Mediana: ¿estadística o geometría?

Abraham López Viveros
Rafael Ramírez Uclés
Antonio Moreno Verdejo

SUMA+ núm. 97
pp. 49-55
Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2021 y aceptado en junio de 2021

Este trabajo aborda el enriquecimiento del conocimiento del estudiante sobre el concepto de mediana. Esto se persigue estableciendo conexiones entre las propiedades geométricas y estadísticas, tanto para la enseñanza secundaria como para los primeros cursos universitarios.

La geometría ofrece un escenario ideal para el enriquecimiento curricular. Por un lado, explorar las propiedades y profundizar en las construcciones permite al estudiante aplicarlas en la resolución de problemas que no podrían abordarse únicamente con una definición aprendida memorísticamente.

Por otro lado, la posibilidad de presentar pruebas y demostraciones permite acercarlos al razonamiento matemático asociado a la notación, la secuenciación lógica, la deducción o la inducción. Además, la utilización de software dinámico como GeoGebra, abre un campo de exploración y validación de conjeturas.

Hay una amplia bibliografía que analiza las relaciones entre la media aritmética y el baricentro geométrico, puesto que este traslada las propiedades de la media aritmética al plano. Autores como Margolis (1979) defendieron el uso de la geometría para presentar conceptos estadísticos básicos a estudiantes. El trabajo de Sarkar y Rashid (2016) tenía como objetivo principal el de desarrollar una forma visual para la comprensión de la media aritmética de un conjunto de puntos, así ayudaba a los estudiantes a reconocer fácilmente que la media es sensible a valores extremos. Sin embargo, no son tan conocidas algunas propiedades de la mediana desde una perspectiva geométrica.

En esta sesión se plantea el enriquecimiento en este sentido: «Reposando»[1], parándonos a analizar el concepto de mediana y retando al estudiante a probar resultados a partir de la experimentación con la manipulación de imágenes.

En el lenguaje habitual utilizamos numerosos términos que podríamos asociar a medidas de tendencia central: habitual, acostumbrado, típico, mismo, regular, mayoría, clásico, estereotipo, esperado, normal, corriente, convencional… La Real Academia Española de la Lengua define mediana como de calidad intermedia. Moderado, ni muy grande ni muy pequeño. Alude a la idea de posición intermedia. Esta sesión de ESTALMAT se inicia con una pregunta aparentemente ingenua: ¿Por qué en matemáticas se utiliza la palabra mediana en estadística y en geometría? ¿Representan la misma idea?

Con esta excusa, se comparte una lluvia de ideas con los estudiantes en relación a lo que conocen sobre la mediana. Vamos a profundizar en esta posible relación en varias tareas, comentando algunos de los aspectos más interesantes para gestionar la puesta en común.

Tarea 1. Mediana en estadística

Supongamos un conjunto de datos, ¿tiene la mediana alguna interpretación geométrica?

La definición se orienta a elementos de posición en la recta real. Una vez ordenados los datos, la mediana es el valor central. Cuando los datos son discretos e impares, la unicidad de solución es evidente, pero ¿qué ocurre cuando los datos son pares, hay unicidad en la definición?

Esta situación se aprovecha para hablar de la importancia de los convenios que se adoptan en algunas definiciones matemáticas. Y se les orienta a que investiguen la definición formal de mediana de un conjunto de puntos en la recta real, tanto en el caso discreto como en el continuo.

Tras esta discusión, se dirige la puesta en común a que relacionen la definición con una interesante propiedad.

— ¿Qué significa esta fórmula?

$$mín \sum |x_i - K| = \sum |x_i - Mediana|$$

Tras recoger sus impresiones, se verbaliza la propiedad de que la mediana minimiza la suma de los valores absolutos de las diferencias de los datos a cualquier punto de la recta real. ¿Por qué se cumple esta propiedad?

Para que investiguen, se les presentan distintos casos, tanto con un número par de datos como con un número impar.

En el número impar, se puede visualizar (figura 1) que la suma de los valores absolutos de las diferencias se minimiza en la mediana (punto rojo), pues está en el interior de los diferentes intervalos encajados cuya suma de longitudes es la mínima de las sumas posibles. Utilizando el deslizador de GeoGebra, pueden comprobar que esa suma es mayor en cualquier otro punto e intentar formalizar su argumentación.

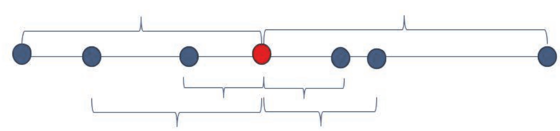

Figura 1. Representación de la mediana de un conjunto de puntos

Otras alternativas para la comprobación empírica es definir una función (figura 2) que vaya calculando la suma de los valores absolutos de la diferencia en los distintos puntos del intervalo. Vamos a ilustrarlo en el caso de la mediana para los valores 1, 2, 4 y 10. En la figura 2 se observa que todos los puntos comprendidos entre 2 y 4, generan sumas mínimas en las diferencias en valor absoluto. Luego se vuelve a retomar la unicidad o no en la definición de la mediana cuando hay un número par de datos, atendiendo a esta propiedad.

Como elemento de enriquecimiento se les pide que demuestren esa propiedad para cualquier conjunto de datos discretos en la recta real, utilizando lenguaje formal matemático.

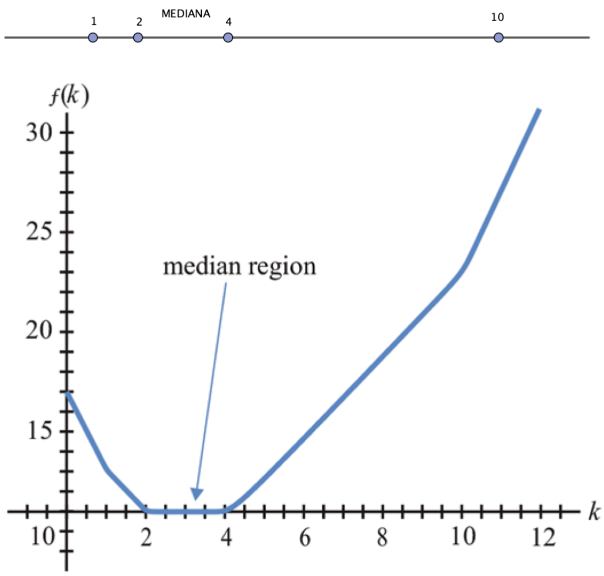

Figura 2. Función de la suma de los valores absolutos de la diferencia en los distintos puntos del intervalo

Una vez presentada la demostración, se retoma la idea inicial de resaltar aspectos geométricos en la definición estadística de la mediana. Han aparecido conceptos geométricos, como la posición y la minimización de distancias que podrían servirnos de pistas para relacionar los significados geométricos y estadísticos de la mediana. Seguimos…

Tarea 2. Mediana en geometría

Si definimos la mediana en un triángulo como el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto, ¿existe alguna interpretación desde el punto de vista estadístico?

Para orientarles en esta búsqueda se les plantea que intenten probar las siguientes afirmaciones. Para ello, pueden utilizar distintas construcciones con GeoGebra.

a) ¿La mediana divide al triángulo en dos partes de igual área?
b) ¿Las tres medianas se cortan en un punto, que se denomina baricentro?
c) $G = (A + B + C)/3$. ¿El baricentro es la media aritmética de los tres vértices?

La primera propiedad (figura 3) se deduce de obtener dos triángulos con igual altura y con la misma longitud de la base. Esta propiedad de dividir el triángulo en dos partes iguales podría estar relacionada con la definición de mediana como distribución central. Se les invita a investigar si históricamente se introdujo antes el concepto estadístico o el geométrico o a estudiar diferentes usos de la palabra mediana en la vida cotidiana de los que podrían haberse derivado (mediana de una carretera, hermano mediano…).

La última propiedad intuye una relación con la estadística por investigar. Pasamos a la exploración con GeoGebra para responder a las siguientes preguntas:

— ¿Por qué las tres medianas se cortan en un único punto? (figura 4)

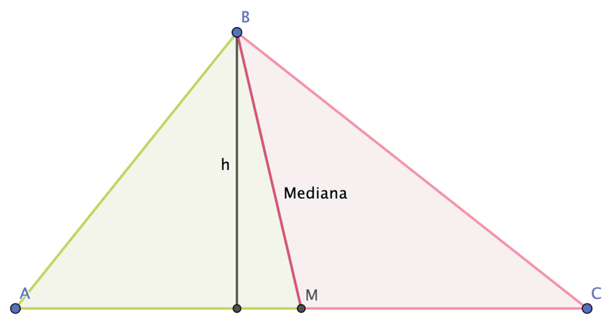

Figura 3. Mediana de un triángulo

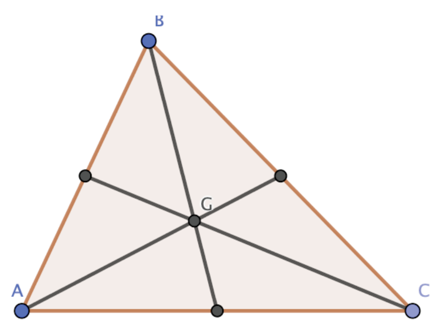

Figura 4. Baricentro de un triángulo

— ¿Por qué el baricentro se obtiene como la media aritmética de los vértices?

Más allá de esperar demostraciones formales basadas en ecuaciones de rectas utilizando coordenadas (que se les muestran tras la experimentación y el trabajo con GeoGebra) se les reta a encontrar propiedades que puedan originar esa aparente coincidencia.

Por ejemplo, la media aritmética cumple la propiedad de que la suma de las diferencias a todos los datos es 0.

— ¿Cómo se interpreta esa relación con el baricentro?
— Si las diferencias entre dos puntos se identifican con vectores, ¿qué nos dice esta propiedad sobre el baricentro?
— ¿Es el centro de masas de los tres vértices del triángulo?

También se les invita a indagar sobre la «traducción» de propiedades de la media aritmética al baricentro geométrico y viceversa (tabla 1).

Media aritmética	Baricentro
Si a un conjunto de datos se le suma una constante, la nueva media aritmética es la media anterior más esa constante.	Si a un triángulo se le aplica una traslación, su baricentro… (COMPLETA)
Si todos los datos se multiplican por una constante, la nueva media aritmética es la media anterior… (COMPLETA)	Si a un triángulo se le aplica una homotecia, el nuevo baricentro… (COMPLETA)
La media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable con respecto a una constante cualquiera se hace mínima cuando dicha constante coincide con la media aritmética.	¿?

Tabla 1. Propiedades de la media aritmética y el baricentro

En este momento se hace hincapié en lo interesante de haber encontrado relaciones entre la geometría y la estadística. Así se pueden trasladar propiedades conocidas en un campo para el otro. Veámoslo.

Tarea 3. Visión estadística-geométrica

Por ejemplo,

— Tenemos tres puntos (A, B y C) y sea G su media aritmética. Si M es la media aritmética de A y B, entonces $G = (1/3)C + (2/3)M$. Es decir, se pondera con los pesos de los conjuntos en los que se ha dividido.

Se prueba este resultado sustituyendo en expresiones algebraicas, pero ¿qué propiedad geométrica del baricentro se deduce de la anterior propiedad?

Tras el trabajo individual y la puesta en común en pequeños grupos, se muestra la conocida propiedad de que el baricentro dista 1/3 del vértice y 2/3 del punto medio opuesto.

Pero volviendo a los resultados de la tarea 1, ¿parece que la mediana geométrica está más relacionada con la media aritmética que con la mediana estadística? Vamos a investigar la propiedad de minimizar la distancia.

Tarea 4. Investigamos los puntos notables de un triángulo

Inicialmente, de un modo experimental, se les pide que investiguen si algunos de los puntos notables que conozcan de un triángulo, minimiza la suma de distancias a los vértices.

Para ello, utilizan GeoGebra y un fragmento de las propiedades de algunos puntos notables (Liébana, Ramírez y Moreno, 2018) y la definición de punto de Fermat. Se les deja como línea de investigación más allá de la sesión para que indaguen en estas propiedades (tabla 2).

Puntos notables	Propiedades
Circuncentro	¿?
Baricentro	¿?
Ortocentro	¿?
Incentro	¿?
…	Minimiza la suma de distancias a los vértices
Otros (Nagel, Spieker)	¿?

Tabla 2. Actividad para indagar propiedades de puntos notables

> Definición: Se llama punto de Fermat al punto del plano para el cual la suma de las distancias a los vértices de un triángulo dado es mínima.
>
> Proposición 1. Para un triángulo con ángulos menores de 120 grados, el punto de Fermat coincide con el punto interior al triángulo con el que los lados del triángulo subtienden ángulos de 120 grados.
>
> Proposición 2. Cuando el triángulo es obtusángulo con algún ángulo mayor o igual a 120 grados, el punto de Fermat coincide con el vértice correspondiente a dicho ángulo.

Según lo anterior, la propiedad de la mediana de minimizar la suma de distancias se corresponde con el punto de Fermat. Vamos a investigar varios procedimientos para ver si aparece algún elemento que dé pistas sobre aspectos estadísticos.

Tarea 5. Investigamos el punto de Fermat

El objetivo es descubrir en las distintas construcciones del cálculo del punto de Fermat, algunas ideas relacionadas con la *posición central* (figuras 5 y 6). Para ello comprueban la proposición anterior en la construcción de la propiedad de que el *ángulo de visión desde el punto de Fermat* a los vértices es de 120 grados (Moreno, López y Ramírez, 2021).

Un caso interesante es el triángulo obtusángulo de 120 grados. Con la herramienta de arrastre, se observa en las construcciones qué ocurre en ángulos mayores y cómo varía el punto de Fermat.

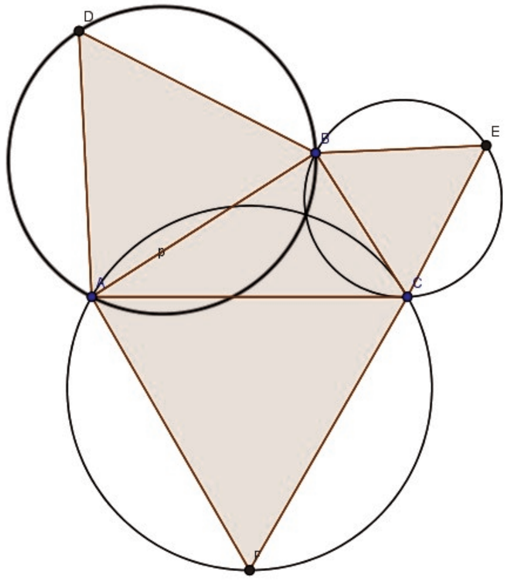

Figura 5. Demostración de Torricelli

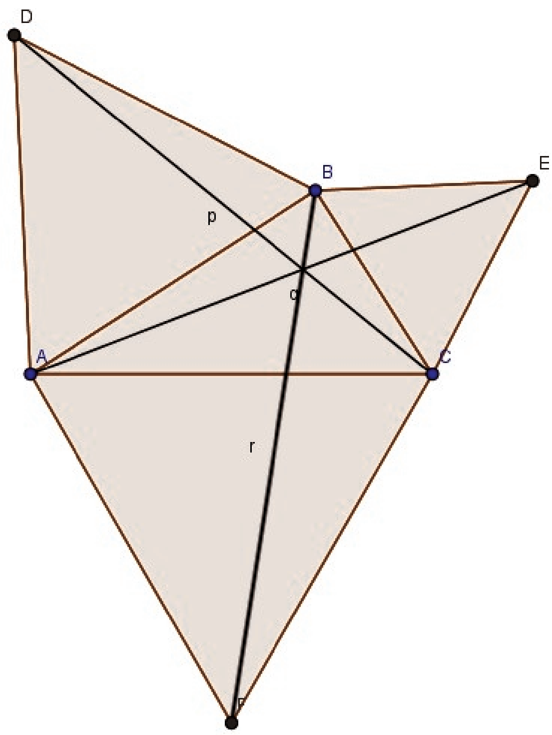

Figura 6. Demostración de Simpson

Tarea 6. Punto de Fermat para *n* puntos

Como ampliación de la tarea anterior, se les muestra la generalización de la propiedad de minimizar la suma de distancias, mostrando la construcción del árbol de Steiner para cuadriláteros (figura 7). Se pone el énfasis en el reconocimiento de los ángulos de 120 grados como elementos para minimizar.

A continuación, se les motiva con una nueva cuestión. Hemos visto que, en el caso de los triángulos, no siempre coincide el punto de Fermat (propiedad de la mediana) con ninguna de las medidas estadísticas que conocían (media aritmética, mediana de las coordenadas por separado…). ¿Ocurre algo diferente en los cuadriláteros, es decir, el punto de Fermat coincide con la media aritmética?

Tarea 7. ¿Qué es la media aritmética de los vértices de un polígono?

En esta tarea se propone que comparen en diferentes polígonos el resultado de calcular la media aritmética de los vértices y el punto que minimiza la suma de las distancias. Para ello, utilizan GeoGebra y la herramienta de arrastre para minimizar la función de suma de distancias. Posteriormente se les pide que verifiquen la conjetura de que el punto que minimiza la suma de distancias es el punto de corte de las diagonales en los polígonos convexos (Moreno, López y Ramírez, 2021) (figura 8).

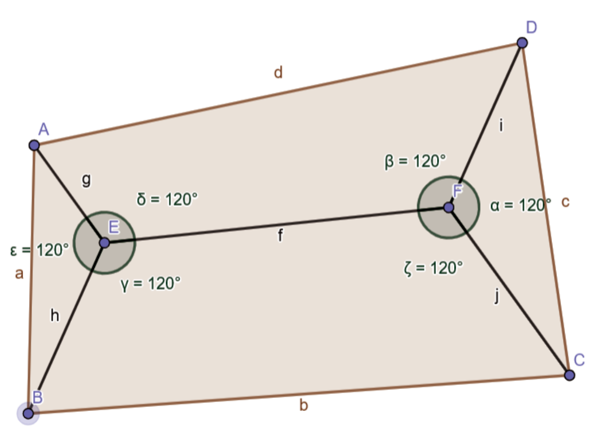

Figura 7. Árbol de Steiner para un cuadrilátero

Tarea 8. Modelización

Como actividad final, se les presenta la siguiente pregunta y que busquen problemas de la vida cotidiana que tendrían relación:

— ¿Cómo se calcula el centro de una determinada región del plano?

En la lluvia de ideas pueden surgir varias propuestas:

— La media aritmética de esa región.
— El centro de la circunferencia más pequeña que contenga a todos los puntos.

En relación a la primera, se les presenta el procedimiento utilizado en Geografía para localizar el centro geográfico de una región. Para modelizarlo utilizando GeoGebra, se les motiva a que tomen puntos de la región y a que hagan la media aritmética:

— ¿Cómo afecta el muestreo de esos puntos en la localización del centro geográfico?

En relación a la segunda propuesta, el problema no es trivial. Sería equivalente a buscar el punto que minimizara la máxima distancia al resto. Un problema podría ser la instalación de un dron en un punto de una región para que llegase rápidamente a cualquiera

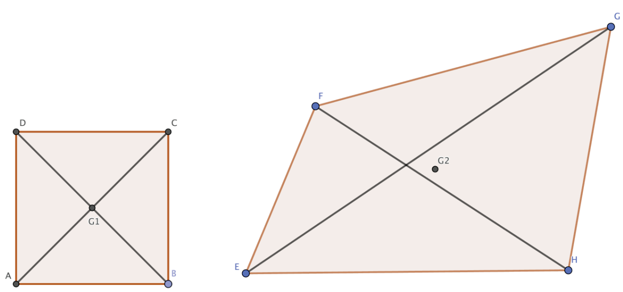

Figura 8. Cuadriláteros convexos

de los puntos de dicha región (como podría ser el caso de apagar un incendio).

Se muestran algunos ejemplos de mapas reales para que investiguen cuándo el punto medio de los dos puntos más alejados resuelve este problema. Y si es posible aplicar esta estrategia cuando no hay un conjunto de puntos discretos. La prueba de estas últimas cuestiones se deja como un reto abierto, para que contrasten los resultados empíricos que obtienen con las distintas construcciones con la posibilidad de formalizar el caso general.

Conclusiones

El enriquecimiento curricular desde esta propuesta, supone detenerse a profundizar en un concepto, reproduciendo para ello los métodos de investigación en matemáticas. Con este trabajo, el estudiante profundiza en el concepto de mediana probando propiedades y verificando relaciones entre las propiedades geométricas y estadísticas del término mediana. Hemos intentado destacar la importancia de la interpretación geométrica de los conceptos estadísticos para ampliar el conocimiento de estos, pero también para abrir al estudiante el campo de problemas que pueden ser modelizados con este concepto.

Referencias bibliográficas

Liébana, E., R. Ramírez y A. Moreno (2018), «Identificación de otros puntos notables de un triángulo a partir de la resolución de problemas», *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, n.º 23(3), 589-607.

Margolis, M. S. (1979), «Perpendicular projections and elementary statistics», *The American Statistician*, n.º 33(3), 131-135.

Moreno, A., A. López y R. Ramírez (2021), «Statistical significance of the median of a set of points on the plane», *The College Mathematics Journal,* n.º 52(3), 205-218.

Ramírez, R., y P. Flores (2016),«Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular», *Suma*, n.º 83, 33-41.

Sarkar, J., y M. Rashid (2016), «A geometric view of the mean of a set of numbers», *Teaching Statistics* n.º 38, <https://doi.org/10.1111/test.12101>.

Abraham López Viveros
IES San Isidro, Madrid
<abraham-lopez@hotmail.es>

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada
<rramirez@ugr.es>

Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada
<amverdejo@ugr.es>

1 Nuestra propuesta de enriquecimiento curricular no se basa en transmitir muchos conocimientos sino en asentar y reposar los nuevos contenidos, profundizando en ellos y en los modos de trabajo matemático: técnicas de argumentación, estrategias de resolución de problemas… (Ramírez y Flores, 2016)