suma+ 67
Junio 2011, pp. 27-40

Buscando modelos matemáticos: "El caso de las malas notas"

Es difícil encontrar situaciones cercanas en las que se pueda apreciar la importancia del trabajo con funciones y la modelización matemática. Presentamos una experiencia didáctica basada en un problema inicial sobre la de modificación de las notas de un examen utilizando diferentes modelos funcionales. La primera parte describe el trabajo previo de los profesores: primeras soluciones, generalizaciones, problemas análogos, etc. La segunda analiza la fundamentación didáctica de la propuesta para el aula para, a continuación, presentar varios ejemplos de actividades y tareas para el alumnado.

Palabras Clave: Modelización matemática, modelos funcionales, representación de funciones, resolución de problemas, matematización.

Searching mathematical models: "The bad marks case"

It is really difficult to find nearby situations in which you can appreciate the importance of working with functions and mathematical modelling. We present an educational experience based on an initial problem on modification of the marks of an exam using different functional models. The first part describes the previous work by some teachers: first solutions, generalizations, analogous problems, and so on... The second one analyzes the didactic basis of the proposal for the classroom to, then, submit several examples of activities and tasks for the students.

Key words: Mathematical modelling, functional models, representation of graphing functions, problem solving, mathematization.

Algunos modelos matemáticos

El origen de la experiencia lo podemos localizar en algunas de las actividades, unas cotidianas y otras no tanto, de cualquier profesor o profesora:

- Al modificar una nota final, a algún estudiante, en alguna sesión de evaluación.[1]
- Al participar en el proceso de selección de aspirantes a profesores[2] de Secundaria (obligatoria, ESO, y Bachillerato) y plantearse la modificación de las calificaciones obtenidas por los participantes.
- Al leer una revista de didáctica de las matemáticas y encontrarnos con una referencia expresa al problema del que estamos hablando, concretamente en Arcavi (2007) podemos leer:

> Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra/profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección de esta forma: si la calificación original era x, en una escala de 0 a 100, pasaría a ser $10\sqrt{x}$. Es decir, si la calificación inicial fue $x=81$, la corregida sería $y=90$.[3]

Este último párrafo nos interesó desde el primer momento, ya que mencionaba una función radical apenas mencionada en el aula (recíproca de una polinómica de segundo grado, muy utilizada en clase). También nos pareció motivador el uso de la teoría de funciones a la hora de enfocar las posibles soluciones del problema y, por último, nos animó a profundizar en el tema la conexión de la situación con el proceso de modelización matemática.

Algunos resultados matemáticos

Antes de pasar a presentar la propuesta didáctica, llevamos a cabo un estudio, desde un punto de vista puramente matemático, para descubrir, por nosotros mismos, los principales resultados que se pueden obtener a partir del problema inicial.

Abraham Arcavi
Weizman Institute, Israel.
Constantino de la Fuente Martínez
IES C. López de Mendoza. Burgos
Enrique Hernando Arnáiz
Colegio La Merced - Jesuitas. Burgos

En primer lugar, hay dos cuestiones que, aunque van apareciendo a lo largo del proceso, conviene acordar inicialmente:

- Por un lado, parece lógico que los modelos o factores de corrección f de los resultados de un examen deben cumplir lo que a partir de ahora denominaremos *la norma*: si el rango posible de notas es el intervalo $[a, b]$ se debe cumplir que, $f(a)=a$ que $f(b)=b$ y que $f(a)=a\leq f(x)\leq f(b)=b$, $\forall x\in [a, b]$, es decir, las notas corregidas no deben salirse del intervalo de notas permitidas.

- Por otra parte, otra condición que deberán cumplir nuestros modelos de corrección es la condición que llamaremos de *justicia:* una nota inferior en la prueba no puede resultar, una vez hecha la corrección, por encima de notas originalmente superiores, es decir, si $x_1<x_2 \Rightarrow y_1=f(x_1)<y_2=f(x_2)$. Esta condición puede controlarse fácilmente al hacer un estudio gráfico de la función de corrección pues la pendiente de la gráfica no puede ser negativa. ¿Será *justo* que la pendiente pueda ser cero, es decir, que notas inferiores igualen (no superen), una vez corregidas, a notas superiores? Admitiremos en un principio que no[4]. Otra cuestión a tener en cuenta en este punto es la siguiente: si la idea es que la nota corregida nunca sea menor que la original –queremos mejorar las malas notas, es decir, que el factor de corrección aplicado beneficie siempre al alumno–, tenemos que ampliar esta condición de "justicia" con una segunda condición (de muy fácil y eficiente verificación gráfica además): el gráfico de la función del factor de corrección que usemos no sólo debe ser monótono creciente (condición anterior), sino además estar por encima del gráfico de la función identidad $f(x)=x$ (salvo para el valor maximo, y algunas veces para el minimo, segun queramos o no aumentar el cero). Para el caso en que queramos bajar las notas de un examen muy fácil habría unos criterios análogos.

Centrándonos ahora en el problema inicial, el de Arcavi (2007), vamos a adaptar esa situación al contexto español. Las principales conclusiones de ello las presentamos en los siguientes enunciados:

- Como comentaba el profesor Arcavi[5], parece que un factor radical, como el que utilizó la profesora aludida en esta historia, no será de los primeros que nos vengan a la mente, al abordar la cuestión de la modificación de los resultados del examen. Lo normal es que empezásemos valorando modelos del tipo proporcional, mucho más sencillos, que conviertan la máxima nota que se obtuvo en la prueba, a, en el máximo valor posible a priori N, cambiando las demás de forma lineal; es decir, modelos del tipo[6]:

$$P_a^N(x)=\frac{N}{a}x$$

donde $x\in [0, N]$ es el valor de la nota original, y $P_a^N(x)$ el valor de la nota modificada, o también los que hemos visto utilizar a compañeros/as profesores/as:

– Subir a todos una misma cantidad fija c, $y=x+c$
– Aumentar un porcentaje, r, cada nota,

$$y=x+\frac{rx}{100}=\left(1+\frac{r}{100}\right)x$$

– Redondear la nota al número entero más próximo, que sea mayor que la nota, $y=Ent[x]+1$.

Sin entrar a valorar las debilidades y limitaciones de estos modelos, cuestión que dejamos como uno de los cometidos de la propuesta didáctica, sí señalaremos que son los que habitualmente surgen en clase al plantear esta cuestión.

Modelos con funciones radicales

Volviendo al modelo de corrección radical, si las notas conseguidas pueden oscilar en el intervalo $[0, N]$, siendo N la nota máxima, lógicamente, el modelo de corrección análogo al de la profesora israelí sería[7] $y=\sqrt{Nx}$ donde $y(0)=0$, $y(N)=N$, cuyo dominio es el intervalo $[0, N]$ y en la que imagen, rango o recorrido también se mantiene dentro de este intervalo[8]. En el caso de notas pertenecientes al intervalo $[a, b]$, tenemos que el factor de corrección análogo a $y=10\sqrt{x}$ será $f(x)=\sqrt{(x-a)(b-a)}+a$ con $x\in [a, b]$. Téngase en cuenta que f no existe para valores de x menores que a, ya que se cumple que: $(x-a)(b-a)\geq 0 \Rightarrow x(b-a)-a(b-a)\geq 0 \Rightarrow (b\neq a) \Rightarrow x(b-a)\geq a(b-a) \Rightarrow x\geq a$.

Además la función cumple la *norma,* es decir, $f(a)=a$, $f(b)=b$, es siempre creciente (por ser $b>a$), y cumple que la nota corregida que nos proporciona es siempre mayor que la original($\sqrt{Nx}>x$ siempre que $x<N$, lógicamente), condiciones que se deben cumplir en todos los factores de corrección. Este último modelo puede ser muy útil (y aprovechable) de obtener tras un interesante trabajo en la clase.

Por otra parte, si nos planteamos la construcción de otros modelos de corrección *análogos* a $y=\sqrt{Nx}$, podemos utilizar las ideas de Hofstadter (1990) sobre algunos aspectos del proceso de creación y descubrimiento en matemáticas, concretamente las que él denomina *giros de botón*[9]. En nuestro caso *las variables,* que son las que componen la estructura del problema inicial, serían: índice de la raíz, exponente de N y/o exponente de x. En este caso podríamos llegar a dos familias de modelos de corrección que cumplen *la norma*: dejar invariantes los valores 0 y N. Concretamente:

$$F_n(x)=\sqrt[n]{N^{n-1}x}, G_n(x)=\sqrt[n]{Nx^{n-1}} \text{ siendo } x\in[0,N]$$

Vamos a estudiar en profundidad las principales características de esta familia de factores, que hemos denominado F_n y G_n:

- $F_n(0)=0$, $F_n(N)=N$. También $G_n(0)=0$, $G_n(N)=N$.

- La forma en que varían estas funciones la apreciamos gracias a sus derivadas:

$$F_n(x)'=\frac{1}{n}\left(\frac{N}{x}\right)^{\frac{n-1}{n}}, G_n(x)'=\frac{n-1}{n}\left(\frac{N}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$$

en las que se descubre una curiosa simetría que parece dar pie al estudio del papel del coeficiente y del exponente en cada una de ellas.

- También se verifica que:

$$\lim_{x\to 0+} F_n(x)'=+\infty \text{ y } \lim_{x\to N-} F_n(x)'=\frac{1}{n}$$

Por tanto el crecimiento de F_n es mayor cuanto más cerca estamos de la nota 0 y menor cuanto más cerca estemos de la mayor nota, N.

- Por otro lado:

$$\lim_{x\to 0+} G_n(x)'=+\infty \text{ y } \lim_{x\to N-} G_n(x)'=\frac{n-1}{n}$$

- Si nos fijamos en las representaciones gráficas de algunas funciones F_n y G_n, figura 1, para notas en el intervalo cerrado [0, 10], que es el intervalo de variación de las notas en España, un sencillo estudio comparativo nos da idea del comportamiento de los factores de corrección en relación con la función $y=x$, que representa el factor de corrección identidad (el que no modifica la nota). Como podemos ver en la figura 1, los factores F_n aumentan cada vez más las notas, a medida que aumenta , contrariamente al efecto de los del tipo G_n, que las suben cada vez menos al aumentar el índice n. Esto lo podemos resumir utilizando la idea de límite:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)=\begin{cases}0 \;\; si \;\; x=0\\ N \;\; si \;\; x\in(0,N]\end{cases}; \lim_{n\to\infty} G_n(x)=G(x)=x$$

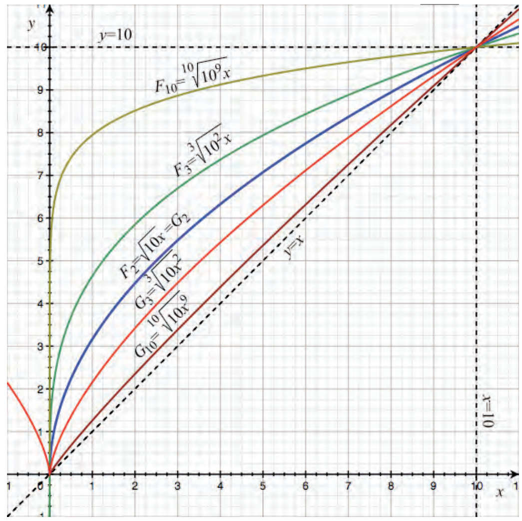


Figura 1

Podríamos decir que la función $F_2(x)=G_2(x)=\sqrt{10x}$ separa las funciones que tienden a llevar todas las notas a la nota máxima, las F_n, de las que tienden a dejarlas como estaban inicialmente, las G_n. Además el modelo $F_2 \equiv G_2$ es el único factor de corrección que pertenece a las dos *familias* de modelos.

- Otra cuestión de interés es averiguar, para cada n, la nota que se transforma en un *aprobado raspado*, $N/2$, para cada uno de los dos tipos de modelos, F_n y G_n. Resolviendo las ecuaciones:

$$F_n(x)=\frac{N}{2} \text{ y } G_n(x)=\frac{N}{2}$$

y obtenemos los valores de x para cada uno de los modelos:

$$F_n \longrightarrow x=\frac{1}{2^n}N, \text{ y para } G_n \longrightarrow x=\frac{1}{2^{n/n-1}}N$$

Al ir variando el índice del radical, podemos ver cómo se concretan los diferentes valores de x que se transforman en la menor nota satisfactoria:

$$\text{si } n=2 \longrightarrow x_F=\frac{N}{4}, x_G=\frac{N}{4}, \text{ si } n=3 \longrightarrow x_F=\frac{N}{8}, x_G=\frac{N}{\sqrt{8}},$$
$$\text{si } n=4 \longrightarrow x_F=\frac{N}{16}, x_G=\frac{N}{\sqrt[3]{16}}...$$

Se diría, por tanto, que los factores G_n no benefician tanto a las notas muy bajas, como los F_n. Con F_n aprueban notas menores que con G_n, excepto cuando $n=2$, en donde los dos factores hacen que aprueben las notas a partir del valor[11] $N/4$.

Como el factor verifica que si $x=N/2^n$ entonces $F_n(x)=N/2$ y como:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N}{2^n}=0$$

la nota que se transforma en $N/2$ puede ser todo lo pequeña que queramos, con tal de tomar un índice n suficientemente grande.

De forma análoga, como el factor G_n verifica que si:

$$x=\frac{N}{2^{n/n-1}} \text{ entonces } G_n(x)=\frac{N}{2} \text{ y como } \lim_{n\to\infty}\frac{N}{2^{n/n-1}}=\frac{N}{2}$$

la nota que se transforma en $N/2$ está tan cerca de $N/2$ como queramos, con tal de tomar n suficientemente grande, es decir, podemos hacer que se apruebe con la nota que nos parezca razonable, por debajo de $N/2$ y tan cerca de ese valor como queramos.

- También podemos plantearnos una situación distinta a la anterior, aunque relacionada con ella: encontrar el índice con el que se conseguirá que una determinada nota c se transforme en la menor nota de aprobado, $N/2$, tanto para los modelos F_n como para los G_n. Se trataría de calcular el índice n de la raíz para que se cumpla que si $c\in[0,\ N]$, entonces $F_n(c)=N/2$. Resolviendo la ecuación correspondiente, despejando n y teniendo en cuenta que es un número natural, debe ser:

$$n=Ent\left[\frac{Ln(N)-Ln(c)}{Ln(2)}\right]+1$$

Análogamente, haciéndolo para las funciones:

$$G_n(x)=\sqrt[n]{Nx^{n-1}} \text{ resulta } n=Ent\left[\frac{Ln(N)-Ln(c)}{Ln(N)-Ln(c)-Ln(2)}\right]+1$$

Como vemos, lo que hemos conseguido con estos resultados de n es que tengamos la seguridad de que:

$$F_n(c)\geq\frac{N}{2} \text{ y que } G_n(c)\geq\frac{N}{2}$$

sólo obtendremos la igualdad cuando c sea un valor para el que n sea un número natural, que no siempre lo tendremos asegurado; de ahí la necesidad de ayudarnos de la función parte entera.

- Otra cuestión interesante podría ser la siguiente: ¿Cuántas veces será mayor la nota corregida respecto de la antigua? Se trata de analizar los cocientes:

$$p=\frac{F_n(x)}{x}=\frac{\sqrt[n]{N^{n-1}x}}{x}=\left(\frac{N}{x}\right)^{n-1/n};$$
$$q=\frac{G_n(x)}{x}=\frac{\sqrt[n]{Nx^{n-1}}}{x}=\left(\frac{N}{x}\right)^{1/n}$$

Si lo queremos, por ejemplo, para p=2, podemos calcular x para que la nota modificada por F_n sea igual a $2x$. En este caso tendríamos:

$$x=\frac{N}{2^{n/n-1}}$$

Para el caso general, cuando:

$$p=\left(\frac{N}{x}\right)^{n-1/n}\Rightarrow x=\frac{N}{p^{n/n-1}}$$

Haciendo lo mismo para G_n, obtenemos que:

$$q=\left(\frac{N}{x}\right)^{1/n}\Rightarrow x=\frac{N}{p^n}$$

- El estudio anterior, aunque en algunos momentos pudiera parecer artificial, ha permitido familiarizarnos con los modelos F_n y G_n y, como resultado de todo ello, hemos encontrado una nueva familia de modelos que engloba a las dos anteriores y generaliza la situación. A estos nuevos modelos los denotamos por:

$$H_n^i(x)=\sqrt[n]{N^ix^{n-i}} \quad n\in\mathbb{N},\ i\in\{0,\ 1,\ 2\ \ldots\ n-1\}$$

En este nuevo *contexto*, generalización de los modelos F_n y G_n, volvemos a situar los factores de corrección conocidos hasta ahora, verificándose que:

- Para i=1, obtenemos los factores G_n.
- Para $i=n-1$, obtenemos los factores F_n.
- Para $i=n/2$, obtenemos el factor $F_2=G_2$.
- Para i=0, obtenemos el factor Identidad $y=x$.

De esta forma, hemos conseguido generalizar el modelo de corrección de notas que, inicialmente, era una función radical de índice dos, a una familia de funciones, del mismo tipo o análogas, que contiene a todas las obtenidas anteriormente.

- Por último, si las notas de un examen se distribuyen en el intervalo $[0,\ a]$, siendo $a<N$ la máxima nota obtenida en la prueba, podemos encontrar un factor de corrección análogo a los anteriores que transforme la nota a en la máxima nota posible a priori, N, y a las demás notas las modifique como lo hace el factor radical. Este factor será:

$$\mathrm{H}_{n,a}^i=\frac{N}{a}\sqrt[n]{a^ix^{n-i}}=N\sqrt[n]{\left(x/a\right)^{n-i}}=N\left(x/a\right)^{\frac{n-i}{n}}$$

Como podemos observar, el factor $H^{i}_{n,a}$ es el resultado de operar, mediante la composición de funciones, los modelos:

$$P_a^N(x)=\frac{N}{a}x \text{ y los } H_n^i(x)=\sqrt[n]{N^i x^{n-i}}$$

es decir, que:

$$H^i_{n,a}(x)=H^i_n\left[P_a^N(x)\right]$$

El colofón de todo lo anterior es una línea de trabajo que simplemente dejamos apuntada y que es muy interesante:

Si las notas del examen fueran muy altas y la profesora quisiera modificarlas a la baja; es decir, deseara disminuir los valores de las calificaciones obtenidas, ¿qué modelos podría utilizar?

Después del estudio anterior, la respuesta es sencilla: las funciones recíprocas de las anteriores, para la composición de funciones, sirven para ese cometido, ya que son funciones potenciales, polinómicas[11], y son simétricas de las funciones radicales respecto de la bisectriz del primer cuadrante, por lo que sirven para disminuir los valores de las notas.

Llegados a este punto podría parecer que el tema está agotado, pero no es así. Siguen apareciendo nuevas preguntas que surgen de manera natural:

¿Podrían servirnos, como modelos de corrección de las notas de ese examen, otros tipos de funciones?

La respuesta a esta pregunta nos ha permitido obtener unos cuantos resultados nuevos, algunos de ellos realmente curiosos, a la vez que nos ha obligado a profundizar en el tema y a utilizar de nuevo los *giros de botón*. Para no extender excesivamente el artículo, presentamos los principales resultados conseguidos:

Modelos con funciones logarítmicas

Deben ser funciones f de tipo logaritmo, que cumplan, por supuesto, *la norma*: $f(0)=0$; $f(N)=N$, y no sean decrecientes en ningún intervalo de su dominio. Podrían ser de la forma[12] $f(x)=\log_a(bx+1)$, $(a>1)$. Claramente $f(0)=0$. Para que $f(N)=N$ se debe cumplir:

$$\log_a(bN+1)=N \Rightarrow a^N=bN+1 \Rightarrow b=\frac{a^N-1}{N}$$

Por tanto podemos considerar la función, que depende de la base a, a la que podemos denotar por:

$$f_a(x)=\log_a\left(\frac{a^N-1}{N}x+1\right)$$

Para el caso de disminuir las notas, podríamos considerar la correspondiente función exponencial[13] (figura2).

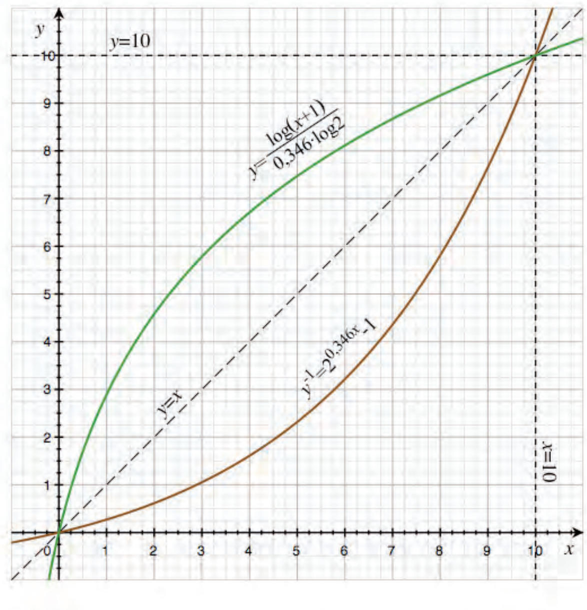


Figura 2

Modelos con funciones trigonométricas

La búsqueda de funciones trigonométricas que respondan a la cuestión inicial del cambio de notas es un problema muy interesante desde el punto de vista matemático y, con la ayuda de un programa informático de representación gráfica, podemos hacer que el proceso tenga características experimentales, sea mucho más ágil y nos permita identificar de forma rápida los modelos que son coherentes con la situación inicial y la resuelven; posteriormente vendrá el análisis de los puntos fuertes y débiles de cada modelo. Aquí vamos a presentar algunas familias de modelos de este tipo que, con el fin de dar la mayor generalidad posible, se han obtenido dependientes de un parámetro:

- La primera de las familias de modelos trigonométricos son las de la forma:

$$T_p^N(x)=x+p\cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right)$$

Estas funciones satisfacen las condiciones acordadas al principio (los valores 0 y N son invariantes) y, dependiendo del valor de p pueden dejar de ser válidas. Analizando sus representaciones gráficas, para el caso N=10 y algunos valores de p, en la figura 3 podemos ver que, para ciertos valores de p, las funciones tienen máximo en el intervalo abierto (0, 10), lo que las invalidaría para resolver el problema por dos razones: la imagen o recorrido de la función se sale del intervalo [0, 10] y, además, la función no es siempre creciente en su dominio, que era la condición de *justicia* acordada inicialmente.

Se pueden calcular los valores del parámetro p para los que estas funciones tienen sentido como respuesta al problema inicial. La respuesta a esta cuestión es p=10/π, que es el mayor valor para el que la función:

$$T_p^N(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right) \text{ verifica que } T_p^N(x) \leq 10,\ \forall x \in [0,\ 10]$$

Además, estas funciones alcanzan el máximo para:

$$x = \frac{10}{\pi} \cdot arc\cos\left(\frac{-10}{\pi \cdot p}\right)$$

que es el valor que anula a la primera derivada de T_p^N.

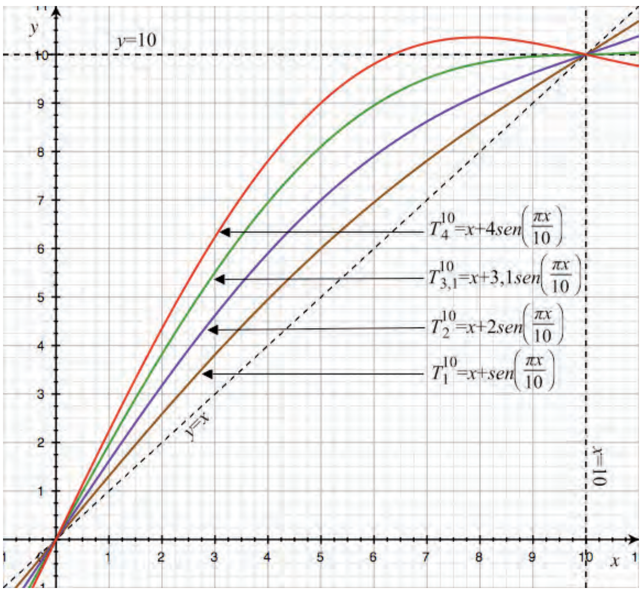


Figura 3

- La otra familia de modelos trigonométricos es la dada por la ecuación:

$$S_p^n(x) = x + p - p\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{N}\right)$$

Estas funciones también verifican las condiciones impuestas inicialmente, ya que los valores 0 y N son invariantes, pero, en función de los valores de p, pueden dejar de ser válidas si dejan de ser estrictamente crecientes. Como vemos en la figura 4, para N=10, el cálculo de los posibles valores del parámetro p, para los que el modelo es adecuado a la realidad, es un bonito problema para el que podemos dar algunas orientaciones que ayuden a su resolución: las funciones sirven y no tienen máximo si p<5/π.

Para los valores p≥5/π las funciones tienen máximo aunque su imagen sigue siendo el intervalo [0, 10]; estas funciones podrían valer si relajamos la condición de ser estrictamente creciente en todo el intervalo. Por último, utilizando un programa informático de representación gráfica, podemos ver que para p≈2,2, la función alcanza el máximo en el valor x=6,3386 y su imagen es aproximadamente 10. Para los valores de p mayores que el anterior, la imagen de la función correspondiente se sale del intervalo [0, 10], por lo que no es válida.

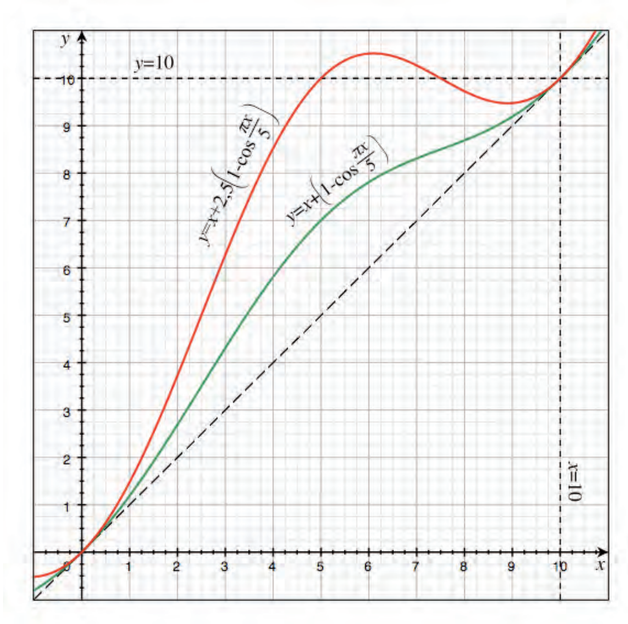


Figura 4

Nos queda responder a la cuestión inversa: ¿qué funciones podrían resolvernos el problema de bajar las notas? En el caso de las funciones trigonométricas, vamos a presentar algunos de los modelos que nos lo resuelven:

$$T_p^N(x) = x - p \cdot sen\left(\frac{\pi x}{N}\right);\ S_p^n = x - p + p \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{5}\right)$$

Queda para el lector la tarea de averiguar los posibles valores de los parámetros, para los que la función correspondiente se adapta a las condiciones del problema real. También es muy interesante, para la clase, trabajar los distintos sistemas de medida de ángulos y ver la necesidad de utilizar el radian como unidad.

Algunos modelos para la ficción

Las conexiones entre el mundo real y el mundo matemático nos desvelan, a veces, una multitud de posibilidades que, aunque no sean válidas desde el punto de vista de la realidad, desde el punto de vista matemático formal son coherentes y podrían ser válidas en *otras realidades.* ¿Qué queremos decir con esto? Nos estamos refiriendo a situaciones de ficción, que surgen de manera natural cuando nos adentramos en la realidad. Por ejemplo:

¿Hay modelos de corrección de notas que aumenten unas y disminuyan otras?

Proponemos a nuestros lectores el estudio de la familia de funciones de la forma:

$$G_p^n(x) = x + p \cdot sen\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{N}\right)$$

Presentamos las representaciones gráficas de algunas de ellas, para que se puedan observar las modificaciones que producen en las notas de la prueba. Como puede observarse en la figura 5, tomando N=10 y valores de p>0, aumentan las notas pertenecientes al intervalo [5, 10) y disminuyen las pertenecientes al intervalo (5, 10], quedando el valor 5 como un invariante de las funciones, además de ser el valor en que se encuentra el punto de inflexión del interior del intervalo [0, 10].

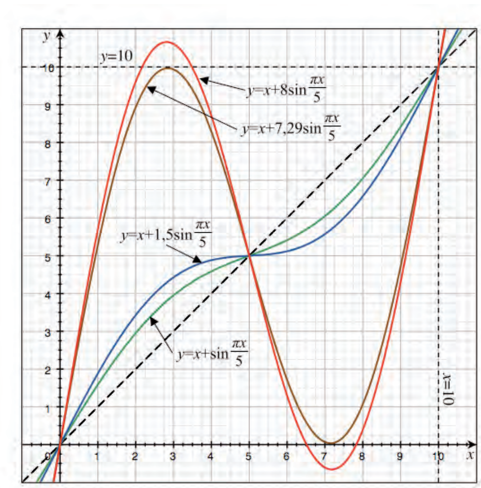


Figura 5

Como podemos ver, p no puede tomar cualquier valor, pues puede ocurrir que la imagen de la función no se mantenga en el intervalo [0, 10]. Dejamos al lector el estudio de los posibles valores del parámetro y lo que ocurre cuando tomamos valores p<0.

Para acabar con este apartado de *ficción*, qué mejor que presentar un modelo absolutamente caprichoso, para un profesor o profesora de *ficción* y unos estudiantes también de *ficción*. Nos estamos refiriendo a la función[14] $y = x + \text{sen}(\pi x)$, de la que presentamos su gráfica[15] en la figura 6.

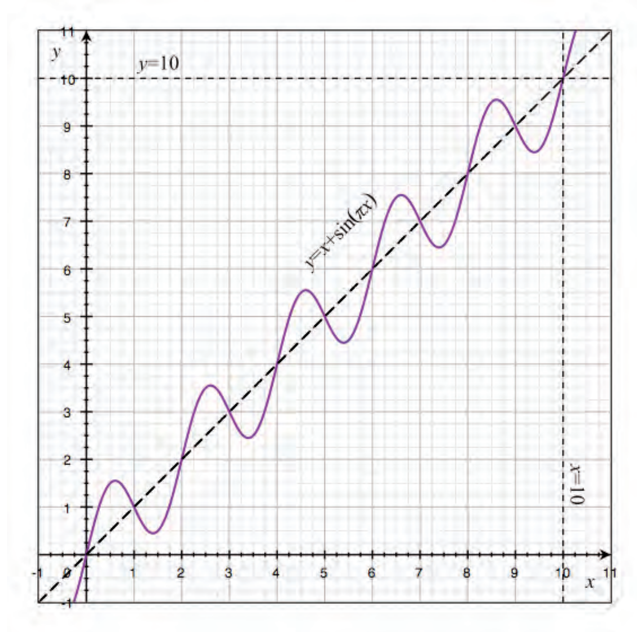


Figura 6

Propuesta para la clase

Fundamentación didáctica

Comenzaremos recordando la situación inicial:

> Un estudiante de escuela secundaria regresó a su hogar contando que su maestra/profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección de esta forma: si la calificación original era , en una escala de 0 a 100 , pasaría a ser . Es decir, si la calificación inicial fue x=81, la corregida sería y=90[16].

El enunciado responde perfectamente a la idea de *problema semilla*, de Davis y Hersh, (1988) y resaltamos esto porque tiene mucho interés y utilidad para clase. En ningún caso como en este ejemplo se puede ver cómo de la semilla se produce un bosque entero:

> Comienzo con un enunciado inicial, al que llamaré "semilla". Este enunciado ha de ser interesante y muy sencillo. El ejercicio tiene por propósito regar la semilla y hacerla crecer y convertirse en una planta recia. De ordinario ofrezco a mi clase una variedad de "simientes", y ellos eligen la que quieren regar, en función de su experiencia[17].

Por otra parte, como se ha podido ver a lo largo de la exposición de los resultados matemáticos previos, la situación inicial es un ejemplo típico de modelización matemática, entendida como una de las competencias matemáticas que aparecen, entre otros, en Niss, (2003) y OCDE, (2004). Más adelante, en la propuesta didáctica, se intenta trabajar todas las capacidades incluidas en la competencia de *modelar matemáticamente.*

Partiremos de la noción de modelo matemático extraída de Davis y Hersh, (1988):

> Un modelo matemático es cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones matemáticas, diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad. Tal prototipo puede ser una entidad física, biológica, social, psicológica o conceptual; tal vez, incluso, otro modelo matemático.
>
> El término ecuaciones puede ser reemplazado por el de *estructuras* pues no siempre se trabaja con modelos numéricos[18].

Sobre el proceso de modelización matemática, debemos tener en cuenta que, en la actualidad se están dando pasos importantes en la descripción del mismo, sobre todo en lo referente a los procesos mentales que el estudiante pone en marcha en sus distintas fases, así como en los bloqueos que pueden surgir en algunos momentos.

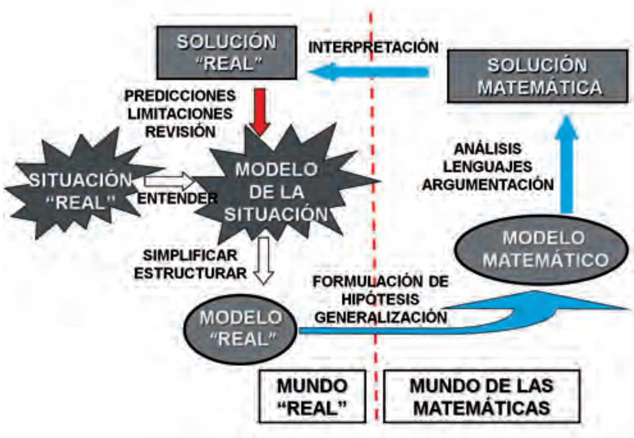
Para representar el proceso completo de modelización, vamos a utilizar una adaptación del esquema de Blum (2005), que mejora la anterior propuesta de Blum y Niss (1991). En esta representación aparece una nueva subdivisión de la parte del mismo que describe el proceso en el mundo *real*; esto, que anteriormente no se había descrito explícitamente, profundiza en varios aspectos que evidencian la complejidad de la realidad.

Sin entrar a analizar en profundidad el proceso de modelización, sólo señalar dos elementos de interés:

a) el paso del modelo real al modelo matemático también es denominado matematización horizontal y es cuando se conecta el mundo real con el mundo matemático;

b) la conexión entre el modelo matemático y la solución matemática es denominada como matematización vertical, que se produce dentro del mundo de las matemáticas.

Lo presentamos[19], a continuación, acompañado de algunos procesos mentales que aparecen en cada uno de los momentos y que, desde nuestro punto de vista, son muy importantes en cada fase:



Por otra parte, en la propuesta didáctica también ocupa un papel importante *la contextualización* como forma de conexión entre lo académico y lo cotidiano[20], que aparece en Arcavi (2002) expresado de la manera siguiente:

> Es notablemente evidente el éxito de este enfoque [matematización]. No obstante, la matematización aparece como una vía de sentido único: desde lo cotidiano a lo académico. Propongo considerar otra idea que podría resultar importante cuando se trate de conectar significativamente lo académico con lo cotidiano: la noción de contextualización. La contextualización va en sentido opuesto de la matematización, pero la complementa. Así, para dar significado a un problema presentado con vestido académico, se puede recordar, imaginar o, incluso, construir un contexto, de manera tal que las particulares características contextuales sirvan de andamio y ampliación de las matemáticas relativas a dicho problema [21].

Para aquellos lectores que tengan dudas sobre si la contextualización siempre se da entre el mundo matemático y el mundo real, él mismo nos ha aclarado la idea:

> Concuerdo con que la contextualización puede ser un nexo entre dos situaciones o temas cualesquiera y no necesariamente cuando uno de ellos es de la "vida real", sino cuando una sirve de contexto (o de modelo) para la otra[22].

Otro aspecto fundamental es la búsqueda de conexiones entre diferentes contextos y estructuras matemáticas, que es una actividad esencial en todo proceso de investigación matemática. Para mostrarlo, vamos a apoyarnos en las ideas de Cañón (1993) sobre el papel de las conexiones en el proceso de creación y descubrimiento en matemáticas:

> Los nuevos objetos sólo llegan a serlo si el mundo de los objetos y relaciones anteriormente existentes encaja dentro de lo nuevo. En la actividad del matemático, *su alumbramiento* requiere una familiaridad previa con el universo de relaciones con el que trabaja, y su aportación consiste precisamente en ofrecer la explicitación de nuevas conexiones, nuevos niveles de abstracción desde los que resituar lo ya conocido[23].

Las conexiones nos permiten, entre otras cosas, encontrar nuevos contextos en los que dar sentido a las ideas matemáticas, reformularlas, transformarlas, situarlas en un nuevo marco y allí estudiarlas. Por eso al trabajar las conexiones estamos profundizando, también, en la contextualización.

> La creación se manifiesta de varios modos conducentes a alumbrar relaciones y objetos no existentes –no expresables en lenguaje- anteriormente. El descubrimiento consiste, sin embargo, en hacer patentes las relaciones entre lo nuevo y lo heredado y eso se da en el lenguaje[24].

> Lo nuevo sólo entra a formar parte del universo matemático en la medida en que sus nexos con lo originario se hacen patentes. Por eso, los avances son siempre de la creación de lenguajes que faciliten esta tarea y junto con ellos, nuevos métodos de demostración y posibles principios de validación de esas nuevas formas de demostración[25].

Como podemos ver en las dos últimas citas, el *alumbramiento de relaciones y objetos* forma parte del proceso creativo, y el descubrimiento se sitúa a partir del encuentro de conexiones entre los dos contextos, el inicial y el nuevo, jugando, el lenguaje, un papel muy importante, ya que nos permite expresar y hacer entendibles esos nuevos objetos, las relaciones y los métodos propios.

Por otra parte, también creemos que este tipo de búsqueda aparece, con mayor intensidad, en la fase de *matematización vertical* del proceso; es decir, dentro del campo de las matemáticas, en contraposición con la *matematización horizontal*, que intenta encontrar las leyes generales y regularidades del *modelo real.*

Por último, señalaremos que la propuesta didáctica quiere hacer de la resolución de problemas y la investigación matemática los ejes principales de su desarrollo, entendiéndolos no sólo como una *opción metodológica o didáctica* para la clase de matemáticas, sino como una *opción epistemológica*[26], una forma de entender y mostrar la estructura del conocimiento matemático, y una forma de aprenderlo. A este respecto, conviene recordar las ideas de Legrand (1996) sobre *el debate científico en clase de matemáticas:*

> Un principio epistemológico: aquel que no haya tenido realmente la ocasión de jugar con auténtica libertad un verdadero juego científico, no tendrá muchas ocasiones de interesarse por los razonamientos esenciales de la ciencia, de comprender la amplitud real de los resultados que establece (comprender la potencia, pero también los límites, de estos algoritmos y formas de pensar) y a continuación, explotar pertinentemente sus resultados para resolver más científicamente los problemas que se le presenten[27].

Propuesta didáctica

La propuesta didáctica se puede plantear a partir del 4º cursode Educación Secundaria Obligatoria (ESO), aunque los modelos y problemas más complejos son más adecuados para alumnos/as de Bachillerato que pueden hacer uso de sus conocimientos de análisis matemático para resolver algunas cuestiones de mayor dificultad.

Por otra parte, la propuesta responde a unos planteamientos que, en la medida de lo posible, vamos a intentar hacer explícitos en las líneas que siguen.

Objetivos, metodología y orientaciones didácticas

En primer lugar vamos a enumerar los principales objetivos que nos proponemos. Éstos son los siguientes:

- Profundizar en el conocimiento de algunos modelos funcionales que habitualmente se trabajan menos en clase: radicales, logarítmicos y trigonométricos.
- Practicar la modelización matemática como una de las competencias matemáticas más importantes conectada al proceso de matematización de la realidad.
- Reflexionar sobre la utilidad e idoneidad de los modelos matemáticos utilizados, haciendo explícitas sus limitaciones y proponiendo modificaciones que los hagan más adecuados a la situación y a las condiciones que se tengan.
- Utilizar programas informáticos de representación gráfica, valorando su potencia como herramientas indispensables en el quehacer matemático y el tratamiento de algunas situaciones.
- Contribuir al desarrollo de la competencia matemática que hace referencia a la habilidad para comunicarse con las matemáticas y comunicar sobre las matemáticas.
- Acercar al alumnado al verdadero rostro de las matemáticas, a los modos y métodos de trabajo específicos de resolución de problemas, cuando se llevan a cabo pequeñas investigaciones.
- Preparar a nuestros estudiantes para la *invención*, incrementando el gusto por ella y regando sus *gérmenes inventivos* [28].
- Diseñar modelos matemáticos cuyo resultado cumpla ciertas premisas establecidas de antemano[29].

En segundo lugar, la metodología a emplear, entendida en su acepción etimológica como *camino* a seguir para conseguir los objetivos, tiene unas características que se concretan en las siguientes ideas:

- Los contenidos que se trabajan van aumentando gradualmente su complejidad y abstracción: desde los modelos funcionales más pegados a la realidad, se van introduciendo otros menos habituales hasta llegar a algunos que, aunque no son propios de la vida cotidiana, son igualmente válidos desde el punto de vista matemático y formal.
- El uso del ordenador y de programas de representación gráfica facilita mucho las tareas y provoca en el alumna-

do una actitud muy positiva para seguir investigando, mejorando los modelos y preguntándose cuestiones de mayor dificultad y complicación.

- La forma de trabajo del alumnado en clase es en pequeños grupos, entre dos y cuatro componentes. En ellos elaborarán un documento colectivo que servirá para la evaluación. Posteriormente, en la parte final, de mayores complicaciones, se propondrá pasar al trabajo individual, en función del interés suscitado en el alumnado. En esta fase, los alumnos/as que tengan interés en profundizar en los modelos, llevarán a cabo un informe individual, en el que recogerán los resultados conseguidos, que también servirá para la evaluación de los aprendizajes y su conexión con el desarrollo de las competencias matemáticas.
- El papel del profesorado se vertebra alrededor de dos aspectos fundamentales: por un lado plantea secuencialmente las cuestiones y problemas a resolver, y por otro orienta a los grupos en las dificultades y en los resultados que vayan encontrando, estimulando al alumnado a seguir profundizando y a que se planteen ellos mismos las preguntas y busquen las respuestas más adecuadas.
- El ambiente del aula es de enorme interacción entre el alumnado, en los grupos de trabajo, y entre éstos y el profesorado. Las periódicas puestas en común dirigidas por el profesorado facilitan la reestructuración de los esquemas mentales, la reflexión personal de cada alumno o alumna y, por tanto, el aprendizaje significativo.

Como decíamos más arriba, el trabajo en clase debe ir acompañado de una reflexión previa en la que tomemos algunas decisiones sobre, entre otros, estos asuntos:

- Nivel académico en el que se va a desarrollar la experiencia didáctica. Esta propuesta no está destinada, en un principio, a ser puesta en práctica en un nivel único y concreto, depende del tipo de funciones que se utilicen a modo de “modelos de corrección de los resultados del examen” y de lo que se pretenda hacer con ellas: medias, porcentajes, gráficas, inversas, comparaciones, propiedades y, para niveles superiores, límites y derivadas.
- Objetivos didácticos que nos planteamos. En función del contexto de la clase y de las intenciones que nos planteemos, podemos llevar a cabo la propuesta con mayor o menor profundidad. Lo que es claro es que puede ser adecuada para profundizar en algunos de los tipos de funciones que, por lo general, menos aparecen en los niveles de ESO y Bachillerato: las funciones radicales (a las que hemos dedicado fundamentalmente nuestro estudio) y las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas diferentes a las típicas, pues nuestro objetivo será determinar sus argumentos, ajustar sus gráficas a unos fines realistas y, en definitiva, crear nuestras propias herramientas, más que trabajar con otras ya dadas.
- La metodología que vamos a emplear. Conviene tener claro si vamos a trabajar en grupos, en parejas o de forma individual, así como el papel de profesor y alumnado en el proceso, el uso de nuevas tecnologías, etc.
- Actividades previas de modelado. Si la temporalización lo permite, sería también aconsejable realizar algún ejercicio previo como ejemplo de modelado con funciones, como pueden ser el del forense de la policía científica, tan en boga en las series televisivas actuales, en las que, usando las longitudes de los fémures humanos hallados en el macabro escenario de un crimen, pretende estimar la estatura de aquellos a los que pertenecieron; el del fabricante de camisas que debe relacionar el tamaño del cuello con el de los puños, a fin de que entren en los márgenes tolerables para una determinada talla, etc.

Podemos concretar estas actividades haciendo que los chicos y chicas obtengan una colección de datos experimentales lo suficientemente variados y realizando, con dichos datos, pequeños ejercicios para intentar aproximar la relación entre las dos variables que se ponen en juego usando una función como modelo, así como intentando comprender y discutiendo lo que significa que el modelo se ajuste mejor o peor a la situación que se está trabajando. ¿Qué queremos decir con que el modelo se ajusta bien o mal? ¿Cómo medir lo fino que es ese ajuste?

Sería interesante llegar a acuerdos: establecer algunas normas de “baremo” y unos criterios que nos permitan, por consenso, decidir qué grupo ha estado “más cerca” de los datos experimentales.

Por el camino, aprendemos a dibujar e interpretar (y podemos comprobarlo en el ordenador) las gráficas que van saliendo, analizar los tipos de ajustes…

Algunos ejemplos de actividades

Después de haber elaborado un marco de referentes didácticos, pasamos a la acción llevando la propuesta concreta a la clase. Comenzamos planteando el problema origen de esta propuesta, el de la profesora israelí:

Actividad 1

Una estudiante de escuela secundaria israelí regresó a su hogar contando que su profesora de matemáticas estaba descontenta con las calificaciones de sus alumnos en una prueba escrita que habían realizado sobre funciones, atribuyéndolo a que quizá las preguntas propuestas habían sido un tanto difíciles. La maestra decidió “ajustar” esas calificaciones usando un factor de corrección en forma de función, $y = f(x)$, en el que la calificación original, en una escala de 0 a 100, usual en aquel país, era x y pasaría a ser y una vez corregida. Es decir, si la calificación inicial fue x=81, la corregida sería y=f(81). ¿Qué factores de corrección podemos proponer a la profesora para que modifique las notas? Expresarlos en forma algebraica y representarlos gráficamente. Analizar las ventajas e inconvenientes de cada uno.[30]

Aplícalos a los resultados siguientes de un examen en una clase de 25 alumnos y alumnas y analiza su idoneidad:

Notas demasiado bajas	1'5	3	2'5	6	4'5	7'25	3'75	5'5	3'5
	6	4'5	5	1'5	3	0'25	2	4	
$\bar{x} = 3'75$	5'5	4	3'25	4'75	2'75	4'25	3'5	2	

¿Cómo afectan los cambios a la media aritmética de las notas?

Actividad 2

La maestra decidió "ajustar" esas calificaciones usando un factor de corrección: si la calificación original era x (en una escala de 0 a 100), ésta devendría en $10\sqrt{x}$. Es decir, si la calificación inicial fue 81, la corregida sería 90. Aparentemente, este factor es común entre los maestros en Israel.

Adapta el factor de corrección de la maestra israelí a nuestro país, donde las notas están entre 0 y 10. Exprésalo algebraicamente y haz su representación gráfica. Analiza sus ventajas e inconvenientes respecto a los anteriores.

Para que puedas analizar otras opciones relacionadas con la de la maestra israelí, te proponemos el factor de corrección siguiente: a cada nota le asignamos la media aritmética entre ella y la nota máxima posible. Este factor regala la mitad de la distancia que hay entre la nota original y la máxima.

¿Qué factor es más beneficioso para los estudiantes, la media aritmética entre la nota original y la máxima o la media geométrica entre ellas?

Ampliando el estudio anterior, investiga lo que es la media armónica de dos valores y compárala con la media aritmética y la media geométrica. ¿Cuál es la más beneficiosa?

Actividad 3

Averigua el factor equivalente al de la actividad anterior para los casos en los que el intervalo de posibles calificaciones que un estudiante puede obtener en el examen sean los siguientes:

Intervalo de notas	Factor de corrección
[0, 100]	$y = 10\sqrt{x}$
[0, 10]	$y = \sqrt{10x}$
[−5, 5]	
[10, 50]	
$[a, b]$	

Actividad 4

¿Podríamos variar este factor para obtener otros similares? Prueba introduciendo algún cambio en su expresión algebraica: índice de la raíz, exponente de 10 o exponente de x. Analiza las características de cada uno, su idoneidad y sus limitaciones.

Las actividades siguientes proponen profundizar en los modelos de corrección de tipo radical, explorando y descubriendo sus principales propiedades. Pasamos directamente a la actividad en la que se propone otro cambio de modelos.

Actividad 9

Construye algún factor de corrección de tipo logarítmico que sirva para mejorar las calificaciones de un examen respetando las condiciones estipuladas.

Actividad 10

Comprueba que las siguientes funciones trigonométricas:

$$y = x + \left(1 - \cos\frac{\pi x}{5}\right) \text{ e } y = x - \left(1 - \cos\frac{\pi x}{5}\right)$$

también se pueden usar a modo de factores de corrección.

¿Qué tipo de situación problemática en cuanto a los posibles resultados "extraños" de un examen podría resolver cada una?

Haz sus representaciones gráficas y analiza las semejanzas y diferencias que hay entre ellas.

Las actividades siguientes profundizan en los modelos trigonométricos hasta donde se pueda con los estudiantes, teniendo presente que se puede trabajar un mayor nivel de profundización encomendando, a alguno de ellos, la elaboración de algún trabajo monográfico sobre el tema; esto suele dar muy buenos resultados.

Englobamos en la actividad siguiente algunas de las cuestiones posteriores, para no alargar el documento.

Actividad 14

El objetivo principal de las actividades anteriores ha sido subir las notas de un examen, utilizando para ello una familia de funciones como factores de corrección. Para completar el estudio nos vamos a estudiar otras posibilidades que podíamos habernos encontrado:

¿Habrá factores de corrección para bajar las notas de un examen muy fácil?

¿Habrá factores de corrección que aumenten o disminuyan de una forma distinta a como lo hacen las funciones anteriores?

¿Habrá factores de corrección que aumenten unas notas y disminuyan otras?

¿Habrá factores de corrección que aumenten unas notas y disminuyan otras de manera caprichosa, por ejemplo, que aumente las notas entre 0 y 1, disminuya las notas entre 1 y 2, y así sucesivamente?

Conclusiones

Pensamos que uno de los desafíos en la didáctica de la modelización es encontrar situaciones interesantes para los alumnos, de manera que no sólo les motiven, sino que el mundo que se está modelando les sea conocido y, por lo tanto, puedan aportar preguntas, creatividad, etc. más allá de situaciones modelizables que les sean más extrañas, o que requieran conocimientos de base que ellos no tienen, que duplicarían el esfuerzo que ya les supone a los alumnos este tipo de trabajos/investigaciones lamentablemente no muy habituales en clase de matemáticas.

Por otra parte, es bastante complicado intentar reflejar toda la riqueza de la experiencia en unas pocas páginas. Por nuestra parte lo hemos intentado, aunque quizás queden muchos detalles implícitos; si fuera así pedimos disculpas por ello. En cualquier caso, deseamos acabar enumerando una serie de conclusiones[31], que pensamos pueden ser útiles para los profesores y profesoras interesados en estos temas, centrándonos en dos aspectos: a) ideas para el profesor/a sobre las actividades y tareas a proponer al alumnado; y b) sobre el trabajo del profesor/a en este tipo de procesos y con este enfoque:

Sobre las características de las actividades que propongamos a la hora de trabajar en clase, debemos señalar las que nos parecen más reseñables:

- Adecuadas para el uso de la particularización, la analogía y la generalización.
- Susceptibles de variaciones y modificaciones.
- Con pocas variables y que sean fácilmente medibles.
- Propicias para un trabajo posterior a su resolución.
- Surgidas de la realidad, pero no exclusivamente.

Por último, algunas orientaciones que pueden sernos útiles a la hora de plantearnos llevar a la práctica algunas de las ideas presentadas. El profesorado debe:

- Practicar la resolución de problemas con un marco teórico adecuado.
- Conocer la estructura matemática que subyace en cada problema o situación a plantear, excepto en alguna investigación más profunda.
- Plantearse, en sus objetivos para cada curso, trabajar dos o tres de estas tareas.
- Elegir la forma de trabajo que crea más idónea para cada problema o situación.
- Tener como objetivo prioritario el proceso que se genera a partir del problema semilla, no la solución de la actividad.
- Ser consciente de que casi todos los problemas y situaciones pueden hacerse ideales.
- Tener en cuenta que los conceptos de “problema real” o “realidad matematizable” son subjetivos.

Y uno de los ingredientes más importantes de nuestro trabajo*: el entusiasmo del profesorado, el disfrute personal con lo que decimos y hacemos en clase, son virus muy contagiosos para bastantes estudiantes.* ■

NOTAS

1 Por ejemplo, si subimos un punto la nota de algún alumno, pasar de un 4 a un 5 supone un aumento de un 25% en la nota; en cambio pasar de un 9 a un 10 supone un aumento de algo menos de un12%. En España las calificaciones se sitúan entre 0 y 10 puntos.

2 Este proceso, en España, se denomina cotidianamente *participar en un tribunal de oposiciones*. El tribunal lo componen 5 profesores y lo de oposiciones es para ilustrar la idea de que se compite con el resto de los participantes para obtener una de las plazas de profesor convocadas.

3 Arcavi, A. (2007). *El desarrollo y el uso de los símbolos*, p. 73.

4 Cuando, posteriormente, se trabajen modelos más complicados, y para favorecer que aumente el número de factores que se pueden variar y de tipos de funciones con los que trabajar, sería interesante que se permita a los alumnos utilizar todo tipo de modelos, aunque la función sea decreciente en algunos intervalos. Algunos de nuestros ejemplos más complejos tampoco cumplirán esta norma de *justicia*.

5 En su conferencia plenaria, dentro de las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (XIII JAEM), julio de 2007, Granada, España.

6 En el caso de que alguna nota haya alcanzado el máximo valor posible, a=N,

$$P_N^N(x)=\frac{N}{N}x$$

el factor es el factor identidad, que no modifica la nota.

7 Este modelo de corrección de las notas no es otra cosa que la media geométrica entre la nota máxima posible y la nota obtenida (lo cual ya a una indicación cualitativa del "lugar" al que llegará esa nota, es decir, será más alta que la original pero menor que ~~la~~ mitad entre ésta y la máxima, que sería la media aritmética.

8 En el caso español, el factor análogo es $f(x)=\sqrt{10x}$, $x\in[0, 10]$

9 Hofstadter, D. R., (1990). Analogías con fluidos y la creatividad humana, pp. 89-90. Textualmente, las ideas de Hofstadter son las siguientes:

> El aspecto más importante del descubrimiento matemático (contrariamente a la imagen habitual que se tiene de la demostración como el núcleo de las matemáticas) es la construcción de nuevos conceptos, uno detrás de otro, generalizando cada vez algún aspecto de los anteriores. Por supuesto, cada construcción tiene propiedades que no pueden ser controladas, sino tan sólo descubiertas, en este sentido las matemáticas combinan la invención y el descubrimiento.
>
> La mayor parte de los nuevos conceptos se producen mediante ciertos tipos de recetas no escritas que todos los matemáticos entienden intuitivamente, y que normalmente se pueden caracterizar por gloriosos giros del botón; esto es, partir de un fenómeno familiar, encontrarle algún aspecto que hasta ahora había permanecido fijo (éste sería el botón) convertir explícitamente este aspecto en una variable, y ver qué sucede cuando toma valores distintos del habitual.

10 Cuando n=2 ambos factores de corrección coinciden $F_2(x)=G_2(x)$ como habíamos comentado anteriormente.

11 Por ejemplo, para las funciones $F_2(x)=G_2(x)$ la recíproca es $y= x^2/N$.

12 También podíamos tomar la forma $y = b\cdot\log_a(x+1)$. En este caso debe ser

$$b=\frac{N}{\log_a(N+1)}$$

para que se cumpla que la imagen de la nota máxima, N, sea igual a N.

13 En cada uno de estos casos, podríamos construir la respectiva función recíproca, que sería una función exponencial que corregiría a la baja las calificaciones de un examen demasiado fácil. Se trataría de la función:

$$f_a^{-1}(x)=\frac{N}{a^N-1}\left(a^x-1\right),\ \text{exponencial de base } a>1.$$

14 Es un caso particular de la familia de funciones:

$$G_p^n(x)=x+p\cdot sen\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{N}\right),\ \text{para}\ \ p=1, n=10, N=10.$$

15 Si a esta función le sumamos una constante c tal que "eleve" su gráfica por encima de f(x)=x, no cumplimos con la primera condición de justicia de lkas sugeridas anteriormente, pero si con la segunda. Sería interesante analizar si habría algún criterio pedagógico que justifique intercalar intervalos de aumento con otros de disminución de notas.

16 Arcavi, A. (2007). *El desarrollo y el uso de los símbolos*, p. 73.

17 Davis, P. y Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*, pág. 216.

18 Davis, P. y Hersh, R. (1988). Ob. cit., p. 67-68.

19 Adaptado de Blum, W. (2005). "Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling task, p. 17-21. Se le han añadido algunas actividades mentales específicas que se desarrollan en cada una de las fases del proceso.

20 Lo cotidiano en el sentido de familiar y real para el que lo experimenta. Por tanto, lo familiar puede ser totalmente abstracto y formal y formar parte de la realidad.

21 Arcavi, A., (2002). Everyday and Academic Mathematics in the Classroom, p. 13

22 Palabras textuales del profesor Arcavi.

23 Cañón, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento*, p. 356.

24 Cañón, C. (1993). Ob. cit., p. 356.

25 Cañón, C. (1993). Ob. cit., p. 357.

26 Cañón, C. (1993). Ob. cit., p. 343: "La perspectiva abierta por el planteamiento de la HEURÍSTICA, lleva los primeros ensayos de Polya a un nuevo nivel. No es sólo una cuestión metodológica de un quehacer concreto, es también una sistemática epistemológica. La fase creativa en Matemáticas no está regida por los análisis lógicos, sino por una indagación que ha de arriesgar nuevas visiones de relacionar conceptos y de crear otros nuevos. Las consecuencias que este planteamiento tiene para la enseñanza de la Matemática es muy grande, y ya se ha empezado a notar."

27 Tomado de Legrand, M., (1996). El Debate científico en clase de matemáticas. En *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*, p. 171.

28 Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*, p. 465. La idea aparece concretamente así: "El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición. Si esto es así, y yo lo creo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas. La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto por ella. En cualquier caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante."

29 No sólo pretendemos que se analicen los efectos de utilizar los diversos tipos de modelos de corrección que proponemos (a quiénes favorecen, perjudican, cuánto, etc), también es igual o más interesante el problema inverso: diseñar modelos para que se consigan ciertos efectos que nos podamos plantear. Por ejemplo, yo como profesor puedo querer que no se beneficien ni los que tienen las mejores notas ni los que tienen las peores, y quiero que mejoren su nota aquellos que están al borde de aprobar (o cualquier otra exigencia que nos parezca interesante). ¿Qué modelo puedo diseñar para este propósito? Puedo, por ejemplo, dibujar un gráfico que se ajuste a mis demandas y a partir de ahí buscar la expresión analítica que más se ajuste (entre las que ya manejamos o, mejor aún, crear una nueva).

30 Aquí es donde suele aparecer una de las primeras cuestiones aludidas anteriormente. ¿A qué llamamos razonable cuando corregimos los datos de un examen? ¿A que cumplan la "norma" y que sean "justas" como tratamos anteriormente? ¿Otros condicionantes?

31 Que podemos considerar como orientaciones y consejos para los colegas, extraídas de un proceso de innovación y la posterior reflexión sobre la práctica del aula. No son el resultado de una investigación en educación matemática, sino el fruto de la puesta en práctica de algunas ideas fundamentadas, que, con frecuencia nos presentan los verdaderos investigadores en didáctica de las matemáticas, y que vienen a poner en valor las ideas de estos últimos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A., (2002). Everyday and Academic Mathematics in the Classroom. A Monograph edited by M. Brenner and J. Moschkovich (Eds.) *Journal for Research in Mathematics Education*. p. 12-29. Existe una versión en castellano, publicada en la revista *Números.*

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso de los símbolos. *Uno. Revista de las matemáticas*, nº 44, 59-75.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 37-68.

Blum, W. (2005). "Filling Up"–the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling task. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, p. 17-21. San Feliu de Guixols.

Cañón, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento.* Madrid: Universidad Pontificia Comillas de Madrid.

COMAP (2002): *Precalculus. Modeling our world*. New York: WH Freeman and Company.

Davis, P. y Hersh, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona: Ed. Labor y MEC.

Hofstadter, D. R., (1990). Analogías con fluidos y la creatividad humana, en Wagensberg, J. (edit) *Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea* (pp. 71-93). Barcelona: Tusquets Editores.

Legrand, M., (1996). El Debate científico en clase de matemáticas. *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica* (pp. 171-190). Francia: Ed. Topiques, Frouard.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En Gagatsis, A., Papastavridis, S. (Edit), *3er Mediterranean Conference on Mathematical Education. Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society*, (pp. 115-124). Atenas, Grecia.

OCDE, (2004). *Marcos Teóricos PISA 2003.* Madrid: Ed. MEC-inecse.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Edit. Tecnos.

Taton, R. (1973). *Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos*. Barcelona: Ed. Labor.

Este artículo fue recibido en *Suma* en diceiembre de 2010 y aceptado en mayo de 2011