suma+ 67
Junio 2011, pp.123-128

Un anillo misterioso

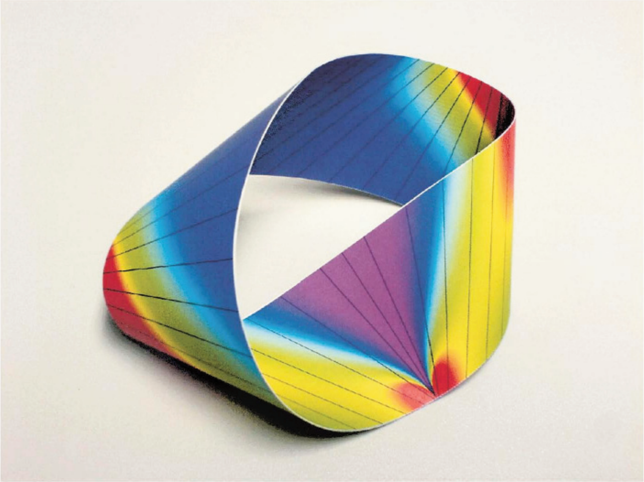


Figura 1. Cinta de Moebius

Estoy convencido de que es posible desarrollar una nueva forma de arte en la cual el trabajo del artista podría basar su contenido en un grado bastante sustancial en el pensamiento matemático.”

Max Bill en *El pensamiento matemático en el arte contemporáneo*

La anterior es una cita que gustaba especialmente a Eliseo Borrás. Sus colaboraciones con artistas como Javier Carvajal y la fotógrafa Pilar Moreno lo confirman.

He recordado esta cita al recibir uno de los muchos mensajes que circulan por la red actualmente, en el que ese deseo, extendido entre los gurús de cualquier especie, de basar los contenidos de sus discursos sustancialmente en el pensamiento matemático, excede los límites de lo admisible, por hacer un uso incorrecto de la jerga matemática, mezclando evidencias con conclusiones inconsistentes, para dar credibilidad a afirmaciones mágicas. Dice el texto:

> Los números son códigos de información, son herramientas con las que venimos a este mundo para conseguir los objetivos que nos hemos marcado.
>
> Tienen un valor cuantitativo (el que conoce todo el mundo) y un valor cualitativo (el que conocemos los numerólogos)
>
> Cada número aporta una información concreta y detallada, conectada profundamente a lo que estás viviendo en ese momento... es una señal que te manda el universo... y si no sabes decodificarla, de poco te sirve, pues tu proceso de aprendizaje se retrasa y evolucionas más lentamente. Esa es una de las razones por las que la Numerología de Pitágoras fue ocultada por los que detentaban el poder y se convirtió en “ciencia oculta”, pero no tiene nada de oculta, es pura ciencia matemática.
>
> Para que veáis la importancia de los números y cómo influyen en nuestras vidas, os invito a que hagáis una prueba... este año 2011, es especial por algo... este año es el año en que todos nos unimos como un solo ser... y estáis viendo las pruebas en Egipto e Islandia (sic)... el pueblo se une y se revela ante la opresión... pide libertad y lo hace desde la unión... porque la unión hace la fuerza. Y lo consigue: el pueblo de Islandia ha hecho dimitir a su gobierno en pleno y los egipcios otro tanto... y vamos a ver muchas más re-evoluciones este año.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana “Al-Khwarizmi”
ariadna@revistasuma.es

La prueba que os pido que hagáis es la siguiente:

Suma las dos últimas cifras de tu año de nacimiento + los años que vas a cumplir (o que has cumplido) en 2011. Te dará 111. Haz la prueba con cualquier persona que conozcas... **Siempre te darà 111**.

¡Cuantas veces hemos propuesto a nuestros alumnos y alumnas acertijos de este tipo para amenizar las tediosas tareas de cálculo elemental!

Continúa la autora del texto exponiendo curiosidades sobre su destino y el del universo ligadas a este resultado:

El número 111 es la expresión Universal de la energía primigenia, el nexo de unión entre la realidad cuántica y la lineal, la máxima expresión de la armonía en su relación con el todo. Nuestro regreso al Uno desde la diversidad. La materialización de la energía en la materia y el símbolo de la unificación en la luz.

¿Entendeis ahora lo que significa este año?

Si nos unimos y trabajamos juntos, todo se materializará... si cada uno va por su lado, no se conseguirá nada. De ahí mi insistencia en que os agrupéis por zonas geográficas y trabajéis conjuntamente para materializar los asentamientos. ¡Este es el año!

Os adjunto información sobre los números repetidos, para que cuando os aparezcan, sepáis qué os quiere decir el universo.

No es saludable estar bien adaptado a una sociedad profundamente enferma.

J. Krishnamurti

Es lamentable que para afirmar una proposición obvia, se necesite un apoyo matemático fraudulento. No cito la fuente porque no quiero colaborar en la publicidad de este negocio.

Si con un ejercicio elemental de matemáticas se puede engatusar a la población anumérica, imaginemos qué podría intentarse si los conceptos manejados fueran más complejos y adornados por la belleza de una obra de arte.

Un ejemplo: la botella de Klein, objeto de deseo de escultores y artistas digitales.

Puesto que somos seres tridimensionales, no podemos construir físicamente una botella de Klein, pero podemos diseñar artefactos que nos ayuden a comprenderla. La botella de Klein, en el espacio tetradimensional es una superficie suave, no se corta a sí misma. Ésta es una primera característica que nuestro modelo no podrá respetar. La forma más familiar de éste diseño es la de una botella de vidrio soplado, a la que en estado todavía manipulable, se le introduce la boca por un lateral y se le pega a la base. La figura 2 nos muestra una representación digital que es la proyección plana del modelo tridimensional.

Pero la botella de Klein es una superficie no orientable en R^4. Ésta es su propiedad fundamental. Como la banda de Möebius, no tiene más que una cara, por lo que su interior y su exterior son una misma cosa, todo lo que está fuera, está dentro y viceversa, por eso el arte la considera el cuerno de la abundancia total o de la más absoluta ruina (figura 2). Tal vez algo de esto barruntaba George Braque cuando dijo que "La ciencia tranquiliza y el arte perturba".

Claro que la tranquilidad que puede proporcionarnos la ciencia va de la mano de la competencia matemática. Un déficit en esta competencia, como relata John Allen Paulos (*El hombre anumérico* pag. 81) no sólo afecta a las personas incultas:

Uno de los amigos más próximos de Freud, el médico Wilhelm Fliess, inventó los análisis biorrítmicos, prácticas que se basan en la idea de que hay varios aspectos de la vida de las personas que siguen unos ciclos periódicos rígidos, que empiezan en el nacimiento. Fliess indicó a Freud que los números 23 y 28, que eran respectivamente los períodos de ciertos principios metafísicos masculino y femenino, tenían la especial propiedad de que sumando o restando múltiplos de ellos formados convenientemente, se puede obtener cualquier otro número. En otras palabras: cualquier número se puede expresar en la forma $23x + 28y$ siempre que x e y se elijan convenientemente. Por ejemplo, $6= (23 \cdot 10) + (28 \cdot (-8))$. Freud quedó tan impresionado que durante años fue un ardiente defensor de la teoría de los biorritmos y creyó que moriría a los cincuenta y un años de edad, la suma de 23 y 28. Resulta, sin embargo, que no sólo el 23 y el 28 tienen la propiedad de que cualquier otro número se puede expresar en función de ellos, sino que la comparten con todos los pares de números primos entre sí, es decir, de números que no tengan divisores comunes. O sea que hasta Freud padecía de anumerismo.

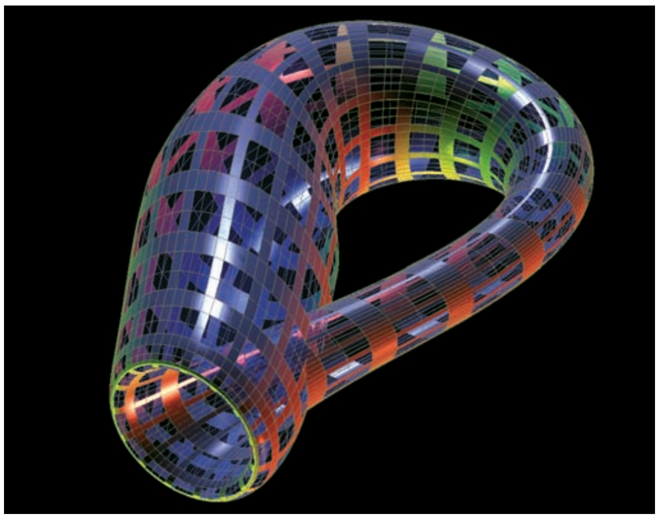


Figura 2. Botella de Klein

Ian Stewart, por su parte, en un artículo publicado en *Investigación y Ciencia* en diciembre del año 1993, páginas 84-87, expone con su fino sentido del humor, una situación en la que un timador, experto en matemáticas (no son rasgos incompatibles), que se autodenominaba en el cartel anunciador de la feria como ***Numbo. Nigromante Numerólogo*** aprovechaba el resultado del teorema de Benford y el anumerismo de la población sobre probabilidades, para organizar un timo casi imposible de detectar:

—...Benford analizó veinte series diferentes de datos numéricos, entre las que figuraban superficies de lagos y masas moleculares de compuestos. Descubrió empíricamente que la probabilidad de que el primer dígito decimal sea n está dada por la fórmula $\log(n+1)-\log(n)$, donde los logaritmos están tomados en base 10.

—Si admitiéramos esa curiosa ley –reflexioné—, la probabilidad de que la primera cifra decimal fuese 1 sería: $\log 2 - \log 1 = 0{,}301$, la de que fuese 2 sería $\log 3 - \log 2 = 0{,}477 - 0{,}301 = 0{,}176$. En tal caso, la probabilidad de ganar con 1 o con 2 es la suma de ambas, o sea, 0,477, algo menos del 50%. La ganancia esperada es muy aproximadamente, $1000 \times 0{,}477 - 500 \times 0{,}523 = 215{,}6$. ¡Así que, golfo sin escrúpulos, en promedio ganas más de doscientas pesetas por envite!

—Piensa en una calle bordeada de casas por una sóla acera, numeradas a partir de 1. La probabilidad de que la primera cifra sea un dígito dado varía considerablemente con el número de casas que tenga la calle. Si sólo hay nueve casas, cada número aparece con la misma frecuencia, pero si hay diecinueve, la cifra 1 aparece en la primera casa y también en los números 10 a 19, o sea con una frecuencia de 11/19, más del 50%. Al crecer el número de casas, la frecuencia de aparición de una primera cifra crece y decrece de una manera regular y calculada. Las frecuencias sólo son iguales cuando el número de casas es 9, 99, 999...

—¡Ya veo!

—Por lo tanto, la conjetura inicial (la opinión del público), a saber, que las frecuencias son iguales, es incorrecta.

—...si la ley de Benford es verdadera, también las primeras cifras de las longitudes de las calles deberían atenerse a ella.

—Exactamente. Y al desarrollar este tipo de ideas desembocamos en una preciosa propiedad de la ley de Benford: es invariante bajo cambios de escala

—...Déjame que te cuente una confirmación muy reciente de la ley de Benford. Se trata de un estudio de B. Buck y A. Merchant, de la Universidad de Oxford, y de S. Pérez, de la Universidad de El Cabo. Los datos que han utilizado son las vidas medias en las desintegraciones alfa, o sea, los tiempos que tarda un núcleo atómico en perder la mitad de su radiactividad por emisión de partículas alfa...

—...en el caso de la desintegración alfa, la invariancia bajo cambios de escala admitía una explicación física......

—....los tiempos de escape por el túnel, las vidas medias por consiguiente, se corresponden de forma natural con una progresión geométrica y no con una aritmética. Si la naturaleza elige la integral del efecto túnel aleatoriamente con probabilidad uniforme, entonces la ley que hace depender las vidas medias de las partículas alfa de las potencias de estas integrales conduce a una invariancia bajo cambios de escala y, por tanto, a la ley de Benford.

Todo eso puede estar muy bien para la desintegración alfa, pensé yo, pero ¿qué decir de las áreas de las islas Bahamas, de la población de los atolones de las Maldivas o de los tipos de cambio? ¡Estos fenómenos no están gobernados por la física subatómica!

Hoy los invariantes bajo cambios de escala por excelencia son los fractales de Mandelbrot: la independencia de la escala se manifiesta en su autosemejanza, es decir, la similitud de las partes, por minúsculas que sean, y el todo. En una interpretación "de último minuto" de la ley de Benford, los datos en cuestión están gobernados por cierto fractal subyacente, lo que convierte a la ley de Benford en parte de la teoría del caos, pues los fractales son la geometría natural de los sistemas dinámicos determinísticos de elevada complejidad. De esta forma, la ley de Benford nos dice que la numerología de la naturaleza es consecuencia de un caos dinámico que la subyace.

Pero, tanto la geometría subyacente al caos dinámico como la numerología de la naturaleza resultan tan complejos en profundidad como atractivos en superficie. Por eso resulta fácil al experto pícaro engañar al crédulo anumérico, como veremos en el próximo problema.

Soluciones a los problemas del número anterior

Lucifer en Las Vegas (problema propuesto por Martin Gardner en "*Mathematial puzzle tales*"

Desde que fue expulsado del paraíso, Satán vio que la eficacia de sus poderes paranormales estaba en función de la convicción que la humanidad tenía en ellos. Al disminuir la fuerza de esta creencia con el paso del tiempo, el Maligno, hacia mediados del siglo XXI, había visto sus poderes psíquicos reducidos de tal manera que no podía ya echar maldiciones cuyo efecto durase más de veinticuatro horas. Para romper la monotonía del infierno, el Diablo, disfrazado de mortal, se puso a frecuentar regularmente los casinos de Las Vegas. Un día a guisa de magnate tejano del petróleo se acercó a un robusto y campechano hombre de Omaha que estaba junto a una mesa de ruleta.

– ¿Amigo, le gustaría hacer conmigo una apuesta un poco especial?
– Habría que ver de qué se trata; gruñó el hombre de Omaha.
– Enseguida se lo digo. Lo que le propongo es esto. Vamos a

jugar con los colores de la ruleta, el rojo y el negro. Elige usted cualquier terna de colores, por ejemplo rojo-rojo-negro, la que quiera. Entonces elegiré yo una terna diferente. Nos pondremos de acuerdo sobre el momento de comenzar y observaremos la ruleta para ver cuál de nuestras ternas ha salido primero. Si sale antes la suya, usted gana, si es la mía la primera, gano yo. Prescindiremos del cero. Apuesto 5 contra 4, es decir, si usted gana le pagaré cinco "pérsicos", y si gano yo me pagará usted 4. Cada vez que repitamos la apuesta, usted puede elegir la terna primero.

– *Hmmm… (reflexionó el hombre de Nebraska) cada vez que gire la ruleta hay una probabilidad 1/2 de que salga rojo, y también 1/2 de que salga negro. La probabilidad de obtener una terna cualquiera es 1/2 por 1/2 por 1/2, o sea 1/8, y todas las ternas tienen la misma probabilidad de salir. Ninguno de los dos tiene ventaja.*

– *Exacto, dijo sonriendo el diablo, y le estoy ofreciendo una apuesta mejor que a la par.*

–*...Su propuesta es diabólicamente tentadora; vamos a jugar.*

Problema propuesto y trabajado en clase, con alumnos y alumnas de 1º y 2º de Bachillerato, por Juan Carlos Orero y relatado por él mismo.

Del mismo modo que el método más rápido para dejar de fumar es tener un infarto, lo que más anima a analizar un juego es perder dinero (aunque sea en pérsicos).

Hoy vamos a tratar el problema de *Lucifer en las Vegas* con alumnos de bachillerato.

Después de leer atentamente el problema, cuando pregunto a los alumnos qué papel querrían interpretar en esta historia, se muestran muy suspicaces.

Una mayoría preferiría ser el Diablo porque piensan que, de existir, debe ser muy astuto y seguro que está haciendo trampa, otros piensan que da igual, porque, como explica el hombre de Omaha, el juego es equitativo: la probabilidad de obtener una terna al girar la ruleta tres veces es 1/8. Un par de alumnos manifiesta que obtener RRR es menos probable que obtener RNR ya que en este último caso el resultado está más equilibrado entre rojos y negros. Otra alumna le responde que no, que en cada giro es como "si se resetease la probabilidad". Cuesta un poco también entender que no se trata de girar la ruleta tres veces y ver que ha salido, sino sucesivas veces "hasta que aparezca una de las ternas". Es decir, a lo que se apuesta es a "qué terna aparece antes".

Por ejemplo si el hombre de Omaha eligiese NNR y Lucifer RNN, una posible secuencia ganadora para Lucifer sería RRRN RRNRRNRNRRNN. Esta secuencia hubiese supuesto 16 giros.

Como primer paso para analizar el problema les propongo dramatizarlo: la clase completa será el hombre de Omaha (NRN) y yo Lucifer (RRN).

Alum.1	– ¿Cuál es el problema?
Prof.	– Analizar la propuesta de Lucifer, pero no tenemos ruleta. ¿Qué hacemos?
Alum.2	– Un diagrama de árbol.
Prof.	– Antes que el diagrama. No tenemos ruleta pero tenemos dados.
Alum.2	– Si sale 1, 2 o 3 rojo y si sale 4, 5 o 6 negro.
Prof.	– Vale.

Formamos diez parejas y cada una simulará 10 secuencias hasta obtener una de las dos ternas. En total 100 simulaciones que es un número redondo, suficiente y fácil de manejar.

Un alumno propone tirar varios dados a la vez y luego anotar los resultados. Pero, ¿cómo leemos los resultados?, porque el orden es fundamental. Los podemos ordenar a ciegas y después leemos.

Al final decidimos lanzar un único dado sucesivas veces.

Utilizaremos después tablas de números aleatorios.

Los resultados se recogen en la pizarra e incluyen las veces que ha ganado cada terna y la duración de cada partida. Calcularemos la frecuencia relativa de éxito para cada terna y el tiempo de espera medio para que aparezca. (figura 3)

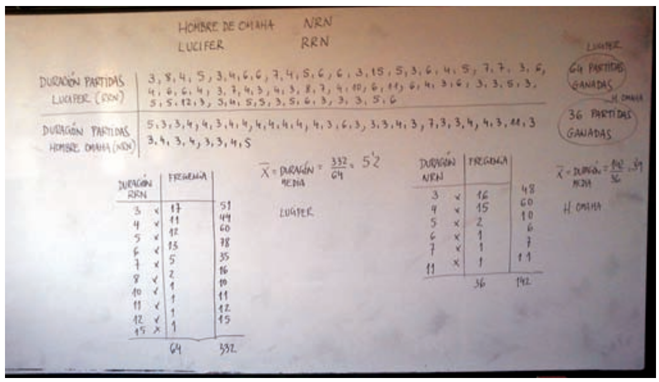


Figura 3

Lucifer acaba de ganar 76 pérsicos en diez minutos. ¿Suerte o azar? (Aquí hay que decir que en la simulación, la frecuencia de éxito para Lucifer ha sido de 64% y para el hombre de Omaha 36% y la teoría predice unos resultados de 62'5% y de 37'5%. No está mal, ¿no?).

Al acabar esta simulación probamos con otras ternas.

Agotamos el tiempo de esta clase.

En la siguiente clase alguien sugiere que no puede haber una terna mejor, porque, de ser así, Lucifer no dejaría elegir primero al hombre de Omaha. Por otra parte el hecho de que Lucifer proponga pagar mejor que a la par, sugiere que para cada elección del hombre de Omaha debe haber una elección para Lucifer que mejore la apuesta 4:5.

Se lanzan algunas hipótesis:

–RRR es igual de buena que NNN.

–RNR y NRN deben ser igual de buenas ya que muestran una simetría total y la ruleta no debería tener preferencia pon ningún color en especial en el orden de aparición.

–Si RRN es mejor que NRN, la complementaria de la primera NNR debería ser también mejor que la complementaria de la segunda RNR.

Llega el momento de usar herramientas diferentes de la simulación.

La dificultad de este problema cuando se trata con diagramas de árbol convencionales es que éstos presentan una cantidad infinita de ramas. Para evitarlo, en esta segunda sesión, introducimos los diagramas de Markov, con los que podemos probar algunas de las hipótesis propuestas por los alumnos.

Así por ejemplo es posible observar que las apuestas NNR y RRN tienen la misma probabilidad de ganar simplemente observando la simetría que presenta el diagrama de Markov correspondiente (figura 4).

En los círculos se recogen los diferentes estados del juego para estas apuestas y sobre las flechas las probabilidades de transición de un estado a otro.

Entretanto, alguien ha descubierto que para la elección RRN del hombre de Omaha, Lucifer tiene la elección NRR cuya probabilidad de éxito compensa con creces la apuesta 4:5.

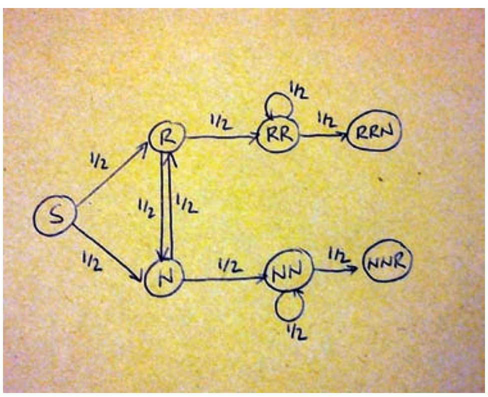
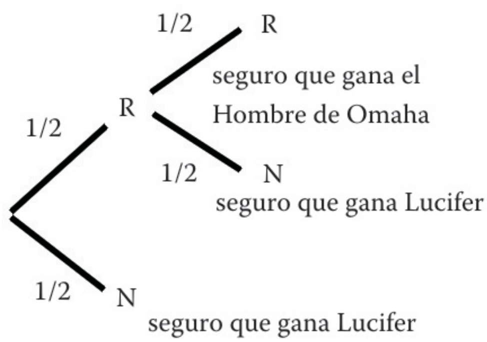


Figura 4

Su razonamiento se apoya en un diagrama de árbol y es el que sigue:



El razonamiento se basa en el hecho cierto de que si sale N antes que RR seguro que gana Lucifer.

Por lo tanto Lucifer gana con una probabilidad P(NRR)= 1/2 + 1/2·1/2 = 3/4 y el hombre de Omaha con una probabilidad P(RRN) = 1/2·1/2. Para ser equitativa, la apuesta debería ser 4:12.

El trabajo ya está bastante encarrilado. Se llevan el problema a casa y tienen una semana para intentar resolverlo y entregarlo voluntariamente.

La solución: las apariencias engañan; la propuesta de Lucifer –como no podía ser de otra manera– es engañosa.

Cualquiera que sea la terna que elija el hombre de Omaha, Lucifer encontrará una terna mejor (que saldrá, con una probabilidad mayor, antes que la suya).

La estrategia que seguirá es la siguiente: representemos la jugada del hombre de Omaha como 1 – 2 – 3, Lucifer jugará entonces $\overline{2}$ – 1 – 2, indicando esto que pondrá en la primera posición de su terna lo contrario que haya elegido el hombre de Omaha para su segunda posición, y en las dos últimas posiciones de su terna lo que haya elegido el hombre de Omaha para las dos primeras posiciones de la suya.

Cuando Lucifer pone en último lugar 1 – 2 lo hace para anticiparse, es decir para que cuando salga ese 1 – 2 que es el inicio del hombre de Omaha, su terna ya haya salido completa con ese 1 – 2 al final. Por otra parte coloca en primera posición $\overline{2}$, para evitar que el hombre de Omaha pueda anticipársele del mismo modo.

Veamos un ejemplo:

El hombre de Omaha elige	NRN
Lucifer responde con	NNR

La cadena de Markov que sirve de modelo a esta apuesta es la que sigue (figura 5).

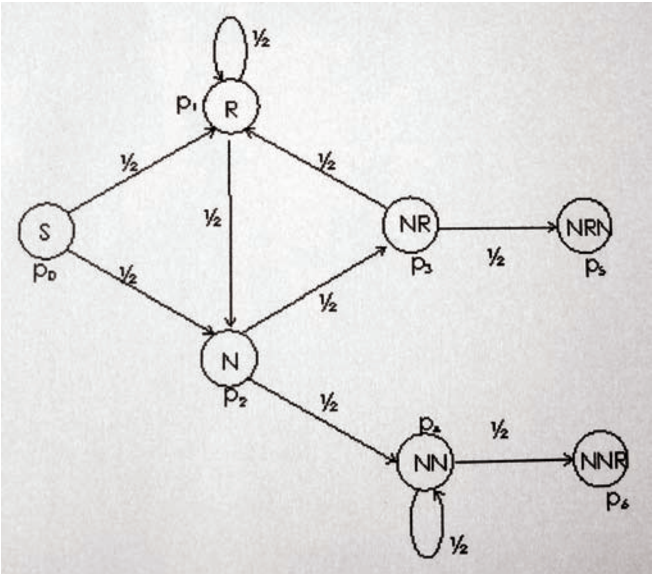


Figura 5

En esta cadena las secuencias de enes y erres encerradas en los círculos representan los estados posibles del juego.

Las probabilidades p_i representan las expectativas de terminar el juego en NNR desde el estado i.La primera regla del valor medio nos permite calcular estas probabilidades como vemos en la figura 6.

$$p_5 = 0 \qquad p_6 = 1 \qquad p_4 = \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_6 \rightarrow p_4 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{2}p_1 \\ p_2 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_4 \\ p_1 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow p_3 = \frac{1}{3};\ p_1 = \frac{2}{3};\ p_2 = \frac{2}{3} \rightarrow p_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) = \frac{2}{3}$$

Figura 6

Para esta elección del hombre de Omaha, Lucifer ganará con una probabilidad de $\frac{2}{3}$.

Con la estrategia descrita más arriba encontraremos ocasiones en que Lucifer gana al hombre de Omaha con probabilidad 2/3, como en este caso, otras en que gana con probabilidad 3/4 y en un par de ocasiones hasta con probabilidad 7/8. Todo depende de la mejor o peor elección que haga el hombre de Omaha.

Este artículo ha sido realizado con la colaboración de Pilar Moreno, Vicente Calixte Juan y Juan Carlos Orero.

EL HILO DE ARIADNA

Este artículo fue solicitado por *Suma* en febrero de 2011 y aceptado en mayo de 2011 para su publicación.