suma+ 67
Junio 2011, pp. 87-90

Amargas

En 1998 el departamento de Matemáticas del IES Pau Vila de Sabadell inició una serie llamada *L'enigma del mes* en la que se proponía un problema, curiosidad o paradoja matemática a toda la comunidad educativa (alumnos, profesores y personal no docente). El enigma se colgaba en las paredes del instituto y se invitaba a todos a remitir una solución al departamento de Matemáticas. Cualquier profesor de Matemáticas podía proponer un enigma, pero en tal caso debía encargarse de redactar la solución y hacerla pública junto al enigma del mes siguiente.

El *Enigma del mes nº.2* fue propuesto por Antonio López en los términos de la figura 1. Se trata de un puzzle que puede recomponerse creando una paradoja.

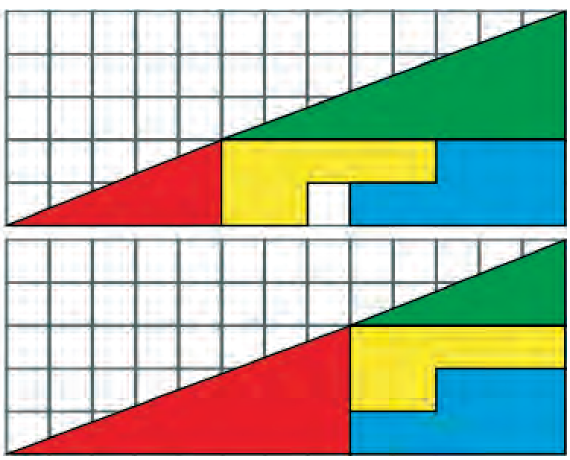


Figura 1: ¿A dónde ha ido a parar el cuadrado blanco?

Contemplando la figura 1 durante unos instantes, uno acaba por preguntarse adónde ha ido a parar el cuadrado blanco en el triángulo rectángulo inferior de la figura 1. El cálculo de las áreas sumando las de las piezas de colores que conforman cada uno de esos triángulos rectángulos pone de manifiesto la desaparición, pero no desvela su motivo:

$$A_{\text{sup}} = \frac{1}{2}\cdot 5q\cdot 2q + 7q^2 + 1q^2 + 8q^2 + \frac{1}{2}\cdot 8q\cdot 3q = 33q^2$$
$$A_{\text{inf}} = \frac{1}{2}\cdot 8q\cdot 3q + 7q^2 + 8q^2 + \frac{1}{2}\cdot 5q\cdot 2q = 32q^2$$

Estamos ante una paradoja. El cálculo de las áreas certifica que el puzzle triangular de la parte superior posee mayor área que el inferior aunque aparentemente sean iguales. Si se calcula el área del triángulo rectángulo total, el de catetos $13q$ y $5q$, se obtiene:

$$A = \frac{1}{2}\cdot 13q\cdot 5q = 32{,}5q^2$$

¿Tres resultados distintos para una misma área? ¿Acaso es mágico ese cuadradito blanco? Quizá el error no esté en lo que hacemos (calcular) sino en lo que vemos. O. mejor dicho, en lo que creemos ver. Esas dos figuras, ¿son realmente triangulares? Si se contempla la figura 1 desde una posición con un

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

ángulo de visión mucho más cerrado, veremos que el segmento que tomamos antes por una hipotenusa no es ni hipotenusa ni segmento. Es una línea quebrada compuesta de dos segmentos, de dos hipotenusas menores. Es la hipotenusa aparente de un aparente triángulo rectángulo que, en realidad, es un cuadrilátero.

El cuadrilátero superior de la figura 1 es convexo; el inferior, cóncavo. La diferencia entre sus áreas es precisamente ese cuadrado de la cuadrícula. El primero es medio cuadrado mayor ($33q^2$) que el triángulo rectángulo ($32{,}5q^2$); el segundo, medio cuadrado inferior ($32q^2$). Los dos triángulos rectángulos menores (rojo y verde) no son tan semejantes como parecían, pues, aunque por poco, la inclinación de sus hipotenusas no es la misma:

$$0{,}625 = \frac{5}{8} \neq \frac{3}{5} = 0{,}6$$

El cuadrado blanco es la sutil diferencia que distingue ambos cuadriláteros y que se reparte a lo largo de la 'diagonal' de la cuadrícula (Fig. 2), en una finísima rendija.

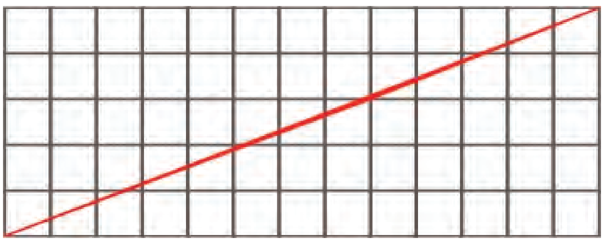


Figura 2: Una celda de la cuadrícula repartida en la diagonal.

Un análisis matemático más profundo lleva a preguntarse qué números son los que dan lugar a una situación así. Ordenando de menor a mayor los lados de las figuras involucradas damos con una serie de números muy conocida: 2, 3, 5, 8, 13. Se trata de un fragmento de la sucesión de Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … Las proporciones calculadas antes son cocientes entre términos consecutivos de esta sucesión, los cuales se aproximan al número de oro a medida que avanzamos:

$$\left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots \right\} \longrightarrow \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\ldots$$

Tomando términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci mayores que 13 podría componerse un cuadrilátero visualmente indistinguible de un triángulo rectángulo.

Pero no es imprescindible que los números escogidos pertenezcan a la sucesión de Fibonacci. Pueden crearse situaciones similares tomando cuatro términos de una sucesión numérica cuyos cocientes de términos consecutivos converjan a un número real determinado. La más sencilla es la sucesión de números naturales cuyos cocientes de términos consecutivos tienen por límite 1:

$$\left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1} \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Con los números 2, 3 y 4 también se obtienen triángulos rectángulos aparentes que dan lugar a la misma paradoja. Pero con valores tan pequeños el cuadrilátero es visible. Con números mayores la falsa hipotenusa se hace mucho más rectilínea (figura 3).

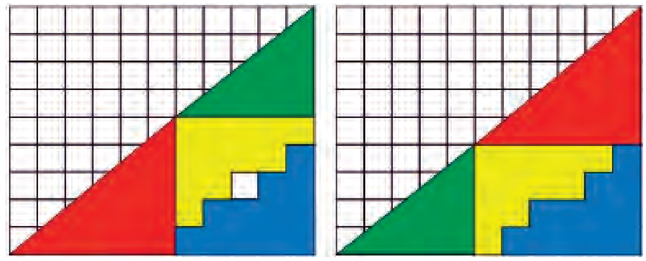


Figura 3: ¿A dónde ha ido a parar el cuadrado blanco?

Quizá el error no esté en lo que hacemos (calcular) sino en lo que vemos. O. mejor dicho, en lo que creemos ver.

Construcciones similares son posibles con números naturales siempre que el cuadrado blanco ocupe la celda central de un cuadrado mayor. Ese cuadrado mayor se compone de dos piezas iguales y del cuadrado blanco. Esto significa que hacen falta un número impar de celdas:

$$n^2 - 1 = 2k \Rightarrow n^2 = 2k + 1 = impar \Rightarrow n = impar$$

Años después de haber reflexionado sobre esas cuestiones me encontraba en Palma de Mallorca para estar cerca de mi madre, quien por entonces entraba y salía del hospital con demasiada frecuencia. Una tarde salí de la habitación de mi madre para dar una vuelta mientras mi hermana le hacía compañía. Di un largo paseo hasta un bar de la ciudad que frecuentaba cuando vivía en Palma. Quedaba cerca de una academia en la que durante la mili di clases de matemáticas a los opositores a Correos.

La academia estaba junto a la plaza de Cort, a sólo cien pasos de un olivo centenario que los turistas nunca cesan de fotografiar. El establecimiento en cuestión se halla detrás del ayuntamiento, en la estrecha pero larga calle Morey que desemboca en la plaza de Sta. Eulàlia. Pensaba tomar un café en el Xícara. Pero en lugar de entrar en él, donde entré fue en el portal impar anterior, pues, para mi sorpresa, la casona que recibía ese número había sido reconvertida en una librería de viejo. Se llamaba *Fine Books*, una onomatopeya anglófona de find books (figura 4).

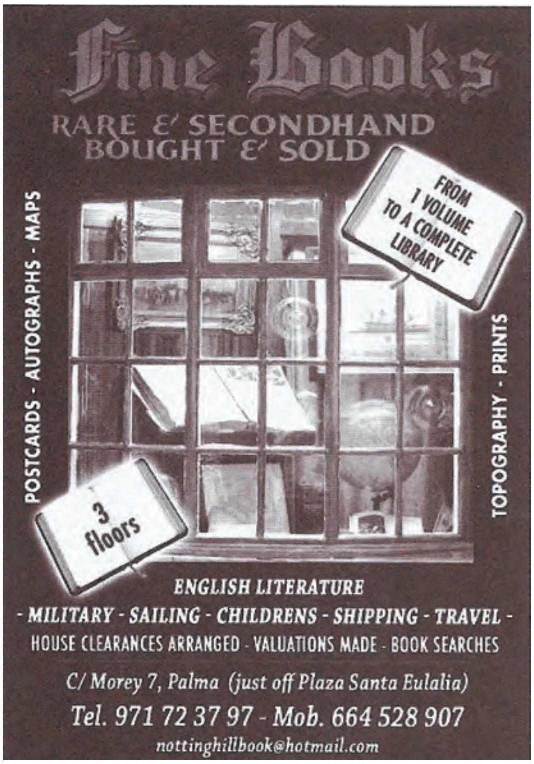


Figura 4: Tarjeta de la librería Fine Books de Palma.

Hacía poco que su dueño había abierto el local. El visitante tenía que esquivar pilas de libros todavía pendientes de clasificación. La librería era un laberinto tridimensional de papel y cuero avejentados que el lector recorría por pasadizos y escalerillas que conectaban tres niveles. Pasé un buen rato hojeando volúmenes de viajes, navegación, geografía, historia, música, arquitectura, naturaleza, biblias… La inmensa mayoría estaban escritos en inglés. En un estante del sótano encontré una ejemplar escrito en francés editado a finales del siglo XIX. Se trataba de las *Récréations Mathématiques*, de Édouard Lucas (Figura 5). La edición tenía un cuerpo único que alojaba los dos volúmenes publicados con un lustro de diferencia. El volumen I, de 1891; y el volumen II, de 1896.

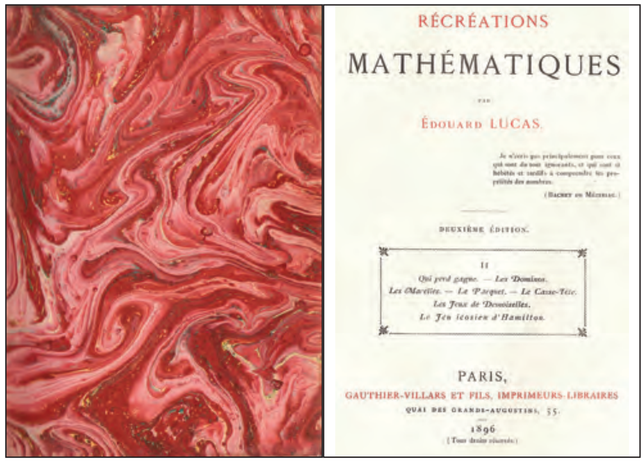
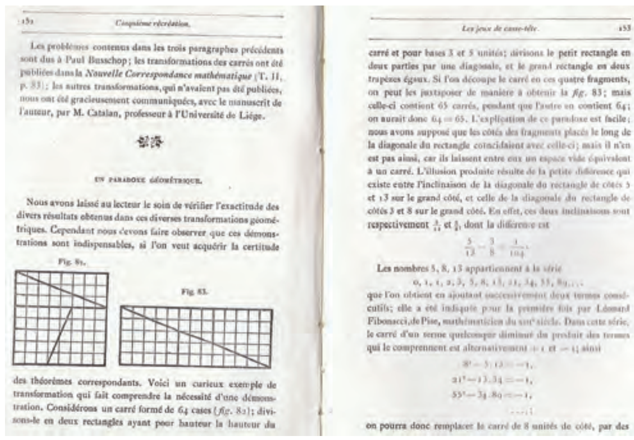


Figura 5: Guarda y portada de las Recreaciones matemáticas de E. Lucas (vol. II).

Al abrirlo percibí entre el olor a moho de la estancia y el aroma que cada propietario confiere a los ejemplares de su biblioteca. En las guardas había una inscripción hecha con lápiz: *C. F. O. Gibson*.

Busqué el índice, al final del volumen, para ver el contenido. Me llamó la atención un apartado de la *Cinquième récréation* del volumen II titulado *Un paradoxe géométrique*, en la página 152. Al abrir esa página mis ojos se clavaron en un diseño geométrico muy parecido al que mi colega Antonio había colgado en la pared del departamento de Matemáticas del *IES Pau Vila* hacía siete años (Fig. 6).



152 *Cinquième récréation.*

Les problèmes contenus dans les trois paragraphes précédents sont dus à Paul Busschop; les transformations des carrés ont été publiées dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (T. II, p. 83); les autres transformations, qui n'avaient pas été publiées, nous ont été gracieusement communiquées, avec le manuscrit de l'auteur, par M. Catalan, professeur à l'Université de Liége.

UN PARADOXE GÉOMÉTRIQUE.

Nous avons laissé au lecteur le soin de vérifier l'exactitude des divers résultats obtenus dans ces diverses transformations géométriques. Cependant nous devons faire observer que ces démonstrations sont indispensables, si l'on veut acquérir la certitude

Fig. 82. Fig. 83.

des théorèmes correspondants. Voici un curieux exemple de transformation qui fait comprendre la nécessité d'une démonstration. Considérons un carré formé de 64 cases (*fig.* 82); divisons-le en deux rectangles ayant pour hauteur la hauteur du

Les jeux de casse-tête. 153

carré et pour bases 3 et 5 unités; divisons le petit rectangle en deux parties par une diagonale, et le grand rectangle en deux trapèzes égaux. Si l'on découpe le carré en ces quatre fragments, on peut les juxtaposer de manière à obtenir la *fig.* 83; mais celle-ci contient 65 carrés, pendant que l'autre en contient 64; on aurait donc 64 = 65. L'explication de ce paradoxe est facile; nous avons supposé que les côtés des fragments placés le long de la diagonale du rectangle coïncidaient avec celle-ci; mais il n'en est pas ainsi, car ils laissent entre eux un espace vide équivalent à un carré. L'illusion produite résulte de la petite différence qui existe entre l'inclinaison de la diagonale du rectangle de côtés 5 et 13 sur le grand côté, et celle de la diagonale du rectangle de côtés 3 et 8 sur le grand côté. En effet, ces deux inclinaisons sont respectivement $\frac{5}{13}$ et $\frac{3}{8}$, dont la différence est

$$\frac{5}{13}-\frac{3}{8}=\frac{1}{104}.$$

Les nombres 5, 8, 13 appartiennent à la série

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...,

que l'on obtient en ajoutant successivement deux termes consécutifs; elle a été indiquée pour la première fois par Léonard Fibonacci, de Pise, mathématicien du XIII^e siècle. Dans cette série, le carré d'un terme quelconque diminué du produit des termes qui le comprennent est alternativement +1 et −1; ainsi

$$8^2-5.13=-1,$$
$$21^2-13.34=-1,$$
$$55^2-34.89=-1,$$
$$\ldots$$

on pourra donc remplacer le carré de 8 unités de côté, par des

Figura 6: Una paradoja geométrica (G. Lucas, 1896).

Yo no hablo francés, mi madre sí. Al volver al hospital para relevar a mi hermana y pasar la noche junto a mi madre estuvimos un rato los tres comentando cómo había transcurrido la tarde. Mi madre se encontraba bastante bien, incluso jovial. Cuando me preguntó qué había hecho, le expliqué el itinerario recorrido y le mostré mi adquisición.

Abrió el volumen y leyó la primera página. El francés de la obra no es demasiado sofisticado, por lo que yo podía seguir el hilo de la lectura. Si no entendía algún término, ella me lo traducía. Le pedí que leyera el inicio de la página 152, donde estaba esa paradoja geométrica. Y así, Lucas, por medio de mi madre, comenzó a hablar.

El autor francés parte de un cuadrado de 8×8=64 casillas que luego se divide en dos triángulos rectángulos y dos trapecios. La figura se desmonta y se recompone formando un rectángulo de 5×13=65 casillas (figura 6). ¿Cómo se explica la aparición de una casilla más? He ahí la paradoja.

Evidentemente, 64 no es igual a 65. Lucas dice que la explicación de la paradoja es sencilla y reside en haber dado por sentado que la diagonal visible en la figura 83 es auténtica cuando solo es aparente. Una ilusión óptica nos hace percibir como iguales las inclinaciones del rectángulo entero (5/13) y la del triángulo rectángulo (3/8).

Lucas observa que la diferencia entre ambas pendientes es pequeña, aunque no nula (1/104). A continuación, cita la fuente de dónde proceden los números que generan la controversia: la sucesión de Fibonacci. El producto de dos términos alternados de la serie de Fibonacci sólo se diferencia en una unidad del cuadrado del término que los separa:

$$
\begin{aligned}
&2^2 - 1\cdot 3 = 1\\
&3^2 - 2\cdot 5 = -1\\
&5^2 - 3\cdot 8 = 1\\
&8^2 - 5\cdot 13 = -1\\
&13^2 - 8\cdot 21 = 1
\end{aligned}
$$

No se trata de una propiedad exclusiva de la sucesión de Fibonacci. También la verifican los números naturales. Todos los estudiantes de secundaria la estudian bajo el epígrafe de identidad notable:

$$(n+1)\cdot(n-1) = n^2 - 1$$

Basta darle la vuelta como a un calcetín para sacar a la luz la relación escrita por Lucas:

$$n^2 - (n-1)\cdot(n+1) = 1$$

Cada curso suelo plantear la paradoja a mis alumnos de la ESO. En lugar de mostrarles el diseño desde el principio, prefiero darles algunas instrucciones para que ellos lo dibujen. En esas instrucciones añado un ardid para que caigan en la trampa que luego tendrán que desvelar:

1. *En la parte superior izquierda de una hoja de papel cuadriculado señalad un vértice con la letra A.*
2. *Desde A, trazad un segmento vertical hasta un vértice que llamaréis B situado a 8 cuadritos de A.*
3. *Ahora haced lo mismo desde B hacia la derecha, hasta un vértice que llamaréis C, situado a 13 cuadritos de B.*
4. *Por último unid con un segmento los puntos A y C.*
5. *¿Verdad que el segmento AC pasa por un vértice de la cuadrícula situado 5 cuadritos a la derecha de AB y 5 cuadritos por encima de BC? Llamemos D a dicho punto.*
6. *Calculad el área del triángulo ABC de dos modos distintos.*

La trampa está en la quinta cuestión. Todo el mundo la responde afirmativamente, pues ve como el trazo del segmento AC pasa por justo por encima del punto D. Eso infunde la confianza suficiente como para que el estudiante no dude que D pertenece a AC. Los dos resultados distintos para la misma área ponen en evidencia que algo no va bien. Sin embargo, raramente las dudas se dirigen hacia el punto D. Hace falta una reflexión refinada para ver que no se puede confiar del todo en la percepción visual. Ver sirve para crear e intuir, pero no para demostrar.

Rooney, el librero británico que me vendió el ejemplar me obsequió una anécdota matemática en lengua inglesa cuya solución escribió al dorso de una tarjeta: *Why 11+2=12+1?*

La respuesta no es aritmética. Todo el mundo sabe que el resultado de sumar once más dos da lo mismo que sumar doce más uno. El porqué está en una correspondencia biyectiva, 1-1, entre las letras de una y otra suma. Con las mismas letras que se escribe *eleven plus two*, se escribe también *twelve plus one*. Ni una más, ni una menos.

Aunque formas y colores pueden ser iconos del recuerdo, más fuerte es la asociación entre aromas y experiencias pasadas. No olvidaré esos días marcados por el olor a hospital y el de la librería *Fine Books*. Este emana de las páginas del libro de Lucas cada vez que lo abro. Antes las líneas rojizas y acuosas de sus guardas me parecían hermosas. Ahora las veo como una expresión del dolor. Margarita, mi madre, ya no está. Su ausencia amarga estas adherencias. Me consuela un poco pensar que el de Lucas y un ejemplar de mi tesis fueron los dos últimos libros que sostuvieron sus manos.

ADHERENCIAS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en enero de 2011 y aceptado en abril de 2011 para su publicación.