para conseguir la igualdad al cabo de n pasos.
8. Justifica la veracidad de tu conjetura.

Después del proceso anterior, una vez resuelto el problema inicial en su totalidad, te vamos a proponer que lo resuelvas con un proceso inverso al usado antes.

9. Después de mover cerillas unas cuantas veces, de un montón a otro, según lo permitido, hemos conseguido la igualdad; es decir, que los dos tengan x cerillas. ¿Cuántas cerillas había en cada montón en el paso anterior, es decir, inmediatamente antes de conseguir la igualdad?

11. ¿Cuántas cerillas podía haber en cada montón dos pasos antes de conseguir la igualdad?

12. Contesta a la misma cuestión para n pasos antes de conseguir la igualdad.

Seguro que después de llevar a cabo el proceso inverso, te habrás dado cuenta de cuantos pasos son necesarios para llegar, desde la igualdad en los dos montones, hasta la situación en que los dos montones son desiguales y es la más alejada de la igualdad inicial

12. ¿Cómo se puede hacer esto último?

Hemos resuelto el problema de dos maneras diferentes: una va del principio al final y la otra va del final hacia el principio.

13. Analiza los dos métodos seguidos y explica cuáles son los momentos o las ideas claves de cada uno.
14. Elige el método que te parece mejor, según tu opinión, y explica tus razones para ello.
15. Expón algunas ideas sobre cómo se podría resolver el problema para el caso en que tengamos tres montones de cerillas como situación de partida.

LITERATURA Y MATEMÁTICAS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en febrero de 2011 y fue aceptado en abril de 2011 para su publicación.

Convocatoria de actividades de la SAEM THALES

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES informa de la convocatoria de las siguientes actividades.

Cursos formación a distancia matemáticas 2011

Cursos convocados:

- Estadística en Secundaria y Bachillerato con R.
- Posibilidades didácticas de la Web 2.0.
- Geogebra: TIC e innovación en la enseñanza de las matemáticas.
- ¿Qué escondes? Taller de criptografía.
- Matemáticas en la escuela 2.0.
- A leer matemáticas: propuestas didácticas para incluir la lectura en el aula.
- Cálculo simbólico y gráfico con WxMaxima.
- Recursos de información para la investigación educativa en matemáticas.
- Cine, TV, matemáticas y competencias básicas.
- La calculadora científica como recurso didáctico en las matemáticas de ESO y Bachillerato.
- Iniciación a TutorMates.

Información general

– El periodo de inscripción comenzará el 15 de septiembre y finalizará el 30 de septiembre de 2011. La asignación de plazas se realizará según el orden de inscripción en el curso.
– Todos los cursos se convocan con un número máximo de 60 plazas.
– En esta convocatoria no existirá proceso de preinscripción, la asignación de plazas se realizará según el orden de inscripción en el curso.
– La matriculación en el curso se obtiene una vez realizado el pago de la correspondiente cuota de matrícula.
– El pago de la cuota de matrícula debe realizarse en un plazo máximo de cinco días a partir de la fecha en la que se cumplimenta la solicitud de inscripción.
– Una vez cumplido el plazo anterior se anulará la solicitud de participación en la actividad.
– Se permitirá que un/a alumno/a se matricule en un máximo de dos cursos.
– La cuota de inscripción se abonará a nombre de la SAEM THALES en la cuenta:
2071-1183-17-0148246033
– La inscripción se realizará a través de la Web de la SAEM THALES: http://thales.cica.es
– El periodo lectivo de los cursos será desde el 17 de octubre al 18 de diciembre de 2011.
– El precio de la matrícula es de 35 € para socios de sociedades de la FESPM y de la FISEM, y de 50 € para los no socios, salvo los dos últimos que son gratuitos.
– Para estas actividades se solicitará la correspondiente homologación a la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía por un total de 40 horas.

Más información sobre contenidos y procedimientos de inscripción en la página Web:

http://thales.cica.es

La calculadora científica como recurso didáctico en las matemáticas de ESO y Bachillerato

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES en colaboración con la División Didáctica CASIO convocan un curso de formación a distancia para promover la utilización de la calculadora científica como recurso didáctico en el área de matemáticas para los niveles educativos de ESO y Bachillerato.

La asignación de plazas se realizará por orden de inscripción. A los/as alumnos/as se les facilitará la clave de acceso al sistema para el seguimiento del curso. La inscripción en esta actividad es gratuita.

Iniciación a TutorMates

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES en colaboración con Addlink Software Científico convocan un curso de formación a distancia para dar a conocer el uso de Tutor**Mates** y facilitar su uso como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria.

Los asistentes interesados podrán utilizar Tutor**Mates** gratuitamente en su centro de educación durante el curso escolar 2010-2011, rellenando el siguiente formulario: http://www.tutormates.es/promo-thalescica Esta licencia comprende los contenidos curriculares del 1º y 2º de ESO y es válida para todos los alumnos y los profesores del centro.

suma+ 67
Junio 2011, pp. 77-85

Avanzando hacia la práctica de las herramientas matemáticas con GCompris

En el último número de *Suma* comenzamos un recorrido por la aplicación *Gcompris* cuya pantalla aparece en la imagen 1.

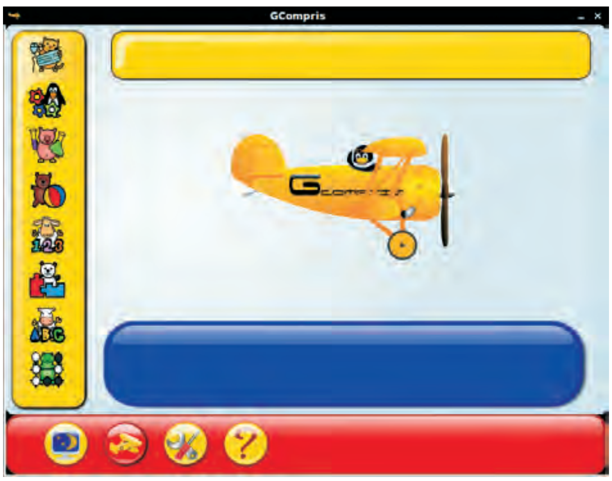


Imagen 1: Pantallas inicial de GCompris

En aquel número estuvimos analizando el comportamiento y configuración de esta aplicación de la que recordamos que existen versiones para Linux (completa) y recortadas para Windows y Mac. Según recogíamos entonces, *GCompris* es un programa educativo especialmente diseñado para niños de entre 2 y 12 años. Es software libre y está disponible para Windows, Mac y Linux. Aunque existe una versión de *GCompris* para Windows, el propósito de la misma es promover el uso del sistema GNU/Linux por lo que la versión para Windows tiene sólo un número limitado de actividades, aproximadamente ofrece 20 actividades de las más de 50-60 totales con que cuenta realmente la aplicación en Linux, dependiendo de la versión.

En aquel artículo explicamos el funcionamiento de cada uno de los iconos con los que cuenta la aplicación, aunque a lo largo de las pantallas que vayan apareciendo en este iremos reseñando la utilidad de los que aparezcan en cada una de las pantallas que tratemos.

Otro de los puntos que tocamos en ese artículo fueron distintas aplicaciones sueltas que aparecen en *Gcompris* y que pueden ser muy útiles en el aula de matemáticas, sin olvidar que podemos configurar en cada una de ellas el nivel de dificultad, lo que hacía que por una parte pudiéramos adaptar cada utilidad al nivel de desarrollo del alumnado y que por otra pudiéramos utilizar las aplicaciones en distintos niveles educativos, lo que aumentaba su utilidad.

El propósito del artículo de este número de *Suma* es hacer un recorrido por las aplicaciones que están destinadas propiamente a matemáticas y observar el potencial que nos ofrecen para su uso en el aula.

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

Antes de comenzar, nos gustaría volver a recordar que aunque la aplicación en un principio está pensada para un alumnado de entre 2 a 12 años, la utilidad también es evidente para alumnos de mayor edad, cosa que podemos atestiguar aquellos que durante años la hemos estado utilizando en los primeros cursos de la ESO observando como las actividades enganchaban a los alumnos y alumnas, siempre dosificando adecuadamente su uso y adaptando los niveles de dificultad al nivel de cada alumno.

Vamos a comenzar el recorrido por las actividades específicas para matemáticas con las que cuenta *Gcompris*. Para acceder a las actividades de matemáticas debemos pulsar sobre el quinto icono de la barra lateral izquierda que aparece en la imagen 1. Al pulsar sobre este icono nos aparece la pantalla que observamos en la imagen 2.

Imagen 2: Pantallas de las actividades específicas de matemáticas

En esta nueva pantalla observamos que en la parte central aparecen tres iconos diferentes. Cada uno de ellos nos conduce a un grupo de actividades distintas. Observamos también que ha aparecido una barra superior en la que tenemos el icono correspondiente a las actividades de matemáticas. En este caso una oveja con los número 1, 2 y 3 delante de ella. Recordamos que en esta barra superior se iba a ir situando la iconografía de navegación de los distintos sitios en los que habíamos entrado en la aplicación para llegar a la pantalla que estamos visualizando actualmente. También recordamos que en la barra inferior iban a ir apareciendo los iconos de uso general y que, dependiendo de la pantalla en la que entrásemos podrían aparecer unos u otros. En el caso de la imagen 2, aparecen los iconos comunes a todas las pantallas y cuyas funciones recordamos que eran:

– El icono en el que aparece la televisión con un cielo estrellado sirve para salir de la aplicación.
– El icono en el que aparece una avioneta nos muestra los títulos de crédito de la aplicación.
– El icono en el que aparecen algunas herramientas nos conduce a la pantalla de configuración general de la aplicación.
– El icono con el signo de interrogación nos informa de lo que podemos hacer en cada una de las pantallas.

Así, en la imagen 2 contemplamos la pantalla de la parte específica de matemáticas. En esta parte podemos acceder a tres tipos de actividades distintas que son:

– Actividades de cálculo.
– Actividades de geometría.
– Actividades de numeración.

> *GCompris es un programa educativo especialmente diseñado para niños de entre 2 y 12 años.*

Actividades de cálculo

Comenzamos nuestro recorrido por las actividades de cálculo. Si pulsamos sobre este icono accedemos a la pantalla que observamos en la imagen 3.

Imagen 3: Actividades de cálculo

Observamos en la pantalla que aparecen 7 tipos de actividades diferentes como actividades de cálculo. Sin embargo vamos a ver que son muchas más. Pero vamos por partes, vamos a entrar en la primera de ellas, aquella cuyo icono es una calculadora. Si colocamos el ratón encima podemos leer en la zona inferior "Ir a actividades de álgebra". Si pulsamos sobre este icono aparece la pantalla que observamos en la imagen 4.

Imagen 4: Actividades de álgebra

Al acceder observamos que dentro de las actividades de álgebra se nos ofrecen 3 actividades distintas, pero ahora sí, todas ellas tienen un funcionamiento parecido.

La barra inferior permanece igual, con los mismos iconos que habíamos observado y que ya conocemos.

En la barra superior ya vemos que aparecen tres iconos, la oveja, una pizarra y una calculadora, que son el recorrido que hemos realizado para llegar a esta pantalla.

Observamos que en la parte superior izquierda de cada uno de los tres iconos nuevos que aparecen se encuentran varias estrellas. En la primera calculadora aparece 1 estrella, en la segunda 2 estrella y en la tercera 3 estrellas. Esto corresponde al nivel de dificultad 1, nivel 2 y nivel 3 de los seis niveles distintos que aparecen en la aplicación. Los tres niveles siguientes, (4, 5 y 6) no vienen representados por estrellas, sino por un pentágono con un sol en su interior. El nivel cuatro vendría representado por uno de estos pentágonos, el nivel 5 por dos pentágonos y el nivel 6 por tres pentágonos. A modo de guía podemos decir que:

- Las actividades de nivel 1 están dirigidas a alumnos y alumnas de 2 a 3 años en adelante.
- Las actividades de nivel 2 están dirigidas a alumnos y alumnas de 4 a 5 años en adelante.
- Las actividades de nivel 3 están dirigidas a alumnos y alumnas de 6 a 7 años en adelante.
- Las actividades de nivel 4 están dirigidas a alumnos y alumnas de 8 a 9 años en adelante.
- Las actividades de nivel 5 están dirigidas a alumnos y alumnas de 10 a 11 años en adelante.
- Las actividades de nivel 6 están dirigidas a alumnos y alumnas de 12 a 13 años en adelante.

Aunque esto solamente debemos utilizarlo a título informativo ya que a medida que vayamos utilizando la aplicación en el aula iremos comprobando el nivel de actividad al que se adapta cada alumno o alumna en particular.

Retomamos las actividades de álgebra y vamos a entrar en una de las tres que nos proponen, la primera de ellas que es para practicar la operación de la suma. Si pulsamos sobre la primera calculadora que aparece en la imagen 4 observamos qué nos aparece la pantalla de la imagen 5.

Imagen 5: Practica la operación suma

En esta pantalla observamos que aparece una operación y un globo que va descendiendo a medida que pasa el tiempo. El objetivo que debemos perseguir es que el globo no acabe cayendo al agua. Para ello deberemos ir escribiendo el resultado de la operación que nos plantean en cada momento. Para contestar podemos hacerlo de dos formas: escribimos el resultado y pulsamos la tecla enter o escribimos el resultado y pulsamos sobre la mano con el pulgar levantado que aparece en la barra inferior. Cada vez que respondamos a la operación correctamente, el globo subirá un poquito.

En la barra inferior aparecen dos iconos que no habían aparecido antes, el de la mano con el pulgar levantado que acabamos de indicar para qué sirve y un icono con un dado. Recordamos que este dado nos servía para seleccionar el nivel de dificultad del ejercicio que estemos realizando. A medida que vamos avanzando en la pantalla vamos a ver que la puntuación que aparece en el dado será mayor, lo que indica un mayor nivel de dificultad. Si pulsamos sobre el dado también podemos modificar el número de puntos que vemos con lo que podemos seleccionar la dificultad con la que deseamos que se desarrolle el ejercicio. En la actividad que estamos tratando el nivel de dificultad irá aumentando por la complicación en las operaciones y por la rapidez con la que baja el globo.

Las otras dos calculadoras que aparecen en la imagen 4 nos conducen a actividades parecidas a ésta, pero en las que las operaciones que aparecen son restas y multiplicaciones.

Volvemos ahora a la imagen 3 y nos fijamos en el segundo icono que aparecía en esta pantalla y que nos indica que nos conduce a las actividades de masticadores de números. Si pulsamos sobre este icono nos aparece la pantalla que observamos en la imagen 6.

Imagen 6: Masticadores de números

Podemos ver que en esta pantalla se nos ofrecen 5 actividades distintas aunque el funcionamiento de ellas es muy parecido.

Debes fijarte que cada actividad viene marcada según los iconos que te hemos comentado anteriormente. Así, la primera de ellas sería de nivel 3, la segunda y la tercera también, la cuarta sería de nivel 5 y la quinta sería de nivel 6, el máximo nivel. Para comprender el funcionamiento de estas actividades lo mejor que podemos hacer es entrar en una de ellas ya que el de las demás va a ser muy parecido. Entramos, por tanto en la primera que aparece el muñequito verde (masticador de números) con un símbolo de igual. Ya hemos dicho que esta actividad es de nivel 3. Si pulsamos sobre este icono aparece la pantalla que observamos en la imagen 7.

Esta actividad de masticadores de números le suele gustar bastante a los alumnos y alumnas. Comenzamos primero por la barra horizontal inferior. Todos los iconos que aparecen los conocemos excepto uno nuevo en el que se ven dos flechas entrelazadas formando una circunferencia. Este icono sirve para reiniciar la actividad.

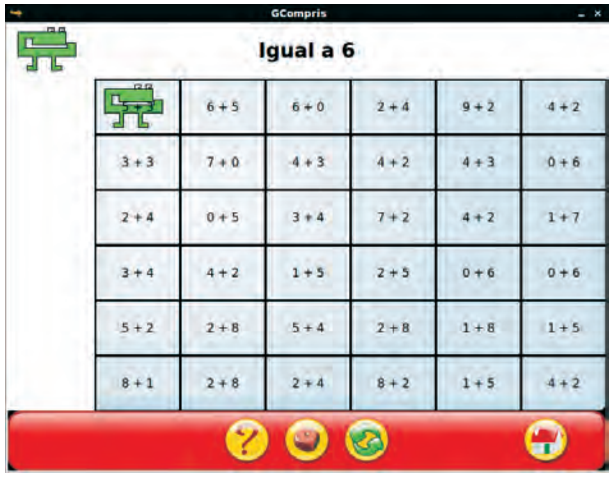


Imagen 7: Masticadores de números: igualdad

El objetivo de este juego es muy simple, a la vez que útil para el desarrollo del cálculo mental. Consiste en comerse todas las operaciones que aparecen en la pantalla que cumplan un determinado requisito. En nuestro caso, ese requisito lo indican en la parte superior "Igual a 6". Por tanto, debemos comernos todas las operaciones cuyo resultado sea 6.

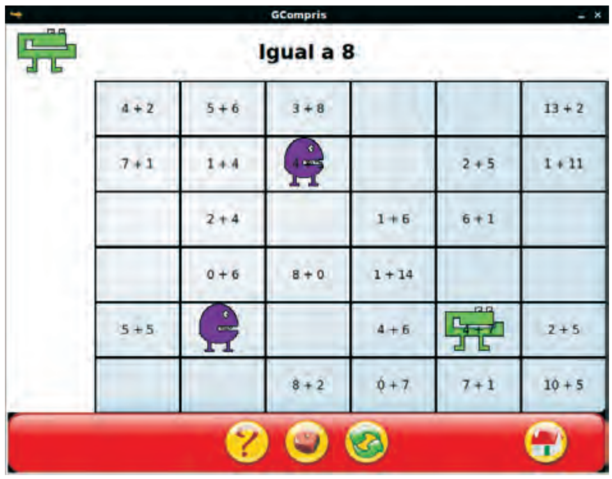


Imagen 8: Comedor de números acompañado

Para mover al masticador de números debemos utilizar la flecha de los cursores y para comernos una operación debemos utilizar la barra espaciadora del teclado.

Todo podría resultar muy sencillo con lo que llevamos explicado hasta el momento de esta actividad, pero tiene un aliciente añadido. A medida que vamos avanzando en el juego y nos vamos comiendo las operaciones correspondientes, aparecen otros personajes nuevos llamados "Troggle" que son pequeños monstruos de dos patas y gran cabeza que van a entorpecer la labor del "Muncher" o comedor de números. Entorpecen la labor de dos formas. Por una parte, si chocas con ellos pierdes. Por otra, van paseando por la pantalla y si encuentran un recuadro vacío vuelven a dejar una operación que puede ser una de las que te tienes que comer o no.

La verdad es que el alumnado se suelen enganchar bastante a esta aplicación. El resto de opciones que nos ofrecía en la imagen 5 funciona de la misma forma, y con el mismo objetivo, pero en cada caso hay que distinguir.

La primera es la que hemos analizado en la que el alumnado debían comerse la suma cuyo resultado era el que aparecía en cada pantalla; la segunda es el masticador de desigualdades en las que deben comerse las operaciones cuyo resultado es distinto al que aparece en cada pantalla; y la tercera es el masticador de múltiplos de números. En ésta deben comerse los números múltiplos de aquel que aparece en cada pantalla.

La cuarta es el masticador de factores. En ésta, cada alumno debe comerse los divisores del número que aparece en cada pantalla.

Para finalizar, la sexta es el masticador de números primos en la que cada alumno debe comerse los números primos que aparezcan en la pantalla. Como podéis ver es una actividad que engorda el manejo de las operaciones mentales.

Volvemos a fijarnos en la imagen 3 y vamos a ver las actividades que nos ofrecen en el tercer icono en el que observamos un elefante que nos conduce a las actividades de memoria matemática. Si pulsamos sobre este icono aparece la pantalla que observamos en la imagen 9.

Una pantalla en la que se nos ofrecen 7 actividades diferentes, aunque, como ocurría en otras pantallas, todas ellas tienen un funcionamiento parecido. Observamos que el nivel de todas ellas es nivel 1, aunque las tres últimas son de un nivel superior.

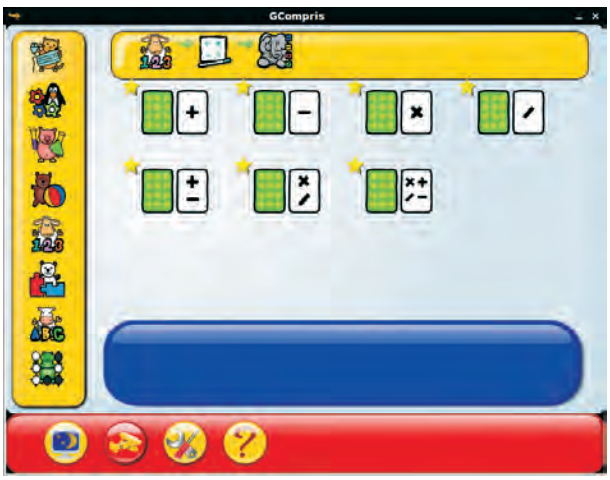


Imagen 9: Actividades de memoria matemática

Para estudiar el funcionamiento es estas actividades vamos a entrar en una de ellas, por ejemplo en la primera. Si pulsamos sobre el primer icono de la pantalla que aparece en la imagen 9, accedemos a la pantalla que observamos en la imagen 10.

Imagen 10: Memoria matemática con sumas

Aquí vemos que en la barra inferior aparecen tres iconos que ya conocemos. En el del dado vamos a poder elegir el nivel entre 1 y 9.

En la pantalla aparecen seis cartas que están boca abajo. Tres de esas cartas tienen una operación con una suma y las otras tres tienen el resultado correspondiente a cada operación. El desarrollo de la actividad es muy sencillo, en este caso, el alumno o alumna le da la vuelta a dos cartas. Si las dos cartas contienen una operación y su resultado correspondiente el alumno o alumna gana y se lleva esas dos cartas. Además, sigue jugando. Si no encuentra una operación y su resultado correspondiente, le corresponde el turno al ordenador para hacer lo mismo. Al final de cada juego gana el que más cartas tenga, por lo que el alumnado debe estar atento para memorizar el contenido de las cartas que se levantan en cada momento.

Como observamos en la imagen 9, nos ofrecen siete tipos de actividades distintas aunque, como hemos dicho, todas ellas se desarrollan de la misma forma, levantando parejas de cartas que contengan una operación y su resultado correspondiente. Sin embargo, la diferencia entre una y otra radica en el tipo de operaciones que se encuentran en las cartas. Las posibles opciones son: sólo sumas, sólo restas, sólo productos, sólo divisiones, sumas y restas, productos y divisiones o las cuatro operaciones mezcladas. Por este motivo indicábamos que, aunque el nivel con el que vienen marcadas las siete es nivel uno, sin embargo, por la descripción anterior que hemos hecho de los niveles, algunas de ellas son de nivel superior al cuatro.

Imagen 11: Memoria matemática con sumas. Nivel 9

Imagen 12: Equilibra la balanza

Como hemos mencionado anteriormente, para cada una de estas actividades vamos a poder seleccionar el nivel de dificultad. En el caso de esta actividad, ese nivel de dificultad va a venir marcado por los números que se utilizan en las operaciones y por la cantidad de cartas que nos muestran en la pantalla. En la imagen 11 podemos comprobar un momento del desarrollo de la actividad con un nivel de dificultad 9. Observamos que, en lugar de 6 cartas aparecen 32 y los números utilizados en las operaciones ya son de dos cifras, cosa que no ocurre en el nivel 1.

Si nos fijamos en la pantalla que aparece en la imagen 3 observamos que aparecen dos elefantes, pero uno de ellos tiene un 2 delante. El funcionamiento de las aplicaciones que aparecen cuando pulsamos sobre este segundo icono es el mismo que las que acabamos de describir aquí, pero con una clara diferencia que va a influir a la hora de utilizar didácticamente una u otra. Mientras que en las que acabamos de describir el alumno o alumna juega contra el ordenador, en la segunda el alumno/a juega contra otro compañero/a, lo que contribuye a concentrarse aún más en la actividad ya que en el caso de fallar es el compañero o la compañera la que se beneficia. En la práctica, esta segunda opción para utilizar la actividad es mejor que la primera de cara a una actividad no individual.

Cambiamos de actividad ahora y pasamos a la cuarta que observamos en la imagen 3 y que se denomina “Equilibra las balanzas adecuadamente”. Si pulsamos sobre este icono podemos observar la pantalla que aparece en la imagen 12.

En este caso tenemos una balanza en la que aparece un objeto en uno de los platillos y nos indican el peso de ese objeto. El trabajo del alumno consiste en colocar en el otro platillo las pesas necesarias de entre las que aparecen, para igualar la balanza.

En la barra horizontal observamos que aparecen iconos que ya conocemos. En este caso, cuando el alumno o la alumna tenga colocadas las pesas que considere necesarias para igualar la balanza, deberá pulsar sobre el icono que contiene la mano con el pulgar alzado para comprobar si la solución que ha dado es la correcta. Dependiendo de la pantalla en la que se encuentre puede que haya más de una solución.

Según podemos observar en la imagen que aparece en la imagen 12, existen distintos niveles de dificultad para esta actividad ya que aparece un dado que nos lo marca.

Esta actividad es bastante útil para introducir el concepto de ecuación y lo que significa despejar en una ecuación ya que en algunas pantallas aparecen situaciones en las que las pesas se pueden colocar en ambos platillos para equilibrar la balanza.

Si observamos nuevamente la imagen 3, la siguiente actividad que nos ofrecen se denomina “Practica la suma con un juego de objetivos”. El nivel de esta actividad, al igual que la anterior, es 2. Si pulsamos sobre el icono correspondiente nos aparece la pantalla que observamos en la imagen 13.

Como en las otras actividades, en esta se puede seleccionar el nivel de dificultad sin más que pulsar sobre el dado que aparece en la barra horizontal inferior. En este caso, en la pantalla aparece una diana con tres colores y observamos que cada color tiene una puntuación distinta. A la derecha de la pantalla observamos que aparece un indicador que nos informa sobre la velocidad del viento y con una flecha verde nos informa sobre la dirección del mismo. En un principio, el alumno que esté participando en esta actividad deberá lanzar tres dardos hacia la diana. Para ello utilizará el ratón del ordenador con el que apuntará hacia donde desea lanzar y al pulsar el botón izquierdo del ratón lanzará el dardo. Tras los tres lanzamientos, aparecerá en la pantalla un recuadro en el que deberá escribir la suma total de todos los puntos alcanzados.

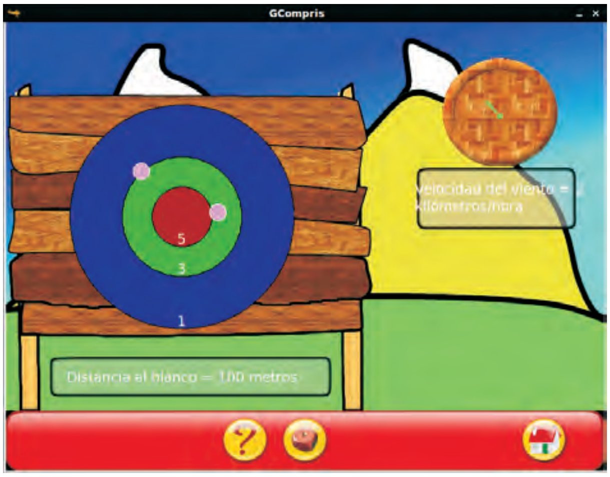


Imagen 13: Practica la suma con un juego de objetivos

Como hemos dicho, podemos seleccionar la dificultad de la actividad pulsando sobre el dado que aparece en la parte inferior. Esta dificultad puede ser entre 1 y 4. La dificultad de la actividad va a ir aumentando marcada por varios aspectos. Uno de ellos es la distancia a la que está colocada la diana. El otro es el aumento de la velocidad del aire, un tercer aspecto que cambia es el número de colores en que se divide la diana y por último, la puntuación de cada uno de los colores para la que cada vez se utilizan número más grandes. La lejanía de la diana dificulta dos aspectos, por una parte que pinchemos el dardo en la parte que queremos y por otra, que a la hora de hacer la lectura se dificulta visualizar el verdadero valor sobre el que se ha pinchado.

Pasamos ahora a la última de las actividades que nos proponen en la imagen 3 cuyo icono es un león. Esta actividad se denomina "combinación de números y caracteres para obtener el valor indicado". Si pulsamos sobre el icono aparecerá la pantalla que observamos en la imagen 14.

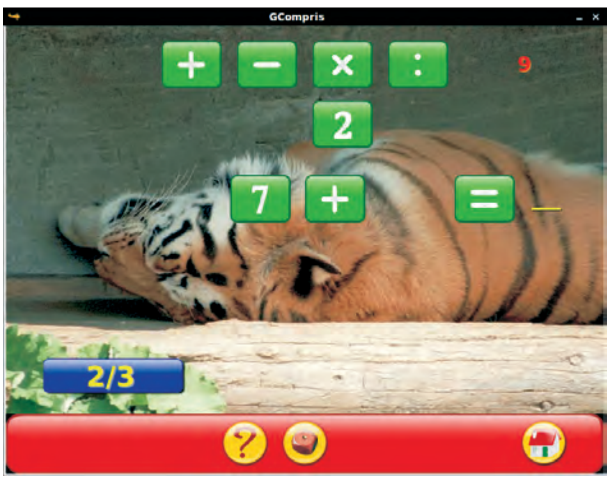


Imagen 14: Mezclando números y operaciones

En este caso aparecen los distintos símbolos de las operaciones matemáticas y nos aparecen varios números. También aparece un número en rojo. El objetivo del juego es conseguir obtener el número rojo como resultado de una operación que propongamos o un conjunto de operaciones que propongamos con los número que aparecen en la pantalla. Para el caso que aparece en la imagen 14 es bastante sencillo ya que basta hacer 7+2. En esa imagen ya hemos colocado el siete y el símbolo de la suma en el lugar adecuado.

Observamos que también podemos seleccionar el grado de dificultad de esta actividad que puede ser entre 1 y 4. Además, a medida que vamos avanzando hacia una dificultad mayor, es mayor la cantidad de números que aparecen y la cantidad de pasos que hay que dar para obtener el resultado final.

Actividades de geometría

Volvemos ahora a fijarnos en la pantalla que aparece en la imagen 2. Aquí ya hemos hecho un recorrido por las actividades que aparecen en el primer icono que correspondía a actividades de cálculo. Pasamos ahora al segundo icono en el que aparecen las actividades de geometría. Si pulsamos sobre este icono aparece la pantalla que observamos en la imagen 15.

Las actividades relacionadas con la geometría que nos propone la aplicación son las tres que observamos en la imagen 15 y son actividades. Aunque son actividades básicas, vamos a tratar cada una de ellas ya que podemos sacarle mucho partido en algunos contenidos de la materia.

Imagen 15: Actividades de geometría

La primera de las actividades representada por un pincel entre un triángulo y un cuadrado, nos conduce a la pantalla que observamos en la imagen 16.

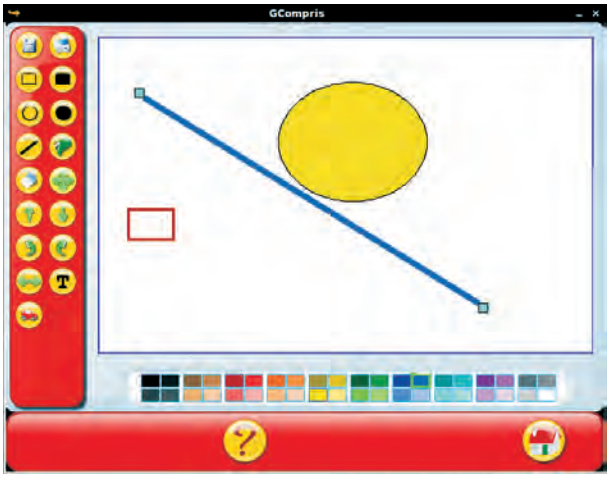


Imagen 16: Gráficos vectoriales

Esta herramienta se nos presenta como "herramienta simple de dibujo vectorial". Según observamos en los iconos que aparecen en la barra horizontal inferior, es una actividad que no presenta niveles. Es una herramienta básica de dibujo con la que podemos trazar distintas figuras y podemos efectuar movimientos sobre las figuras dibujadas.

En la parte inferior de la pantalla observamos que aparecen dos filas de colores. Aquí es donde vamos a poder seleccionar el color con el que vamos a dibujar la figura que queremos representar.

Analizamos un poco la barra vertical izquierda que observamos en la imagen 16. En esta barra nos encontramos una serie de botones que nos van a servir para diseñar nuestro dibujo.

Comenzando por la parte de arriba, los dos primeros nos van a servir para guardar la imagen que hemos diseñado o para abrir una imagen que hubiéramos guardado previamente.

En los cinco siguientes botones observamos que aparece una figura geométrica en negro. Al pulsar sobre uno de esos botones le indicamos a la aplicación que deseamos dibujar esa figura geométrica. Por ejemplo, si pulsamos sobre el segmento, estamos en disposición de dibujar un segmento. Para hacerlo, pulsamos ahora con el ratón sobre el área de trabajo y veremos que aparece un segmento en el que apreciamos que al principio y al final del mismo hay un pequeño cudradito de otro color. Si arrastramos uno de esos cuadraditos observamos que podemos hacer el segmento tan largo como queramos y en la dirección en la que deseemos. Igual ocurre con las otras figuras, por lo que podremos dibujar cuadrados, cuadrados rellenos, circunferencias y círculos son mayor problema. Eso sí, aparecerán según el color que tengamos seleccionado previamente.

Al lado del botón del segmento, aparece un botón con una mancha verde. Este botón nos va a servir para colorear una figura que hayamos dibujado previamente. Si, por ejemplo, tenemos un cuadrado dibujado en el área de trabajo y deseamos que el cuadrado aparezca en verde, pulsamos previamente sobre el color verde, después pulsamos sobre el botón que aparece a la derecha del botón del segmento y para finalizar pulsamos sobre el cuadrado y veremos que se pone de color verde.

Debajo del botón del segmento aparece un botón con un dibujo en azul y blanco. Es el botón para borrar. Si deseamos borrar una figura del área de trabajo, pulsamos sobre este botón y posteriormente sobre la figura que deseemos borrar y desaparecerá del área de trabajo.

La aplicación también cuenta con imágenes prediseñadas que nos pueden servir de ayuda en algunos momentos. Para acceder a estas imágenes solamente debemos pulsar sobre el botón en el que aparece un coche rojo y nos aparecerá una pantalla en la que seleccionaremos las imágenes prediseñadas. En la imagen 17 podemos observar la pantalla que aparece para la selección de imágenes cuando hemos pulsado sobre uno de los grupos en los que aparecen agrupadas estas imágenes.

Imagen 17: Imágenes prediseñadas

En la parte de la izquierda aparecen los distintos grupos y en la zona de la derecha las imágenes que contiene ese grupo. Para seleccionar una para nuestro diseño, solamente debemos pulsa sobre la imagen que deseemos y pulsar sobre el botón "Aceptar" y ya aparecerá incluida en el espacio de trabajo.

En el espacio de trabajo también vamos a poder realizar movimientos sobre las imágenes que ya hayamos creado. Estos movimientos los vamos a poder efectuar utilizando los botones con flechas verdes que aparecen en el lateral izquierdo de la imagen 16. Para utilizar uno de ellos pulsamos primeramente sobre el botón, por ejemplo girar a la izquierda y, posteriormente, pulsamos sobre el objeto que deseemos girar y se realizará el giro.

El último botón que aparece con una T en negro es para poder insertar texto en nuestro diseño.

Si pulsamos sobre el segundo icono que aparece en la imagen 15, nos conduce a las actividades de repetición de imágenes. Esta pantalla la observamos en la imagen 18.

En este caso volvemos a encontrarnos con las herramientas de dibujo, pero el espacio de trabajo aparece dividido en dos partes. En la parte derecha del espacio de trabajo la aplicación nos propone un dibujo que el alumnado deberá repetir en la parte de la izquierda utilizando las herramientas de dibujo.

Una vez que el alumnado considere que ya ha dibujado la imagen pedida, debe pulsar sobre la mano que aparece en la barra horizontal inferior y la aplicación le indicará si es correcto.

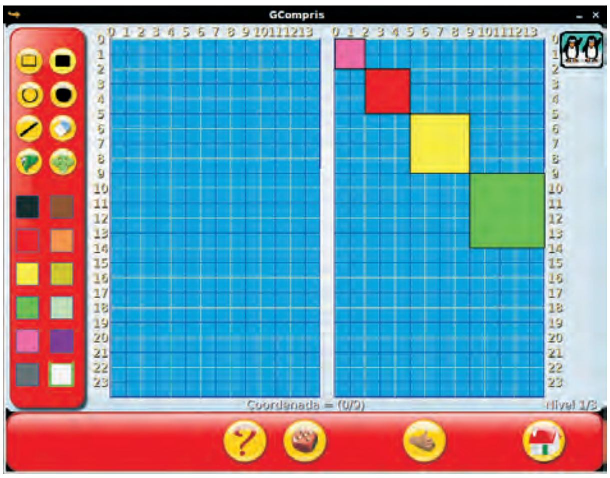


Imagen 18: Pantallas iniciales de GCompris

El dado en la barra horizontal inferior significa que esta actividad tienen distintos niveles. Concretamente, en la imagen 18 observamos una actividad de nivel cinco.

Si pulsamos sobre el tercer icono que aparece en la imagen 15, observamos que aparece la pantalla que vemos en la imagen 19.

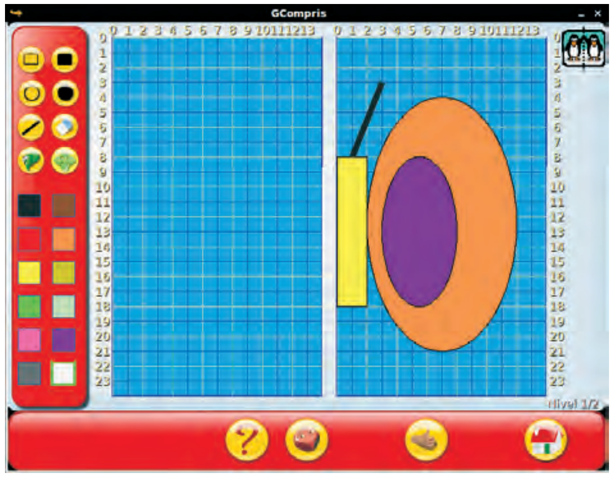


Imagen 19: Pantallas inicial de Gcompris

En esta actividad nos proponen dibujar figuras simétricas. El funcionamiento es muy parecido a la actividad anterior. En este caso, el espacio de trabajo también aparece dividido en dos partes y en la parte de la derecha el ordenador nos presenta un dibujo. En la actividad, el alumno o alumna deberá dibujar en la parte de la izquierda el dibujo simétrico al que nos indican. Una vez que considere que ha dibujado el simétrico, deberá pulsar sobre la mano que aparece en la barra inferior y el ordenador le indicará si lo ha hecho bien o no.

Esperamos que el uso de estas herramientas las encuentres de utilidad en el aula y que sirvan de complemento para la práctica de los contenidos que debes tratar. En el próximo número de *Suma* te descubriremos cómo puedes personalizar aún más la herramienta.

MATEMASTIC ■

Ficha educativo - técnica	
Nombre	GCompris
Sistema	Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos las versiones correspondientes para Windows y para Mac.
Descarga	Repositorio de la distribución de Linux correspondiente o: Página oficial: http://gcompris.net Página español: http://gcompris.net/-es- Descarga: http://sourceforge.net/projects/gcompris/files/
Licencia	GPL
Contenido	Aunque es una aplicación general para la educación, en la parte de matemáticas se tratan ejercicios y juegos numéricos.
Nivel	Multinivelar: Primaria y ESO.
Metodología	Aplicación para utilizar a partir de 2º de Primaria. Los alumnos utilizarán individualmente la aplicación para resolver las tareas propuestas en la aplicación.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en febrero de 2011 y fue aceptado en abril de 2011 para su publicación.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **Biel Frontera Borrueco**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Juana Mª Navas Pleguezuelos**
Actividades con alumnos: **Jordi Comellas i Blanchart**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Iolanda Guevara Casanova
FME de la UPC
C/Pau Gargallo, 5
08028 Barcelona

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Bermejo Fuertes
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José Señas Pariente
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Luis de Ulloa, 37. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

suma+ 67
Junio 2011, pp. 87-90

Amargas

En 1998 el departamento de Matemáticas del IES Pau Vila de Sabadell inició una serie llamada *L'enigma del mes* en la que se proponía un problema, curiosidad o paradoja matemática a toda la comunidad educativa (alumnos, profesores y personal no docente). El enigma se colgaba en las paredes del instituto y se invitaba a todos a remitir una solución al departamento de Matemáticas. Cualquier profesor de Matemáticas podía proponer un enigma, pero en tal caso debía encargarse de redactar la solución y hacerla pública junto al enigma del mes siguiente.

El *Enigma del mes nº.2* fue propuesto por Antonio López en los términos de la figura 1. Se trata de un puzzle que puede recomponerse creando una paradoja.

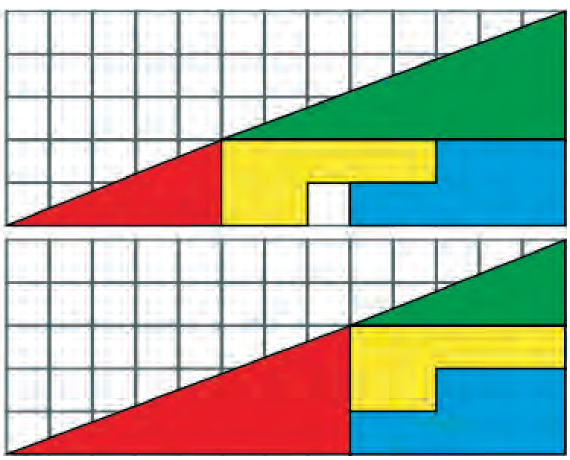


Figura 1: ¿A dónde ha ido a parar el cuadrado blanco?

Contemplando la figura 1 durante unos instantes, uno acaba por preguntarse adónde ha ido a parar el cuadrado blanco en el triángulo rectángulo inferior de la figura 1. El cálculo de las áreas sumando las de las piezas de colores que conforman cada uno de esos triángulos rectángulos pone de manifiesto la desaparición, pero no desvela su motivo:

$$A_{\text{sup}} = \frac{1}{2}\cdot 5q\cdot 2q + 7q^2 + 1q^2 + 8q^2 + \frac{1}{2}\cdot 8q\cdot 3q = 33q^2$$
$$A_{\text{inf}} = \frac{1}{2}\cdot 8q\cdot 3q + 7q^2 + 8q^2 + \frac{1}{2}\cdot 5q\cdot 2q = 32q^2$$

Estamos ante una paradoja. El cálculo de las áreas certifica que el puzzle triangular de la parte superior posee mayor área que el inferior aunque aparentemente sean iguales. Si se calcula el área del triángulo rectángulo total, el de catetos $13q$ y $5q$, se obtiene:

$$A = \frac{1}{2}\cdot 13q\cdot 5q = 32{,}5q^2$$

¿Tres resultados distintos para una misma área? ¿Acaso es mágico ese cuadradito blanco? Quizá el error no esté en lo que hacemos (calcular) sino en lo que vemos. O. mejor dicho, en lo que creemos ver. Esas dos figuras, ¿son realmente triangulares? Si se contempla la figura 1 desde una posición con un

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

ángulo de visión mucho más cerrado, veremos que el segmento que tomamos antes por una hipotenusa no es ni hipotenusa ni segmento. Es una línea quebrada compuesta de dos segmentos, de dos hipotenusas menores. Es la hipotenusa aparente de un aparente triángulo rectángulo que, en realidad, es un cuadrilátero.

El cuadrilátero superior de la figura 1 es convexo; el inferior, cóncavo. La diferencia entre sus áreas es precisamente ese cuadrado de la cuadrícula. El primero es medio cuadrado mayor ($33q^2$) que el triángulo rectángulo ($32{,}5q^2$); el segundo, medio cuadrado inferior ($32q^2$). Los dos triángulos rectángulos menores (rojo y verde) no son tan semejantes como parecían, pues, aunque por poco, la inclinación de sus hipotenusas no es la misma:

$$0{,}625=\frac{5}{8}\neq\frac{3}{5}=0{,}6$$

El cuadrado blanco es la sutil diferencia que distingue ambos cuadriláteros y que se reparte a lo largo de la 'diagonal' de la cuadrícula (Fig. 2), en una finísima rendija.

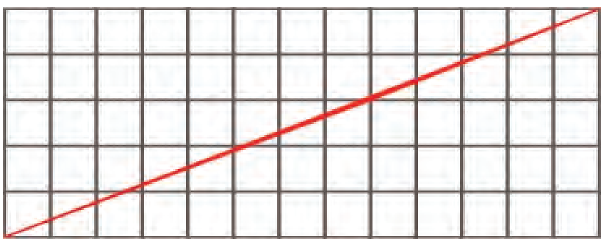


Figura 2: Una celda de la cuadrícula repartida en la diagonal.

Un análisis matemático más profundo lleva a preguntarse qué números son los que dan lugar a una situación así. Ordenando de menor a mayor los lados de las figuras involucradas damos con una serie de números muy conocida: 2, 3, 5, 8, 13. Se trata de un fragmento de la sucesión de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … Las proporciones calculadas antes son cocientes entre términos consecutivos de esta sucesión, los cuales se aproximan al número de oro a medida que avanzamos:

$$\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{21},\ldots\right\}\longrightarrow\Phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618\ldots$$

Tomando términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci mayores que 13 podría componerse un cuadrilátero visualmente indistinguible de un triángulo rectángulo.

Pero no es imprescindible que los números escogidos pertenezcan a la sucesión de Fibonacci. Pueden crearse situaciones similares tomando cuatro términos de una sucesión numérica cuyos cocientes de términos consecutivos converjan a un número real determinado. La más sencilla es la sucesión de números naturales cuyos cocientes de términos consecutivos tienen por límite 1:

$$\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n}{n+1}\right\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

Con los números 2, 3 y 4 también se obtienen triángulos rectángulos aparentes que dan lugar a la misma paradoja. Pero con valores tan pequeños el cuadrilátero es visible. Con números mayores la falsa hipotenusa se hace mucho más rectilínea (figura 3).

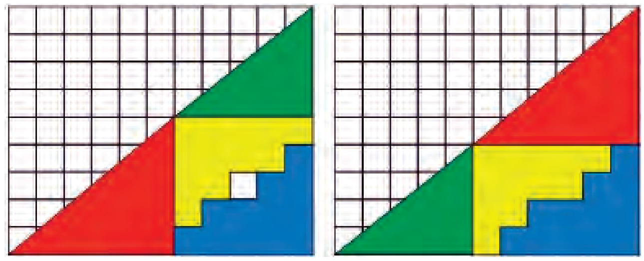


Figura 3: ¿A dónde ha ido a parar el cuadrado blanco?

Quizá el error no esté en lo que hacemos (calcular) sino en lo que vemos. O. mejor dicho, en lo que creemos ver.

Construcciones similares son posibles con números naturales siempre que el cuadrado blanco ocupe la celda central de un cuadrado mayor. Ese cuadrado mayor se compone de dos piezas iguales y del cuadrado blanco. Esto significa que hacen falta un número impar de celdas:

$$n^2-1=2k\Rightarrow n^2=2k+1=impar\Rightarrow n=impar$$

Años después de haber reflexionado sobre esas cuestiones me encontraba en Palma de Mallorca para estar cerca de mi madre, quien por entonces entraba y salía del hospital con demasiada frecuencia. Una tarde salí de la habitación de mi madre para dar una vuelta mientras mi hermana le hacía compañía. Di un largo paseo hasta un bar de la ciudad que frecuentaba cuando vivía en Palma. Quedaba cerca de una academia en la que durante la mili di clases de matemáticas a los opositores a Correos.

La academia estaba junto a la plaza de Cort, a sólo cien pasos de un olivo centenario que los turistas nunca cesan de fotografiar. El establecimiento en cuestión se halla detrás del ayuntamiento, en la estrecha pero larga calle Morey que desemboca en la plaza de Sta. Eulàlia. Pensaba tomar un café en el Xícara. Pero en lugar de entrar en él, donde entré fue en el portal impar anterior, pues, para mi sorpresa, la casona que recibía ese número había sido reconvertida en una librería de viejo. Se llamaba *Fine Books*, una onomatopeya anglófona de find books (figura 4).

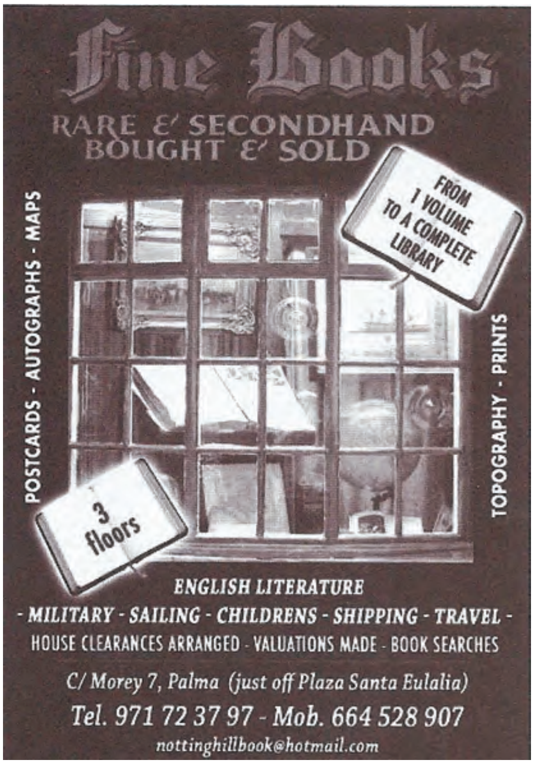


Figura 4: Tarjeta de la librería Fine Books de Palma.

Hacía poco que su dueño había abierto el local. El visitante tenía que esquivar pilas de libros todavía pendientes de clasificación. La librería era un laberinto tridimensional de papel y cuero avejentados que el lector recorría por pasadizos y escalerillas que conectaban tres niveles. Pasé un buen rato hojeando volúmenes de viajes, navegación, geografía, historia, música, arquitectura, naturaleza, biblias… La inmensa mayoría estaban escritos en inglés. En un estante del sótano encontré una ejemplar escrito en francés editado a finales del siglo XIX. Se trataba de las *Récréations Mathématiques*, de Édouard Lucas (Figura 5). La edición tenía un cuerpo único que alojaba los dos volúmenes publicados con un lustro de diferencia. El volumen I, de 1891; y el volumen II, de 1896.

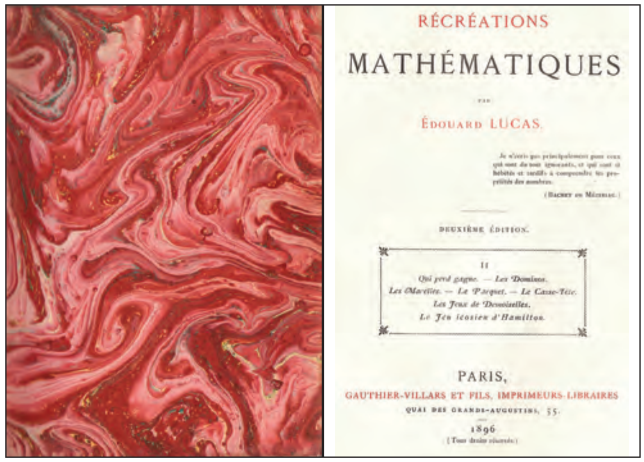
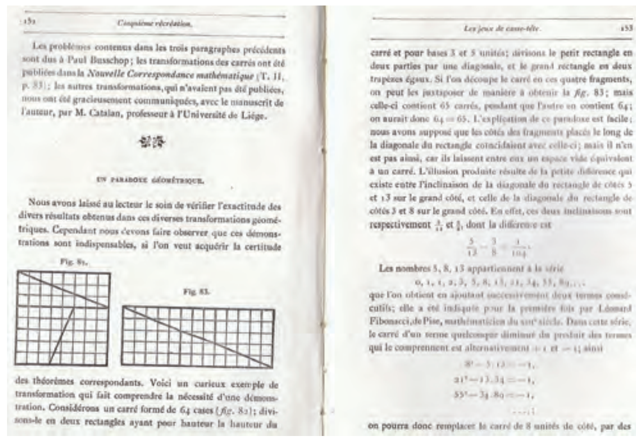


Figura 5: Guarda y portada de las Recreaciones matemáticas de E. Lucas (vol. II).

Al abrirlo percibí entre el olor a moho de la estancia y el aroma que cada propietario confiere a los ejemplares de su biblioteca. En las guardas había una inscripción hecha con lápiz: *C. F. O. Gibson*.

Busqué el índice, al final del volumen, para ver el contenido. Me llamó la atención un apartado de la *Cinquième récréation* del volumen II titulado *Un paradoxe géométrique*, en la página 152. Al abrir esa página mis ojos se clavaron en un diseño geométrico muy parecido al que mi colega Antonio había colgado en la pared del departamento de Matemáticas del *IES Pau Vila* hacía siete años (Fig. 6).



152 *Cinquième récréation.*

Les problèmes contenus dans les trois paragraphes précédents sont dus à Paul Busschop; les transformations des carrés ont été publiées dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (T. II, p. 83); les autres transformations, qui n'avaient pas été publiées, nous ont été gracieusement communiquées, avec le manuscrit de l'auteur, par M. Catalan, professeur à l'Université de Liége.

UN PARADOXE GÉOMÉTRIQUE.

Nous avons laissé au lecteur le soin de vérifier l'exactitude des divers résultats obtenus dans ces diverses transformations géométriques. Cependant nous devons faire observer que ces démonstrations sont indispensables, si l'on veut acquérir la certitude

Fig. 82. Fig. 83.

des théorèmes correspondants. Voici un curieux exemple de transformation qui fait comprendre la nécessité d'une démonstration. Considérons un carré formé de 64 cases (*fig.* 82); divisons-le en deux rectangles ayant pour hauteur la hauteur du

Les jeux de casse-tête. 153

carré et pour bases 3 et 5 unités; divisons le petit rectangle en deux parties par une diagonale, et le grand rectangle en deux trapèzes égaux. Si l'on découpe le carré en ces quatre fragments, on peut les juxtaposer de manière à obtenir la *fig.* 83; mais celle-ci contient 65 carrés, pendant que l'autre en contient 64; on aurait donc 64 = 65. L'explication de ce paradoxe est facile; nous avons supposé que les côtés des fragments placés le long de la diagonale du rectangle coïncidaient avec celle-ci; mais il n'en est pas ainsi, car ils laissent entre eux un espace vide équivalent à un carré. L'illusion produite résulte de la petite différence qui existe entre l'inclinaison de la diagonale du rectangle de côtés 5 et 13 sur le grand côté, et celle de la diagonale du rectangle de côtés 3 et 8 sur le grand côté. En effet, ces deux inclinaisons sont respectivement $\frac{5}{13}$ et $\frac{3}{8}$, dont la différence est

$$\frac{5}{13}-\frac{3}{8}=\frac{1}{104}.$$

Les nombres 5, 8, 13 appartiennent à la série

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots,$$

que l'on obtient en ajoutant successivement deux termes consécutifs; elle a été indiquée pour la première fois par Léonard Fibonacci, de Pise, mathématicien du XIII^{e} siècle. Dans cette série, le carré d'un terme quelconque diminué du produit des termes qui le comprennent est alternativement +1 et −1; ainsi

$$8^2-5.13=-1,$$
$$21^2-13.34=-1,$$
$$55^2-34.89=-1,$$
$$\ldots;$$

on pourra donc remplacer le carré de 8 unités de côté, par des

Figura 6: Una paradoja geométrica (G. Lucas, 1896).

Yo no hablo francés, mi madre sí. Al volver al hospital para relevar a mi hermana y pasar la noche junto a mi madre estuvimos un rato los tres comentando cómo había transcurrido la tarde. Mi madre se encontraba bastante bien, incluso jovial. Cuando me preguntó qué había hecho, le expliqué el itinerario recorrido y le mostré mi adquisición.

Abrió el volumen y leyó la primera página. El francés de la obra no es demasiado sofisticado, por lo que yo podía seguir el hilo de la lectura. Si no entendía algún término, ella me lo traducía. Le pedí que leyera el inicio de la página 152, donde estaba esa paradoja geométrica. Y así, Lucas, por medio de mi madre, comenzó a hablar.

El autor francés parte de un cuadrado de 8×8=64 casillas que luego se divide en dos triángulos rectángulos y dos trapecios. La figura se desmonta y se recompone formando un rectángulo de 5×13=65 casillas (figura 6). ¿Cómo se explica la aparición de una casilla más? He ahí la paradoja.

Evidentemente, 64 no es igual a 65. Lucas dice que la explicación de la paradoja es sencilla y reside en haber dado por sentado que la diagonal visible en la figura 83 es auténtica cuando solo es aparente. Una ilusión óptica nos hace percibir como iguales las inclinaciones del rectángulo entero (5/13) y la del triángulo rectángulo (3/8).

Lucas observa que la diferencia entre ambas pendientes es pequeña, aunque no nula (1/104). A continuación, cita la fuente de dónde proceden los números que generan la controversia: la sucesión de Fibonacci. El producto de dos términos alternados de la serie de Fibonacci sólo se diferencia en una unidad del cuadrado del término que los separa:

$$2^2 - 1\cdot 3 = 1$$
$$3^2 - 2\cdot 5 = -1$$
$$5^2 - 3\cdot 8 = 1$$
$$8^2 - 5\cdot 13 = -1$$
$$13^2 - 8\cdot 21 = 1$$

No se trata de una propiedad exclusiva de la sucesión de Fibonacci. También la verifican los números naturales. Todos los estudiantes de secundaria la estudian bajo el epígrafe de identidad notable:

$$(n+1)\cdot(n-1) = n^2 - 1$$

Basta darle la vuelta como a un calcetín para sacar a la luz la relación escrita por Lucas:

$$n^2 - (n-1)\cdot(n+1) = 1$$

Cada curso suelo plantear la paradoja a mis alumnos de la ESO. En lugar de mostrarles el diseño desde el principio, prefiero darles algunas instrucciones para que ellos lo dibujen. En esas instrucciones añado un ardid para que caigan en la trampa que luego tendrán que desvelar:

1. *En la parte superior izquierda de una hoja de papel cuadriculado señalad un vértice con la letra A.*
2. *Desde A, trazad un segmento vertical hasta un vértice que llamaréis B situado a 8 cuadritos de A.*
3. *Ahora haced lo mismo desde B hacia la derecha, hasta un vértice que llamaréis C, situado a 13 cuadritos de B.*
4. *Por último unid con un segmento los puntos A y C.*
5. *¿Verdad que el segmento AC pasa por un vértice de la cuadrícula situado 5 cuadritos a la derecha de AB y 5 cuadritos por encima de BC? Llamemos D a dicho punto.*
6. *Calculad el área del triángulo ABC de dos modos distintos.*

La trampa está en la quinta cuestión. Todo el mundo la responde afirmativamente, pues ve como el trazo del segmento AC pasa por justo por encima del punto D. Eso infunde la confianza suficiente como para que el estudiante no dude que D pertenece a AC. Los dos resultados distintos para la misma área ponen en evidencia que algo no va bien. Sin embargo, raramente las dudas se dirigen hacia el punto D. Hace falta una reflexión refinada para ver que no se puede confiar del todo en la percepción visual. Ver sirve para crear e intuir, pero no para demostrar.

Rooney, el librero británico que me vendió el ejemplar me obsequió una anécdota matemática en lengua inglesa cuya solución escribió al dorso de una tarjeta: *Why 11+2=12+1?*

La respuesta no es aritmética. Todo el mundo sabe que el resultado de sumar once más dos da lo mismo que sumar doce más uno. El porqué está en una correspondencia biyectiva, 1-1, entre las letras de una y otra suma. Con las mismas letras que se escribe *eleven plus two*, se escribe también *twelve plus one*. Ni una más, ni una menos.

Aunque formas y colores pueden ser iconos del recuerdo, más fuerte es la asociación entre aromas y experiencias pasadas. No olvidaré esos días marcados por el olor a hospital y el de la librería *Fine Books*. Este emana de las páginas del libro de Lucas cada vez que lo abro. Antes las líneas rojizas y acuosas de sus guardas me parecían hermosas. Ahora las veo como una expresión del dolor. Margarita, mi madre, ya no está. Su ausencia amarga estas adherencias. Me consuela un poco pensar que el de Lucas y un ejemplar de mi tesis fueron los dos últimos libros que sostuvieron sus manos.

ADHERENCIAS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en enero de 2011 y aceptado en abril de 2011 para su publicación.

suma+ 67
Junio 2011, pp. 91-100

Biblioteca

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

En esto de la Biblioteca Particular a veces a uno le gustaría tener la colaboración de alguna persona concreta, pero a la que no conoce. Bien porque las que conoce y cree que serían interesantes no acaban de querer escribirlo (este no deja de ser un país con resistencia a escribir), bien simplemente porque las cree de mayor interés. Y aquí hay un problema y una estrategia de resolución (que explicita Paco Hernán diciendo que si uno tiene un amigo que lo resuelva está todo acabado). O sea que en este caso estaba la persona a la que quería solicitar su aportación (Jordi Deulofeu) y el amigo que resolvería el contacto por su relación personal con él (Fernando Corbalán, tan amigo que me pasó la responsabilidad de esta sección).

O sea que a él recurrí y hago de puente de lo que él me cuenta. Los inicios de la preocupación pedagógica de Jordi van ligados al Grup Zero de Barcelona que fue uno de los iniciadores del movimiento de renovación de la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. Y su afición particular fueron los juegos (de los que ha llegado a tener una buena colección procedentes de los más diversos lugares que visitan él o sus amigos) y pasatiempos, de lo que dio buena muestra en una sección fija (que duró de 1991 y 1996) titulada *Para pensar de un minuto a una hora* (que con frecuencia daba bastante más de sí) en el suplemento semanal dedicado a la ciencia del periódico *La Vanguardia* de Barcelona (desaparecido, el suplemento, junto con los de la mayoría de los periódicos, entre proclamas oficiales y oficiosas de la importancia de la ciencia para asegurar nuestro nivel de vida), que continuó luego en la revista *Ciencia y vida.* Por suerte algunos de ellos los ha retomado en alguno de los libros de recreaciones que ha ido publicando (el último en la colección *El mundo es matemático* titulado *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Teoría de juegos*).

Pero además de su labor como escritor es un profesor responsable, habiéndose encargado no solo de las clases con los estudiantes de magisterio, sino de poner en marcha hace ya muchos años un máster modélico para profesores de secundaria (que bien hubiera estado que se hubiera tenido en cuenta para su generalización), ha trabajado en la gestión de su

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

facultad y ha dirigido con gran responsabilidad y acierto tesis doctorales sobre temas atractivos (juegos, resolución de problemas,…) que tienen además como valor añadido que pueden ser utilizadas en el trabajo diario del profesor de a pie (de primaria o secundaria). Por supuesto ha dado también cursos y conferencias por muchos sitios y ha organizado eventos educativos interesantes. Y retomando el inicio, siempre ha estado dispuesto a cultivar la amistad y a echar una mano siempre que se le pide, colmando y aún superando las expectativas, como muestra el artículo que sigue, que descubrirá para quien no lo conoce su singular personalidad.

O sea que os dejo con Jordi Deulofeu Piquet y su biblioteca particular.

Mi biblioteca particular

Jordi Deulofeu Piquet

Cuando uno lleva más de 30 años en una profesión, en mi caso la de profesor de matemáticas o más concretamente la de formador de profesores de matemáticas, siempre es de agradecer que le ofrezcan la posibilidad de hacer una mirada al pasado para recordar aquellos libros que por una u otra razón han influido de manera decisiva en mi visión sobre las matemáticas y su enseñanza. Quiero, pues, empezar agradeciendo a la revista *Suma* y en particular al coordinador de esta sección, una invitación que, además, me ha permitido gozar recordando tantos gratos momentos pasados con la lectura de muy diversos libros, al tiempo que reflexionaba sobre el contenido de los mismos y los motivos por lo que han resultado importantes para mí. Como decía Pólya en su artículo *On learning, teaching, and teaching learning* (American Mathematical Monthly, 70, 1963):

> Enseñar no es una ciencia, es más bien un arte. [...] Enseñar, tiene mucha relación con el arte teatral. Debo confesar que siento placer al actuar, especialmente ahora que soy viejo y que muy raramente descubro alguna cosa nueva en Matemáticas: por esto siento una cierta satisfacción al revivir la manera como hice este o aquel pequeño descubrimiento en el pasado.

Como los libros que a uno le vienen a la cabeza son muchos, de épocas distintas y temáticas variadas, y la opción de comentar cada uno de ellos es inviable por una simple cuestión de espacio, he optado por hacer una selección reducida de cada uno de los temas elegidos, con unos pocos libros estrella en cada apartado, lo que me ha permitido extenderme algo sobre las razones por la que estos y no otros figuran en la lista, tratando con ello de animar al lector que los desconoce a su lectura y también a aquellos que ya los leyeron en su día a una posible relectura.

Libros de matemáticas

Al empezar un nuevo curso en el máster de secundaria, suelo hacer una pregunta a mis estudiantes: si alguien os pidiera que le recomendarais un libro que le permitiera conocer qué son las matemáticas, ¿qué título le ofreceríais? Habitualmente la pregunta queda sin respuesta, ya que, a pesar de conocer, o mejor haber estudiado, un buen número de libros que tratan de matemáticas, la mayoría corresponden a manuales o tratados sobre una parte muy específica, que dan una visión muy parcial y a veces incluso distorsionada de esta ciencia.

En este sentido, los tiempos han cambiado poco, ya que algo muy similar me sucedió a mí, y me atrevería a decir que a muchos de nosotros, cuando finalicé los estudios de matemáticas en la Universidad de Barcelona, hace cerca de 35 años. Por todo esto recuerdo que la lectura de *What is mathematics?, An elementary approach to Ideas and Methods* de Courant y Robbins, en una edición de tapa dura (*¿Qué es la Matemática?* editorial Aguilar) comprada un domingo por la mañana en el Mercat de Sant Antoni, que aún conservo y utilizo de vez en cuando, me permitió acercarme de una manera global a las matemáticas y ha sido para mí un referente fundamental. Casualmente, hace pocos días Matías Camacho, de la Universidad de la Laguna, me mostró una versión electrónica de la segunda edición, revisada y ampliada por Ian Stewart (Oxford University Press, 1996), en cuya portada se puede leer un comentario de Einstein a propósito de la primera edición de 1941: «A lucid representation of the fundamental concepts and methods of the whole field of mathematics».

Otros libros de matemáticas que me acompañaron en mis primeros años fueron: *La Matemática: su contenido, métodos y significado*, de Aleksandrov, Kolmogorov y otros (3 volúmenes, en la colección Alianza Universidad de Alianza Editorial, 1973). Todavía utilizo con mis estudiantes el primer capítulo, *Visión general de las Matemáticas*, y muy en particular el apartado *Variable y Función*, que me parece una magnifica y elemental introducción al concepto de función.

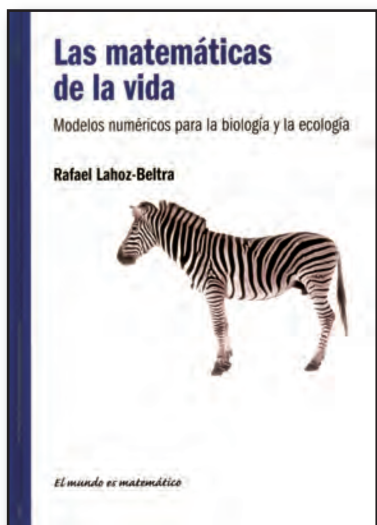
A diferencia de otras ciencias, las matemáticas quizá junto a la química, son dos disciplinas en las que la cantidad de libros para el gran público es bastante reducida.

En este apartado debo incluir un libro que a menudo vuelvo a leer: *Números y Figuras* de Hans Rademacher y Otto Toeplitz (Alianza Editorial, 1970), que sin tener el carácter global y extenso de los anteriores significó para mí una nueva manera de ver las matemáticas. A diferencia de otros libros, este es de los que uno debe leer lentamente y con un papel y un lápiz al lado para ir comprendiendo y resolviendo las múltiples cuestiones propuestas. Este libro está asociado en mi memoria a un momento triste y complicado de la historia de España, el 23 de febrero de 1981. Aquella tarde, cuando se inició el golpe, me encontraba asistiendo a un curso del matemático y profesor argentino Pascual Llorente, en el instituto Montserrat de Barcelona, junto con algunos de los que luego serían mis compañeros de trabajo y amigos, Lluís Bibiloni, Joan Miralles, Xavier Valls y Pelegrí Viader; recuerdo que la sesión estaba dedicada al capítulo del libro de Toeplitz sobre la relación entre fracciones y decimales. Poco tiempo después, Pascual Llorente fue el director de mi tesina que versó sobre problemas de fracciones egipcias, (aquí cabria citar el libro de Richard Guillings, *Mathematics in the time of pharaons*, Dover, 1982); fue él quien me introdujo en la historia de las matemáticas y me mostró su importancia para la enseñanza.

Libros de divulgación de las matemáticas

A diferencia de otras ciencias, las matemáticas quizá junto a la química, son dos disciplinas en las que la cantidad de libros para el gran público es bastante reducida. No considero en este apartado los libros de juegos matemáticos o de problemas recreativos, cuya cantidad es notable, ni tampoco los de historia de las matemáticas, sino aquellos que tratan de dar una visión de las matemáticas para el gran público y aquellos libros de ficción cuyo trasfondo matemático es notable.

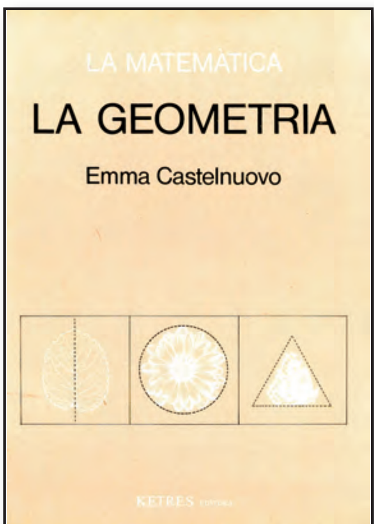
El primer libro de este tipo que recuerdo es *Mathematics for the Million* de Lancelot Hogben (George Allen & Unwin Ltd, 1936). Tengo un ejemplar de la edición XVI, de 1945 que compré en la pequeña librería dentro del mercado de Camden Town en Londres. A propósito de esta librería, recuerdo que años después, en diciembre de1992, cuando estaba cerrando mi tesis doctoral, me encontraba hojeando el libro de David Wells, *Curious and Interesting Puzzles* (Penguin Books, 1992) que acababa de aparecer, cuando se me acercó una persona y me preguntó qué me parecía el libro y si tenía intención de comprarlo. Al decirle que sí y contarle que me parecía una idea magnífica la organización del libro (568 problemas recreativos organizados cronológicamente, desde los antiguos egipcios hasta nuestros días) y el esfuerzo por rastrear las versiones originales a lo largo de la historia, me contestó que si quería me lo dedicaba. Y así lo hizo estampando en la primera página: «Happy Puzzling, David Wells».



Seguramente, la consideración inicial sobre el número reducido de libros de este tipo empieza a ser desmentida por varios proyectos editoriales que se están ocupando del tema y según parece con un cierto éxito de ventas. En este sentido citaré la reciente colección *El mundo es matemático* (con 30 volúmenes publicados por RBA entre 2010 y 2011), cuyos autores, entre los que tengo el honor de contarme, son todos españoles y abordan temáticas diversas, tanto de las matemáticas como de su relación con el mundo, con títulos sugerentes como *Mapas del metro y redes neuronales* o *Las Matemáticas de la vida*. Además de una doble edición de quiosco y otra para librerías, la colección ha sido traducida hasta el momento, al italiano y al portugués. Aunque sólo he tenido oportunidad de leer unos pocos, intuyo que en el futuro voy a dedicar tiempo a este tipo de lecturas que nos permiten ampliar horizontes y constatar, una vez más, que efectivamente las matemáticas se encuentran en todas partes.

La enseñanza de las matemáticas

Como hice anteriormente al referirme a las matemáticas me remontaré a mis inicios profesionales para empezar este apartado. Sin duda, dos libros significativos de mis inicios como profesor y en particular como miembro del Grup Zero de Barcelona son: *La Geometria* de Emma Castelnuovo (versión catalana de Ketres, 1981), y *Matematica nella realta* de Emma Castelnuovo y Mario Barra (P. Boringhieri, 1976). Recuerdo con emoción la primera vez que asistí a una conferencia de Emma con motivo de la exposición que ella, Mario y otros compañeros italianos instalaron en l'Escola de Mestres Sant Cugat la primera semana de marzo de 1980. Cada vez que uso una cuerda para formar con ella rectángulos isoperimétricos y preguntar qué sucede con su área, recuerdo el impacto que me produjeron sus ideas, la fuerza de sus convicciones y la energía con las que durante tantos años las ha defendido y expuesto en todo el mundo. La influencia italiana de aquellos inicios fue notable, ya que junto a los de Castelnuovo leí, entre otros, los 2 volúmenes de Villani y Spotorno, *Matemática: Idee e metodi* (La Nuova Italia, 1979), textos que planteaban las matemáticas a partir de problemas reales y en los que la probabilidad y la estadística tenían un lugar transversal destacado.



> *Mis aficiones me han llevado a recopilar libros sobre temas diversos entre los que debo destacar, en primer lugar, los relacionados con los juegos.*

Tras este inicio en la Didáctica de las matemáticas, el conocimiento de los principales autores y sus libros se fueron sucediendo, especialmente después de la asistencia al que fue mi primer congreso internacional, la XXXIII edición de la CIEAEM en Pallanza (Italia) en 1981. En este punto, tengo necesariamente que citar a tres autores que han sido fundamentales para mi formación en didáctica de las matemáticas: George Pólya, con el célebre *How to Solve it* (1945), su libro más conocido y traducido, y su obra *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problema solving* —2 volúmenes publicados en 1962 y 1964 respectivamente por John Wiley— que constituye su auténtico legado didáctico. Como dice el autor en el prefacio del segundo volumen: «Esta obra combina su objetivo teórico, el estudio de la heurística, con otro de concreto, inmediato, práctico: mejorar la preparación de los profesores de matemáticas de los institutos».

Pere Puig Adam, con sus ensayos como *Didáctica Matemática Eurística* (1956), *El material didáctico matemático actual* (1958), *La Matemática y su enseñanza actual* (1960), pero también sus libros de matemáticas y sus libros de texto, muchos de ellos en colaboración con Julio Rey Pastor.

Hans Freudenthal, con sus numerosos trabajos, de entre los que quiero destacar el primero que leí, *Mathematics as an Educational Task*, 1973. La visión de la didáctica de las matemáticas de Freudenthal y el desarrollo de la llamada matemática realista, continuada y revisada en el instituto de investigación que lleva su nombre, por Jan De Lange y muchos otros, ha sido un modelo para muchos de nosotros, no sólo por los principios teóricos que sustentan su modelo si no, especialmente, por su capacidad para aplicar los resultados de sus investigaciones tanto en la enseñanza de las matemáticas como en la formación de profesores.

No puedo finalizar este apartado sin citar otros autores cuyas lecturas, en muchos casos artículos más que libros, han resultado importantes para mí: Paulo Abrantes, Abraham Arcavi, Paolo Boero, Alan Bishop, Claude Janvier y Gérard Vergnaud. De los trabajos publicados en nuestro país, quiero destacar las numerosas aportaciones de los distintos grupos de trabajo que durante muchos años estuvieron al frente de la innovación de la educación matemática (grupos Zero —del que he formado parte— y Periódica Pura de Barcelona, Cero de Valencia, Azarquiel de Madrid, Beta de Badajoz y tantos otros) y la colección de la Editorial Síntesis: *Matemáticas, cultura y aprendizaje,* que a principios de los 90 nos proporcionó un magnífico conjunto de libros de didáctica de las matemáticas, muchos de los cuales he seguido utilizando hasta hoy.

[...]quiero destacar las numerosas aportaciones de los distintos grupos de trabajo que durante muchos años estuvieron al frente de la innovación de la educación matemática

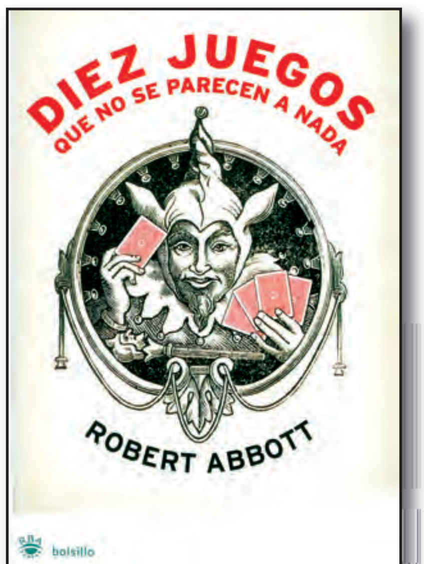
Algunos gustos particulares: Juegos, Alicias y música

Mis aficiones me han llevado a recopilar libros sobre temas diversos entre los que debo destacar, en primer lugar, los relacionados con los juegos. Tengo la suerte de contar entre mis amigos a Oriol Comas, el mejor conocedor del mundo de los juegos de nuestro país con el que, junto con otros aficionados a los juegos de pensar, hacemos, una vez al mes, una partida de Eleusis, el gran juego de Abbott divulgado por Martin Gardner en 1959, en su mítica sección Mathematical Games de la revista Scientific American (ver el libro de Robert Abbott, *Diez juegos que no se parecen a nada*, RBA, 2008). El libro de Oriol Comas, *El mundo en juegos* (RBA, 2005) es una joya imprescindible para los amantes de los juegos; junto con el libro de Frederic Grunfeld, *Juegos de todo el mundo* (Edilan-UNICEF, 1978) y *100 jeux de table* de Pierre Berloquin (Flammarion, 1976) son mis favoritos.

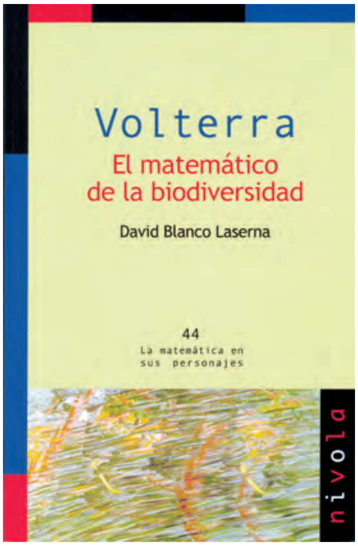
También en el campo de los juegos debo a otro buen amigo, Fernando Corbalán, la inclusión del tema entre mis intereses en el campo de la investigación en Educación Matemática: su tesis doctoral, la primera que dirigí, y su libro *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato* (Síntesis, 1994) son referencias fundamentales para este campo y lo han sido para mí.

Desde hace muchos años colecciono versiones de los cuentos de Lewis Carroll sobre Alicia (en el país de la maravillas, a través del espejo, aventuras subterráneas, Alicia para pequeños…) y libros que se ocupan de estos famosos relatos. El primero que leí (*Alícia en terra de meravelles*, versión catalana del poeta Josep Carner con ilustraciones de Lola Anglada, primera edición 1927) y *Alicia Anotada*, la edición de Martin Gardner son mis preferidos. La primera versión de Gardner es de 1960 (en español, 1984) y la definitiva de 1998 (en español, Akal, 2010). Entre las rarezas destaco *Aventuras subterráneas de Alicia* (Calamus Escriptorius, 1979) traducción del primer manuscrito original de Carroll con ilustraciones del autor y *Engineer through the Looking-Glass* de Laithwaite (BBC, 1980).

Acabaré mis referencias con la música clásica, una de mis mayores pasiones. Su relación con las matemáticas ha sido destacada numerosas veces pero seguramente es en la obra de Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher Bach. Un eterno y grácil bucle* (Tusquets, 1987), premio Pulitzer de ensayo en 1980, un libro altamente complejo de más de 800 páginas que sin embargo fue un éxito editorial, donde descubrí relaciones para mi insospechadas entre el arte, la música y las matemáticas. Como dice su autor, se trata de una improvisación sobre la *Ofrenda Musical* de Bach una gran obra del último período del gran músico alemán. En ella, y a modo de «Ofrenda Metamusical», Hofstadter se refiere repetidamente a las auotoreferencias, tanto en Bach como a los dos otros genios que dan título a su libro, estableciendo curiosos paralelismos entre ellos e incluyendo otras muchas de su propia creación, como la que se conoce con el nombre de Ley de Hofstadter: «Hacer algo te va a llevar más tiempo de lo que piensas, incluso si tienes en cuenta la ley de Hofstadter.» ■



Escaparate 1:
El matemático de la biodiversidad



Volterra
El matemático de la biodiversidad
David Blanco Laserna
Nivola, Madrid, 2010
ISBN 978-84-92493-59-3
128 páginas

Quiero dejar claro que en estos momentos lo que busco es disfrutar de mis lecturas, que me hagan pasar un buen rato. La faceta lúdica prima sobre el pragmatismo, el cual me haría elegir libros que enriquecieran mi actividad docente en el corto o medio plazo. No siento demasiados remordimientos porque siempre he pensado que tarde o temprano lo leído podrá hacer acto de presencia en mis clases.

Una de las cosas que más me han gustado del libro es la prosa ágil y amena del autor, alejada del tedioso ritmo que muchos tratamos de evitar, a veces sin éxito. Se nota que David Blanco Laserna escribe en ámbitos muy variados, desde novela infantil hasta guiones de cine y TV.

La biografía privada de Vito Volterra desarrollada en el capítulo 1, según explica el autor, trata de no inmiscuirse sin necesidad en la vida personal de nuestro protagonista. Esto no impide que a partir de unas muy precisas pinceladas conozcamos el entorno familiar, social y político donde se desarrolla la meteórica carrera de Vito, en una Italia donde todavía casi no se habla el italiano.

En los capítulos 2 y 4 se va desplegando la obra de Volterra. A finales del siglo XIX Volterra inicia su carrera, bajo la tutela de Dini. En esos momentos, el cálculo infinitesimal seguía poniéndose a prueba, en busca de una formulación más rigurosa de los conceptos de función, límite e integral. En uno de sus primeros artículos Volterra estrecha la validez del teorema fundamental del cálculo integral, al construir una función con derivada acotada pero no integrable Riemann. Este resultado impone la necesidad de redefinir la definición de integral, que llevará a cabo Lebesgue, para que el teorema fundamental sirva así a un mayor abanico de funciones.

Tras este comienzo dentro del análisis, Volterra cambiará su campo de trabajo por el de la física matemática, siendo Betti su nuevo maestro. La observación de fenómenos de la naturaleza en sus diferentes manifestaciones, ya sea el electromagnetismo, la hidrodinámica o la biología serán los puntos de partida de su estudio. A partir de aquí su labor consiste en modelizar una situación real, tarea que le apasiona desde su juventud, contando para ello con unas poderosas herramientas: las ecuaciones integrodiferenciales.

Uno de los hitos en la prolífica obra de Volterra es señalar de forma inequívoca el inicio del camino que conducirá a la creación de una nueva rama de las matemáticas, el Análisis Funcional. Vito observa que en una variada gama de problemas la incógnita deja de ser un número, pasando a ser una función. Su intuición le hace ver las enormes ventajas de desarrollar un campo de estudio similar al de la variable real, pero en el que los puntos son funciones y donde aparecen los funcionales, funciones de funciones. ¿Cómo definir la continuidad o derivabilidad en este nuevo marco? Volterra no encuen-

Pedro Latorre
IES Pilar Lorengar, Zaragoza

tra la respuesta más adecuada para resolver esta cuestión, la topología. Será Hadamard el que tome su relevo.

Ante la pregunta de cómo le llega a Volterra la profunda inspiración para a partir de unos resultados tan diferentes como los problemas variacionales o las ecuaciones diferenciales, distinguir que en todos ellos había una necesidad común, se despliegan en el libro dos opciones: una platónica y otra más prosaica. El lector podrá elegir la que más le guste o la más afín a sus creencias metamatemáticas.

El capítulo 4 presenta una breve introducción a las ecuaciones integrales y se esbozan dos de las aportaciones más destacadas de Volterra en el estudio de las mismas. Su primer éxito consiste en dar el paso inicial para resolver la familia de ecuaciones que llevan su nombre. Vito observa la similitud entre éstas y los sistemas algebraicos de ecuaciones, siendo Fredholm el que desarrolle hasta el final esta idea. Su segundo logro fue definir el concepto de convolución de funciones y apreciar su utilidad para simular procesos de interacción en los cuales hay un retraso desde el momento en el que empieza a actuar una fuerza hasta que se manifiestan sus efectos.

El último capítulo está dedicado a las aportaciones de Volterra en el estudio de la relación y competencia entre distintas especies animales, en particular la dinámica entre dos especies: presa-depredador. Toda la panoplia de recursos que Vito había acumulado en sus estudios de física los emplea ahora en la biología, para ser de nuevo un pionero en dejar constancia de la utilidad de los modelos de los ecosistemas biológicos.
Retomando el primer párrafo, como el libro me ha entretenido no puedo dejar de recomendar su lectura. Como efecto colateral se han ensanchado mis conocimientos sobre la historia de las matemáticas del principio del siglo XX. Sólo me falta utilizar lo aprendido dentro del aula. Si no lo hago en lo que queda de curso, sin duda, seguro que en el siguiente. ■

Escaparate 2: Matemáticas para ciudadanos

Educación matemática y ciudadanía
Varios autores (Coordinadores: María Luz Callejo y Jesús María Goñi)
Graó, Barcelona, 2010
ISBN 978-84-7827-979-1
168 páginas

A estas alturas no deberíamos estar cuestionándonos la necesidad de adaptar nuestra docencia a la realidad social y cultural en la que estamos inmersos. Reflexiones como las que se ofrecen en este libro tendrían que estar superadas e implementadas en todas las programaciones. Sin embargo, la tozuda realidad nos hace ver que, a pesar de todo, el mensaje está lejos de haber calado en una buena parte del profesorado

Daniel Sierra
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)

El libro es una recopilación de pequeños trabajos de diferentes autores coordinados por María Luz Callejo y Jesús María Goñi; la sola lectura de los firmantes convierte la obra en sugerente. De esta forma podemos contemplar diferentes tonos, diferentes niveles, con un objetivo común: definir, enmarcar y dar pinceladas de lo que puede ser la educación matemática para la ciudadanía. Cada uno de los autores, obviamente, enfoca el tema desde diferentes perspectivas, condicionadas por su labor diaria, pero si buscáramos un nexo común podríamos decir que todos ellos consideran que se debe enseñar el lenguaje matemático como un código imprescindible para interpretar la realidad en todas sus vertientes, desde la artística a la política.

Jesús María Goñi abre el debate realizando un breve recorrido histórico por la evolución del currículo de matemáticas en el último siglo. Podemos comprobar cómo parece haber avanzado más bien poco, de tal forma que en estos momentos muestra un claro desfase con el imparable desarrollo tecnológico. Por lo tanto, se hace imprescindible una reforma en profundidad del currículo actual, para lo cual, Goñi realiza algunas propuestas previo análisis de la incidencia en el contexto de la ciudadanía de los diferentes contenidos impartidos.

En el segundo capítulo Inés M.ª Gómez Chacón intenta buscar qué se aprende cuándo se aprende matemáticas que sea útil a la ciudadanía, lo que le hace incidir sobre las capacidades matemáticas tanto como «elementos socializadores como elementos contrasocializadores». En su texto analiza, en una mezcla teórico-práctica, cuatro tipos de mentes: disciplinar, sintetizante, creativa y ética.

Math is more es la apuesta para el siglo XXI de Claudi Alsina. El autor establece ocho competencias que las matemáticas deben aportar a una persona en cuanto a conseguir de él un ciudadano capaz de analizar el mundo actual desde una perspectiva reflexiva, crítica y eficaz. Esto debe favorecer que podamos vivir mejor, sin que haya que entender esto como un acopio de dinero o bienes materiales.

El capítulo cuatro lo dedica M.ª Luz Callejo a buscar conexiones de las matemáticas con la lucha por los derechos humanos. Como en otros puntos del libro se aboga por una metodología basada en un enfoque temático, contextual, y dirigida a enfrentar situaciones-problema en la que la modelización matemática nos da respuesta y nos ayuda a buscar nuevas preguntas.

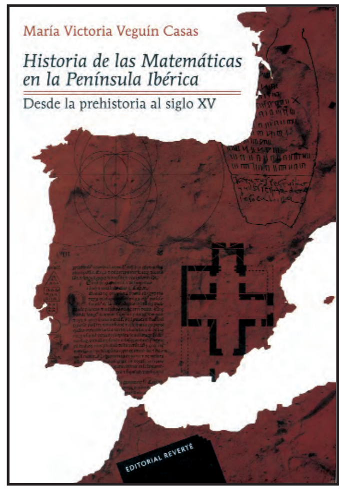
Núria Planas y Marta Civil ponen sobre el tapete el hecho de que la diversidad lingüística del Estado Español puede repercutir en el rendimiento del alumnado inmigrante. Muestran una investigación con algunos alumnos inmigrantes hispanohablantes que, a su vez, están inmersos en un entorno el que el catalán posee una importante presencia. Resulta interesante observar los cambios de registros de los entrevistados según cómo evoluciona la entrevista.

Para acabar, Yuly M.ª Vanegas y Joaquim Giménez nos hablan de cómo debería repercutir los nuevos puntos de vista en la formación del profesorado. Parece que hay consenso entre los futuros profesores que las componentes éticas y los aspectos sociales deben acompañar en una buena práctica docente, pero, por otro lado en su formación esto se interpreta más como un posicionamiento teórico que como una metodología real.

En resumen, este es un libro en el que encontraremos un buen número de reflexiones sobre cómo enfocar el currículo de matemáticas. A este respecto, todos los autores, cada uno expresándolo de diferentes maneras y desde diferentes perspectivas, parecen coincidir que es necesaria una reforma urgente y significativa. En el capítulo inicial Goñi, como le hemos podido leer en otras obras, puntualiza que la reforma del currículo necesita de un cambio en la prueba de la selectividad, de lo que considera a los departamentos y autoridades universitarias «responsables directos». Añade que «los docentes de bachillerato son los cómplices necesarios y dóciles en este desastre». Todos los firmantes de esta interesante obra lo hacen como profesores universitarios. ■

Escaparate 3: Matemáticas en la Península Ibérica hasta el siglo XV

Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica
Desde la prehistoria al siglo XV
María Victoria Veguín Casas
Reverté, Barcelona, 2011
ISBN 978-84-2915-173-2
432 páginas



A Bien podría afirmarse que la Historia de las Ciencias es la Ciencia misma. No se puede comprender completamente lo que se posee hasta que no se sabe entender lo que otros poseyeron antes que nosotros. (J. W. Goethe)

La anterior cita, obtenida del libro de H. Wussing (1998) *Lecciones de Historia de las Matemáticas*, editado en Siglo XXI de España, condensa algo que parece superfluo comentar en esta revista: la importancia que tiene la Historia de la Matemáticas en la comprensión de nuestras propias raíces y de las tensiones desarrolladas en la evolución de las ideas matemáticas y, por tanto, el enorme potencial de su utilización en nuestra práctica docente. Hacer más hincapié en este medio de la anterior idea, parece innecesario. Basta con un breve repaso a la historia de *Suma* para percibir que son esporádicos los números en los cuales no tiene cabida algún artículo sobre este tema.

Partiendo de la aceptación de la anterior posición, pueden entender que mi actitud al conocer la existencia de este libro fuese totalmente favorable, ya que, si bien la mayoría de las obras de esta materia nos proporciona una excelente herramienta para nuestras clases, el trabajo de recopilación, investigación y síntesis llevado a cabo por Veguín Casas nos facilita mucho más nuestra labor, permitiendo tener en nuestras manos un valioso compendio de la parte de la historia tratada.

La autora, ya conocida en *Suma* por medio de su artículo aparecido en el número 18, «Los caminos de Santiago: entornos matemáticos» —cuya idea continuó trabajando y dio lugar a su publicación *Matemáticas y Camino de Santiago*, en Ediciones del Orto y que también se trata en el libro a lo largo del capítulo 12— divide la obra en unidades perfectamente estructuradas, partiendo en cada una de ellas de su contextualización histórica, para dar paso a continuación a los contenidos propios del tema a estudiar. En cada una de ellas se nos presentan numerosas referencias e indicaciones sobre temas no estudiados o con las que poder ahondar en el estudio para la preparación de materiales.

Queda la obra dividida en 15 capítulos, dentro de los cuales se pueden distinguir tres grandes grupos. En el primero, correspondiente al capítulo uno, *Los comienzos del pensamiento matemático*, y al dos, *El pensamiento matemático durante la Protohistoria*, se aborda principalmente con información extraída de estudios arqueológicos e investigaciones en museos, con abundancia de fotografías y referencias.

Christian H. Rubio
IES Ángel Sanz Briz, Casetas (Zaragoza)

Un segundo bloque, que trata las matemáticas desarrolladas en la Península hasta nuestra Edad Media, comprende los dos siguientes capítulos, tercero y cuarto, y en él se estudia el legado matemático romano y el desarrollado en los pueblos hispano-visigodos.

El tercer y último bloque abarca la parte más extensa de la obra, desde el capítulo quinto hasta el final y en él se aborda el estudio de las matemáticas desarrolladas en nuestra Edad Media, origen de todo el trabajo.

Este bloque, debido a la decisión tomada por la autora de «secuenciar los capítulos diferenciando la lengua en la que estaban escritos los manuscritos», lo encontramos dividido, a su vez, en tres grandes grupos: las matemáticas en al-Ándalus, las matemáticas en los reinos cristianos y las matemáticas en Sefarad.

En el primero, con una extensión casi análoga al siguiente, se comienza estudiando las matemáticas en al-Ándalus de forma general, para luego dividir su estudio en cuatro periodos. Los dos primeros se presentan en el capítulo sexto y hacen referencia a la supervivencia de la tradición latina y a la recepción de la matemática griega y árabe en al-Ándalus. El segundo, capítulo séptimo, nos presentan las matemáticas en los reinos de Taifas y el tercero, las matemáticas en los periodos de decadencia. Completa el estudio de este gran bloque un capítulo dedicado al islam y las matemáticas.

El segundo gran bloque —capítulos del 10 al 14—, trata las matemáticas en los reinos cristianos, secuenciándose en las matemáticas en los primeros siglos de la Reconquista; las traducciones del árabe al latín; en la peregrinación jacobea y su papel en la difusión de conocimientos; las matemáticas en romance; y las matemáticas mercantiles en la Península Ibérica.

El último bloque, mucho menos extenso que los anteriores, estudia las matemáticas en Sefarad y comprende el último capítulo del libro, el cual se completa con un Epílogo, un Anexo, el apartado de Notas y la Bibliografía.

Las referencias para continuar o profundizar en el estudio, la importancia de este periodo en nuestras matemáticas y la amplitud de los temas tratados, presentes en la base de la práctica totalidad de los contenidos de nuestro currículum, convierte a esta obra en un excelente instrumento para preparar nuestras presentaciones y actividades. Además, el haberla encontrado en la estantería de una librería generalista de una ciudad mediana, nos proporciona también una parte necesaria de optimismo sobre el interés que suscitan estos temas. ■

suma+ 67
Junio 2011, pp. 101-110

Historias de al-Khwārizmī (6ª entrega). El cálculo con la cosa

Cálculo literal, cálculo con especies, cálculo con la cosa

Como ya vimos en una entrega anterior de estas historias que subtitulé “El proyecto algebraico” (Puig, 2010), François Viète, en su libro *Introducción al arte analítica* (*In artem analyticem Isagoge*), presenta lo que él llama “Logística especiosa”, un cálculo que no se hace con números, sino con especies, con “formas de números”. También vimos que esto es lo que le permite efectuar el análisis para resolver los problemas. La logística especiosa, en el caso de Viète, y esto le hace ser considerado el iniciador del álgebra simbólica, se acompaña de un cálculo con letras. Así lo dice explícitamente Viète en el recto del folio 5 de la *Introducción al arte analítica*:

> Logistice numerosa est quæ per numeros, Speciosa quæ per species seu rerum formas exhibetur, ut pote per Alphabetica elementa.
> [La Logística numerosa es la que se presenta mediante números, la Especiosa la que se presenta mediante especies o formas de las cosas, como, por ejemplo, mediante elementos alfabéticos] (Viète, 1591, p. 5r).

El álgebra de al-Khwārizmī no es simbólica en este sentido: ni las especies ni las cantidades desconocidas ni las cantidades conocidas están representadas mediante letras, ni mediante ningún signo distinto de las palabras del lenguaje vernáculo. No hay pues en el libro de al-Khwārizmī, estrictamente hablando, lo que nosotros llamamos cálculo literal, en el sentido de cálculo con letras. Sin embargo, sí que hay desarrollado un cálculo con la cosa y un cálculo con especies, hay pues una “logística especiosa”. Además, al-Khwārizmī le dedica a ese cálculo una parte específica del libro situada antes de que aborde el procedimiento para resolver los problemas y después de haber expuesto cuáles son los objetos de los que va a tratar el cálculo, es decir, las especies de números, y haber establecido el conjunto completo de formas canónicas, sus algoritmos de solución y las demostraciones de esos algoritmos.

Los capítulos del libro en que al-Khwārizmī desarrolla ese cálculo con la cosa y con especies son (con la numeración que les di en Puig, 2010) los siguientes:

6. Sobre la multiplicación.
7. Sobre la adición y la substracción.
8. Sobre la división.

Luis Puig
Universitat de València Estudi General

En el capítulo "Sobre la multiplicación" al-Khwārizmī calcula con la cosa y en los cálculos aparecen las especies. En los otros dos capítulos calcula con especies y con radicales, sin que aparezca el término "cosa". Además, al final del capítulo "Sobre la división" vuelve sobre tres de los cálculos expuestos en el capítulo "Sobre la adición y la substracción" para demostrarlos. Veamos, en primer lugar, cómo explica al-Khwārizmī el cálculo con la cosa.

El cálculo con la cosa

Al-Khwārizmī comienza manifestando explícitamente que escribe con intención pedagógica:

> Yo te enseño cómo multiplicar unas por otras las cosas, que son las raíces; si están solas, si están con un número, si están disminuidas en un número o si están restadas de un número; y cómo sumarlas unas a otras y cómo restarlas unas de otras (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Los tipos de expresiones que al-Khwārizmī va a enseñar cómo se multiplican los podemos escribir en el lenguaje actual del álgebra así:

las cosas solas:	ax
las cosas con un número:	$ax + b$
las cosas disminuidas en un número:	$ax - b$
las cosas restadas de un número	$b - ax$

Como para al-Khwārizmī los números son positivos, tiene que haber dos tipos de expresiones con la substracción, las cosas disminuidas en un número y las cosas restadas de un número, mientras que sólo hay un tipo de expresión cuando se suman cosas y números. Veremos más adelante que en uno de los ejemplos al-Khwārizmī dice explícitamente que diez más cosa y cosa más diez es lo mismo, y por qué necesita decirlo.

Para enseñar a multiplicar esas expresiones con la cosa al-Khwārizmī recuerda qué significa multiplicar:

> Que sepas que para cualquier número multiplicado por otro número es necesario sumar uno de los números tantas veces como las unidades que contiene el otro (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Al-Khwārizmī no continúa, como podría esperarse, dando ahora una regla para multiplicar las expresiones con números y cosas, sino que presenta una situación puramente aritmética que utiliza como un modelo más concreto a partir del cual dar sentido a los cálculos (algebraicos) con la cosa. La situación en cuestión es la multiplicación de números cuando están representados en el sistema de numeración posicional decimal, es decir, lo que al-Khwārizmī explicará en su *Libro del cálculo con los números hindúes* (Allard, 1992)[1]. En efecto, lo que hace al-Khwārizmī es explicar que para multiplicar decenas más unidades por decenas más unidades hay que hacer cuatro multiplicaciones. Pero no sólo explica eso, sino que extiende el modelo concreto del cálculo aritmético hindú a la situación en que las unidades no se añaden a las decenas (como en la representación hindú de los números) sino que se substraen:

> Si se tiene decenas a las que se ha añadido unidades o de las que se ha quitado unidades, es necesario multiplicar cuatro veces: las decenas por las decenas, las decenas por las unidades, las unidades por las decenas y las unidades por las unidades. (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Vale la pena observar que, como al-Khwārizmī tiene disponibles los nombres "decenas" y "unidades", puede enunciar la regla en general sin verse obligado a enunciarla mediante un ejemplo numérico concreto. "Decenas" y "unidades" desempeñan, en los cálculos aritméticos en el sistema de numeración posicional decimal, un papel similar al que van a desempeñar las especies de números en los cálculos algebraicos, por eso al-Khwārizmī puede usar ese cálculo como modelo (más concreto) para enseñar el cálculo (más abstracto) algebraico.

Además, al extender el modelo de la situación propia del sistema de numeración (la adición de decenas y unidades) a una situación similar a la anterior, pero nueva (la substracción de unidades a decenas), da paso también a un modelo para la regla de los signos:

> Entonces, si las unidades que están con las decenas son ambas añadidas, la cuarta multiplicación es aditiva, y si son ambas substraídas, la cuarta multiplicación es también aditiva. Pero si unas están añadidas y otras substraídas, la cuarta multiplicación es substractiva (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Vale la pena detenerse un momento en el detalle de los términos que acompañan este modelo aritmético de la regla de los signos: al-Khwārizmī no multiplica los signos más y menos a la manera de la moderna formulación de la regla de los signos ($+ \times + = +$; $+ \times - = -$; $- \times - = +$). Al-Khwārizmī no dice siquiera en lenguaje vernáculo: "más por más, más; más por menos, menos; menos por menos, más". Al-Khwārizmī no habla de esos signos sueltos, sino de las cantidades que se suman o se restan.

Pero además, al-Khwārizmī no habla de cantidades positivas o cantidades negativas, esto último es simplemente impensable, sino de cantidades que se suman y cantidades que se restan a otras: en este caso "unidades añadidas" y "unidades substraídas" a unas decenas. El calificativo "añadido" o "substraído", "aditivo" o substractivo" no tiene sentido para una cantidad aislada, sólo tiene sentido para una cantidad que está inmersa en un cálculo. La regla de multiplicación es pues una regla operatoria sobre lo que la cantidad está realizando o ha realizado en una operación aritmética: ser añadida o ser substraída en el curso de la realización de un cálculo es lo que le da a las cantidades, sólo a efectos de ese cálculo, el carácter aditivo o substractivo. Ese carácter aditivo o substractivo no es pues una propiedad absoluta de una cantidad, sino una propiedad de la cantidad relativa a un cálculo concreto en el que aparece: como se está multiplicando una cantidad, a la que se le ha añadido otra, por otra cantidad, a la que se le ha substraído otra, el cuarto producto es una cantidad "substractiva", es decir, una cantidad que se va a substraer de otra.

Por otro lado, la regla sólo está enunciada para "la cuarta multiplicación", que es la multiplicación en la que los factores provienen ambos de las cantidades que están añadidas o substraídas a otras. Sólo en este caso tiene al-Khwārizmī que enunciar una regla. En los otros casos, interviene una cantidad que ni está añadida ni está substraída, sino que es la cantidad a la que se le añade o se le quita algo. Cuando dos de esas cantidades se multiplican, el producto no es aditivo ni substractivo, es de nuevo una cantidad a la que se le añade o se le quita algo. Cuando una de estas cantidades se multiplica por una cantidad añadida o substraída, el producto resultante tiene el carácter aditivo o substractivo de la cantidad por la que se multiplica, sin que la cantidad que ni es añadida ni substraída pueda influir en ese carácter.

Al-Khwārizmī ejemplifica a continuación las reglas que ha formulado en general en el modelo aritmético concreto con tres ejemplos numéricos, elegidos para tener uno de cada una de las posibilidades de producto de "unidades añadidas" y "unidades substraídas". El primero, y más simple, es:

> Por ejemplo: diez y uno por diez y dos; el diez por el diez es cien; el uno por el diez, diez aditivo; el dos por el diez, veinte aditivo; el uno por el dos, dos aditivo. Y todo esto es treinta y dos. (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

En este ejemplo está patente ese carácter asimétrico de la adición que hemos indicado: en "diez y uno", diez es la cantidad a la que se le suma otra cantidad; uno es la cantidad añadida. El modelo de adición que subyace es el de una cantidad inicial al que se le añade una cantidad que cambia la cantidad inicial, no es el modelo de adición que la presenta como el cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos y en el que los dos sumandos desempeñan el mismo papel en la adición.

Ambos dieces, el de "diez y uno" y el de "diez y dos", son cantidades que ni son añadidas ni substraídas: su producto, por tanto, no es aditivo ni substractivo. Al-Khwārizmī escribe "el diez por el diez es cien", y no "el diez por el diez es cien aditivo". En las otras tres multiplicaciones, el producto sí que está calificado, en este caso, siempre como "aditivo". Veamos los otros dos ejemplos:

> Si se tiene diez menos uno por diez menos uno, el diez por el diez es cien; y el uno substraído por el diez es diez substractivo, y el uno también substraído por el diez es diez substractivo. Esto es ochenta. Y el uno substraído por el uno substraído, uno aditivo. Esto es pues ochenta y uno.
> Si se tiene diez y dos por diez menos uno, el diez por el diez es cien; el uno substraído por el diez es diez substractivo; el dos añadido por el diez es veinte aditivo. Esto es ciento diez. El dos añadido por el uno substraído es dos substractivo. Todo esto es pues ciento ocho (Rashed, 2007, pp. 122-125; Hughes, 1986, pp. 241-242).

Los tres ejemplos son pues

$(10 + 1)\,(10 + 2)$
$(10 - 1)\,(10 - 1)$
$(10 + 2)\,(10 - 1)$

Los dieces son siempre cantidades que ni son añadidas ni substraídas. En los cálculos al-Khwārizmī siempre escribe "diez" sin calificativo alguno. En el primer ejemplo, en que las otras cantidades están ambas añadidas, al-Khwārizmī no se preocupa de escribir el calificativo "añadido" con el uno o el dos, pero en los otros dos ejemplos, siempre lo escribe: "el uno substraído", "el dos añadido".

Los productos siempre van acompañados de su calificativo, "aditivo" o "substractivo", de manera que el cálculo se completa luego realizando sobre el primer producto, es decir, el resultado de la multiplicación de las dos cantidades iniciales (que es al que se van a añadir o del que se van a substraer el resto de los productos) las adiciones o substracciones correspondientes al carácter de los otros tres productos. Al-Khwārizmī, además, se detiene en subrayar el efecto de la cuarta multiplicación, que es en la que ambos factores están calificados como "añadido" o "substraído".

Una vez expuestos los ejemplos de los cálculos aritméticos que son el modelo concreto para enseñar las reglas de cálculo con la cosa, al-Khwārizmī dice explícitamente que ésa ha sido su intención al explicar todo lo anterior:

> Te he mostrado esto para indicarte cómo multiplicar las cosas unas por otras, si están añadidas a un número, o restadas de un número, o disminuidas por un número (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

Dicho esto, al-Khwārizmī desgrana ejemplos de cálculos con expresiones con la cosa del estilo que ha anunciado, en los que, al poner en funcionamiento para esas expresiones algebraicas los cálculos que ha mostrado en el modelo concreto aritmético, va más allá de la imitación con las expresiones algebraicas de los cálculos aritméticos. En particular, lo aditivo y lo substractivo dejan de ser calificativos estrictamente ligados a lo que se añade o se substrae a una cantidad que ni es aditiva ni substractiva, para calificar también a las cantidades que en las expresiones aritméticas aparecían como cantidades iniciales. Pero además, lo substractivo, aunque sigue apareciendo como substraído de una cantidad, parece independizarse en el curso de los cálculos. Veamos cómo son los ejemplos.

Los ejemplos son estos diez:

1. $(10 - x) \cdot 10$	2. $(10 + x) \cdot 10$
3. $(10 + x) \cdot (10 + x)$	4. $(10 - x) \cdot (10 - x)$
5. $(1- 1/6) \cdot (1- 1/6)$	6. $(10 - x) \cdot (10 + x)$
7. $(10 - x) \cdot x$	8. $(10 + x) \cdot (x - 10)$
9. $(10 + x/2) \cdot (1/2 - 5x)$	10. $(10 + x) \cdot (x - 10)$

El quinto ejemplo no es en realidad un cálculo de expresiones con la cosa, sino que el lugar de la cosa está ocupado por una fracción. En el ejemplo noveno también hay fracciones, o, para ser más preciso, mitades, y curiosamente, el número de cosas es la mitad de diez. Estos dos ejemplos no responden al mismo esquema sistemático de desarrollo de posibilidades que los otros, y sólo parece tener sentido que al-Khwārizmī los incluya por la dificultad que conllevaba el cálculo con fracciones en su época.

En el ejemplo décimo, cuyo enunciado es el mismo que el del octavo, lo que hace al-Khwārizmī es decir que “diez y cosa” es lo mismo que “cosa y diez” y desarrollar entonces el cálculo $(x + 10) \cdot (x - 10)$.

Veamos en detalle cómo desarrolla al-Khwārizmī los ejemplos. Empecemos por los cuatro primeros.

1. $(10 - x) \cdot 10$

> Si se te dice: diez menos cosa, y el sentido de la cosa es la raíz, por diez, entonces multiplica diez por diez, resulta cien, y menos cosa por diez, resulta diez raíces substractivas. Decimos: cien menos diez cosas (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

2. $(10 + x) \cdot 10$

> Si se dice: diez y cosa por diez, tú multiplicas diez por diez, resulta cien, y cosa por diez, resulta diez cosas aditivas. Se tiene pues cien y diez cosas (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

3. $(10 + x) \cdot (10 + x)$

> Si se dice: diez y cosa por sí misma, tú dices: diez por diez, cien, y diez por cosa, diez cosas, y diez por cosa, diez cosas también, y cosa por cosa, tesoro aditivo. Resulta entonces cien dirhams y veinte cosas y tesoro aditivo (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

4. $(10 - x) \cdot (10 - x)$

> Si se dice: diez menos cosa por diez menos cosa, tú dices: diez por diez, cien, y menos cosa por diez, diez cosas substractivas, y menos cosa por diez, diez cosas substractivas, y menos cosa por menos cosa, tesoro aditivo. Resulta pues cien y tesoro menos veinte cosas (Rashed, 2007, pp. 124-125; Hughes, 1986, p. 242).

En estos cuatro ejemplos, al-Khwārizmī hace las dos o las cuatro multiplicaciones por separado, y luego combina los productos teniendo en cuenta si cada uno de ellos es aditivo o substractivo. Hasta aquí no hace más que calcar sobre las expresiones con la cosa lo que ha hecho con el modelo aritmético más concreto, substituyendo simplemente el uno o el dos, que estaban añadidos o substraídos a diez en los ejemplos aritméticos, por la cosa.

Sin embargo, hay algo que es nuevo: en los ejemplos aritméticos en que aparece “diez menos uno”, al-Khwārizmī llamaba en los cálculos “el uno substraído” a ese uno que en la expresión aritmética está después de la palabra “menos”, aquí al-Khwārizmī ante la expresión equivalente “diez menos cosa” no dice en los cálculos “la cosa substraída”, sino “menos cosa” ya desde el primer ejemplo.

“Lo substraído” de una cantidad, el uno substraído de diez en el ejemplo aritmético expresado en la frase “diez menos uno”, se independiza para ser no una cosa substraída sino “menos cosa”.

Por supuesto que esto está lejos de indicar la constitución de la idea de número negativo: sólo cuando nombra lo que se va a multiplicar dice al-Khwārizmī “menos cosa”, en cuanto se trata del resultado de la multiplicación, de nuevo está presente que cualquier cosa que lleve delante la palabra “menos” representa una cantidad que ha de substraerse de otra. El resultado de la multiplicación de “menos cosa” por diez no es “menos diez cosas”, sino “diez cosas substractivas. La palabra “menos”, la expresión “menos cosa” sólo se ha independizado de la cantidad de la que se substrae mientras se está calculando con ella.

Eso no quita para que la reiteración a lo largo del texto de al-Khwārizmī de la expresión “menos cosa” le dé carta de naturaleza como parte del lenguaje algebraico que al-Khwārizmī usa en su libro, y probablemente contribuyó a establecer. Si usamos la clásica caracterización de Nesselman (1842) de los tipos de lenguaje algebraico, el texto de al-Khwārizmī es “retórico” porque los cálculos algebraicos están expresados totalmente y en detalle usando palabras del lenguaje vernáculo. Ahora bien, decir que entonces el álgebra está escrita en lenguaje vernáculo es contar sólo la mitad de la historia: al-Khwārizmī sólo usa el lenguaje vernáculo, por supuesto, pero, por un lado, fija significados técnicos de las palabras, y, por otro, y más importante para lo que quiero señalar aquí, esquematiza y estereotipa el texto. Salta a la vista cuando se lee el libro de álgebra de al-Khwārizmī, o simplemente los fragmentos que estoy citando aquí, que al-Khwārizmī construye frases repitiendo expresiones verbales que, por la reiteración, se convierten en fórmulas estereotipadas. El historiador libanés Adel Anbouba dice que una frase como "*illā shay' fī illā shay' māl zā'id* (menos cosa por menos cosa, tesoro aditivo)", que acabamos de encontrar en el cuarto ejemplo, "va contra la gramática" (Anbouba, 1978, p. 72). Al-Khwārizmī rompe la gramática de la lengua vernácula como parte de su elaboración del sistema de signos del álgebra, que no se hace con más materia de la expresión que la de la propia lengua vernácula[2]. La nueva gramática produce textos esquemáticos y estereotipados: "menos cosa" es más compacto y manejable en un texto esquemático y estereotipado que "la cosa substraída", y, una vez se ha permitido violar la gramática, se puede independizar de la expresión completa que le daba sentido ("diez menos cosa"), para designar algo con lo que se hacen cálculos algebraicos[3].

Veamos el quinto ejemplo, en el que no aparece la cosa, pero que al-Khwārizmī enlaza con los anteriores al empezar diciendo "De la misma manera", lo que nos podría hacer pensar que el sentido de incluir este ejemplo no está en usarlo como modelo aritmético y por tanto más concreto de la multiplicación de expresiones con la cosa, sino, por el contrario, como aplicación ahora de esos cálculos de vuelta a la aritmética, para unos cálculos que son difíciles.

5. $(1- 1/6) \cdot (1- 1/6)$

> De la misma manera si te dicen: un dirham menos un sexto por un dirham menos un sexto. Se tiene cinco sextos por sí mismo, es decir, veinticinco partes de treinta y seis partes de dirham, que es dos tercios y un sexto de un sexto.
> La regla para ello es: multiplicas un dirham por un dirham, se tiene un dirham. Y menos un sexto por un dirham vale un sexto substractivo, y menos un sexto por un dirham vale un sexto substractivo. Queda dos tercios de un dirham. Y menos un sexto por menos un sexto vale un sexto de un sexto aditivo. Es pues dos tercios y un sexto de un sexto (Rashed, 2007, pp. 126-127; Hughes, 1986, p. 242).

No entraré aquí en las peculiaridades de la denominación de las fracciones en la época árabe medieval, que son responsables de algunos de los detalles de estos cálculos. Sólo mencionaré que la lengua árabe tiene nombre sólo para las fracciones unitarias, y que éstas se llaman "fracciones expresables", mientras que las demás se llaman "inexpresables" o "sordas" (exactamente la misma palabra se usa también para las magnitudes inconmensurables). Las fracciones sordas se describen con expresiones como la que aparece en este texto: "veinticinco partes de treinta y seis partes" para 25/36, reiterando la palabra "parte" para indicar claramente que la unidad (en este caso, el dirham) se ha dividido en treinta y seis partes y que se han tomado veinticinco de esas treinta y seis. También tiene nombre para fracciones con un dos en el numerador, como dos tercios, pero eso se debe a que la lengua árabe no sólo tiene singular y plural, sino también dual, por lo que para decir dos cosas, por ejemplo, no se usa el número dos, sino que se pone la palabra "cosa" en dual. Esto explica la forma en que al-Khwārizmī da aquí el resultado: en árabe se ve como más simple la expresión "dos tercios y un sexto de un sexto" que "veinticinco partes de treinta y seis partes".

Lo que interesa señalar, y va en el sentido que había adelantado antes de exponer este ejemplo, es que aquí al-Khwārizmī aplica al cálculo de expresiones con fracciones la regla que ha enunciado para expresiones con la cosa, e incluso usa el mismo lenguaje esquematizado y estereotipado que viola la gramática: "menos un sexto por menos un sexto", etc.

Veamos ahora los ejemplos sexto, séptimo y octavo

6. $(10 - x) \cdot (10 + x)$

> Si se dice: diez menos cosa por diez y cosa, tú dices: diez por diez, cien, y menos cosa por diez, diez cosas substractivas; cosa por diez, diez cosas aditivas, y menos cosa por cosa, tesoro substractivo. Y esto es cien dirhams menos un tesoro (Rashed, 2007, pp. 126-127; Hughes, 1986, p. 242).

7. $(10 - x) \cdot x$

> Si se dice: diez menos cosa por cosa, tú dices: diez por cosa, diez cosas, y menos cosa por cosa, tesoro substractivo. Resulta pues diez cosas menos un tesoro (Rashed, 2007, pp. 126-127; Hughes, 1986, pp. 242-243).

8. $(10 + x) \cdot (x - 10)$

> Si se dice: diez y cosa por cosa menos diez, tú dices: cosa por diez, diez cosas aditivas; cosa por cosa, tesoro aditivo; menos diez por diez, cien dirhams substractivos; menos diez por cosa, diez cosas substractivas. Decimos entonces: un tesoro menos cien dirhams. Después de haberlas opuesto, se eliminan diez cosas aditivas con diez cosas substractivas. Quedará entonces un tesoro menos cien dirhams (Rashed, 2007, pp. 126-129; Hughes, 1986, p. 243).

El ejemplo séptimo no incluye nada nuevo, su diferencia con los ejemplos primero y segundo es simplemente que la expresión simple es una cosa en vez de ser un diez, por lo que una de las dos multiplicaciones da origen a un tesoro, en este caso substractivo. Esa multiplicación de la cosa por la cosa ya había aparecido en los ejemplos tercero y cuarto, y es una multiplicación de especies de números: cosa por cosa es tesoro ya que al-Khwārizmī ha advertido que "el sentido de la cosa es la raíz[4]".

En los ejemplos sexto y octavo, las diez cosas aditivas se compensan con las diez cosas substractivas, quedando una expresión en la que sólo hay dos especies: simples números o dirhams y tesoros. En el ejemplo sexto al-Khwārizmī se limita a enunciar el resultado: "Y esto es cien dirhams menos un tesoro". El ejemplo octavo es más interesante porque al-Khwārizmī explica cómo han desaparecido las cosas al final de los cálculos, y, en la explicación, utiliza la palabra "*qābālat*", que tiene la misma raíz que *al-muqābala*, la palabra que aparece en el título del libro de al-Khwārizmī acompañando a *al-jabr*, y que es el nombre de una de las operaciones fundamentales que definen el cálculo. Esa raíz tiene el significado de oponer una cosa a otra, y se usa para compensar los términos de una expresión algebraica que sean de la misma especie. En el caso de este cálculo, hay dos de las cuatro multiplicaciones que han producido términos de la misma especie: diez cosas aditivas y diez cosas substractivas. El calculista algebraico las opone, las pone una frente a otra y las compensa, en este caso la oposición, *al-muqābala*, tiene como consecuencia que las cosas se eliminan y en la expresión final no hay cosas, sólo dirhams y tesoros.

El ejemplo noveno, ya lo anunciaba cuando comenzamos a examinar estos ejemplos, es peculiar por la presencia de mitades:

9. $(10 + x/2) \cdot (1/2 - 5x)$

> Si se dice: diez dirhams y media cosa por medio dirham menos cinco cosas, tú dices: medio dirham por diez, cinco dirhams aditivos; y medio dirham por media cosa, un cuarto de cosa aditivo, y menos cinco por diez dirhams, cincuenta raíces substractivas. Resulta la suma de todo entonces cinco dirhams menos cuarenta y nueve raíces y tres cuartos de raíz. Multiplicas luego cinco raíces substractivas por media raíz aditiva. Resulta dos tesoros y medio substractivos. Es entonces cinco dirhams menos dos tesoros y medio y menos cuarenta y nueve raíces y tres cuartos de raíz. (Rashed, 2007, pp. 128-129; Hughes, 1986, p. 243).

Este ejemplo nos hace ver de nuevo que la presencia de fracciones era una dificultad notable para los cálculos, pero no nos vamos a entretener más que en constatarlo.

El último ejemplo muestra, en primer lugar, que es necesario decir explícitamente que “diez y cosa” es lo mismo que “cosa y diez”.

10. $(10 + x) \cdot (x - 10)$

> Si se dice: diez y cosa por cosa menos diez. Es como si se hubiera dicho: cosa y diez por cosa menos diez. Tú dices: cosa por cosa, tesoro aditivo; diez por cosa, diez cosas aditivas; menos diez por cosa, diez cosas substractivas. Se anula lo aditivo con lo substractivo y queda el tesoro. Y menos diez por diez, cien substraído del tesoro. Resulta pues un tesoro menos cien dirhams. (Rashed, 2007, pp. 128-129; Hughes, 1986, p. 243).

Aquí, la oposición de los dos términos que son de la misma especie se enuncia sin tanta precisión como en el ejemplo octavo, y como después de las tres primeras multiplicaciones sólo queda el tesoro, la cuarta multiplicación, que da un resultado substractivo, se enuncia como “cien substraído del tesoro”. Pero eso no completa el cálculo, sino que el resultado se da con la expresión algebraica en su forma esquemática y estereotipada: “un tesoro menos cien dirhams”.

Después de este último ejemplo, al-Khwārizmī termina el capítulo “Sobre la multiplicación” recapitulando:

> Y para todo lo que se obtiene por la multiplicación de aditivo y substractivo, como menos cosa por cosas añadidas, el último producto es substractivo siempre. (Rashed, 2007, pp. 128-129; Hughes, 1986, p. 243).

El cálculo con especies

Al-Khwārizmī sólo trata con tres especies: tesoros, raíces y simples números. En el capítulo “Sobre la multiplicación”, que hemos examinado, desarrolla un cálculo con expresiones en las que está la cosa y enseña a calcular con las cosas “si están solas, si están con un número, si están disminuidas en un número o si están restadas de un número”. Con ello trata todas las multiplicaciones entre expresiones con especies que pueden aparecer en su cálculo; cualquier otra multiplicación exigiría ampliar la serie de las especies, incluyendo el cubo, el tesoro tesoro, el tesoro cubo, etc., como hicieron tras él sobre todo al-Karajī, as-Samaw’al y los que les siguieron. En los otros dos capítulos al-Khwārizmī aborda las tres operaciones aritméticas que faltan: adición, substracción y división. Sin embargo, en estos capítulos al-Khwārizmī no sigue calculando con la cosa; de hecho, la palabra “cosa” ni siquiera aparece una sola vez en ellos. Las expresiones con las que al-Khwārizmī calcula en estos dos capítulos son algunas expresiones con especies y, sobre todo, expresiones en las que aparecen radicales.

No examinaré los dos capítulos completos como he hecho en el caso del capítulo “Sobre la multiplicación”, sino que me limitaré a examinar unos cálculos que presenta en el capítulo “Sobre la adición y la substracción” que son peculiares. En el conjunto de estos dos capítulos, el estilo de presentación es bastante diferente del que hemos visto que al-Khwārizmī utiliza en el capítulo “Sobre la multiplicación”: no hay aquí modelo concreto alguno a partir del cual se le dé sentido a los cálculos algebraicos. Los cálculos que vamos a examinar tienen la peculiaridad, además, de que al-Khwārizmī los demuestra mediante figuras en dos casos, y dice que no es posible demostrarlo mediante figuras en otro, pero que en ese caso se puede hacer una demostración “con palabras”. Esta “demostración con palabras” puede verse como el germen de la demostración puramente algebraica.

Los dos primeros cálculos no son cálculos con especies sino con radicales, en concreto la adición y la substracción de dos binomios con radicales cuadráticos que son irracionales:

$$\left(\sqrt{200}-10\right)+\left(20-\sqrt{200}\right)$$

y

$$\left(20-\sqrt{200}\right)-\left(\sqrt{200}-10\right)$$

Veamos cómo enuncia al-Khwārizmī los cálculos:

> Que sepas que la raíz de doscientos menos diez, sumada a veinte menos la raíz de doscientos, es igual a diez.
> La raíz de doscientos menos diez restada de veinte menos la raíz de doscientos es treinta menos dos raíces de doscientos, y dos raíces de doscientos es la raíz de ochocientos (Rashed, 2007, pp. 130-131; Hughes, 1986, p. 243).

Los otros cálculos son la adición y la substracción de dos expresiones algebraicas que ambas contienen las tres especies:

$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2)$
y
$(100 + x^2 - 20x) - (50 + 10x - 2x^2)$

Veamos cómo enuncia al-Khwārizmī los cálculos:

> Cien y tesoro menos veinte raíces, a lo que se añade cincuenta y diez raíces menos dos tesoros, resulta ciento cincuenta menos un tesoro y menos diez raíces (Rashed, 2007, pp. 130-131; Hughes, 1986, p. 243).
> Cien y tesoro menos veinte raíces, de lo que se substrae cincuenta y diez raíces menos dos tesoros, resulta cincuenta dirhams y tres tesoros menos treinta raíces (Rashed, 2007, pp. 130-131[5]).

Tras esos enunciados en los que nada se explica, al-Khwārizmī promete demostraciones:

> Te muestro su causa verdadera de una forma que te conduce a lo que se busca, si Dios quiere (Rashed, 2007, pp. 130-131; Hughes, 1986, p. 243).

Las demostraciones no están, sin embargo, a continuación de estos enunciados, sino que al-Khwārizmī continúa el capítulo "Sobre la adición y la substracción" con cuestiones cómo "duplicar la raíz de cualquier tesoro, conocido o sordo", triplicarla, etc., cuestiones que no vamos a examinar, y sólo al final del capítulo "Sobre la división" aparecen las demostraciones.

La primera de ellas, que pretende demostrar que efectivamente

$$\left(\sqrt{200}-10\right)+\left(20-\sqrt{200}\right)=10$$

es una demostración hecha mediante una figura, que se construye para representar las expresiones y ver en ella que los cálculos dan lo que se ha dicho que dan. En la figura 1 indicamos cómo están representadas las expresiones en la figura que al-Khwārizmī construye. La figura 2 es la que aparece en la edición de Masharrafa y Ahmad del texto de al-Khwārizmī (Masharrafa y Ahmad, 1939 p. 33).
La demostración comienza como sigue:

> En cuanto a la causa de la raíz de doscientos menos diez añadida a veinte menos la raíz de doscientos, ésta es la figura: la recta AB es la raíz de doscientos: de A al punto B es el diez, y lo que queda de la raíz de doscientos es el resto de la recta AB, es decir la recta CB (Rashed, 2007, pp. 136-137; Hughes, 1986, p. 245).

Al-Khwārizmī comienza pues construyendo un segmento AB para representar la raíz de doscientos (que es irracional, "sorda", en la terminología de al-Khwārizmī) en el que señala un segmento igual a diez para tener así representado tanto la raíz de doscientos como el binomio inicial, raíz de doscientos menos diez.

> Construye luego una recta del punto B al punto D, la recta veinte, que es el doble de la recta AC, que es diez (Rashed, 2007, pp. 136-137; Hughes, 1986, p. 245).

Lo que le va a añadir al binomio inicial, no lo representa a continuación del segmento ya construido, como parecería natural para representar la adición como yuxtaposición de segmentos, sino que en otra recta (dispuesta perpendicularmente a la anterior, pero el hecho de que aparezca perpendi-

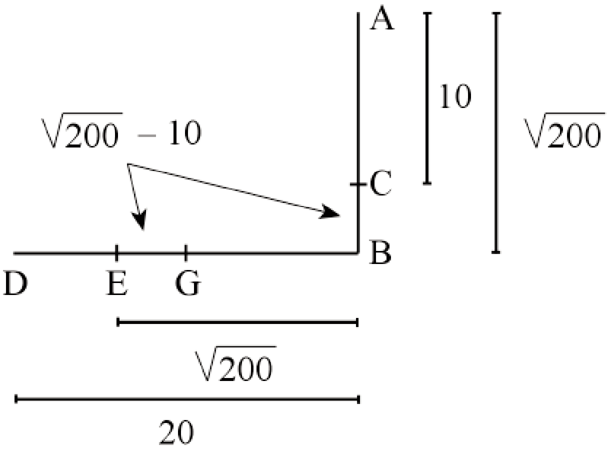


Figura 1

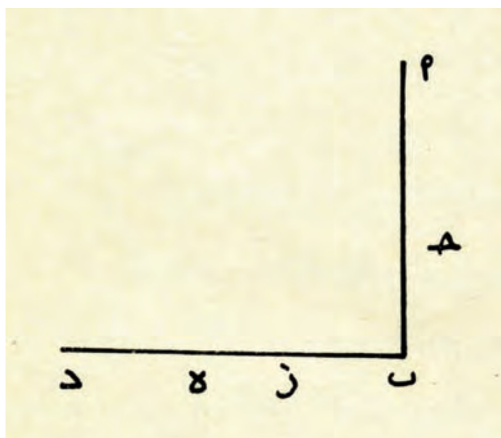


Figura 2

cular en la figura no desempeña papel alguno) va a representar el otro binomio, comenzando para ello por la cantidad a la que se le substrae algo, en este caso, por el veinte. El segmento *BD* se construye de manera que sea el doble del segmento *AC*, ya que éste representa diez, y ahora se trata de representar veinte. De la misma manera, llevará a ese nuevo segmento otro igual a la raíz de doscientos, para representar así veinte menos la raíz de doscientos, es decir, el binomio que se suma al inicial:

> Del punto B al punto E una igual a la recta AB, es también la raíz de doscientos. El resto del veinte es del punto E al punto D (Rashed, 2007, pp. 136-137; Hughes, 1986, p. 245).

Con los dos binomios representados, ya está en condiciones de representar su adición:

> Ya que queremos añadir lo que queda de la raíz de doscientos una vez quitado el diez, que es la recta CB, a la recta ED, que es veinte menos la raíz de doscientos, cortamos de la recta BE una recta igual a la recta CB, sea la recta GE (Rashed, 2007, pp. 136-139; Hughes, 1986, p. 245).

Es decir, al-Khwārizmī traslada ahora el segmento que representa raíz de doscientos menos veinte en la primera recta a la segunda recta, colocándolo a continuación del segmento que representa veinte menos la raíz de doscientos, de manera que esté a la vez separando una parte del segmento que representa a la raíz de doscientos. Entonces puede identificar los segmentos correspondientes en las dos rectas que ha construido.

> Ahora bien, es evidente que la recta AB, que es la raíz de doscientos, es igual a la recta BE; que la recta AC, que es el diez, es igual a la recta BG, y que el resto de la recta AB que es CB, es igual al resto de la recta GE (Rashed, 2007, pp. 138-139; Hughes, 1986, p. 245).

Con lo que puede proceder a ver que, representada así la adición de los dos binomios en la segunda recta, el resultado es el que había enunciado.

> Añadimos a la recta ED la recta GE; será evidente que se ha substraído de la recta BD, que es veinte, una recta igual a la recta AC, que es diez, es decir, la recta BG, y que nos queda la recta GD, que es diez (Rashed, 2007, pp. 138-139; Hughes, 1986, p. 245).

Y concluye:

> Lo que había que demostrar. He aquí la figura (Rashed, 2007, pp. 138-139; Hughes, 1986, p. 245).

La demostración es del mismo estilo que la que al-Khwārizmī hace de los algoritmos de resolución de las formas canónicas compuestas. Una demostración cuya garantía de verdad reside en que se ve lo que se quiere demostrar en una figura en la que se representan los objetos algebraicos (en este caso mediante segmentos) y las operaciones con ellos (mediante operaciones de cortar, trasladar y pegar, en este caso los segmentos). En ningún caso se duda que lo que se vea pueda ser engañoso, continuamente está diciendo al-Khwārizmī “es evidente que” (Cremona traduce “ergo manifestum est nobis”, “por tanto es evidente para nosotros”).

Por tanto, al-Khwārizmī no busca la garantía de verdad en un conjunto establecido de proposiciones que se aceptan como verdaderas y de procedimientos de derivación de nuevas proposiciones verdaderas a partir de las ya establecidas. Es decir, no son demostraciones que se sustenten en el edificio euclídeo de definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones derivadas a partir de ellos. Son demostraciones hechas con figuras geométricas, pero no demostraciones geométricas (en el sentido euclídeo).

La segunda de las demostraciones es del mismo estilo. En la figura 3 indicamos cómo están representadas las expresiones en la figura que al-Khwārizmī construye. La figura 4 es la que aparece en la edición de Masharrafa y Ahmad del texto de al-Khwārizmī (Masharrafa y Ahmad, 1939 p. 34).

> En cuanto a la causa de la raíz de doscientos menos diez substraída de veinte menos raíz de doscientos, he aquí la figura: la recta AB es la raíz de doscientos; de A al punto C, es el diez conocido. Construyamos del punto B al punto D una recta y pongámosla veinte. Pongamos del punto B al punto E una recta igual a la recta raíz de doscientos, que es igual a la recta AB. Es evidente que la recta CB es lo que queda de la raíz de doscientos, una vez quitado el diez, y que la recta ED es lo que queda de veinte una vez quitada la raíz de doscientos. (Rashed, 2007, pp. 138-139; Hughes, 1986, p. 246).

La representación comienza de la misma manera que en el caso anterior, ya que los binomios son los mismos, pero ahora se trata de substraer uno de otro en vez de sumarlos, por lo que la construcción del segundo segmento ha de ser distinta. El diez que está substraído del binomio que se substrae, lo coloca en la figura añadido al segmento que representa el binomio del que se tiene que substraer, en la derecha del segmento que lo representa (ver la figura 3).

> Queremos substraer la recta CB de la recta ED. Construyamos una recta desde el punto B al punto G, que se igual a la recta AC, que es diez. La recta GD entera será pues igual a la recta GB, y la recta BD. Ahora bien, es evidente que todo esto es treinta. (Rashed, 2007, pp. 138-141; Hughes, 1986, p. 246).

El resto de la demostración transcurre de forma similar a la anterior:

> Es evidente que la recta BE es la raíz de doscientos, y que la recta GB y BC es igualmente la raíz de doscientos. Ya que la recta EH se ha hecho igual a la recta CB, será evidente que lo que se ha substraído de la recta GB, que es treinta, es dos raí-

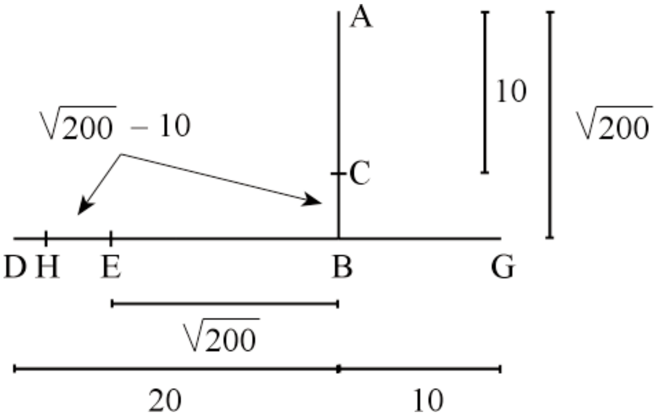


Figura 3

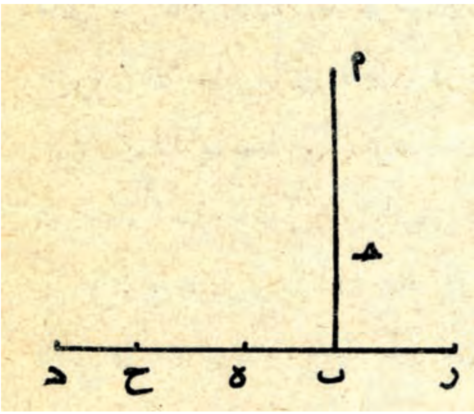


Figura 4

> ces de doscientos. Pero dos raíces de doscientos es la raíz de ochocientos (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 246).

Y concluye:

> Lo que había que demostrar. He aquí la figura (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 246).

La tercera demostración que vamos a examinar es diferente, y no tiene parangón con ninguna de las demostraciones que al-Khwārizmī hace en su libro. No es una demostración con figuras geométricas del estilo "ingenuo", con la garantía de verdad en lo que se ve, sin dudar de ello, que acabamos de ver en práctica en las dos demostraciones anteriores. Lo que al-Khwārizmī quiere demostrar no es ahora un cálculo con radicales, sino una adición de dos expresiones con especies, cuyo resultado ha enunciado en el capítulo "Sobre la adición y la substracción" unas páginas antes[6]:

$$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - x^2 - 10x$$

El mismo al-Khwārizmī explica por qué no va a hacer una demostración con figuras:

> En cuanto a cien y un tesoro menos veinte raíces, a las que se añaden cincuenta y diez raíces menos dos tesoros, no le conviene ninguna figura porque está compuesta por tres especies diferentes, tesoros, raíces y números, y no hay con ellas lo que les sea igual, para que pueda ser representado en una figura (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, pp. 246-247).

En las demostraciones mediante figuras de los algoritmos de solución de las formas canónicas compuestas que hace al-Khwārizmī, la manera que tiene de representar las tres especies depende efectivamente de que lo que ha de representar es una ecuación. En efecto, al-Khwārizmī representa los tesoros mediante cuadrados y las raíces mediante rectángulos en los que un lado representa la raíz (del tesoro) y el otro el número de raíces, con lo que las raíces es también una superficie.
Para representar la tercera especie, los simples números, al-Khwārizmī recurre al artificio de que éstos estén representados por toda la superficie de la figura, lo que puede hacer ya que los simples números están relacionados con las otras dos especies por substracción o adición en las ecuaciones. Esto no puede hacerse si no se trata de representar una ecuación, sino una expresión algebraica como las que tiene que representar ahora, por eso dice al-Khwārizmī que "no le conviene una figura" porque tiene las tres especies y "no hay con ellas lo que les sea igual".

Al-Khwārizmī concluye esta explicación con una frase enigmática:

> Pudimos hacer una figura de ello, pero no sensible (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

Nada más nos dice al-Khwārizmī de esa "figura no sensible", porque ante esta dificultad abandona el recurso a las figuras sensibles en las que cortar, trasladar y pegar para ver lo que se quiere demostrar (y tampoco recurre a esa enigmática "figura no sensible"), para hacer lo que podemos llamar el primer precursor del que tenemos noticia de una demostración puramente algebraica: una demostración que se hace simplemente en el terreno de la expresión en el sistema de signos del álgebra sin recurso a las figuras. Al-Khwārizmī la llama demostración mediante palabras (*al-lafz*), o por la expresión (Cremona traduce "verbis", "por las palabras"):

> En cuanto a su necesidad es evidente en palabras[7] [por la expresión] (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

Ésta es la demostración "por la expresión" o "en palabras":

> Sabes en efecto que tienes cien y un tesoro menos veinte raíces. Ya que le has añadido cincuenta y diez raíces, resulta ciento cincuenta y un tesoro menos diez raíces porque estas diez raíces han restaurado las veinte raíces substraídas a diez raíces (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

Al-Khwārizmī trata las expresiones por partes, considerando que las dos que se van a añadir constan de una parte que es la cantidad digamos principal o inicial, y otra que es la cantidad que se le ha quitado, y por tanto le falta a la cantidad inicial, y ha de restaurarse en el curso de los cálculos, si se quiere llegar a una forma canónica. Ése es el sentido que tiene *al-jabr*, la operación fundamental del cálculo: la restauración de lo que falta. Lo primero que hace aquí al-Khwārizmī es restaurar las veinte raíces substraídas a la primera cantidad (cien y tesoro) con las diez raíces de la segunda cantidad, con lo que consigue restaurar parte de lo que le falta a la primera. Ahora puede tratar el caso de los dos tesoros que le faltan a la segunda cantidad:

> Queda pues ciento cincuenta y un tesoro menos diez raíces; había un tesoro con el cien; así, cuando has substraído de cien y un tesoro los dos tesoros substraídos de cincuenta, un tesoro se anula con un tesoro y te queda un tesoro. Resulta pues ciento cincuenta menos un tesoro menos diez raíces (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

Y concluye

> Lo que había que demostrar (Rashed, 2007, pp. 140-141; Hughes, 1986, p. 247).

inaugurando así una nueva forma de demostrar, cuya historia vale la pena indagar[8]. Sin embargo, no puedo dejar de pensar que me hubiera gustado ver esa "figura no sensible" que al-Khwārizmī dice haber hecho, pero que se guardó para sí.

HISTORIAS ■

NOTAS

1 Se supone que el libro de cálculo hindú lo escribió al-Khwārizmī después del libro de álgebra, porque al comienzo de él cita el libro de álgebra. Aunque esa hipótesis es plausible, cabe que no fuera así ya que no se conserva ningún testimonio del libro de cálculo hindú que no esté mezclado con textos procedentes de otras fuentes (ver la entrega de estas historias de al-Khwārizmī subtitulada "Los Libros", Puig, 2008). Además, que al-Khwārizmī aún no hubiera escrito su libro de cálculo hindú no excluye que no conociera ya la representación de los números hindú que luego contribuiría decisivamente a difundir en todo el mundo.

2 El historiador tunecino Mahdi Abdeljaouad hace, en su introducción a un texto del siglo XIV de Ibn al Hā'im, un comentario del mismo orden: "se ve funcionar una lengua matemática, totalmente retórica, pero que responde a las reglas lingüísticas específicas de la lengua algebraica" (Adbeljaouad, 2003, p. 11). Es ese responder a reglas específicas lo que permite hablar del sistema algebraico de signos del texto de al-Khwārizmī, aunque todo él sea "retórico", es decir, no use más materia de la expresión que la materia de la expresión de la lengua vernácula.

3 En la traducción latina de Cremona, las cosas no son exactamente iguales. "Diez menos cosa por diez menos cosa" es "Decem re diminuta in decem re diminuta", en donde "diminuta" viene del verbo "diminuere", substraer, y, por tanto, está mas cerca de "cosa substraída" que de "menos cosa". En consecuencia, cuando Cremona traduce la frase contra la gramática árabe "*illā shay' fī illā shay' māl zā'id* (menos cosa por menos cosa, tesoro aditivo)", escribe "res diminuta in rem diminutam fit census additus", literalmente "cosa substraída por cosa substraída hace censo añadido", en la que no aparece "menos cosa", quizá gracias a la sintaxis latina.

4 Sobre las complejas relaciones entre "cosa" y "raíz", ver la anterior entrega de estas historias, que subtitulé precisamente "La cosa" (Puig, 2011).

5 Este cálculo no aparece en la traducción latina de Cremona.

6 De la substracción de estas dos expresiones, que también aparece enunciada en el capítulo "Sobre la adición y la substracción", pero no en la traducción latina de Cremona, no da al-Khwārizmī ninguna demostración, ni la menciona al presentar esta demostración.

7 Cremona traduce: "Eorum vero necessitas verbis manifesta est", "Cuya necesidad es evidente por las palabras [por la expresión].

8 Véase un punto de vista para hacerlo en Puig (2009) y Puig (in press), y los resultados de algunas indagaciones en el trabajo de Infante (2010), que se han presentado parcialmente en Infante y Puig (2011).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdeljaouad, M. (2003). *Sharh al-Urjūza al-Yasminīya d'Ibn Al-Hā'im* texte établi et commenté par Mahdi Abdeljaouad. Tunis: Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.

Allard, A. (Ed.). (1992). *Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī. Le calcul indien (Algorismus).* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Anbouba, A. (1978). L'algèbre arabe aux IX^e et X^e siècles. Aperçu général. *Journal for the History of Arabic Science*, 2, pp. 66-100

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies 48*, 211-263.

Infante, J. F. (2010). *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*. Trabajo Fin del Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Infante, F. y Puig, L. (2011). Una comparación entre las demostraciones de Pedro Nunes y al-Khwārizmī de los algoritmos de las formas canónicas de la ecuación de segundo grado. *Congresso Ibero-americano de História do Ensino da Matemática*. Comunicación. Covilhã, 26 a 29 de mayo de 2011.

Masharrafa, A. M. y Ahmad, M. M. (Eds.) (1939). *Al-Khwārizmī, Muhammad ibn Mūsa. Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala*. Cairo: al-Qahirah. Reprinted 1968

Nesselman, G. H. F. (1842). *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

Puig, L. (2008). Historias de al-Khwārizmī (2ª entrega). Los Libros. *Suma*, 59, pp. 105-112.

Puig, L. (2009). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting*. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

Puig, L. (2010). Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico. *Suma*, 65, pp. 87-94.

Puig, L. (2011). Historias de al-Khwārizmī (5ª entrega). La cosa. *Suma*, 66, pp. 89-100.

Puig, L. (in press). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. The Mathematical Association of America.

Rashed, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Vieta, F. (1591). *In artem Analyticem Isagoge.* Turonis: Iametium Mettayer Typographum Regium.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en febrero de 2011 y aceptado en mayo de 2011 para su publicación

suma+ 67
Junio 2011, pp. 111-118

¿Qué ha sido de la música de las esferas?

Kepler tuvo que demostrar que las órbitas elípticas no mermaban la perfección del designio divino, sino que revelaban incluso una perfección superior: la geometría gobernada por la armonía musical.

Joscelyn Godwin (1945 –), compositor y musicólogo.

Para la mayoría de nosotros, la expresión *música de las esferas* está asociada a Pitágoras y a su universo gobernado por lo números. En él, los sonidos emitidos por los planetas dependían de las proporciones aritméticas de sus órbitas de la misma forma que la longitud de las cuerdas de una lira determina sus tonos. Más tarde, en el *Timeo*, Platón añade argumentos filosóficos y, no vamos a negarlo, poéticos atribuyendo al Demiurgo la creación del Alma del Mundo al dividir la sustancia primordial en intervalos armónicos. Aún es más explícito cuando en la *República* afirma que cada planeta emite una nota, que depende de la velocidad y del tamaño de su órbita, y que éste armoniza con los tonos de los demás planetas:

> Por encima de cada uno de los bordes de los círculos iba una sirena, que giraba en su revolución y lanzaba un sonido, una nota, y entre las ocho se formaba la concordia de una sola armonía (Neubauer, 1992).

Mientras tanto, en China, a la vez que Pitágoras (570 – 500 a. C.) estaba difundiendo la estructura numérica de la música, Confucio (551 – 479 a. C.) la incluía entre las seis artes nobles[1] y le asignaba la capacidad de desarrollar la sensibilidad y el autocontrol, ambos necesarios para restablecer la armonía del ser humano con el Universo. Confucio, que se describió a sí mismo como un transmisor de las tradiciones y no como un hacedor, recogió la teoría musical que muchos siglos atrás había establecido Ling Lun: "dado que el número 3 es el número del cielo y el 2 el de la tierra, los sonidos en la proporción 3:2 armonizan como el cielo y la tierra" (Robertson y Stevens, 1989). Surge así una forma de elegir las consonancias que es exactamente la misma que proponen los pitagóricos, pero el uso del 3 y del 2 no se justifica como distancias entre cuerpos celestes, sino como las cantidades que relacionan a los astros con los hombres. Así, mientras para los pitagóricos la armonía se consigue al imitar las proporciones del universo, para la tradición china es al utilizar esas proporciones cuando se consigue la armonía entre el hombre y el universo.

En cualquier caso, bien si entendemos la música del universo como un fenómeno a imitar o como una actividad en la que participa el hombre, lo cierto es que la armonía de la esferas ha preocupado a poetas, filósofos, músicos y algunos científicos de todas las épocas. Hasta tal punto es así, que resultaría ridículo intentar establecer aquí una enumeración exhaustiva de autores que han aportado ideas al tema[2]. Sin embargo, ¿cuál es el significado matemático, si es que lo hay, de la música de las esferas?

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Algunas publicaciones recientes que analizan la Armonía de las Esferas

Parece incuestionable que, si prescindimos de los aspectos filosóficos, la aportación científica más importante al tema se debe a J. Kepler (1571 –1630). Sin embargo, su estudio tiene, al menos, dos grandes objeciones: las órbitas dejaron de ser esferas y los cálculos, que le sirvieron para reafirmarse en sus profundas creencias religiosas, estaban hechos sobre seis planetas. Siglo y medio después de la muerte de Kepler se descubre Urano, y a mediados del siglo XIX aparece en escena Neptuno. Teniendo en cuenta estos inconvenientes, ¿tiene sentido seguir hablando de la música de las esferas desde un punto de vista matemático-musical?

En mi opinión, independientemente de cuál sea la respuesta a la pregunta anterior, desde el punto de vista docente, la cuestión puede resultar provechosa para nuestros alumnos. No sólo es interesante por el tema en sí, sino porque además nos permite mostrar el lado humano de los científicos, y esto los hace más próximos a nosotros. La obsesión de Kepler por encontrar la relación entre el movimiento de los planetas y la música, como la de Newton por la alquimia, podrían parecer limitaciones científicas. Sin embargo, es importante que sepamos transmitir a los estudiantes que, en ocasiones, lo que hace grandes a los investigadores es precisamente su libertad respecto de ideas convencionales y su apertura a nuevas dimensiones de los problemas.

Cuando las esferas eran redondas y los cielos estaban afinados

Los pitagóricos, herederos de la tradición caldea, sostenían que las notas emitidas por los cuerpos celestes dependían de las proporciones aritméticas de las esferas en las que se movían alrededor de la Tierra. Los sonidos que producía cada órbita se combinaban con los sonidos de las restantes, produciendo una sincronía sonora especial conocida como la música de las esferas. Se trataba de un cosmos en el que se integraban las siete notas musicales con los siete cuerpos celestes conocidos en la época: el Sol, la Luna y los cinco planetas visibles (Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno).

Como en la música mesopotámica, para los pitagóricos sólo existían cuatro intervalos consonantes, asociados con las cuatro estaciones y con las distancias entre los astros que ellos representaban comparando las longitudes de cuerdas tirantes (A. Robertson y D. Stevens, 1989):

1/1 = unísono	1/2 = octava	2/3 = quinta	3/4 = cuarta

Para producir todos los sonidos afinados (notas musicales) sólo se dispone de estos cuatro intervalos y sus combinaciones. Es decir si hacemos sonar una cuerda tensa de longitud L junto con otra que mide $1/2\times L$, $2/3\times L$ ó $3/4\times 2/3\times L$, por ejemplo, la sensación sería agradable: el intervalo sería consonante.

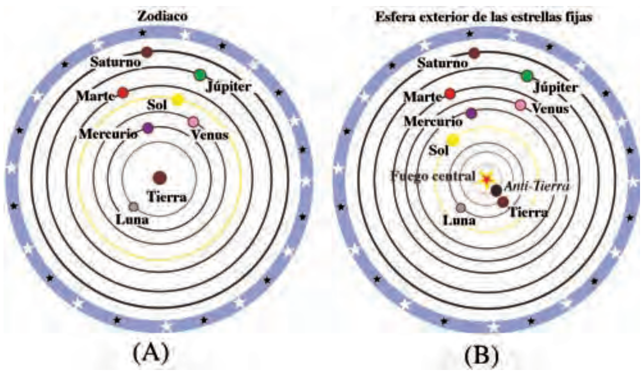
A partir de estas cuatro posibilidades, ya se puede definir el *tono* como el intervalo que separa una cuarta de una quinta, es decir,

$$\frac{3/4}{2/3}=\frac{9}{8}$$

Y haciendo uso de este intervalo, el tono, se expresan las distancias interplanetarias (F. Vera, 1937):

Mercurio-Venus = 1/2 tono	Marte-Júpiter = 1/2 tono
Venus- Sol = 1+1/2 tonos	Júpiter-Saturno = 1+1/2 tonos
Tierra-Luna = 1 tono	Saturno-Zodiaco = 1+1/2 tonos
Luna- Marte = 1/2 tono	Total = 7 tonos

Pero los pitagóricos llegaron mucho más lejos en la armonía universal. Filolao de Tarento (480 – 400 a.C.), un discípulo de Pitágoras, relegó la Tierra del centro del universo y propuso que daba vueltas en una esfera alrededor de un fuego central fijo. El Sol reflejaba este fuego central y junto con la Luna, los otros planetas y las estrellas, también circulaba alrededor del fuego central, cada uno en su esfera. La idea de Filolao implicaba la existencia de nueve esferas. Pero para los pitagóricos, de entre todos los números, la década representaba la mayor carga simbólica, incluso sagrada, entre otras razones porque los cuatro primeros números contenían el secreto de la escala musical y su suma es diez, 1+2+3+4=10. Muy probablemente por esto, Filolao postuló la existencia de otro planeta, la Anti-Tierra, que se situaba entre la Tierra y el fuego central, para "protegerla de los calores de éste".



Esquemas del universo de los primeros pitagóricos (A) y de Filolao (B).

A pesar de lo revolucionario de la propuesta de Filolao, en su visión del universo las proporciones musicales, los intervalos consonantes, se sabe que seguían manteniéndose. Sin embargo, desgraciadamente no sabemos cómo distribuía exactamente la suma de tonos en su modelo.

Pero la armonía de las esferas no sólo se estaba extendiendo por la cultura occidental. A la vez que las ideas pitagóricas se abrían paso en Grecia, en China, sobre todo gracias al impulso de Confucio, los números también recuperaban el significado sagrado que los ligaba a la producción musical, estrechamente vinculada con la aritmética. No podemos olvidar que se trata de un pensador que enseña al pueblo el respeto al poder, a los eruditos que lo rodean, a los padres y a las tradiciones ancestrales. Su propuesta para conseguirlo es que el hombre debe armonizarse con el cosmos, "estar de acuerdo a lo ordenado por el cielo".

El Li Chi, o *Libro de los ritos*, es uno de los Seis Libros clásicos que describe costumbres sociales, ritos ancestrales y ceremonias cortesanas.

Su filosofía se basó en Los Seis Libros Clásicos[3] de los cuales, precisamente el Yüeh Ching (*Libro de la música*) desapareció en la quema de libros del siglo III a. C. En la época de Confucio, la música se basaba en las ideas del matemático y filósofo Ling-Lun. Según la leyenda, el emperador Huang-Ti[4] quiso establecer la relación de la música con las leyes cósmicas. Para eso le encargó a Ling-Lun el trabajo de encontrar cuál era el sonido auténtico. El matemático, tras un largo viaje por los bosques más alejados del imperio, estableció como base de la música china un sistema pentatónico o pentafonal logrado a través del corte de una caña de bambú hueca. Se dice que al principio tenía la longitud de 1 pie, luego cortó sucesivamente esa caña en una proporción de 2/3 de su longitud original; es decir, la caña fue perdiendo cada vez un tercio de su longitud. Continuando con el proceso obtuvo cinco notas que distaban una quinta entre sí, Fa$^{\#}$, Do$^{\#}$, Sol$^{\#}$, Re$^{\#}$, La$^{\#}$, que al ordenarlas dan lugar a la escala pentatónica o de Ling Lun[5]:

Fa#, Sol#, La#, Do#, Re#

Mientras para los pitagóricos la armonía se consigue al imitar las proporciones del universo, para la tradición china es al utilizar esas proporciones cuando se consigue la armonía entre el hombre y el universo.

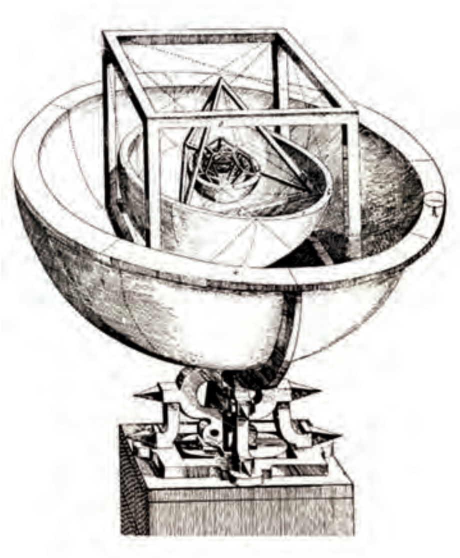
A pesar de lo que podría pensarse a primera vista, el sistema de afinación de Ling-Lun es idéntico al pitagórico. Si pensamos en los intervalos pitagóricos con frecuencias en lugar de con las longitudes de cuerdas, estos se traducen en 1/1, 2/1, 3/2 y 4/3. Combinarlos las veces que se quiera no es otra cosa que poder dividir o multiplicar por 3 y por 2 una frecuencia dada las veces que se quiera, y esto es exactamente lo mismo que se puede hacer con el sistema de Ling-Lun (si se quieren obtener más de cinco notas).

Cuando las esferas se achataron y hubo que afinar los cielos

Hasta el siglo XVII fueron muchos los autores que se ocuparon de la armonía celestial, pero ninguno de ellos con la profundidad y precisión con que lo hizo Johannes Kepler (1571-1630). En su obra *Harmonices Mundi* (1619), Kepler estableció que cada planeta debería emitir un sonido cuya altura dependía de la velocidad, sería más agudo cuando su movimiento fuese más rápido, y variaba dentro de un intervalo musical bien definido y propio de cada planeta[6].

Firme partidario del modelo copernicano, consideró que el movimiento de los planetas debía cumplir las leyes pitagóricas de la armonía, e intentó demostrar que las distancias de los planetas al Sol venían dadas por esferas en el interior de poliedros perfectos, anidadas sucesivamente unas en el interior de otras. El orden, desde la mayor hasta la menor era el siguiente:

Saturno-Cubo-Júpiter-Tetraedro-Marte-Dodecaedro-Tierra-Icosaedro-Venus-Octaedro-Mercurio.

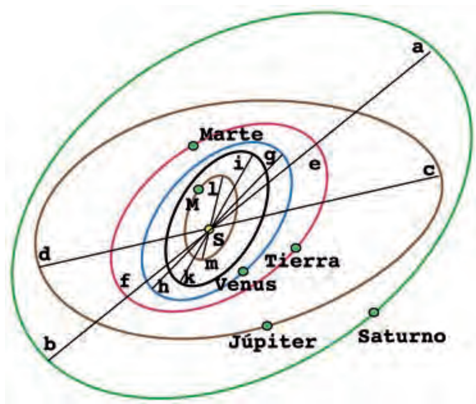


Diseño de Kepler en *Misterium Cosmographicum* (1596) para expresar la armonía universal, aún con esferas.

Para Kepler, un modelo cosmológico tan perfecto era una prueba más de la existencia, sabiduría y elegancia de Dios. De hecho, afirmó “yo deseaba ser teólogo; pero ahora me doy cuenta a través de mi esfuerzo de que Dios puede ser celebrado también por la astronomía”.

Pero no tardó en darse cuenta de que este modelo de poliedros perfectos no explicaba bien el movimiento de los planetas[7]. La profunda religiosidad de Kepler, no le permitía aceptar que Dios no hubiera dispuesto que los planetas describieran figuras geométricas simples y con esta idea se dedicó a probar con toda suerte de combinaciones de círculos. Convencido de la imposibilidad de lograrlo con círculos, usó óvalos y finalmente, con gran decepción, empleó elipses. Con ellas llegó a las famosas tres leyes[8] que le revelaron como el mejor astrónomo de su época. Sin embargo, esta falta de simplicidad en el Universo, que Kepler vivió como un fracaso, fue compensada de nuevo por la perfección de la Armonía Universal.

Aseguró, por primera vez, que las órbitas de los planetas describen una elipse alrededor del Sol y que éste se encuentra en uno de los focos de la elipse.



Sistema Solar de Kepler. Las letras a, c, e, g, i, indican la distancia más grande de cada planeta al Sol, (afelios) y las restantes letras las distancias más pequeñas (perihelios).

> *Cada planeta emite una nota, que depende de la velocidad y del tamaño de su órbita, y que éste armoniza con los tonos de los demás planetas.*

Consideró que la velocidad angular de un planeta representaba el número de vibraciones de un cierto tono y, como la velocidad cambia a lo largo de la revolución, este sonido recorrería un intervalo musical que estaría entre el punto de mayor velocidad (el perihelio, punto más cercano al Sol) y el de menor velocidad (el afelio o punto más alejado del Sol). De acuerdo con las leyes de Kepler, la amplitud de este intervalo dependería de la excentricidad de la órbita. Es difícil saber si estudiaba la excentricidad de las órbitas y por eso encontró los intervalos o fue al revés, para estudiar los intervalos necesitó estudiar las excentricidades. En cualquier caso, lo cierto es que utilizando los cálculos de las velocidades angulares obtuvo los siguientes intervalos para los planetas:

Planeta	Velocidad angular		Armonía	Intervalo
Saturno	Afelio Perihelio	1' 46'' a 2' 15'' b	$\frac{1' 48''}{2' 15''} = \frac{4}{5}$ →	Tercera mayor
Júpiter	Afelio Perihelio	4' 30'' c 5' 30'' d	$\frac{4' 35''}{5' 30''} = \frac{5}{6}$ →	Tercera menor
Marte	Afelio Perihelio	26' 14'' e 38' 1'' f	$\frac{25' 21''}{38' 1''} = \frac{2}{3}$ →	Quinta
Tierra	Afelio Perihelio	57' 3'' g 61' 18'' h	$\frac{57' 28''}{61' 18''} = \frac{15}{16}$ →	Semitono
Venus	Afelio Perihelio	94' 50'' i 97' 37'' k	$\frac{94' 50''}{98' 47''} = \frac{24}{25}$ →	Diesis
Mercurio	Afelio Perihelio	164' 0'' l 384' 0'' m	$\frac{164' 0''}{394' 0''} = \frac{5}{12}$ →	Octava+3ª menor
Urano	Afelio n	Perihelio o	$\frac{n}{o} = \frac{5}{6}$ →	Tercera menor
Neptuno	Afelio p	Perihelio q	$\frac{p}{q} = \frac{80}{81}$ →	*Comma* sintónica
Plutón	Afelio r	Perihelio s	$\frac{r}{s} = \frac{9}{25}$ →	Octava + 4ª aument.

Cálculo de intervalos de Kepler (en color azul) y de Haase (en color salmón).

Además, de esta música individual de cada planeta, se podía considerar una armonía que regía las relaciones entre ellos. Para esto, Kepler comparó las velocidades en el afelio y el perihelio de un planeta con las del más próximo a él, obteniendo así dos tipos de intervalos:

a. *Intervalo convergente*: relación entre la velocidad en el afelio del planeta más alejado y la del perihelio del más cercano.
b. *Intervalo divergente*: relación entre la velocidad en el perihelio del planeta más alejado y la del afelio del más cercano.

Con estos dos criterios calculó los siguientes intervalos:

Planetas	Conv.	Diver.
Saturno-Júpiter	$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}$	$\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$
Júpiter-Marte	$\frac{c}{f} = \frac{1}{8}$	$\frac{d}{e} = \frac{5}{24}$
Marte-Tierra	$\frac{e}{h} = \frac{5}{12}$	$\frac{f}{g} = \frac{2}{3}$
Tierra-Venus	$\frac{g}{k} = \frac{3}{5}$	$\frac{h}{i} = \frac{5}{8}$
Venus-Mercurio	$\frac{i}{m} = \frac{1}{4}$	$\frac{k}{l} = \frac{3}{5}$

Planetas	Conv.	Diver.
Saturno-Urano	$\frac{a}{o} = \frac{5}{6}$	$\frac{b}{n} = \frac{3}{5}$
Urano-Neptuno	$\frac{n}{q} = \frac{5}{9}$	$\frac{o}{p} = \frac{9}{20}$
Neptuno-Plutón	$\frac{p}{s} = \frac{80}{81}$	$\frac{q}{r} = \frac{8}{18}$

Cálculo de intervalos convergentes y divergentes de Kepler (en color azul) y de Haase (en color salmón).

El paso siguiente fue asignar una melodía a cada planeta (y a la Luna). Para ello, podía tomar una nota arbitraria y a partir de ella, basándose en las proporciones calculadas, obtuvo las melodías siguientes:

Música de los planetas, escrita por Kepler en *Harmonices Mundi* (1619).

Una vez convertidas las órbitas en el elipses y rehecha la adaptación de las ideas pitagóricas a esta circunstancia, fueron muchos los que se encargaron de mostrar diferentes aspecto de la remodelación de la armonía universal. Sin embargo, a pesar de los nuevos descubrimientos astronómicos[9] y que el tema fue tratado por pensadores de primera línea como Robert Flud (1574 – 1637), Andreas Werckmeister (1645 – 1706), Isaac Newton (1642 – 1727) o Jean-Philippe Rameau (1683 – 1764), lo cierto es que, matemáticamente hablando, no aportaron prácticamente nada a los cálculos keplerianos. Hubo que esperar hasta mediados del siglo XX para que se diese un paso más en los cálculos de la música de las esferas.

> *La expresión* música de las esferas *está asociada a Pitágoras y a su universo gobernado por lo números.*

Rudolf Haase (1920 –) descubrió la obra de Hans Kayser (1891 – 1964) sobre armonía y emprendió su labor investigadora desde la Escuela Superior de Música y Artes Visuales de Viena y el Instituto Hans Kayser para la Investigación de los Principios Armónicos. Haase se ha convertido en el principal promotor de la armonía como tema multidisciplinar, especialmente con las matemáticas o la astronomía, y relacionando el fenómeno con la serie armónica.

Desde el punto de vista matemático, lo que hace Haase es extender los principios de Kepler a los planetas descubiertos tras la muerte del astrónomo y contrastar sus propuestas con las de otros científicos, entre los que destacan el matemático y cabalista Francis Warrain (1867 – 1940) y los astrónomos[10] J. D. Titius (1729 – 1796) y J. E. Bode (1747 – 1826). Además de obtener los intervalos keplerianos, Haase ha calculado otros muchos comparando afelios y perihelios de dos planetas, que no tenían por qué ser consecutivos (Godwin, 2009). Los resultados obtenidos, que en parte aparecen en las tablas anteriores, lo que hicieron fue corroborar que los intervalos siguen siendo, de manera muy aproximada, los que aparecen en la música, más concretamente en la Justa Entonación.

Esferas y nuevas melodías

Aunque sea de forma colateral, el hecho de relacionar la música con el cosmos ha servido para encontrar argumentos a favor de las teorías musicales, para las que aceptar que las notas se pueden elegir de una forma u otra sólo por razones estéticas no era un argumento suficiente. Así, la idea de un universo formado por esferas concéntricas sirvió para validar la afinación pitagórica en la que sólo participan los números dos y tres. Sin embargo, cuando la situación se fue complicando y las circunferencias se convirtieron en elipses, la que salió beneficiada fue la Justa Entonación, en la que se utilizan el dos, el tres y el cinco. No obstante, la idea original de búsqueda de una conexión entre el universo y la música, más allá de lo estrictamente matemático sigue inspirando a los músicos. Como muestra de esta inspiración daremos aquí dos ejemplos. El primero, *Esferas*, es el capítulo de una tesis doctoral en música y se basa directamente en las ideas de Kepler y el segundo, *Music of the Spheres*, se basa en la intuición que el autor tiene de una 'música del cosmos'.

El 24 noviembre de 2006, en la VIII reunión de decanos y directores de Matemáticas, celebrada en la Universidad Politécnica de Valencia, el compositor José Ibáñez Barrachina etrenó su obra *Esferas* concebida a partir de los intervalos que aparecen en los cálculos de Kepler y teniendo en cuenta los siete compases que el astrónomo asigna a los planetas y la Luna en *Harmonices Mundi*.

Fragmento de la partitura de *Esferas. Kepler en el siglo XXI* creada en 2006 por J. Ibáñez Barrachina a partir de los cálculos de Kepler.

En esta obra, los sonidos propuestos por Kepler se mezclan con otros, de manera que se escuchan de forma simultánea las notas originales, completamente tonales y que representan la tercera mayor, la tercera menor, la quinta, el unísono, etc., junto con melodías elaboradas por el compositor a partir de sonidos actuales que huyen de la tonalidad. En los cálculos de Kepler, la única excepción a la música tonal más ortodoxa la constituyen el intervalo que representa a la Tierra: el semitono. Este intervalo, prohibido durante largo tiempo, es aceptado en el Barroco "mientras sea utilizado con mesura y no como el material básico para la elaboración de una obra" y está presente en todos los cromatismos del S. XIX. Además, se combinan dos tipos de series, una establecida por Kepler y otra diseñada por el compositor variando la anterior. La técnica de composición, sin llegar al dodecafonismo, está inspirada en el método de Arnold Schömberg (1874 –1951) de modo que las series suenan completas y no se repiten hasta que no ha sonado la última nota de la serie. Éstas se transportan y se superponen de forma que en ocasiones resulta difícil reconocerlas.

Los instrumentos elegidos para la obra no son un hecho casual, en el clasicismo F. J. Haydn, W. A. Mozart y L. V. Beethoven tuvieron su banco de pruebas en el cuarteto de cuerdas, formación para la que escribieron multitud de novedades que posteriormente aplicaron a sus obras mayores. Para *Esferas* se ha preferido la sonoridad de los metales que tienen una formación de cámara estable en el quinteto de metales.

> *La idea de un Universo formado por esferas concéntricas sirvió para validar la afinación pitagórica en la que sólo participan los números dos y tres.*

Pocos meses después del estreno de *Esferas*, cuando Mike Oldfield, manifestó en numerosas entrevistas promocionales que estaba trabajando en su álbum *Music of the Spheres*, hubo algún periodista que se puso en contacto con Ibáñez para comprobar si había habido relación entre ambas obras. Lo cierto es que ni los autores ni las obras habían tenido ningún tipo de relación y lo único que les unía era el tema en el que se habían inspirado.

Music of the Spheres es un disco compuesto para orquesta sinfónica, y que cuenta con secciones interpretadas por coro, soprano y guitarra clásica que interpreta el propio Mike Oldfield. Está diseñado con melodías minimalistas, cambios de texturas armónicas y tonos melódicos que en nada tienen en cuenta los intervalos keplerianos o los cálculos a los que hemos hecho referencia en este trabajo. A pesar de ello, está claro que la idea de búsqueda armonía entre los astros sigue siendo fuente de inspiración de creadores musicales.

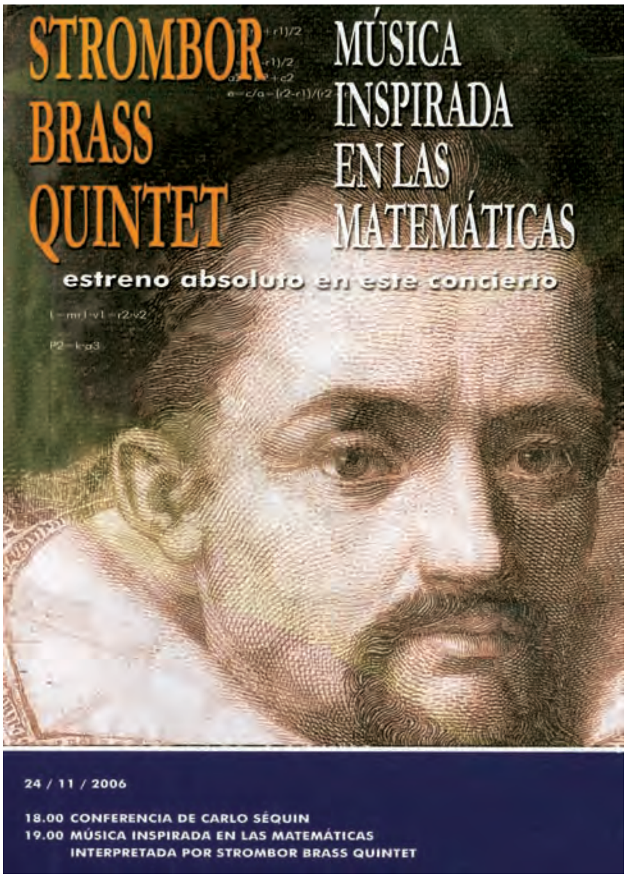
Epílogo

Como bien dice J. Godwin (2009), todos los autores que han estudiado la música de las esferas comparten la idea pitagórica de que hay algo musical en el cosmos y algo cósmico en la música. De hecho, que todas las proporciones que aparecen al relacionar las velocidades angulares de los planetas se correspondan de forma muy aproximada con intervalos musicales que aparecen en la Justa Entonación, parece algo más que una pura casualidad. Sin embargo, siendo honestos, debemos reconocer que muchas de las noticias que vinculan el universo con la música son, como mínimo, muy forzadas.

Cuando leemos que los ultrasonidos se utilizan para la rotura de cálculos de riñón, en las endoscopias o en algunos tratamientos de fisioterapia, a nadie se le ocurre incluir estas técnicas dentro de las aplicaciones de la musicoterapia. Está claro que los ultrasonidos ni son música ni los oímos. Sin embargo, no es extraño encontrar en internet, o en algunos medios de comunicación, noticias que afirman que “la atmósfera del Sol ‘suena’ tal como habían anticipado los pitagóricos y la tradición científica posterior” y la afirmación se justifica en que está llena de ondas de ultrasonidos.

A pesar de algunas justificaciones más que dudosas de la relación entre música, matemáticas y astronomía o de los altibajos que ha sufrido la idea de una armonía de los astros, hay que reconocer que un tema que ha interesado a pensadores y artistas a lo largo de miles de años puede despertar también el interés de nuestros alumnos y nosotros no deberíamos dejar pasar iniciativas que podrían servir para motivarlos.

MUSYMÁTICAS ■



Cartel del estreno de la obra Esferas, interpretada por Strombor Brass Quintet.

Portada del disco *Music of the Spheres* de Mike Oldfield estrenado en el atrio del Museo Guggenheim de Bilbao el año 2008.

Fragmento de la *Oda III – A Francisco de Salinas* de Fray Luis de León (1527 –1591)

[...] Traspasa el aire todo
hasta llegar a la más alta esfera,
y oye allí otro modo
de no perecedera
música, que es la fuente y la primera.

Ve cómo el gran maestro,
aquesta inmensa cítara aplicado,
con movimiento diestro
produce el son sagrado,
con que este eterno templo es sustentado.

Y como está compuesta
de números concordes, luego envía
consonante respuesta;
y entrambas a porfía
se mezcla una dulcísima armonía. [...]

NOTAS

1 Las otras artes nobles son los ritos, la música, la escritura, la conducción de carros y el tiro con arco.

2 Si nos centramos sólo en pensadores españoles anteriores al siglo XVII, encontramos musicólogos y compositores, como Isaac ben Abraham ibn Latif (aprox. 1220 – 1290), Isaac ben Haim (1467 – después de 1518), Bartolomé Ramos de Pareja (1440 – después de 1491) o Francisco de Salinas (1513 – 1590), cuyas aportaciones sobre el tema han pasado a la historia.

3 Los Seis Libros clásicos fueron los de la Música, de las Mutaciones, de las Odas, de la Historia, de los Ritos y los Anales de primavera y otoño.

4 El Emperador Amarillo, también conocido como Huangdi es una de las figuras más importantes de la mitología china. Se trata de uno de los Cinco Emperadores que reinó, según la tradición, desde el 2698 al 2598 a. C.

5 Se inicia la serie con el Fa$^{\#}$ porque es el sonido adoptado por el diapasón chino y, además así la escala pentatónica se corresponde con las teclas negras del piano.

6 A pesar de su neopitagorismo, Kepler es consciente de la imposibilidad de percibir la música de las esferas: *Iam soni in coelo nulli existunt, nec tam turbulentus est motus, ut ex attritu aurae coelestis eliciatur stridor*.

7 A la muerte de Tycho Brahe (1602), Kepler accede a todos los datos recopilados por Tycho y advierte que su sistema de poliedros no era sostenible.

8 Las tres leyes, publicadas en 1609 en su obra Astronomía Nova, pueden resumirse como:

1. Cada planeta describe, en sentido directo, una órbita elíptica, uno de cuyos focos está ocupado por el Sol.
2. El área descrita por el radiovector que une el centro de un planeta con el centro del Sol es proporcional al tiempo empleado en barrerla.
3. Los cuadrados de los tiempos de las revoluciones siderales de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas.

9 Urano se descubrió en 1781, Neptuno en 1846 y Plutón, aunque ya no sea planeta, en 1930.

10 A ellos se debe la ley de Titius-Bode que relaciona la distancia (en unidades astronómicas) de un planeta al Sol con el número de orden del planeta mediante la sucesión

$$d=\frac{3\cdot m+4}{10}, \quad m=0,\ 2^0, 2^1,\ 2^2, \ldots$$

A pesar de la imprecisión para los planetas más lejanos, esta ley tuvo una gran importancia en el desarrollo de la Astronomía de finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (2010): *La secta de los números. El teorema de Pitágoras*, RBA Coleccionables, S. A., Barcelona.

Dreyer, J. L. E. (1953): *A History of Astronomy from Thales to Kepler*, Dover Publications, Inc., Nueva York.

Godwin, J. (2009): *Armonía de las esferas*, Ediciones Atalanta, S. L., Girona.

Ibáñez Barrachina, J. (2008): *Métodos exactos y heurísticos de afinación. Aplicación a la trompeta*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia.

Liern, V., Queralt, T. (2008): *Otras actividades de Música y Matemáticas,* (Día Escolar de la Matemáticas 2008), Servicio de Publicaciones de la FESPM, Badajoz.

Neubauer, J. (1992): *La emancipación de la música*, Editorial Visor, Madrid.

Robertson, A., Stevens, D. (1989): *Historia general de la música*, Ediciones Istmo, Madrid.

Vera, F. (1937): *Historia de la Ciencia*. Editorial Iberia, Barcelona.

Internet

http://hypatialafilosofa.blogspot.com/2009/06/de-filolao-eudoxo-y-las-esferas.html

http://rmcviola.wordpress.com/2010/10/26/musica-oriental-la-musica-en-china/

http://warrenelcriticon.blogsome.com/2007/10/02/mike-oldfield-music-of-the-spheres/

http://www.fespm.es/web2009/documentacion/diaescolar/COMP-DIA-ESCOLAR.pdf

http://www.fing.edu.uy/if/cursos/acustica/esferas.pdf

http://www.mikeoldfieldblog.com/2008/03/30/la-musica-de-las-esferas/

Este artículo fue solicitado por *Suma* en febrero de 2011 y fue aceptado en abril de 2011 para su publicación.

suma+ 67
Junio 2011, pp. 119-122

Para reir

De todos los animales, sólo el humano ríe. Su desarrollo cognitivo le ha permitido disfrutar del placer de lo ridículo. Según eso, hasta el humor más simple puede ser visto como rasgo intelectual de la especie. Sirva este preámbulo para mejor aceptar que, aunque no sea su fuente más noble, muchas veces nuestra risa brota de la observación de la torpeza ajena. El cine ha explotado esa veta cómica en todos los ámbitos y también alguna vez a propósito de la torpeza matemática. En el cine español, lo logró con efectividad el trío Ozores – Pajares – Esteso, muy taquilleros, lo cual nos habla de su maestría para provocar la risa, aunque poco apreciados por críticos y cinéfilos.

Yo hice a Roque III (Mariano Ozores 1980) es una parodia de la saga de Hollywood sobre el boxeador Rocky (Sylvester Stallone), donde Roque Tercero (Andrés Pajares) está siendo preparado por un entrenador (Fernando Esteso) y un manager (Mariano Ozores) que le han liado. Y en esta película, que nunca hubiese imaginado citar en Suma, aparece una escena hilarante sobre la resolución de un sencillo problema matemático por parte de esos tres chapuceros... eso sí, ¡con calculadora! El diálogo transcurre en el gimnasio, con el boxeador sobre la báscula:

Roque: ¿Qué pasa? ¿He adelgazado mucho?

Entrenador: No sé, aquí pone 135.

R: ¿Kilos? ¿Cómo voy a pesar 135 kilos?

E: No son kilos, son libras. Es que esta báscula es inglesa.

R: ¡Ah! ¿Y cuántos kilos son 135 libras?

E: Espera, que ahora viene Paco con la calculadora.

Paco: Aquí está, ya estoy. ¿Qué hay que hacer? (le veremos toda la escena tecleando en la calculadora).

E: Veamos cuántos kilos tiene una libra.

P: Aquí lo dice, me lo dieron con la báscula. Cuatrocientos sesenta.

R: ¿Kilos? Pues debo pesar como una ballena.

P: No hombre, serán gramos.

E: ¿Y qué hay que hacer?

P: Está muy claro, una sencilla regla de tres. Si un gramo pesa 460 kilos…

R: No, al revés, al revés.

E: Ya verás, tú multiplica mil gramos que tiene un kilo por 135 libras que pesa éste.

R: Eso, a ver qué peso.

P: Ciento treinta y cinco mil kilos.

R: ¡No te digo! más que una ballena...

E: ¿Una ballena? ¡Más que un portaviones!

R: Vamos a ver, divide 135 libras entre mil gramos que tiene el kilo y, y lo… luego ¡lo multiplicas por lo que salga!

P: Vale, vale… 29 kilos 347 gramos.

E: No, serán 347 libras.

José María Sorando Muzás
IES Elaios, Zaragoza
decine@revistasuma.es

P: ¿Por qué?

E: Porque ¿cómo va a pesar este imbécil 29 kilos y medio?

R: Pues no me extrañaría nada, porque después de la paliza que me estáis dando no me voy a quedar en peso mosca, me voy a quedar en peso piojo.

P: ¡Ah, no! ¡Si ya sé lo que hay que hacer!

E: ¿Ah, sí? ¡Menos mal!

P: 460 gramos se restan de 135 libras y lo que queda se multiplica, se multiplica… se multiplica por…

E: ¡Sí, se multiplica por la edad de tu padre!

P: Por 76 años que tiene papá…

E: ¡Anda ya, hombre! (dándole un manotazo). Mañana llamas a la Embajada Inglesa y que te digan a cómo está la libra.

P: Eso te lo digo yo, a treinta duros.

E: Entonces éste, ¿cuánto pesa?

P: 4.040 duros.

E: Que serán…

P: Unas 20.000 pesetas y pico.

R: Pero ¿cómo voy a pesar yo 20.000 pesetas?

P: ¿Yo qué sé? ¡Lo ha dicho éste!

E: ¿Qué lo digo yo? ¡Bueno, ya está bien, hombre! ¡Lo que está claro es que tú todavía sigues gordo!

R: ¿Yo?

E: ¿Sí, todavía estás gordo! ¡150 flexiones y tú vete a hacer puñetas con la calculadora de las narices!

Enlace: http://www.youtube.com/watch?v=wkJrysJhU7s

Aritmética delirante

Hay un gag repetido en el cine clásico norteamericano: la supuesta demostración de cálculos disparatados. La pareja Bud Abbott y Lou Costello en la película *En la Marina* (*In the Navy*. 1941) "demuestra" que 28 : 7 = 13 o que 13 × 7 = 28. Dicha pareja cómica duró 20 años en las pantallas (1936 - 1956) y su estructura era simple: la conocida de los clowns, con el "listo" y el "tonto"; éste, con sus reacciones imprevisibles, desbarata las tretas del "listo".

La escena anterior fue imitada de forma igualmente exitosa ocho años más tarde, entonces "demostrando" que 25 : 5 = 14 o que 14 × 5 = 25, en la película *Ma and Pa Kettle* (Charles Lamont. 1949). Ma y Pa eran un matrimonio de granjeros con 15 hijos, parodia de una familia rural de la América profunda.

En ambas escenas la fuente de confusión está en ignorar el valor posicional de las cifras, mezclando decenas con unidades. Se observa una ordenación de las cifras en la división distinta a la que utilizamos en el algoritmo conocido, lo cual no es un error. La trascripción de los diálogos no sería efectiva en estas escenas, es necesario ver lo que se escribe en la pizarra.

Enlaces:
http://www.youtube.com/watch?v=XFAqp-JVHt0
http://www.youtube.com/watch?v=F87rm4T8WzM

Importancia del doblaje

En el episodio de la versión española de *Los Simpson* – Temporada 5ª (1993), Capítulo 10 titulado "$pringfield o como aprendí a amar el juego legalizado", Homer ve unas gafas en el fondo de la taza del WC y se las pone enseguida (sin lavarlas, que para eso es Homer). Verse ante el espejo con gafas le provoca un arrebato intelectual que le lleva a decir (con sonsonete):

> *El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos en un triángulo isósceles.*

Alguien le replica desde otro retrete:

> *¡En un triángulo rectángulo!*

Al final de la escena, sabemos que las gafas son del tenebroso Henry Kissinger, ex Secretario de Estado de EE.UU, de visita en la central nuclear donde trabaja Homer.

Enlace: http://www.youtube.com/watch?v=jZCdXfIoSFE

En la versión doblada en español-latino, cambia el texto:

> *La suma de las raíces cuadradas de dos lados de un triángulo isósceles es igual a la raíz cuadrada del lado restante.*
>
> *¡Eso es el equilátero, idiota!*

Enlace: http://www.youtube.com/watch?v=ottbvVlAGRQ

Esta diferencia de doblajes es curiosa. La versión española provoca la risa al ver cómo la fugaz intelectualidad de Homer no está exenta de error, al no ser capaz de enunciar el Teorema de Pitágoras. Su vecino de retrete le corrige acertadamente.

Sin embargo, en la versión latina, el enunciado que recita Homero (aquí tiene el nombre español) siendo también incorrecto, ya no sugiere de forma tan clara el famoso teorema. Sin embargo, repite literalmente la frase que dice el Espantapájaros en *El Mago de Oz* (Victor Fleming 1939) tras recibir el título de doctor Honoris Causa. El profesor Alfonso Jesús Población[1] comenta que la escena de *Los Simpson* parodia a esta otra clásica y demuestra que en ningún caso se cumple la afirmación del Espantapájaros. Es decir, tampoco se cumple en el triángulo equilátero, como dice la voz que replica a Homero. Aún más, la falsedad de este último enunciado es todavía más notoria: siendo los tres lados iguales, nos está diciendo que un número distinto de cero (la raíz cuadrada de cualquiera de los lados) es igual al doble de sí mismo.

Yendo a las fuentes, la traducción literal de la versión original en inglés no es ¡ni una ni otra! sino:

> *La suma de las raíces cuadradas de dos lados de un triángulo isósceles es igual a la raíz cuadrada del lado restante.*
>
> *¡Eso es el rectángulo, idiota!*

En resumen, la escena original comenzaba como tributo cinéfilo y el añadido de la réplica, también equivocada, potenciaba el recuerdo del teorema de Pitágoras. La versión española olvida la alusión al *Mago de Oz* para subrayar el error matemático. La versión latina sigue el texto inglés hasta la última frase, más absurda y sin resonancia pitagórica. ¿Qué nos encontraríamos si siguiéramos buscando más traducciones?

Humor divino

La risa es un fantástico elixir que alegra hasta lo más sagrado. *Así en el Cielo como en la Tierra* (José Luis Cuerda 1995) es una comedia del mismo director de *Amanece que no es poco*[2], continuadora de su estilo surrealista, aunque en clave religiosa. El humor en este caso proviene de la literalidad de las Sagradas Escrituras. La comicidad que provoca en el espectador es directamente proporcional al peso que haya tenido la Religión Católica en su educación. No cae por ello en la irreverencia provocadora, sino que en todo momento mantiene un tono tierno y amable.

El Cielo de España es, tal cual, un pueblo típico español: con el pregonero, el sargento de la Guardia Civil (San Pedro), etc. Allí Dios Padre, que es el alcalde, está afligido por el fracaso del sacrificio redentor de su hijo Jesucristo: la gente del mundo cada vez peca más. Duda entre enviar al mundo a un segundo hijo o bien el Apocalipsis...

En este peculiar contexto, hay dos escenas con referencias matemáticas.

1. Dios Padre (Fernando Fernán Gómez) recibe a dos beatas para resolver una ardua cuestión:

> – La cosa es que ésta dice que si a 49 le quitamos 13 quedan 36. Y yo le digo que no lo sé.
>
> – ¿Y...? Si una de las dos sabe restar y la otra no, las dos están diciendo la verdad. ¿Dónde está el litigio?
>
> – Que no sabemos si hacemos bien diciendo esas cosas. Porque ella asegura que lo mío es orgullo, que por qué tengo yo que decir que si a tantas le quitamos tantas nos quedan tantas. Y yo digo que lo suyo es falsa modestia, ¡tanto "no sé", tanto "no sé"...!
>
> – ¡Ah bueno! Ustedes lo que quieren es que contemplemos el aspecto moral.

Interrumpe San Pedro (Francisco Rabal) y Dios Padre debe atender a otro asunto. Antes, les dice:

– Salgan, por favor, pero no se vayan, que el suyo es un caso de mucha sutileza moral y quiero resolverlo.

2. En la taberna, el sabio San Isidoro (Agustín González) recostado en la barra departe con un alma recién llegada del Purgatorio:

– Pitágoras, que está allí en el Purgatorio, se sabe de memoria los teléfonos de toda la Cornisa Cantábrica, pueblo por pueblo, y se salta los de las casas de prostitución y los que terminan en 6.

Suponemos que lo último tendrá que ver con las connotaciones demoníacas del 6... Es éste un humor muy peculiar, que recibe por igual incomprensión y adhesión.

Sin matemáticas…

Idiocracia (Mike Judge 2006) no pasará a la historia del cine, por calificarla suavemente. El argumento es éste: en ausencia de depredadores, la evolución humana se aparta de la selección natural por diversos factores culturales (no diremos cuáles, su enunciado es políticamente bastante incorrecto). El caso es que se llega a un futuro en que el mundo está gobernado por idiotas, un mundo anumérico donde el Presidente de EE.UU. es un grosero luchador de lucha libre y es posible este trato:

– Te ofrezco 30 millones de dólares por la máquina.

– Es que la máquina cuesta 20 millones. ¿Cuánto gano?

– Si te doy 30 millones y gastas 20 millones... ganas 80 millones.

– Vale, guay, acepto.

Cito esta película para traer una imagen cómica que me ha llamado la atención por su expresividad de lo que podría ser ese futuro idiotizado, un mundo chapucero, sin Matemáticas. La realidad a veces supera la ficción. En un edificio público de mi ciudad he visto algo parecido.

… o con demasiadas

Pero también el exceso matemático ha sido objeto de ironía cinematográfica. En *Calabuch* (Luis García Berlanga 1956)[3], un físico de alto nivel se esconde en un pueblo español de Levante llamado Calabuch (rodado en Peñíscola), donde vive una vida sencilla bajo el nombre de Jorge. Asiste a unas clases para adultos donde la maestra propone:

José tiene 12 plumas Parker. Cuatro se las han requisado. Si de las que quedan vende 3, ¿cuántas plumas le han quedado a José?

Jorge contento:

¡Es muy sencillo!

Su compañero de pupitre hace las cuentas con los dedos y le indica el resultado con la mano abierta. Jorge, mientras tanto, llena una hoja de su cuaderno con símbolos y fórmulas (sin sentido matemático, por cierto). Un rato después que su compañero, asiente:

¡Cinco!

Enlace[4]: http://www.youtube.com/watch?v=ytVaJDmaTk4

Esta escena me recuerda la tendencia de muchos a algebrizar la resolución de todo tipo de problemas sin considerar otros caminos, a veces más intuitivos. ¿Quién no cae de vez en cuando en la tentación de "matar moscas a cañonazos"? Es sano reirnos de nosotros mismos, más si es en el tono amable de Calabuch.

Terminemos parafraseando una famosa frase del cine, adaptada para esta ocasión: "Que la risa os acompañe".

CineMATeca ■

NOTAS

1 Alfonso Jesús Población: *Una geometría de cine*, artículo en el portal Divulgamat.

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/05-06/PG-05-06-Poblacion.pdf

2 *Historia y Matemáticas*. Suma 49, pp. 125-137, junio 2005.

3 Más sobre *Calabuch* en: Alfonso Jesús Población, *Las Matemáticas en el Cine*, pp. 104 a 107. Proyecto Sur – RSME 2006.

4 Esta escena está disponible gracias al excelente blog *Matemáticas de cine* de Ángel Requena Fraile, donde se ofrece una amplia colección de escenas interesantes.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en enero de 2011 y aceptado en abril de 2011 para su publicación.

suma+ 67
Junio 2011, pp.123-128

Un anillo misterioso

Estoy convencido de que es posible desarrollar una nueva forma de arte en la cual el trabajo del artista podría basar su contenido en un grado bastante sustancial en el pensamiento matemático.”

Max Bill en *El pensamiento matemático en el arte contemporáneo*

Figura 1. Cinta de Moebius

La anterior es una cita que gustaba especialmente a Eliseo Borrás. Sus colaboraciones con artistas como Javier Carvajal y la fotógrafa Pilar Moreno lo confirman.

He recordado esta cita al recibir uno de los muchos mensajes que circulan por la red actualmente, en el que ese deseo, extendido entre los gurús de cualquier especie, de basar los contenidos de sus discursos sustancialmente en el pensamiento matemático, excede los límites de lo admisible, por hacer un uso incorrecto de la jerga matemática, mezclando evidencias con conclusiones inconsistentes, para dar credibilidad a afirmaciones mágicas. Dice el texto:

> Los números son códigos de información, son herramientas con las que venimos a este mundo para conseguir los objetivos que nos hemos marcado.
>
> Tienen un valor cuantitativo (el que conoce todo el mundo) y un valor cualitativo (el que conocemos los numerólogos)
>
> Cada número aporta una información concreta y detallada, conectada profundamente a lo que estás viviendo en ese momento... es una señal que te manda el universo... y si no sabes decodificarla, de poco te sirve, pues tu proceso de aprendizaje se retrasa y evolucionas más lentamente. Esa es una de las razones por las que la Numerología de Pitágoras fue ocultada por los que detentaban el poder y se convirtió en “ciencia oculta”, pero no tiene nada de oculta, es pura ciencia matemática.
>
> Para que veáis la importancia de los números y cómo influyen en nuestras vidas, os invito a que hagáis una prueba... este año 2011, es especial por algo... este año es el año en que todos nos unimos como un solo ser... y estáis viendo las pruebas en Egipto e Islandia (sic)... el pueblo se une y se revela ante la opresión... pide libertad y lo hace desde la unión... porque la unión hace la fuerza. Y lo consigue: el pueblo de Islandia ha hecho dimitir a su gobierno en pleno y los egipcios otro tanto... y vamos a ver muchas más re-evoluciones este año.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana “Al-Khwarizmi”
ariadna@revistasuma.es

> La prueba que os pido que hagáis es la siguiente:
>
> Suma las dos últimas cifras de tu año de nacimiento + los años que vas a cumplir (o que has cumplido) en 2011. Te dará 111. Haz la prueba con cualquier persona que conozcas... **Siempre te darà 111**.

¡Cuantas veces hemos propuesto a nuestros alumnos y alumnas acertijos de este tipo para amenizar las tediosas tareas de cálculo elemental!

Continúa la autora del texto exponiendo curiosidades sobre su destino y el del universo ligadas a este resultado:

> El número 111 es la expresión Universal de la energía primigenia, el nexo de unión entre la realidad cuántica y la lineal, la máxima expresión de la armonía en su relación con el todo. Nuestro regreso al Uno desde la diversidad. La materialización de la energía en la materia y el símbolo de la unificación en la luz.
>
> ¿Entendeis ahora lo que significa este año?
>
> Si nos unimos y trabajamos juntos, todo se materializará... si cada uno va por su lado, no se conseguirá nada. De ahí mi insistencia en que os agrupéis por zonas geográficas y trabajéis conjuntamente para materializar los asentamientos. ¡Este es el año!
>
> Os adjunto información sobre los números repetidos, para que cuando os aparezcan, sepáis qué os quiere decir el universo.

No es saludable estar bien adaptado a una sociedad profundamente enferma.

J. Krishnamurti

Es lamentable que para afirmar una proposición obvia, se necesite un apoyo matemático fraudulento. No cito la fuente porque no quiero colaborar en la publicidad de este negocio.

Si con un ejercicio elemental de matemáticas se puede engatusar a la población anumérica, imaginemos qué podría intentarse si los conceptos manejados fueran más complejos y adornados por la belleza de una obra de arte.

Un ejemplo: la botella de Klein, objeto de deseo de escultores y artistas digitales.

Puesto que somos seres tridimensionales, no podemos construir físicamente una botella de Klein, pero podemos diseñar artefactos que nos ayuden a comprenderla. La botella de Klein, en el espacio tetradimensional es una superficie suave, no se corta a sí misma. Ésta es una primera característica que nuestro modelo no podrá respetar. La forma más familiar de éste diseño es la de una botella de vidrio soplado, a la que en estado todavía manipulable, se le introduce la boca por un lateral y se le pega a la base. La figura 2 nos muestra una representación digital que es la proyección plana del modelo tridimensional.

Pero la botella de Klein es una superficie no orientable en R^4. Ésta es su propiedad fundamental. Como la banda de Möebius, no tiene más que una cara, por lo que su interior y su exterior son una misma cosa, todo lo que está fuera, está dentro y viceversa, por eso el arte la considera el cuerno de la abundancia total o de la más absoluta ruina (figura 2). Tal vez algo de esto barruntaba George Braque cuando dijo que "La ciencia tranquiliza y el arte perturba".

Claro que la tranquilidad que puede proporcionarnos la ciencia va de la mano de la competencia matemática. Un déficit en esta competencia, como relata John Allen Paulos (*El hombre anumérico* pag. 81) no sólo afecta a las personas incultas:

> Uno de los amigos más próximos de Freud, el médico Wilhelm Fliess, inventó los análisis biorrítmicos, prácticas que se basan en la idea de que hay varios aspectos de la vida de las personas que siguen unos ciclos periódicos rígidos, que empiezan en el nacimiento. Fliess indicó a Freud que los números 23 y 28, que eran respectivamente los períodos de ciertos principios metafísicos masculino y femenino, tenían la especial propiedad de que sumando o restando múltiplos de ellos formados convenientemente, se puede obtener cualquier otro número. En otras palabras: cualquier número se puede expresar en la forma $23x + 28y$ siempre que x e y se elijan convenientemente. Por ejemplo, $6= (23 \cdot 10) + (28 \cdot (-8))$. Freud quedó tan impresionado que durante años fue un ardiente defensor de la teoría de los biorritmos y creyó que moriría a los cincuenta y un años de edad, la suma de 23 y 28. Resulta, sin embargo, que no sólo el 23 y el 28 tienen la propiedad de que cualquier otro número se puede expresar en función de ellos, sino que la comparten con todos los pares de números primos entre sí, es decir, de números que no tengan divisores comunes. O sea que hasta Freud padecía de anumerismo.

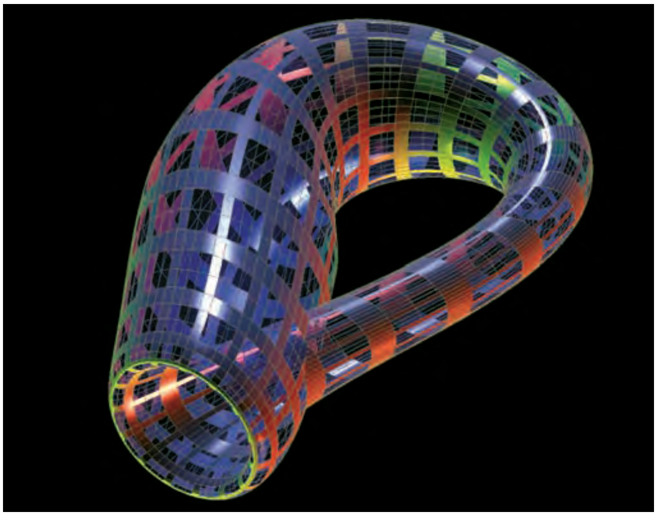


Figura 2. Botella de Klein

Ian Stewart, por su parte, en un artículo publicado en *Investigación y Ciencia* en diciembre del año 1993, páginas 84-87, expone con su fino sentido del humor, una situación en la que un timador, experto en matemáticas (no son rasgos incompatibles), que se autodenominaba en el cartel anunciador de la feria como ***Numbo. Nigromante Numerólogo*** aprovechaba el resultado del teorema de Benford y el anumerismo de la población sobre probabilidades, para organizar un timo casi imposible de detectar:

—...Benford analizó veinte series diferentes de datos numéricos, entre las que figuraban superficies de lagos y masas moleculares de compuestos. Descubrió empíricamente que la probabilidad de que el primer dígito decimal sea n está dada por la fórmula $\log(n+1)-\log(n)$, donde los logaritmos están tomados en base 10.

—Si admitiéramos esa curiosa ley –reflexioné—, la probabilidad de que la primera cifra decimal fuese 1 sería: $\log 2 - \log 1 = 0{,}301$, la de que fuese 2 sería $\log 3 - \log 2 = 0{,}477 - 0{,}301 = 0{,}176$. En tal caso, la probabilidad de ganar con 1 o con 2 es la suma de ambas, o sea, 0,477, algo menos del 50%. La ganancia esperada es muy aproximadamente, $1000 \times 0{,}477 - 500 \times 0{,}523 = 215{,}6$. ¡Así que, golfo sin escrúpulos, en promedio ganas más de doscientas pesetas por envite!

—Piensa en una calle bordeada de casas por una sóla acera, numeradas a partir de 1. La probabilidad de que la primera cifra sea un dígito dado varía considerablemente con el número de casas que tenga la calle. Si sólo hay nueve casas, cada número aparece con la misma frecuencia, pero si hay diecinueve, la cifra 1 aparece en la primera casa y también en los números 10 a 19, o sea con una frecuencia de 11/19, más del 50%. Al crecer el número de casas, la frecuencia de aparición de una primera cifra crece y decrece de una manera regular y calculada. Las frecuencias sólo son iguales cuando el número de casas es 9, 99, 999...

—¡Ya veo!

—Por lo tanto, la conjetura inicial (la opinión del público), a saber, que las frecuencias son iguales, es incorrecta.

—...si la ley de Benford es verdadera, también las primeras cifras de las longitudes de las calles deberían atenerse a ella.

—Exactamente. Y al desarrollar este tipo de ideas desembocamos en una preciosa propiedad de la ley de Benford: es invariante bajo cambios de escala

—...Déjame que te cuente una confirmación muy reciente de la ley de Benford. Se trata de un estudio de B. Buck y A. Merchant, de la Universidad de Oxford, y de S. Pérez, de la Universidad de El Cabo. Los datos que han utilizado son las vidas medias en las desintegraciones alfa, o sea, los tiempos que tarda un núcleo atómico en perder la mitad de su radiactividad por emisión de partículas alfa...

—...en el caso de la desintegración alfa, la invariancia bajo cambios de escala admitía una explicación física......

—....los tiempos de escape por el túnel, las vidas medias por consiguiente, se corresponden de forma natural con una progresión geométrica y no con una aritmética. Si la naturaleza elige la integral del efecto túnel aleatoriamente con probabilidad uniforme, entonces la ley que hace depender las vidas medias de las partículas alfa de las potencias de estas integrales conduce a una invariancia bajo cambios de escala y, por tanto, a la ley de Benford.

Todo eso puede estar muy bien para la desintegración alfa, pensé yo, pero ¿qué decir de las áreas de las islas Bahamas, de la población de los atolones de las Maldivas o de los tipos de cambio? ¡Estos fenómenos no están gobernados por la física subatómica!

Hoy los invariantes bajo cambios de escala por excelencia son los fractales de Mandelbrot: la independencia de la escala se manifiesta en su autosemejanza, es decir, la similitud de las partes, por minúsculas que sean, y el todo. En una interpretación "de último minuto" de la ley de Benford, los datos en cuestión están gobernados por cierto fractal subyacente, lo que convierte a la ley de Benford en parte de la teoría del caos, pues los fractales son la geometría natural de los sistemas dinámicos determinísticos de elevada complejidad. De esta forma, la ley de Benford nos dice que la numerología de la naturaleza es consecuencia de un caos dinámico que la subyace.

Pero, tanto la geometría subyacente al caos dinámico como la numerología de la naturaleza resultan tan complejos en profundidad como atractivos en superficie. Por eso resulta fácil al experto pícaro engañar al crédulo anumérico, como veremos en el próximo problema.

Soluciones a los problemas del número anterior

Lucifer en Las Vegas (problema propuesto por Martin Gardner en "*Mathematial puzzle tales*"

Desde que fue expulsado del paraíso, Satán vio que la eficacia de sus poderes paranormales estaba en función de la convicción que la humanidad tenía en ellos. Al disminuir la fuerza de esta creencia con el paso del tiempo, el Maligno, hacia mediados del siglo XXI, había visto sus poderes psíquicos reducidos de tal manera que no podía ya echar maldiciones cuyo efecto durase más de veinticuatro horas. Para romper la monotonía del infierno, el Diablo, disfrazado de mortal, se puso a frecuentar regularmente los casinos de Las Vegas. Un día a guisa de magnate tejano del petróleo se acercó a un robusto y campechano hombre de Omaha que estaba junto a una mesa de ruleta.

– ¿Amigo, le gustaría hacer conmigo una apuesta un poco especial?
– Habría que ver de qué se trata; gruñó el hombre de Omaha.
– Enseguida se lo digo. Lo que le propongo es esto. Vamos a

jugar con los colores de la ruleta, el rojo y el negro. Elige usted cualquier terna de colores, por ejemplo rojo-rojo-negro, la que quiera. Entonces elegiré yo una terna diferente. Nos pondremos de acuerdo sobre el momento de comenzar y observaremos la ruleta para ver cuál de nuestras ternas ha salido primero. Si sale antes la suya, usted gana, si es la mía la primera, gano yo. Prescindiremos del cero. Apuesto 5 contra 4, es decir, si usted gana le pagaré cinco "pérsicos", y si gano yo me pagará usted 4. Cada vez que repitamos la apuesta, usted puede elegir la terna primero.

– Hmmm… (reflexionó el hombre de Nebraska) cada vez que gire la ruleta hay una probabilidad 1/2 de que salga rojo, y también 1/2 de que salga negro. La probabilidad de obtener una terna cualquiera es 1/2 por 1/2 por 1/2, o sea 1/8, y todas las ternas tienen la misma probabilidad de salir. Ninguno de los dos tiene ventaja.

– Exacto, dijo sonriendo el diablo, y le estoy ofreciendo una apuesta mejor que a la par.

–...Su propuesta es diabólicamente tentadora; vamos a jugar.

Problema propuesto y trabajado en clase, con alumnos y alumnas de 1º y 2º de Bachillerato, por Juan Carlos Orero y relatado por él mismo.

Del mismo modo que el método más rápido para dejar de fumar es tener un infarto, lo que más anima a analizar un juego es perder dinero (aunque sea en pérsicos).

Hoy vamos a tratar el problema de *Lucifer en las Vegas* con alumnos de bachillerato.

Después de leer atentamente el problema, cuando pregunto a los alumnos qué papel querrían interpretar en esta historia, se muestran muy suspicaces.

Una mayoría preferiría ser el Diablo porque piensan que, de existir, debe ser muy astuto y seguro que está haciendo trampa, otros piensan que da igual, porque, como explica el hombre de Omaha, el juego es equitativo: la probabilidad de obtener una terna al girar la ruleta tres veces es 1/8. Un par de alumnos manifiesta que obtener RRR es menos probable que obtener RNR ya que en este último caso el resultado está más equilibrado entre rojos y negros. Otra alumna le responde que no, que en cada giro es como "si se resetease la probabilidad". Cuesta un poco también entender que no se trata de girar la ruleta tres veces y ver que ha salido, sino sucesivas veces "hasta que aparezca una de las ternas". Es decir, a lo que se apuesta es a "qué terna aparece antes".

Por ejemplo si el hombre de Omaha eligiese NNR y Lucifer RNN, una posible secuencia ganadora para Lucifer sería RRRN RRNRRNRNRRNN. Esta secuencia hubiese supuesto 16 giros.

Como primer paso para analizar el problema les propongo dramatizarlo: la clase completa será el hombre de Omaha (NRN) y yo Lucifer (RRN).

Alum.1 – ¿Cuál es el problema?
Prof. – Analizar la propuesta de Lucifer, pero no tenemos ruleta. ¿Qué hacemos?
Alum.2 – Un diagrama de árbol.
Prof. – Antes que el diagrama. No tenemos ruleta pero tenemos dados.
Alum.2 – Si sale 1, 2 o 3 rojo y si sale 4, 5 o 6 negro.
Prof. – Vale.

Formamos diez parejas y cada una simulará 10 secuencias hasta obtener una de las dos ternas. En total 100 simulaciones que es un número redondo, suficiente y fácil de manejar.

Un alumno propone tirar varios dados a la vez y luego anotar los resultados. Pero, ¿cómo leemos los resultados?, porque el orden es fundamental. Los podemos ordenar a ciegas y después leemos.

Al final decidimos lanzar un único dado sucesivas veces.

Utilizaremos después tablas de números aleatorios.

Los resultados se recogen en la pizarra e incluyen las veces que ha ganado cada terna y la duración de cada partida. Calcularemos la frecuencia relativa de éxito para cada terna y el tiempo de espera medio para que aparezca. (figura 3)

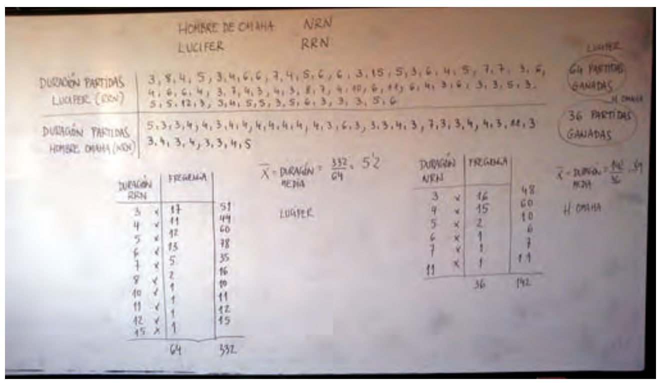


Figura 3

Lucifer acaba de ganar 76 pérsicos en diez minutos. ¿Suerte o azar? (Aquí hay que decir que en la simulación, la frecuencia de éxito para Lucifer ha sido de 64% y para el hombre de Omaha 36% y la teoría predice unos resultados de 62'5% y de 37'5%. No está mal, ¿no?).

Al acabar esta simulación probamos con otras ternas.

Agotamos el tiempo de esta clase.

En la siguiente clase alguien sugiere que no puede haber una terna mejor, porque, de ser así, Lucifer no dejaría elegir primero al hombre de Omaha. Por otra parte el hecho de que Lucifer proponga pagar mejor que a la par, sugiere que para cada elección del hombre de Omaha debe haber una elección para Lucifer que mejore la apuesta 4:5.

Se lanzan algunas hipótesis:
–RRR es igual de buena que NNN.
–RNR y NRN deben ser igual de buenas ya que muestran una simetría total y la ruleta no debería tener preferencia pon ningún color en especial en el orden de aparición.
–Si RRN es mejor que NRN, la complementaria de la primera NNR debería ser también mejor que la complementaria de la segunda RNR.

Llega el momento de usar herramientas diferentes de la simulación.

La dificultad de este problema cuando se trata con diagramas de árbol convencionales es que éstos presentan una cantidad infinita de ramas. Para evitarlo, en esta segunda sesión, introducimos los diagramas de Markov, con los que podemos probar algunas de las hipótesis propuestas por los alumnos.

Así por ejemplo es posible observar que las apuestas NNR y RRN tienen la misma probabilidad de ganar simplemente observando la simetría que presenta el diagrama de Markov correspondiente (figura 4).

En los círculos se recogen los diferentes estados del juego para estas apuestas y sobre las flechas las probabilidades de transición de un estado a otro.

Entretanto, alguien ha descubierto que para la elección RRN del hombre de Omaha, Lucifer tiene la elección NRR cuya probabilidad de éxito compensa con creces la apuesta 4:5.

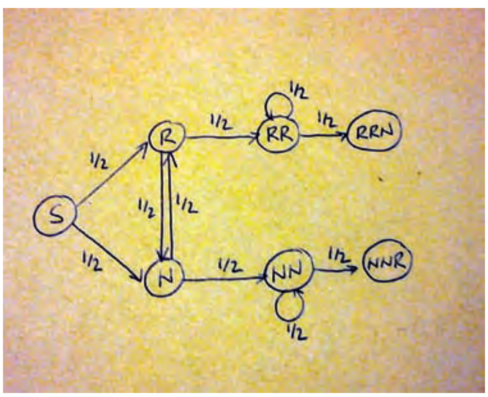
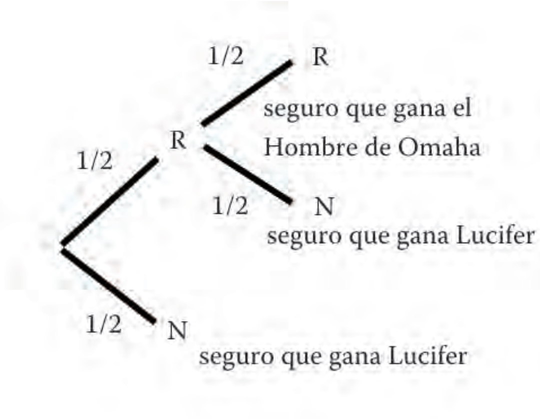


Figura 4

Su razonamiento se apoya en un diagrama de árbol y es el que sigue:



El razonamiento se basa en el hecho cierto de que si sale N antes que RR seguro que gana Lucifer.

Por lo tanto Lucifer gana con una probabilidad P(NRR)= 1/2 + 1/2·1/2 = 3/4 y el hombre de Omaha con una probabilidad P(RRN) = 1/2·1/2. Para ser equitativa, la apuesta debería ser 4:12.

El trabajo ya está bastante encarrilado. Se llevan el problema a casa y tienen una semana para intentar resolverlo y entregarlo voluntariamente.

La solución: las apariencias engañan; la propuesta de Lucifer –como no podía ser de otra manera– es engañosa.

Cualquiera que sea la terna que elija el hombre de Omaha, Lucifer encontrará una terna mejor (que saldrá, con una probabilidad mayor, antes que la suya).

La estrategia que seguirá es la siguiente: representemos la jugada del hombre de Omaha como 1 – 2 – 3, Lucifer jugará entonces $\overline{2}$ – 1 – 2, indicando esto que pondrá en la primera posición de su terna lo contrario que haya elegido el hombre de Omaha para su segunda posición, y en las dos últimas posiciones de su terna lo que haya elegido el hombre de Omaha para las dos primeras posiciones de la suya.

Cuando Lucifer pone en último lugar 1 – 2 lo hace para anticiparse, es decir para que cuando salga ese 1 – 2 que es el inicio del hombre de Omaha, su terna ya haya salido completa con ese 1 – 2 al final. Por otra parte coloca en primera posición $\overline{2}$, para evitar que el hombre de Omaha pueda anticipársele del mismo modo.

Veamos un ejemplo:

El hombre de Omaha elige	NRN
Lucifer responde con	NNR

La cadena de Markov que sirve de modelo a esta apuesta es la que sigue (figura 5).

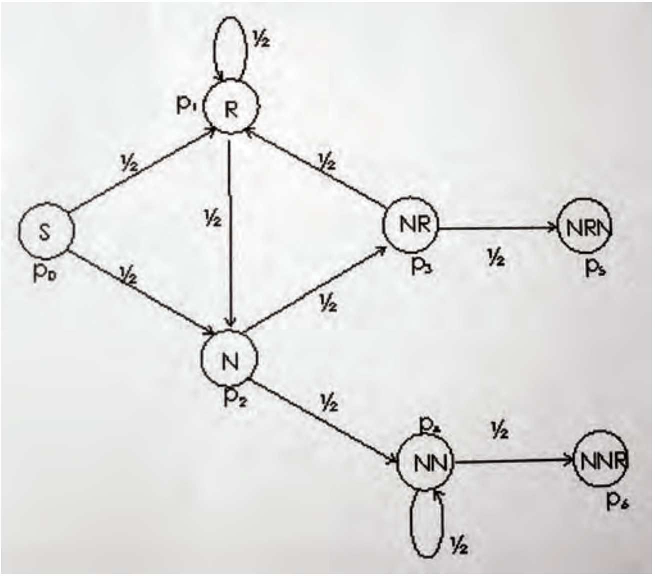


Figura 5

En esta cadena las secuencias de enes y erres encerradas en los círculos representan los estados posibles del juego.

Las probabilidades p_i representan las expectativas de terminar el juego en NNR desde el estado i.La primera regla del valor medio nos permite calcular estas probabilidades como vemos en la figura 6.

$$p_5 = 0 \qquad p_6 = 1 \qquad p_4 = \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_6 \rightarrow p_4 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} p_3 = \frac{1}{2}p_1 \\ p_2 = \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_4 \\ p_1 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \end{array}\right\} \rightarrow p_3 = \frac{1}{3};\ p_1 = \frac{2}{3};\ p_2 = \frac{2}{3} \rightarrow p_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = \frac{2}{3}$$

Figura 6

Para esta elección del hombre de Omaha, Lucifer ganará con una probabilidad de $\frac{2}{3}$.

Con la estrategia descrita más arriba encontraremos ocasiones en que Lucifer gana al hombre de Omaha con probabilidad 2/3, como en este caso, otras en que gana con probabilidad 3/4 y en un par de ocasiones hasta con probabilidad 7/8. Todo depende de la mejor o peor elección que haga el hombre de Omaha.

Este artículo ha sido realizado con la colaboración de Pilar Moreno, Vicente Calixte Juan y Juan Carlos Orero.

EL HILO DE ARIADNA

Este artículo fue solicitado por *Suma* en febrero de 2011 y aceptado en mayo de 2011 para su publicación.

suma+ 67
Junio 2011, pp. 129-136

El papel del docente en el siglo XXI. Seminario federal.
Logroño, marzo, 2011

La realidad de la escuela en la segunda década del siglo XXI nos lleva a la necesidad de reformular el papel del docente. Con este objetivo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas organizó el pasado mes de marzo un seminario para propiciar el encuentro, análisis y discusión sobre este tema, considerado de interés para sus asociados y para el profesorado de matemáticas en general.

El trabajo de este seminario se articuló en torno a los siguientes temas:
–El papel de docente: nuevos roles. Nuevas formas de trabajar en el aula.
–La situación del alumnado. Mejora de los rendimientos.
–La Comunidad Educativa en esta nueva etapa.

Los diferentes grupos de trabajo elaboraron las siguientes conclusiones.

Sobre el alumnado

Tras un somero análisis de la situación actual del alumnado, podemos observar algunos aspectos. En clase tenemos nativos digitales, pero esta competencia digital que tienen no la usan para aprender, sino para otros fines. Estamos en una sociedad en que la inmediatez marca nuestra vida, pero la adquisición de conocimiento necesita tiempo y reposo. Observamos un aumento del desinterés y la desmotivación, así como una falta de respeto generalizada.

Hemos visto que el modelo de escuela no genera todos los problemas, ni los resuelve todos: El alumnado que tenemos es el alumnado con el que tenemos que trabajar. Para ello usaremos todos los medios que tengamos a nuestro alcance, que contribuyan a una mejor gestión del aula, a un mayor éxito en el proceso de aprendizaje y enseñanza y la mejora del rendimiento educativo.

El rendimiento se fija en la aplicación de las matemáticas a la resolución de problemas de la vida cotidiana. Más concretamente en “La capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en contextos distintos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, herramientas, hechos y procedimientos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos (...), de forma que responda a las necesidades de la vida de ese individuo como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo”. Por tanto PISA se centra en evaluar competencias.

Consideramos que tomando en cuenta esta concepción de las matemáticas que evaluará PISA, nuestra acción docente debería centrarse básicamente en mejorar el rendimiento de nuestros alumnos en la resolución de problemas matemáticos. Y junto a ello, en el resto de elementos que forman parte de la nueva concepción de la educación matemática:

- Pensar y razonar (tipos de enunciados, cuestiones propias de las matemáticas)
- Argumentar (pruebas matemáticas, heurística, crear y expresar argumentos matemáticos)
- Comunicar (expresión matemática oral y escrita, entender expresiones, transmitir ideas matemáticas).
- Modelizar (estructurar el campo, interpretar los modelos, trabajar con modelos)
- Representar y simbolizar (codificar, decodificar e interpretar representaciones, traducir entre diferentes representaciones)

Se planteó el modelo de evaluación de la PAEG que propugna una educación matemática bien alejada, no ya solo de lo que propugna PISA, sino de la concepción mayoritaria del profesorado, por supuesto de los componentes del grupo. Desearíamos que esas pruebas cambiaran porque tienen demasiado peso sobre el currículo que se enseña y aprende en bachillerato, llegando su influencia al menos a Secundaria. Como siendo realistas, vemos que esto no va a cambiar a corto o medio plazo, recomendamos que el profesorado, al menos en la ESO, desarrolle las matemáticas con la orientación establecida en los currículos actualmente vigentes que son concordantes con el enfoque de PISA.

Uno de los principales problemas de nuestro sistema educativo es la alta tasa de fracaso escolar, de alumnos que en muchas asignaturas y en particular, en nuestras clases de matemáticas no alcanzan un mínimo rendimiento que les permita progresar y alcanzar una alfabetización matemática necesaria para utilizar en su vida como ciudadanos dignos. Tomando la idea de dignidad en la aplicación de las matemáticas a situaciones de la vida real, en el sentido que nos señalara Freudenthal: "No preguntéis jamás cuánta matemática puede aprender un niño, preguntad más bien, cuánta matemática en la educación, puede contribuir a la dignidad humana del niño". Para nosotros esta dignidad humana consiste en formar a nuestros alumnos para que vayan por la vida sin tener que ponerse en manos de los demás para interpretar una analítica, saber qué préstamo es más conveniente, desplazarse por una ciudad, estimar el coste de la compra en un supermercado, etc. Abundando en este mismo sentido, Krugely-Smolska, Proyecto PISA 2000 afirman: "(…) y la formación básica matemática y científica convierte a los individuos en menos dependientes de los demás, de modo que los procesos democráticos, los valores sociales y las oportunidades individuales no lleguen a ser dominados por las élites ilustradas".

Las causas para este bajo rendimiento pueden ser múltiples: baja atención de las familias, ausencia de una cultura del esfuerzo, déficit de talento, etc. Pero nosotros debemos apelar a nuestro oficio, a la profesionalidad, al empleo de todo tipo de recursos metodológicos y organizativos para alcanzar el mejor rendimiento posible de nuestro alumnado.

Desde el punto de vista organizativo, en algunas CC.AA están dando buenos resultados los *Talleres de refuerzo*. Se trata de talleres de refuerzo para alumnos con dificultades para el aprendizaje de las matemáticas, que tienen lugar un par de tardes a la semana. Cuando el profesorado que imparte esos talleres es el mismo que le dio las clases ordinarias, por la mañana, los resultados son alentadores. Los alumnos son propuestos para estos talleres por la junta de evaluación y se trata de alumnos de baja capacidad, pero responsables. El tutor se entrevista con el alumno y con sus padres y se firma un contrato de éxito, con compromiso por parte de alumno de asistencia y esfuerzo. No es una medida para todo el curso, se va revisando periódicamente y se confirma o suspende, según la evaluación periódica que se va haciendo.

La mayor parte de los informes que se han realizado sobre nuestro sistema educativo, y en particular el Informe Pisa, nos indican que en España se ha resuelto aceptablemente bien la atención a los estudiantes con dificultades, pero en cambio, la excelencia, la atención al alumnado con buenas capacidades y actitud hacia las Matemáticas, es una asignatura pendiente.

Para remediar esta carencia, iniciativas como la del programa *ven x + matemáticas*, recientemente ofertada por el MEC a las CC.AA con la colaboración de la FESPM, consideramos que son necesarias y les damos una calurosa bienvenida.

Este proyecto que por ahora implica exclusivamente a los buenos alumnos de 4º de ESO, debe hacerse extensible al resto de niveles de esta etapa y también al Bachillerato.

Para la detección y el adecuado tratamiento de los buenos estudiantes de matemáticas al inicio de la ESO, el grupo considera y recomienda el proyecto ESTALMAT. Se trata de un proyecto de detección y tratamiento del talento matemático, que se lleva a cabo por ahora en las CC:AA de Andalucía, Canarias, Castilla-León, Madrid, Cataluña, Valencia, Galicia y Cantabria junto a la Real Academia de Ciencias y con el patrocinio de la Fundación Vodafone España. Su principal objetivo es la detección, el estímulo y el desarrollo del talento matemático en niños y niñas de 11-12 años, mientras estos alumnos cursan 1º ESO y 2º ESO. Apoyamos este tipo de programas, aunque sean extracurriculares.

Sobre las Competencias básicas

Entendemos que en este comienzo de siglo XXI, mejorar el rendimiento de los alumnos va indisolublemente unido a la competencia matemática, esto es en ser capaces de saber aplicar en lugar de saber saber, porque como señala Herbert Simon[1] El significado de ''saber" ha cambiado: de ser capaz de recordar y repetir información, a ser capaz de encontrarla y usarla. Por lo tanto, más allá del saber puntual de cada tema, debemos educar matemáticamente para que nuestros alumnos apliquen en contextos adecuados lo que saben a la resolución de las situaciones que se les presenten.

Saber y ser competente son cosas bien distintas: "En el mejor de los casos, los jóvenes son *sabios*, cuando salen de la escuela. Pero no son necesariamente competentes. Es decir: no aprendieron a movilizar sus conocimientos fuera de las situaciones de examen. Los obstáculos al acceso a la escuela ampliamente se han superado hoy en los países desarrollados. La cuestión consiste ahora en saber si lo que se aprende justifica los largos años que ahí se pasan".

Al mismo tiempo, cuando pensamos en la mejor educación matemática que en este siglo XXI debemos ofrecer a los alumnos, hemos de plantearnos que debemos pasar del dominio de los aprendizajes a la puesta en práctica de esos aprendizajes. No es dominarlos por dominarlos, sino saber aplicarlos cuando la situación vital lo requiere. Esto puede verse muy bien ilustrado en un informe sobre competencias básicas realizado por Eurydice[2]: "En un mundo en el que el conocimiento factual existente se crea, se distribuye y se puede acceder a él de forma rápida, la necesidad de que las personas memoricen es cada vez menor. En su lugar, necesitan los instrumentos apropiados para seleccionar, procesar y aplicar el conocimiento requerido con el fin de hacer frente a los modelos cambiantes de empleo, ocio y familia. Esto explica el interés creciente en la enseñanza por desarrollar competencias en vez de enseñar conocimientos de hechos".

Por otro lado, nos hemos hecho eco de la dificultad manifestada por numerosos colegas para la evaluación de las competencias. Para ello tenemos a nuestro alcance los criterios de evaluación de los currículos y los indicadores de consecución de la competencia matemática que se han elaborado en las CC.AA.

Una de las mejores maneras de evaluar sería seguir los ejemplos que nos han llegado de las pruebas liberadas de PISA. Las ventajas de PISA para evaluar las competencias es que los ítems están contrastados. Miden lo que quieren medir. Hay detrás una justificación matemática.

El informe OCDE / PISA evalúa la competencia matemática basándose en las ocho *Competencias Matemáticas específicas* identificadas por Mogen Niss (1999) y sus colegas daneses:

- Habilidad para preguntar y responder cuestiones en matemáticas y por medio de las matemáticas:
- Pensar matemáticamente
- Modelizar matemáticamente
- Proponer y resolver problemas de matemáticas
- Razonar matemáticamente
- Habilidad para utilizar el lenguaje y las herramientas matemáticas:
    - Comunicar en, con y sobre las matemáticas.
    - Representar objetos y situaciones matemáticas.
    - Utilizar símbolos y formalismos matemáticos.
    - Utilizar recursos auxiliares y herramientas.

Los niveles educativos

Mucho se ha hablado y escrito sobre el significado de los niveles educativos. Para muchos, los niveles educativos están bajando (desde hace siglos), seguramente porque víctimas de la nostalgia creen que aquéllos que en sus tiempos de escolares era nivel, es algo que debería seguir siéndolo hoy. Hay todavía muchos colegas para los que hacer largas operaciones con lápiz y papel, resolver grandes expresiones literales o polinomios (factorizar el más grande), son formas de tener un alto nivel. Ya es grave que los padres piensan de ese modo sobre el nivel educativo, pero aún resulta más grave que aquellos primeros responsables de la educación matemática de los escolares de ahora, sigan pensando así. Nosotros creemos que nivel educativo en este comienzo del siglo XXI es modelizar, incluso desde la Primaria y también pensar, razonar y generalizar.

El foco del rendimiento matemático no puede, no debe ponerse en que hagan a mano largas operaciones, manejen expresiones algebraicas complejas, etc., el rendimiento estará más centrado en ser capaces de enfrentar y resolver problemas, de ser capaces de seguir investigaciones a su nivel, de interpretar y producir informaciones con las matemáticas que se requieran, y en definitiva de aplicar las matemáticas para resolver situaciones problemáticas relacionadas con la vida cotidiana o el mundo laboral.

El foco del rendimiento matemático no puede, no debe ponerse en que hagan a mano largas operaciones, manejen expresiones algebraicas complejas.

Por otro lado, nos encontramos habitualmente con una disfunción entre el pensamiento de lo que constituye nivel matemático para los profesionales y lo que entienden los padres. Los padres honestamente recuerdan su escuela, se recuerdan a sí mismos o aquéllos que en ella les iba bien y quieren para sus hijos esas mismas matemáticas. Pero nosotros sabemos que aún en el supuesto de que esas matemáticas fueran buenas, el paso del tiempo es inexorable también para la educación y lo que hace veinte años era válido, ahora ya no puede justificarse. Los padres tienen el derecho a que se les justifiquen las matemáticas con las que educamos a sus hijos, pero somos nosotros como profesionales los que decidimos el qué, el cómo y el con qué.

A modo de sugerencia, el grupo ha tomado en consideración la experiencia realizada por el profesor David S. Fielker[3] en Londres. Cuando planteaba novedades en la educación matemática, como por ejemplo el uso de calculadoras en la escuela, realizaba un triple tratamiento: con los profesores en cursos de formación, con los niños teniendo presentes a los profesores para que observaran las relaciones de enseñanza-aprendizaje y finalmente con los padres para que entendieran por un lado las intervenciones de los profesores y por otro los aprendizajes significativos que estaban logrando sus hijos.

Características del aula de matemáticas

Entendemos que la sociedad de la segunda década del siglo XXI nos exige que la clase de matemáticas esté organizada en unidades centradas en tareas o contextos, no en contenidos. Debería girar alrededor de unos ejes básicos como la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación del proceso y de los productos a los compañeros, el aprendizaje entre iguales y con el debido respeto a las diversidades de capacidades e intereses.

Reivindicamos el aula-materia, como un lugar donde estén a mano todos los materiales necesarios para la clase, para que así los alumnos puedan disponer libremente de ellos.

Sobre el profesorado

El docente del siglo XXI debe tener las siguientes competencias adquiridas:

- Competencia interpersonal (y de comunicación emocional).
- Competencia del área y competencia pedagógica.
- Competencia didáctica.
- Competencia organizativa.
- Competencia para trabajar con los compañeros.
- Competencia para cooperar en el medio social en el que trabaja la escuela.
- Competencia para la reflexión y el desarrollo.

Para que el aula de matemáticas de la segunda década del siglo XXI que acabamos de describir sea posible, es preciso que el profesorado tenga estas características:

En cuanto a su forma de entender la docencia como vocacional, le gustan las matemáticas y su enseñanza y se ilusiona con el proceso educativo de sus alumnos, formándolos como personas.

En cuanto a la relación con sus alumnos, contribuye a generar en el aula un ambiente amable: integrador, tolerante, donde se respetan las diferencias personales.

En cuanto a la enseñanza de las matemáticas: selecciona objetivos de aprendizaje, prepara conjuntos de actividades para facilitar a sus alumnos oportunidades para conseguir estos objetivos, plantea situaciones problemáticas y es un guía para su resolución, es más bien el acompañante de sus alumnos en su proceso de aprendizaje, no la fuente única de conocimiento, reconoce y aprovecha circunstancias inesperadas surgidas en el aula, generando nuevas situaciones de aprendizaje. Domina la historia de las matemáticas como recurso para la integración cultural y defiende las matemáticas como una construcción global donde todos hemos aportado.

En cuanto a la interacción con el entorno: conoce y valora el entorno familiar, social y cultural del centro y de los alumnos, trabaja en equipo y coopera con sus compañeros del centro (en el departamento didáctico, con el resto de profesores que dan clase a los mismos alumnos, en otros proyectos de centro...), así como con otros profesionales de fuera de él; comparte sus materiales, y no le importa mostrar su forma de trabajar en el aula; es receptivo a otras propuestas.

En cuanto a su formación, necesita una formación sólida en matemáticas y su didáctica, es consciente de ello y se preocupa por actualizar su formación y sigue los cambios tecnológicos.

El profesorado se basa en una variedad de estrategias: saca al alumnado del aula, organiza rincones de aprendizaje, propone el descubrimiento guiado, sugiere reescribir el problema sin números y plantear cuestiones, usa la tecnología y los materiales manipulables, utiliza actividades de visualización, permite la autogestión de las tareas por parte del alumnado, etc.

El profesorado se coordina con los otros departamentos para desarrollar proyectos comunes y coordina las programaciones.

Nos preocupa las repercusiones que la escasa valoración social del profesorado pueda tener en la credibilidad de nuestro alumnado y en que eso repercuta en una merma de su rendimiento en Matemáticas. Admiramos y mostramos una cierta envidia por la valoración que se tiene del profesorado en lugares como Finlandia, donde mejores resultados se obtienen del rendimiento en matemáticas.

Constatamos que los informes realizados sobre el rendimiento en matemáticas aparecen con frecuencia en los medios de comunicación. Aparecen en tertulias y titulares de prensa, pero luego la realidad no cambia. El sistema es demasiado rígido y toda esa preocupación no se traduce en más y mejores apoyos, más tiempo o más recursos dedicados a la educación matemática.

Por otro lado, las pruebas de diagnóstico que se hacen, luego son trasladadas a los centros, pero no implican necesariamente cambios. Ni se aumenta el número de profesores, ni se modifica la ratio, el número de horas, etc. El profesorado tampoco se implica en la formación permanente para potenciar su cualificación docente, de cara a mejorar el rendimiento de sus alumnos en los aspectos que los informes indican que se debe mejorar. La formación permanente no se relaciona necesariamente con aquellos aspectos que las pruebas de diagnóstico indican como mejorables. La formación permanente sigue siendo voluntaria y por ahora nada ni nadie obliga al profesorado a realizar tareas formativas sobre aquellos aspectos de las matemáticas en que su alumnado tiene peor rendimiento.

Por lo que se refiere a nuestro propio aprendizaje del oficio como profesores de Matemáticas, el grupo ha tomado en consideración el concepto de aprendizaje cooperativo para recomendar que profesorado del mismo Departamento practique el "dar, observar y analizar clases". Que unos profesores observen el trabajo de algún colega y luego analicen recursos, metodología, formas de intervenir o de interferir, y todas las posibilidades didácticas para la mejor enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas.

El sentir de muchos colegas cuando se quejan porque las pruebas de evaluación diagnóstica se hacen sobre aspectos o bloques que ellos no trabajan habitualmente, nos lleva a aclarar con firmeza que esas pruebas son para cambiar, si procede y mejorar la acción docente. Si hay diferencias, lo que procede cambiar es qué se enseña y cómo, en lugar de cambiar los ítems mal respondidos de las pruebas.

También se debatió sobre la importancia del libro de texto como determinante del currículo que se enseña y el que se aprende y al hilo de ellos, sobre las razones para la elección del libro de texto. Nos parece que hoy por hoy el libro es necesario, pero que dada la importancia que se le da, debiera ser objeto de discusión seria y fundamentada por los departamentos, debiera ser discutido en varias sesiones el libro que se elija.

El libro de texto ayuda a estructurar los contenidos a aprender por el alumno, es un elemento de consulta, debe estar escrito para él y teniendo las matemáticas, que según lo antedicho influyan positivamente en lo que entendemos por competencia matemática y en definitiva en su rendimiento matemático.

Materiales

La utilización habitual de una amplia gama de materiales manipulativos, así como mucho de lo que la tecnología (calculadoras y ordenadores) nos ofrecen, son verdaderamente importantes para mejorar el rendimiento en el aprendizaje matemático. Como acertadamente señala Pappert "Lo que uno aprende y cómo lo aprende depende de los modelos con los que cuenta". Las matemáticas son una construcción mental, pero entran por los dedos y sobre todo durante la etapa de desarrollo en la que se está pasando del pensamiento concreto al abstracto, el material constituye un vehículo necesario para conceptualizar.

Durante toda la etapa de Primaria y ESO, es decir hasta aproximadamente los 16 años, la gran mayoría de las personas no están preparadas para el razonamiento formal. Parte de las dificultades, para aprender matemáticas pueden ser debidas a que los alumnos no disponen de modelos intuitivos suficientes, previos al aprendizaje con modelos abstractos.La etapa manipulativa es necesaria incluso para los adultos que recurrimos en muchas ocasiones a representar conceptos y acciones abstractas, que no nos son familiares, por símbolos mucho más visualizables.

Alguno de los miembros del seminario citó su experiencia de asistir a cursos y clases en los que materiales como las regletas se convertían en excelentes recursos para lograr aprendizajes significativos. Todos los miembros del grupo estamos convencidos de que el uso frecuente y variado de materiales mejora el rendimiento en matemáticas, en unas matemáticas mejor comprendidas. A este respecto, consideramos que un aula de matemáticas debería entenderse como un laboratorio o taller de matemáticas. Ya el antiguo informe Cockroft recogía en su párrafo 604 esta manera de pensar: "en la escuela secundaria las matemáticas deben de enseñarse en aulas especiales debidamente equipadas, la disponibilidad de éstas facilita la realización de prácticas adecuadas..."

Y sugería las siguientes ventajas de esta manera de proceder:

- Una mayor cooperación y apoyo recíproco entre los profesores de la asignatura.
- Que se observen entre sí en su trabajo
- Compartir más eficazmente todos los recursos disponibles
- Exponer mejor el trabajo de los alumnos, en las clases.
- Una utilización flexible, si un aula está provista de ciertos medios adicionales, los cambios con los colegas del departamento son fáciles y sin necesidad de preverlo con antelación.

Curiosamente, pasados más de veinte años de su publicación, el informe tiene plena vigencia en este sentido, y son escasos los centros que cuentan con aulas de matemáticas debidamente preparadas.

Metodología

Para alcanzar con nuestro alumnado una adecuada competencia matemática como hoy se entiende, no sirve cualquier metodología. En el decreto de currículo para ESO se señala al respecto: "…no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana. Si se quiere, pensar y razonar, argumentar y comunicar, etc., se han de propiciar situaciones y tratamientos metodológicos adecuados.

Pensamos que con una educación matemática próxima a la definida por J. Kilpatrick es la que nos propone una metodología que permita mejorar el rendimiento de nuestros alumnos: "Las Matemáticas son una cuestión de ideas que un estudiante construye en su mente (y esto es algo que sólo el estudiante puede hacer por sí mismo). Estas ideas vienen de experiencias,... y no están previamente codificadas en lenguaje natural...Nuevas ideas son construidas sobre las ideas que el estudiante ya tiene en la mente, combinándolas, revisándolas, etc., a menudo de una manera metafórica. El aprendizaje efectivo requiere no meramente hacer algo, sino también reflexión sobre lo que se ha hecho después que lo has hecho..." La matemática es deductiva, pero el aprendizaje es inductivo, se parte de experiencias.

La variabilidad de estímulos, que haga que los alumnos sean más activos, con actividades más interesantes, donde tengan que escuchar menos al profesor y hacer más, donde se genere diálogo entre los aprendices, y el profesorado escuche más al alumnado, sin saltarse la fase manipulativa.

Hay que usar las reglas didácticas que existen (desde hace mucho tiempo y que funcionan), es importante una mayor formación del profesorado (Necesidad de mejorar, formación inicial y permanente) y propiciar el trabajo en equipo (profesores y alumnos), hay que revitalizar la figura del Jefe de Departamento.

Hay que conectar con lo que ya sabe el alumno de manera sencilla y cercana, fomentando el trabajo cooperativo, trabajando las habilidades sociales para que sea efectivo. Debemos desarrollar otras habilidades como la escucha activa al profesor y a sus compañeros y mejorar la actitud positiva hacia el aprendizaje.

Pensamos que el profesor de matemáticas de este tiempo, debería alejarse de una metodología reproductiva. Hay que pasar de la metáfora del espejo (en el que los alumnos se mirarían para llegar a ser como el profesor) a la idea de la ventana (el profesorado ayuda a que el alumnado llegue tan lejos como pueda), más allá de nosotros, pero con nuestra ayuda profesional. Para ello, podemos tomar estas propuestas:

–Trabajos en grupo para argumentar y comunicar.
–Situaciones de puesta en común para resolver problemas de diferentes maneras, argumentar, comunicar discutir, etc.
–Las tareas como propuestas de amplio calado que propician las conexiones matemáticas.

En realidad, después de tantos años, seguimos compartiendo aquella propuesta que defendiera el Grupo Cero de Valencia: una buena actividad matemática será aquella que:

- Invite a los alumnos para que sean ellos mismos los que tomen decisiones.
- Implique a los alumnos en la exploración, la formulación y el contraste de conjeturas, la demostración o la explicación, la reflexión y la interpretación.
- Promueva la discusión y la comunicación.
- Favorezca la originalidad y la inventiva.
- Estimule preguntas como: “qué ocurrirá si” y “que ocurrirá si no”.

Aprendizaje cooperativo

Para mejorar el rendimiento de nuestro alumnado, tomaremos medidas de todo tipo. En lo concerniente a la organización del aula, creemos que ya hace tiempo que debiera abandonarse la estructura de profesor que explica todo el tiempo y alumno que escucha y repite. A este respecto, caber recordar el famoso párrafo 306 del ya citado Informe Cockroft, cuando nos indica que en las clases debería haber oportunidades para:

1. Explicaciones a cargo del profesor.
2. Discusiones entre profesor y alumnos y entre los alumnos mismos.
3. Trabajo práctico apropiado.
4. Consolidación y práctica de técnicas y rutinas fundamentales.
5. Resolución de problemas, incluida la aplicación de las Matemáticas a situaciones de la vida diaria.
6. Trabajos de investigación.

Obsérvese que al menos los puntos 2, 5 y 6, pueden tratarse adecuadamente por medio del trabajo en grupos, del aprendizaje cooperativo, del aprendizaje entre iguales. Por nuestra experiencia, si en los momentos oportunos y para ciertos aprendizajes, disponemos la clase en grupos, conseguimos que mejoren no solamente los alumnos más débiles, sino también los mejores. A veces, uno entiende realmente algo cuando es capaz de explicarlo a los demás para que lo entiendan. Un miembro del grupo ha relatado el aforismo de *“lo expliqué, lo expliqué, lo expliqué… y lo entendí”.* Cuando uno se esfuerza por explicar algo de matemáticas a los demás, mejora su entendimiento de la cuestión, profundiza en el concepto a explicar.

Tomamos asimismo buena nota de la experiencia relatada de Andalucía en la que se proponen problemas para resolver en grupo, en donde es imprescindible la colaboración de todos para resolver el problema.

Tanto en los trabajos de pequeños grupos como en la puesta en común, se dan oportunidades para pensar, razonar, argumentar y comunicar.

Consideramos la evaluación como un elemento importante que debe ir de la mano de cualquier tarea, y no se puede entender independiente de ellas, no debe confundirse con la calificación, debe servir para conocer el proceso de aprendizaje y para mejorar la tarea diseñada. Debe basarse en las competencias, no en la lista de contenidos curriculares. Es esencial, por lo tanto, que se evalúe todo el proceso, no sólo su producto final. Hay que implicar al alumnado en su evaluación. Para ello les informaremos de los objetivos, instrumentos, criterios y resultados de la misma.

A la Administración

Pedimos a las Administraciones Educativas:

– Que tomen las medidas necesarias para que el papel del profesor sea valorado por toda la sociedad, para que haya respeto por el profesorado en las aulas y fuera de ellas.
– Que haya una mejor formación inicial y continua del profesorado.
– Que sea posible introducir cambios en la organización escolar (clases de 2 horas o de hora y media, dependiendo de los tipos de materiales que se vayan a utilizar).
– Poder utilizar los recursos educativos de la mejor manera

posible para atender a la diversidad.
- Que sea posible ver trabajar a otros profesores en el aula.
- Debe atender de modo diferente la inserción en el sistema educativo de los alumnos que no quieren estudiar, que no tiene solución en el sistema educativo ordinario
- Debe darles una alternativa que no sea estar en el aula con alumnado que sí está interesado en su aprendizaje.

Medios de comunicación

En cuanto a los medios de comunicación, criticamos los mensajes que denigran la matemática porque contribuyen a la visión tópica de las matemáticas, una visión fuera de la realidad con sólo maestros raros y libros difíciles. Les pedimos la necesaria la complicidad y la máxima colaboración de varios sectores de la sociedad para dar una visión, una imagen de la matemática en la predomine su utilidad en la vida diaria.

En resumen crear una mejor opinión y una mejor disposición hacia la matemática y crear la idea de que una parte importante de la cultura es cultura matemática.

Sobre las Familias

Las familias deberían corregir actitudes que permiten que los alumnos sean dueños y gestores de su tiempo, creemos que, a veces, son demasiado permisivas.

Algunas familias y profesores particulares tienen una visión de la metodología alejada de las competencias, no actual, y esperan que se hagan en clase cosas diferentes a las que se realizan. Como solución vemos que es necesario aumentar los canales y vías de comunicación con las familias, realizando talleres de padres, formando escuelas matemáticas para padres, explicándole el tipo de tareas que se espera que realicen sus hijos.

Conclusiones finales

Somos conscientes de la dificultad de mejorar el rendimiento matemático de nuestro alumnado, por muchas y variadas razones. Pero debemos proponernos cambios que poco a poco vayan cristalizando y dando frutos. El primer paso es el autoconvencimiento de que hay que cambiar nuestra forma tradicional de enseñar matemáticas. Sin esta condición no tiene sentido plantearse nada.

Y además reflexionar sobre…
- Los fines: ¿Qué matemáticas enseñar? ¿Para qué? Y realizar cambios en los contenidos que se consideran necesarios.
- Los medios: ¿Cómo lograr los fines propuestos? Promover cambios metodológicos.
- La evaluación: ¿Cómo averiguar si se ha mejorado el rendimiento de nuestro alumnado y en qué grado? ¿Qué consecuencias se deducen de los resultados obtenidos para mejorar los planteamientos y los desarrollos futuros? Pasar de evaluar lo que el alumno "sabe" a evaluar lo que el alumno "sabe hacer".
- La mejora del rendimiento matemático de nuestro alumnado es nuestra ocupación y nuestra preocupación, porque se trata de una materia que de una u otra forma está presente en todas las profesiones que en el futuro puedan elegir. Hace 500 años ya se decía esto: "La caballería andante (...) es una ciencia -replicó don Quijote- que encierra en sí todas o las más ciencias del mundo, a causa de que el que la profesa ha de ser jurisperito y saber las leyes de la justicia **distributiva y conmutativa**, ha de ser teólogo (...); ha de ser médico (...); ha de ser astrólogo (...); **ha de saber las Matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad dellas** (...)"

En este siglo XXI esa necesidad de saber Matemáticas se ha incrementado y todo nuestro alumnado merece que su rendimiento en el aprendizaje de las Matemáticas les capacite para ejercer como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. ■

NOTAS

1 Premio Nobel de Economía, 1978

2 Pr. Philippe Perrenoud (1997).

3 Eurydice (2002). Las competencias clave. Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria. MEC (2003). ISBN: 84-369-3767-8. Madrid: Unidad española de la red Eurydice. Disponible en:
www.educacion.es/cide/jsp/plantilla.jsp?id=eurydice032002#competencias

4 Niss, M. (1999), Competencies and Subject Description, Uddanneise, 9, pp. 21-29.

5 Director at Abbey Wood Mathematics Centre

6 Jeremy Kilpatrick en el ICMI-5 celebrado en 1985 en Adelaida.

7 Don Quijote de la Mancha, II, 18.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en marzo de 2011 y aceptado en mayo de 2011 para su publicación.

suma+ 67
Junio 2011, pp. 139-143

El Marqués de L'Hôpital: autor del primer libro de texto de cálculo infinitesimal

Entró en el servicio al ejército, pero sin renunciar a su querida pasión. Estudió Geometría, incluso en la tienda de campaña. Solía retirarse allí para estudiar, pero también para ocultar su dedicación al estudio. Hay que advertir que Francia, si bien es una nación tan educada como cualquier otra, se encuentra aún en ese tipo de barbarie en que la gente se pregunta si las ciencias, llevadas a cierto punto, no son incompatibles con la nobleza, y si no será más noble no saber nada… Personalmente, he visto en el ejército a algunos de los compañeros de L'Hôpital sorprenderse mucho de que, habiendo vivido con ellos como uno más, fuese uno de los principales matemáticos de Europa.

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

Hace trescientos cincuenta años nació en París (1661) Guillaume François Antoine, con los títulos de Marqués de L'Hôpital, Marqués de Saint-Mesme, Conde de Entremont y Señor D'Ouques, es decir, perteneciente a una familia de nobles, que había destacado durante varias generaciones como parte de la más alta aristocracia francesa. Su padre, Anne Alexandre de L'Hôpital, Conde de Saint-Mesme y Duque d'Orléans, era un Teniente General del Ejército del Rey, de la total confianza de J.B. Gastón, hermano de Luis XIII, de la casa de Orleáns. Su madre, Elisabeth Gobelin, era hija de Claude Gobelin, intendente del Ejército del Rey y Consejero de Estado.

Se comprende, que en el seno de semejante familia, el niño Guillaume tuvo una educación exquisita y se vio rodeado desde un principio de toda clase de facilidades para su desarrollo intelectual. Aunque no poseía demasiado talento para las humanidades, en particular para el latín, lengua en que se entendían los intelectuales de la época, sí manifestaba, en cambio, desde bien pequeño, grandes dotes para las Matemáticas, y una enorme pasión por su estudio. Según cuenta Bernard de Fontenelle, el joven Guillaume, cuando sólo tenía quince años, resolvió un problema sobre la cicloide, propuesto por B. Pascal, que le habían referido el duque de Roannès y el señor Arnaud.

Como solía ocurrir en este tipo de familias, Guillaume de L'Hôpital ingresó en el ejército y llegó a servir en un regimiento de caballería con el grado de Capitán, eso sí, sin abandonar por ello en ningún momento su dedicación a las Matemáticas. Así nos lo comunica el referido Fontenelle:

Pasado un tiempo, renunció al ejército, dado que su miopía le impedía ver más allá de diez pasos. Aunque hay quien mantiene que no fue esta la verdadera razón de su renuncia, como J. Coolidge cuando escribe:

> Uno se inclina a creer que era el amor de L'Hôpital por las matemáticas, y no la imperfección de su visión, lo que lo llevó a abandonar la carrera militar en favor de una carrera científica.

Naturalmente, dada su posición social, se podía permitir el lujo de prescindir del salario como militar.

Guillaume de L'Hôpital se casó con Marie-Charlotte de Romilley, con la que tuvo cuatro hijos, un varón y tres mujeres. Al parecer, ninguno de ellos siguió los caminos de su padre.

A partir de su renuncia al ejército, se dedicó totalmente al estudio de las matemáticas. Se integró en el Círculo *Nicolas Malebranche* que reunía a los principales matemáticos y científicos de París, en cuyas sesiones se discutían los más diversos asuntos de la ciencia del momento, en particular de la matemática, y se le brindaba la ocasión de informarse de cuanto estaba ocurriendo en los diferentes cenáculos científicos de toda Europa.

Leibniz en París

En el Círculo *Nicolas Malebranche*, se tenían noticias de las nuevas ideas de Leibniz acerca del cálculo, ya que este había residido en París desde 1672 hasta 1676, años durante los cuales contactó con los principales matemáticos franceses, y entre ellos con Malebranche. En realidad, el viaje a París había tenido otra motivación. Trataba de poner en marcha su *Proyecto Egipcio*, que pretendía preservar la paz y el equilibrio político en Europa, en vista del afán de conquista del Rey francés Luis XIV hacia toda Europa y, en ese momento, particularmente hacia Holanda. Leibniz pretendía desviar los afanes de Luis XIV hacia Egipto.

Tal proyecto no tuvo éxito, y lo que Leibniz desvió fue su tarea en Francia hacia el estudio, entre otras disciplinas, de las Matemáticas. En este sentido, la estancia en París le fue especialmente fructífera, concretamente, en lo que se refiere al cálculo diferencial e integral. Durante el mes de octubre de 1675, con motivo del problema inverso de la tangente, Leibniz se dio cuenta de que este problema, la determinación de una curva cuando se conoce la ley que define a su tangente, podía reducirse a un problema de cuadratura. Es entonces cuando sustituyó por primera vez la abreviatura *omn* (de omnes) por el símbolo $\int$ (inicial estilizada de summa) para indicar la integral definida entre 0 y x. Así mismo, como la operación $\int$ eleva el grado, Leibniz representó la operación inversa por una d en el denominador, x/d , para subrayar que tal operación rebajaba el grado. Solo más tarde sustituyó esta notación por dx, como hizo en lo sucesivo y continuamos haciendo hoy. De este modo, comenzó Leibniz a desarrollar el cálculo.

De vuelta a su tierra, ya en Hanover, Leibniz fundó junto con Otto Mencke, el profesor de filosofía de Leipzig, la revista *Acta Eruditorum*, y, en los primeros números, publicó sus ideas sobre el cálculo diferencial en sendos artículos de 1684 y 1686. Hay que decir que no tuvieron estos artículos demasiada repercusión, quizá por lo difícil que resultaba su comprensión, pero también por lo novedoso de su contenido. Por cierto que en esta revista, publicada mensualmente en Leipzig, no hay un solo número entre los años de 1695 y 1700, donde no aparezcan memorias de Leibniz, los hermanos Bernoulli, y L'Hôpital, sobre los problemas más variados del nuevo cálculo.

Aunque L'Hôpital era todavía muy joven y no podía haber contactado directamente con Leibniz, durante la estancia de este en París, sin duda Malebranche sí lo había hecho, y no perdió la ocasión para informarse acerca de las nuevas ideas. Debió Malebranche comunicar a los miembros de su círculo el resultado de tales ideas, de las cuales en su día tomaría buena nota L'Hôpital, aunque con el tiempo acabaría carteándose directamente con el propio Leibniz.

> *… cuando solo tenía quince años, resolvió un problema sobre la cicloide, propuesto por B. Pascal.*

La relación L'Hôpital – Bernoulli

En el Círculo Malebranche, además de las noticias directas sobre las nuevas ideas de Leibniz, se conocían los trabajos de los hermanos Bernoulli, que se comunicaban por correo con Leibniz, sobre diversas cuestiones de su cálculo.

A finales del año 1691, aterrizó Johann Bernoulli en Paris para dar unas conferencias sobre el cálculo de Leibniz. Contaba en ese momento Johann con sólo 24 años y no encontró mejor escenario para sus propósitos que el círculo *Nicolas Malebranche*. Bernouilli acordó impartir cuatro lecciones por semana durante seis meses. Allí conoció a L'Hôpital que le pareció el más valioso de los matemáticos franceses, así como el más interesado por el nuevo cálculo. Por su parte, L'Hôpital se dio cuenta de que Bernoulli estaba mucho más enterado de los desarrollos del cálculo diferencial que sus colegas de París, y era por tanto el más indicado para enterarse de todo lo que había en referencia al tema.

Al finalizar Bernoulli sus conferencias, L'Hôpital decidió contratarlo como profesor particular. Era el año 1692 y, para concentrarse mejor en las clases privadas, lo invitó a su casa de campo en Ouques.

No duró mucho la estancia de Bernoulli en Ouques, de donde partió a finales de año. Al regresar Bernoulli a su casa de Basilea, L'Hôpital continuó la relación con él por correspondencia, a cambio de un salario equivalente a la mitad de lo que percibía un profesor universitario. Pero, esta correspondencia se vio interrumpida por parte de Bernoulli, durante unos seis meses, al enterarse de que L'Hôpital había enviado a Huygens una solución al problema de F. Beaune (encontrar una curva de subtangente fija), solución que el propio Bernoulli había incluido en sus clases particulares.

L'Hôpital no estaba dispuesto, sin embargo, a prescindir de las enseñanzas de Bernoulli. Y en marzo de 1694 le envió una carta en los siguientes términos:

> Estaré encantado de pagarle 300 libras, a partir del primero de enero de este año. … Prometo en breve aumentar esta retribución, que es muy modesta, tan pronto como se solucionen algunos de mis asuntos personales. ... No soy tan poco razonable como para exigir a cambio la totalidad de su tiempo, pero le ruego que dedique algunas horas a trabajar en lo que le pida así como a comunicarme sus descubrimientos, que no ha de revelar, ninguno de ellos, a nadie más. Ni siquiera al señor Varignon, o a otros, copias de los mismos; no me complacería lo más mínimo que se publicaran. Por favor, respóndame a todo esto…

Si bien no se conserva la respuesta, se sabe que Bernoulli aceptó los términos de la carta, según se deduce de la siguiente contestación de L'Hôpital. Se restableció así la correspondencia entre ambos matemáticos, que no volvería a verse interrumpida, pese al aumento de trabajo de Bernoulli, a consecuencia de su nombramiento como profesor de matemáticas en Groningen, el 1 de septiembre de 1695.

El libro de texto de cálculo

A finales de 1694, L'Hôpital le comunicaba a Leibniz su intención de escribir un libro de texto de cálculo. En la misma carta le incluía un ejemplo de problema inverso de la tangente, cual era el de encontrar la curva de subtangente $\sqrt{ay+x^2}$, lo que equivale a resolver la ecuación diferencial:

$$ydx = dy\sqrt{ay+x^2}$$

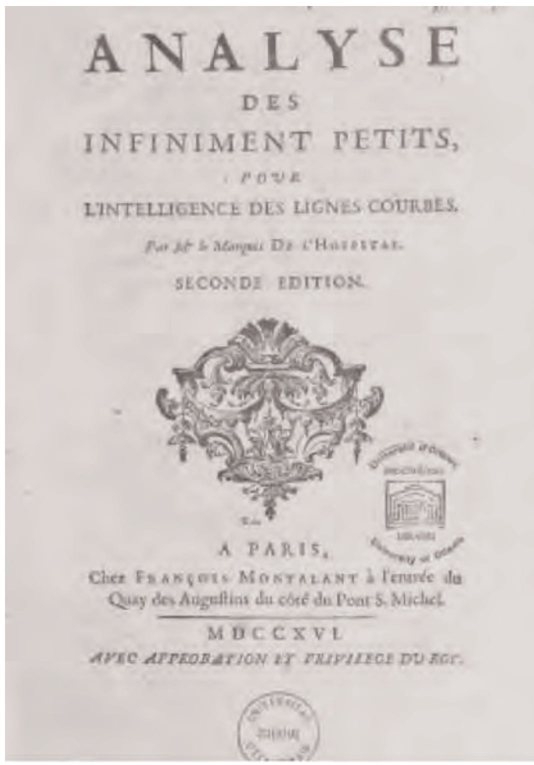
En su respuesta, Leibniz decía que parecía innecesario enseñar nada a L'Hôpital, puesto que había sido capaz de encontrar por sí mismo el método de resolución de las ecuaciones diferenciales homogéneas. Aprovechaba Leibniz la ocasión para animar a L'Hôpital a que continuara con la redacción de su libro de texto, cosa que él mismo se sentía incapaz de hacer, dados los numerosos asuntos de los que debía ocuparse, hasta el punto que a veces incluso ponían en peligro su salud. De ello se deduce, desde luego, que Leibniz valoraba en mucho a L'Hôpital como matemático.

En 1696, salió a la luz el libro de texto de L'Hôpital con el título *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (Análisis de los infinitésimos para el estudio de las líneas curvas). Se trata del primer libro donde se reunían y exponían las ideas y desarrollos del cálculo diferencial, de una manera ordenada y asequible a un público matemático general.

El *Analyse* consta de un prólogo con un breve resumen histórico del cálculo y diez capítulos. En el primer capítulo se formulan las definiciones, hipótesis y reglas de procedimiento. Así, define la diferencial como

> *La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente.*

En el segundo capítulo, se vale el autor del cálculo de diferencias para determinar las tangentes a todo tipo de curvas (pará-



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par M^r le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.

A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT à l'entrée du Quay des Augustins du côté du Pont S. Michel.
MDCCXVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

bola, hipérbola, cicloide, espiral, etc.). En el capítulo tercero se estudian los máximos y mínimos. En el cuarto, los puntos de inflexión y retroceso. En el quinto, las evolutas, envolventes, y radios de curvatura de determinadas curvas. En los capítulos sexto y séptimo se hace referencia a las cáusticas (envolventes) por reflexión y por refracción, tema este muy popular en aquella época. Dedica el capítulo octavo a las envolventes de familias de rectas. En los dos últimos capítulos, finalmente, se tratan problemas que requieren para su resolución el empleo de los métodos desarrollados en los capítulos anteriores. Es en el noveno, donde aparece la famosa regla que lleva su nombre, para resolver indeterminaciones de la forma 0/0, y que L'Hôpital formula del siguiente modo:

> Para encontrar el valor de una expresión racional en x, que para un valor dado de la abscisa (x) toma la forma 0/0, se determina el cociente de las diferencias del numerador y del denominador para este valor de la abscisa.

En la introducción, L'Hôpital agradece a los grandes creadores las ideas vertidas en el libro, en los siguientes términos:

> …reconozco estar en deuda con los brillantes trabajos de los señores Bernoulli; sobre todo con los del más joven, actualmente profesor de Groningen. Me he servido libremente de sus descubrimientos y de los del señor Leibniz. Es por lo que consiento que ellos reivindiquen todo lo que gusten; yo me conformo con lo que tengan a bien dejarme.

El libro, sale sin firma, de modo anónimo, y va a convertirse en el manual de cabecera durante casi todo el siglo XVIII, con varias ediciones en su haber hasta 1781. El mérito de L'Hôpital residía en que además de haber reunido y ordenado los conocimientos de los creadores de la materia, los exponía en forma muy clara e inteligible, lo que ayudó grandemente a perfeccionar y desarrollar la teoría de curvas planas. Los escritos originales, de Leibniz y los hermanos Bernoulli, estaban muy dispersos y resultaban ininteligibles, excepto para los grandes genios, como eran ellos.

La controversia L'Hôpital – Bernoulli

Al recibir un ejemplar del libro, Johann Bernoulli escribió a L'Hôpital agradeciéndole el detalle de citarlo y sin formularle ningún tipo de objeción o reproche. A pesar de lo cual, en 1698 escribió Bernoulli a Leibniz quejándose en privado de que L'Hôpital hubiese plagiado en el libro las notas que le enviaba, con motivo de las clases particulares a que se había comprometido a cambio de un importante salario.

Las únicas objeciones que L'Hôpital había recibido en vida, desde la publicación del *Analyse*, lo fueron contra la admisión de los infinitésimos, y habría que inscribirlas en el movimiento general de oposición al análisis, debido a la falta de rigor con que se presentaban los nuevos inventos.

Si hasta el momento las lamentaciones de Bernoulli no pasaban del ámbito privado, a partir de la muerte de L'Hôpital, en 1704, cobró cierto carácter público, probablemente a raíz de la carta que Bernoulli dirigió a Brook Taylor, escrita en términos análogos a la anterior de 1698 dirigida a Leibniz. La controversia, pues, estaba servida.

Bernoulli, que gozaba de una excelente reputación como matemático, era también conocido por las abundantes disputas que había mantenido con su hermano Jacob, sobre la prioridad de algunos descubrimientos. Así que sus quejas no fueron tomadas demasiado en serio. Por su parte, L'Hôpital gozaba del prestigio de sus colegas por la profunda comprensión de los conceptos matemáticos y su claridad de exposición, además de por su carácter amable y sencillo. En este sentido, escribe Robinson:

> L'Hôpital poseía una personalidad muy atractiva, entre otras cosas era modesto y generoso, dos cualidades nada comunes entre los matemáticos de su tiempo.

Los colegas de ambos se pusieron de parte de L'Hôpital. Si no hubiera sido así, hoy estaríamos hablando de la regla de Bernoulli, para resolver indeterminaciones del tipo 0/0, y no, como hacemos, de la regla de L'Hôpital. Pero, ¿tenía razón Bernoulli para quejarse tanto?

De hecho, durante algo más de dos siglos, apenas preocupó demasiado a los matemáticos saber a ciencia cierta a quién le asistía la razón. La cuestión cobró nueva actualidad en el año 1922 cuando se encontró una copia manuscrita del curso que Johann Bernoulli impartió a L'Hôpital. Y, efectivamente, en ese curso se pudo constatar que el *Analyse* de L'Hôpital seguía las notas del curso, hasta el punto de valerse en ocasiones de los mismos ejemplos con ligeras variaciones. Por cierto, la famosa regla para resolver indeterminaciones del tipo 0/0, no aparece en las notas del curso. Fue en 1955 cuando apareció una carta en la que Bernoulli se la comunicaba a L'Hôpital.

Así que, debe reconocerse a Bernoulli la autoría de buena parte de las cuestiones que se exponen en el libro. ¿Y L'Hôpital? ¿Habría que condenar su acción?. Al respecto, escribe Truesdell:

> No debemos juzgar el procedimiento de L'Hôpital demasiado duramente. Aunque tal vez, en un principio la necesidad financiera de Bernoulli le obligó a aceptar el acuerdo, lo cierto es que lo continuó aún después de que se hubiera asentado en su cátedra de Groningen en 1695. L'Hôpital, como cualquier noble, acostumbraba a pagar por los servicios que le dispensaban.

¿Por qué siguió el acuerdo Bernoulli después de conseguir la cátedra, supuesto que no tenía ya necesidad de otros ingresos para sanear sus finanzas? Realmente no lo sabemos. Se barajan sin embargo dos hipótesis posibles. La primera, que la relación con L'Hôpital supondría un ascenso social para Bernoulli, mucho más relevante en aquella época que en la actualidad. Parece que hacia el final de su vida, Bernoulli se jactaba del dinero recibido de L'Hôpital, exagerando incluso la cantidad. La segunda hipótesis, es que lo importante para Bernoulli era que se dieran a conocer sus descubrimientos, y sin duda L'Hôpital estaba en mejores condiciones financieras que él para poder hacerlo.

El mérito de L'Hôpital residía en que además de haber reunido y ordenado los conocimientos de los creadores de la materia, los exponía en forma muy clara e inteligible, lo que ayudó grandemente a perfeccionar y desarrollar la teoría de las curvas planas.

No hay que olvidar con todo, que L'Hôpital no se hizo pasar por autor de los descubrimientos recogidos en su libro, pues lo editó de forma anónima, citando en sus agradecimientos a los auténticos creadores. Hay que reconocerle a Bernoulli, pues, sus aportaciones al desarrollo del cálculo diferencial de Leibniz, incluídos en el libro de L'Hôpital. Pero, no se pude condenar a éste por haberlas publicado, dado el acuerdo que habían pactado antes de comenzar las clases.

L'Hôpital matemático

L'Hôpital resolvió varios problemas, como el de la braquistócrona, propuesto por Johann Bernoulli (dados dos puntos, no situados en la misma vertical ni en la misma horizontal, encontrar la curva por la que desciende un cuerpo de un punto a otro, en el menor tiempo posible), y sólo resuelto, con independencia unos de otros, por Newton, Leibniz y Jacob Bernoulli. Planteó algunos problemas de interés, como el que aparece en una carta a Leibniz, sobre si tiene algún sentido

$$\frac{d^n y}{dx_n} \text{ para } n=\frac{1}{2}.$$

Estaba dispuesto a redactar un libro sobre cálculo integral, cuando se enteró de que pensaba hacerlo el propio Leibniz, y desistió de tal propósito. Además del Analyse ya citado, escribió el *Traitè analytique des secciones coniques*, cuyo manuscrito fue encontrado después de su muerte y publicado en 1707, que tuvo también gran repercusión durante el siglo XVIII. Según Carl Boyer:

> El *Traitè analytique des secciones coniques* hizo por la geometría analítica del siglo xviii lo que el Analyse hizo por el cálculo. El Traité… no era especialmente original, pero tenía una calidad pedagógica que lo convirtió en el tratado estándar sobre cónicas durante la mayor parte del siglo.

L'Hôpital no fue un creador, pero sí un gran matemático. Se dedicó sobre todo a la resolución de problemas y a la enseñanza, a través de sus textos. Hay que reconocerle el mérito de haber comprendido desde su inicio la matemática del cálculo que se estaba gestando, en un tiempo de muchas críticas y no poca incomprensión, así como el de haber redactado (y editado en el caso del *Analyse*) unos libros que permitieron una rápida divulgación de las nuevas ideas. Gracias a él, tanto el cálculo diferencial como la geometría analítica avanzaron con mayor rapidez de la que hubieran tenido de no ser por L'Hôpital.

HACE ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aiton E. J. (1992): *Leibniz. Una biografía*. Madrid: Alianza Universidad

Grattan-Guinnes (1984): *Del cálculo a la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza Editorial

Sánchez C. y Valdés C. (2004): *De los Bernoulli a los Bourbaki*. Tres Cantos (Madrid): Nivola

Este artículo fue solicitado por *Suma* en enero de 2011 y aceptado en abril de 2011 para su publicación.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: .... NIF/CIF: ....

Dirección: .... Teléfono: ....

Población: .... CP: ....

Provincia: .... País: ....

Correo electrónico: .... Fax: ....

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) __________	
☐ N.os sueltos ______________________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)
☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547) Fecha y firma:
☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA
☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Nombre y apellidos: ....

Código Cuenta Cliente: Entidad: ⌴⌴⌴⌴ Oficina: ⌴⌴⌴⌴ DC: ⌴⌴ Cuenta: ⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴⌴

Banco/Caja: ....

Agencia n.º: .... Dirección: ....

Población: .... Provincia: ....

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.