suma+
Secciones
Julio 2019
91
pp. 73-80

Realidad aumentada con GeoGebra

José Luis Muñoz Casado

Recientemente GeoGebra ha *publicado* una nueva aplicación para dispositivos móviles IOS, GeoGebra AR. La aplicación se puede descargar en la App Store.

Además, en la aplicación Calculadora Gráfica 3D, tanto en su versión para Android como para IOS han incluido el botón de realidad aumentada. En este artículo exploraremos las posibilidades de ambas aplicaciones.

¿Qué es la realidad aumentada?

La realidad aumentada (RA) es el conjunto de tecnologías que permite al usuario mezclar imágenes reales con imágenes virtuales mediante dispositivos electrónicos. El nombre viene precisamente de las aportaciones que se pueden realizar al observar una imagen real a través de un dispositivo electrónico.

Algunas características de la realidad aumentada son:

— Combina elementos reales y virtuales.
— Es interactiva en tiempo real, es decir, los elementos virtuales interaccionan con el movimiento del usuario.
— Está realizada en 3D.

GeoGebra

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

Para poder visualizar la realidad aumentada es necesario disponer de algún elemento tecnológico que mezcle la realidad con los elementos virtuales. Existen diferentes tipos de visualización:

— *Nivel 0*. Es el nivel más bajo y ofrece la interacción mínima con el mundo físico. Las aplicaciones enlazan el mundo físico con el virtual mediante el uso de códigos de barras y códigos en 2D (por ejemplo, los códigos QR).
— *Nivel 1*. Las aplicaciones utilizan marcadores, patrones en 2D que desencadenan la aparición de objetos tridimensionales sobre ellos.
— *Nivel 2*. Las aplicaciones utilizan imágenes, objetos o coordenadas GPS para superponer la información virtual.
— *Nivel 3*. Es el nivel más alto y estaría comprendido por dispositivos como gafas o lentillas que proyectan información sobre lo que se está viendo en tiempo real.

GeoGebra realiza una realidad aumentada de nivel 3 a través del móvil mezclando imagen real con imagen virtual sin necesidad de ningún marcador.

GeoGebra AR

Para poder disfrutar de la nueva *app* es necesario realizar algunas comprobaciones técnicas ya que no todos los dispositivos cumplen los requisitos necesarios para su funcionamiento.

Tanto para Android como para IOS es necesario disponer de las librerías (conjunto de herramientas de software pequeño y autónomo que ofrece una funcionalidad muy específica al usuario) de Realidad Aumentada de cada plataforma, en Android el software necesario es ARCore y en IOS es ARKit. Para poder usar la *app* AR y la calculadora gráfica 3D con AR es necesario que nuestro dispositivo soporte esas librerías.

Se pueden consultar los dispositivos compatibles para Android en Google Play y en App Store para los dispositivos IOS.

Figura 1. ARCore. Android

Figura 2. ARKit. IOS

Ambas aplicaciones funcionan de forma similar, por tanto, realizaremos los ejemplos con una de ellas.

Primeros pasos

Al pulsar sobre la *app* AR nos aparecerá una ventana para detectar una superficie y dos líneas de entrada.

Una vez detectada la superficie es posible «colocar objetos» sobre ella. Para ello tenemos dos opciones: colocar los objetos predefinidos o escribir funciones $z=f(x,y)$.

GeoGebra ofrece los siguientes objetos predefinidos:

— Sólidos platónicos
— Triángulo de Penrose
— Pirámide de Sierspinski
— Balón de fútbol
— Función 3D
— Botella de Klein
— Superficie reglada
— Escalera helicoidal.

En todos estos objetos es posible mover el móvil como si los objetos estuvieran realmente en la superficie, permitiendo explorar su interior, su exterior, propiedades, etc.

También es posible añadir dos funciones del tipo $z=f(x,y)$ en las dos líneas de entrada que se encuentran en la parte inferior de la pantalla.

Con esta opción podemos *jugar* a encontrar la ecuación de multitud de objetos cotidianos.

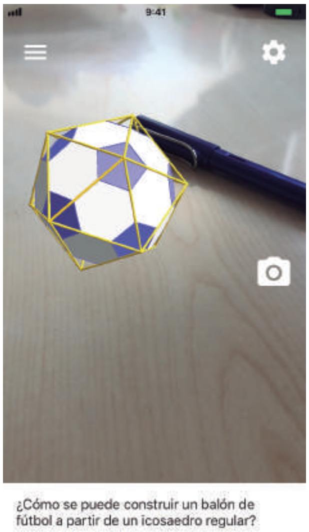

Figura 3. Balón de fútbol

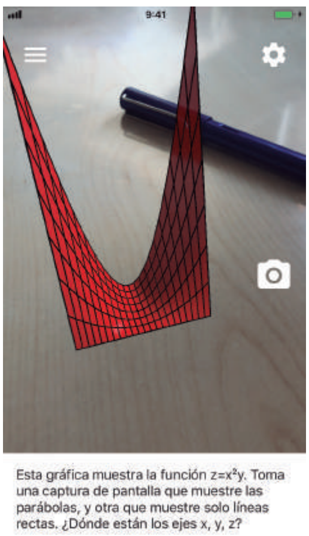

Figura 4. Función 3D

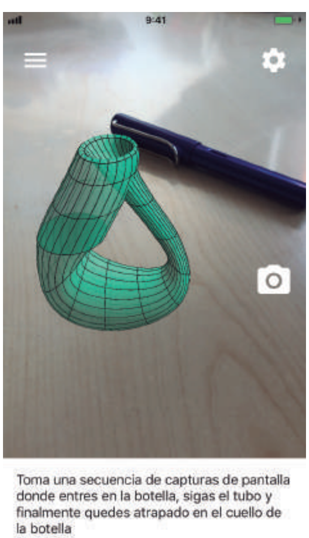

Figura 5. Botella de Klein

Pero creemos que la verdadera potencialidad de la realidad aumentada de GeoGebra está en la integración de la realidad aumentada en la app Calculadora Gráfica 3D.

Al iniciar la Calculadora Gráfica 3D, nos aparece el interfaz 3D de GeoGebra (figura 6). Si nuestro dispositivo lo soporta, en la esquina inferior derecha aparecerá el botón que nos permitirá realizar realidad aumentada.

Al pulsar en ese botón, nos aparecerá la imagen que se obtiene a través de la cámara del móvil y un aviso que nos dice:

> Muévete lentamente para detectar superficies.

Una vez detectada la superficie, GeoGebra colocará *virtualmente* los objetos que hayamos construido en la vista 3D.

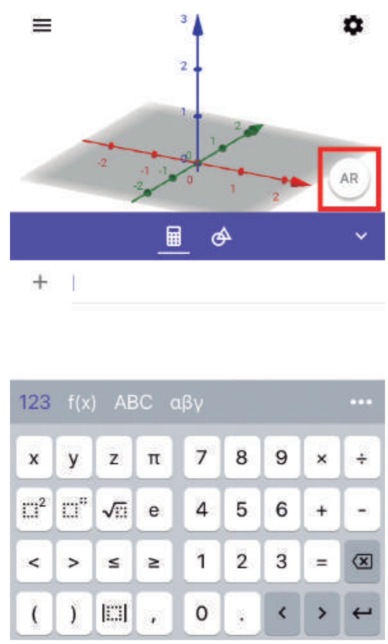

Figura 6. Interfaz GeoGebra 3D

Algunas propuestas

Objetos cotidianos

Una buena opción para comenzar con la realidad aumentada es intentar representar un objeto cotidiano y ver sus posibilidades.

El desarrollo del cubo es conocido por todos, pero podemos explorar las diferentes configuraciones que genera el cubo y verlas en directo.

Pero quizás donde puede mostrar toda su potencia es en la visualización de esos cuerpos geométricos no tan estándar (figuras de la 7 a la 12).

Figura 7. Cubo

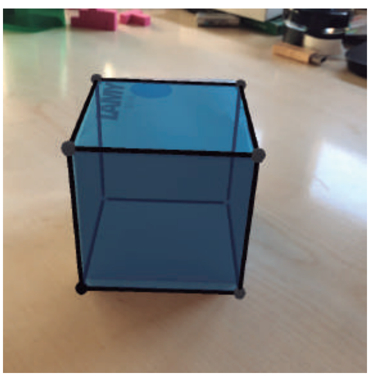

Figura 8. Modelo sobre el cubo

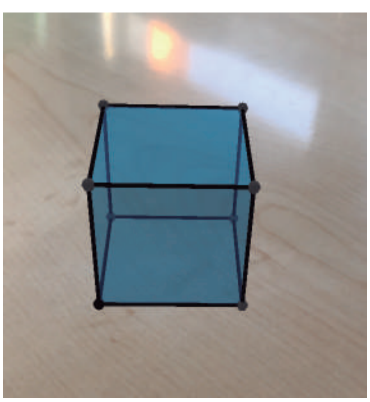

Figura 9. Modelo sobre el cubo

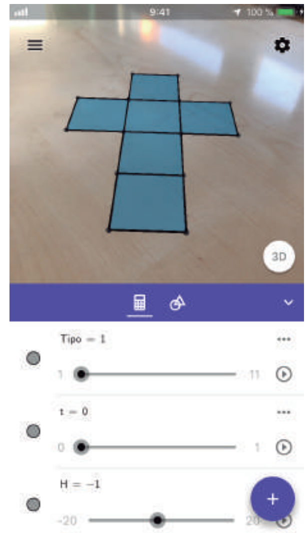

Figura 10. Desarrollo modelo 1

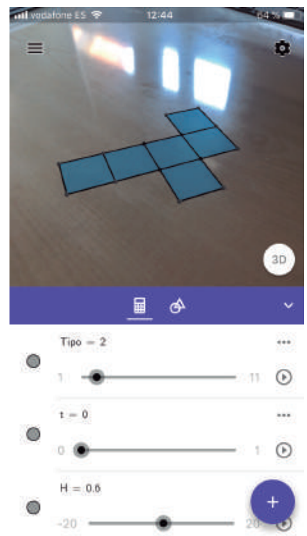

Figura 11. Desarrollo modelo 2

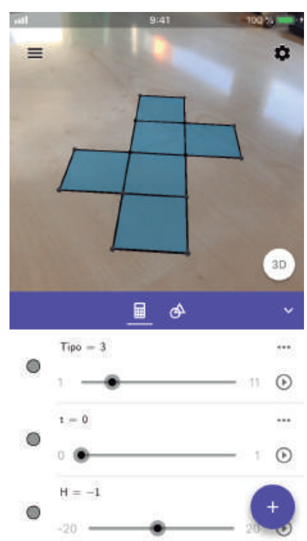

Figura 12. Desarrollo modelo 3

Para ello podemos recurrir a las construcciones existentes en <geogebra.org>. Una estupenda colección de poliedros la podemos encontrar en el perfil de José Manuel Arranz <https://www.geogebra.org/u/arranz>.

Usar la realidad aumentada con construcciones ya elaboradas es realmente sencillo, al iniciar la aplicación, en la parte superior izquierda nos aparece el icono ≡, pulsando accedemos al menú de la *app*. En la opción Buscar podemos introducir el nombre de la construcción que queremos abrir. Hay que recordar que solo podremos abrir construcciones diseñadas en 3D.

Otra opción es conocer la url de la construcción e introducir el código que aparece al final (figura 13).

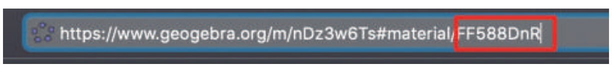

Figura 13. *Url* de una construcción de José Manuel Arranz

Actividad 1

Muévete (figura 14) y responde a las siguientes preguntas:
— ¿Cuántos cuadrados azules hay? ¿Y rojos?
— ¿Cuántos triángulos?
— ¿Cuántas caras confluyen en un vértice?
— Comprueba la fórmula de Euler para este poliedro

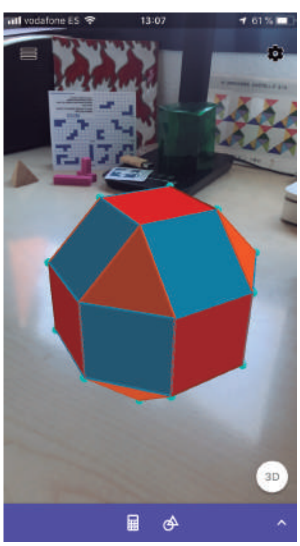

Figura 14

La visualización con realidad aumentada es perfecta para observar propiedades matemáticas de cuerpos geométricos y explorar como si estuviera físicamente delante de nosotros.

Podemos proponer a los alumnos explorar la dualidad entre cubo y octaedro a través de su visualización con realidad aumentada.

La siguiente actividad es muy asequible para realizar directamente en la *app*.

Actividad 2

— A=(–1,–1,0)
— B=(1,–1,0)
Con botón punto medio obtenemos el punto medio de tres caras marcando dos vértices opuestos de una cara.
— K=PuntoMedio(H,A)
— L=PuntoMedio(E,G)
— M=PuntoMedio(E,G)
Escribimos:
— Octaedro(K,M,L)
A continuación, podemos activar la realidad aumentada y ver nuestro cubo y su dual encima de la mesa (figura 15).
¿Cómo será el poliedro que se obtiene al unir los puntos medios de las aristas del cubo?

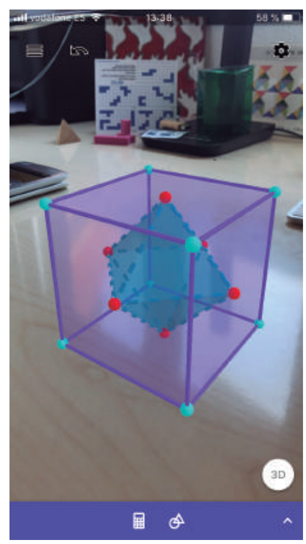

Figura 15

Mobiliario urbano

El mobiliario urbano es una gran fuente de inspiración para usar la realidad aumentada de GeoGebra. Observemos el macetero de la figura 16.

Una vista entrenada, y este podría ser un objetivo, rápidamente verá un paraboloide sobre tres esferas. Con la aplicación en mano, nos lanzamos a intentar comprobar nuestra hipótesis (figura 17).

Figura 16

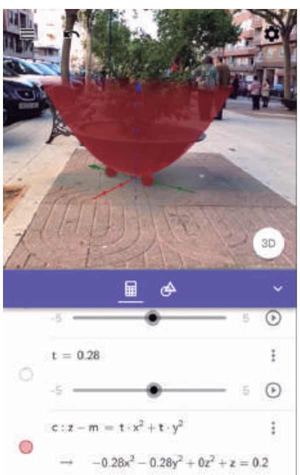

Figura 17

Una buena idea es escribir los *parámetros* que influyen en el paraboloide usando deslizadores. Así escribimos:

$$z - m = tx^2 + ty^2$$

GeoGebra creará dos deslizadores m y t que nos permitirán ajustar nuestro paraboloide al paraboloide real del macetero. Ajustando los valores obtenemos la ecuación del paraboloide:

$$-0{,}28\,x^2 - 0{,}28\,y^2 + z = 0{,}2$$

Una vez ajustado el paraboloide intentamos encontrar las tres pequeñas esferas. Un primer intento nos lleva a introducirlas a mano escribiendo:

$$(x-k)^2 + y^2 + (z-n)^2 = r^2$$

Otra vez más usamos los deslizadores para ajustar nuestra esfera con la esfera real.

Nos acercamos con el móvil y ajustamos hasta que nuestra esfera sea tangente al paraboloide y al plano XY. A continuación, efectuamos un giro alrededor del eje Z de $2\pi/3$, y otro giro más para obtener la tercera esfera.

Sin embargo, no es fácil ajustar la tangencia con realidad aumentada, intentemos modelizar por completo el problema. Para ello nos pasaremos a la versión de escritorio o la versión web de GeoGebra.

Fijando una altura $z=k$ y representado el plano $y=0$, obtenemos las figuras 18 y 19.

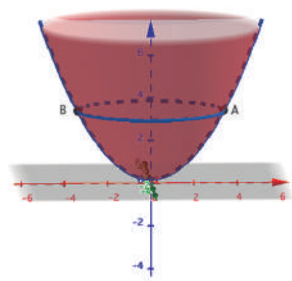

Figura 18

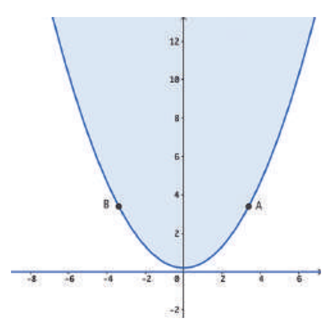

Figura 19

Con el punto A podemos obtener la ecuación de la esfera. Para ello trabajaremos en el plano XZ como si fuera el plano XY:

$$\begin{cases} -0{,}28x^2 - 0{,}28y^2 + z = 0{,}2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Obtenemos la parábola $z = -0{,}28x^2 + 0{,}2$.

Dibujamos la recta tangente y la recta normal a la parábola por el punto A. Podemos usar la vista CAS para realizar todas las operaciones (figura 20).

Una vez que hemos comprendido el problema en el plano podemos llevarlo al espacio.

Supongamos la esfera S centrada en el punto $C(x, y, z)$ que es tangente al paraboloide en el punto A y al plano $z = 0$.

Se tiene que verificar que $\mathrm{d}(C, A) = \mathrm{d}(C, \pi)$. Por tanto, escribiendo en la barra de entrada:

$$(x(A) - x)^2 + (y(A) - y)^2 + (z(A) - z)^2 = z^2$$

Obtenemos el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de A y del plano π (figura 21).

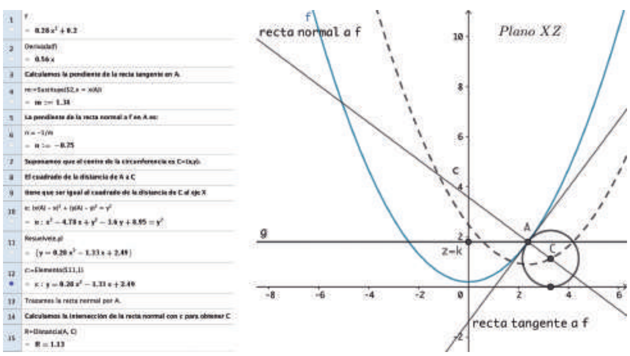

Figura 20

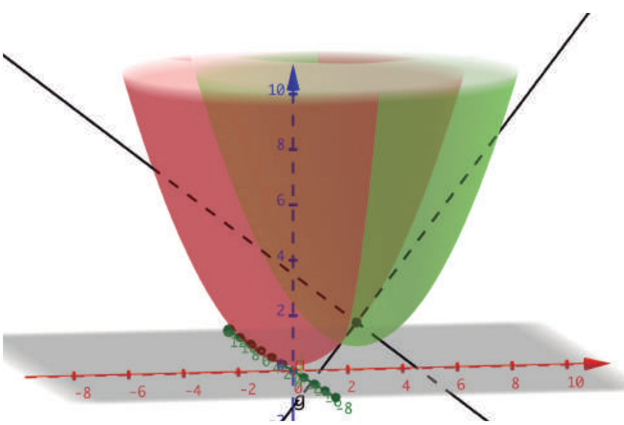

Figura 21. Puntos equidistantes a A y el plano $z = 0$

Ya solo resta calcular la intersección de la recta normal al paraboloide en el punto A con el lugar geométrico obtenido anteriormente para obtener el centro de la esfera buscada.

Por último, nos queda rotar nuestra esfera alrededor del eje Z un ángulo de $2\pi/3$ (figura 22).

Una opción que incorpora GeoGebra 3D es la representación 2D de un plano. Activando la representación 2D del plano $z = k$, comprobaremos por qué las matemáticas son tan bellas.

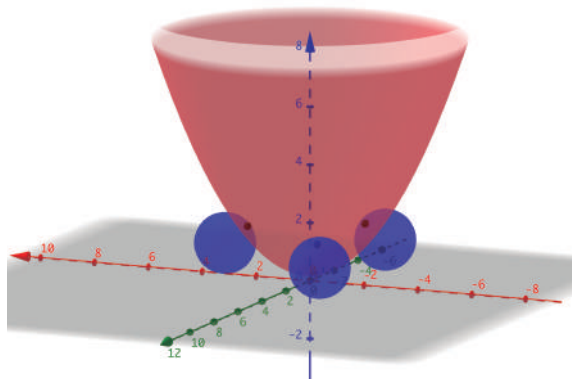

Figura 22. Modelo 3D del macetero

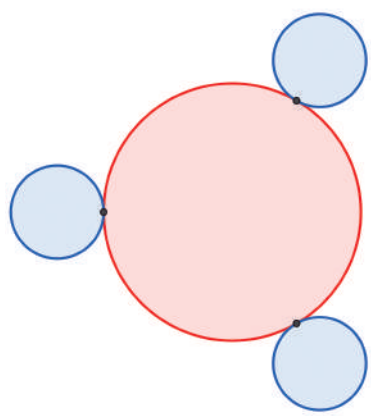

Figura 23. Representación 2D del plano $z = k$

Conclusiones

Con esta pequeña introducción hemos pretendido explorar algunas de las posibilidades de la realidad aumentada de GeoGebra.

Creemos que la modelización de objetos cotidianos es una actividad muy rica por la gran cantidad de conocimiento que hay que desarrollar para lograr dicha modelización, y la realidad aumentada supone un gran elemento motivador para iniciarse en ella.

Algunos de los ejemplos mostrados, como la actividad 1 y la actividad 2, son realizables con materiales manipulables, sin duda muy valiosos, pero creemos que el uso de la realidad aumentada permitirá dar otro enfoque a problemas más complejos.

No podemos dejar de mencionar el problema de los dispositivos, actualmente no todos los dispositivos soportan esta tecnología. Sin embargo, estamos convencidos de que este problema dejará de serlo en breve, pues la realidad aumentada en todas sus variantes ha venido para quedarse.

Referencias bibliográficas

Apple (s. f.), *Compatibilidad dispositivos IOS*, obtenido de: <https://developer.apple.com/library/archive/documentation/DeviceInformation/Reference/iOSDeviceCompatibility/DeviceCompatibilityMatrix/DeviceCompatibilityMatrix.html>.

Arranz, J. M. (s. f.), *José Manuel Arranz*, obtenido de: <https://www.geogebra.org/u/arranz>.

Google (s.f.), *Dispositivos compatibles Android*, obtenido de: <https://developers.google.com/ar/discover/supported-devices>.

Muñoz, J. L. (2019), «Las matemáticas en sus personajes. Una aplicación de la realidad aumentada», *Uno*, n.º 83, 22-29.

José Luis Muñoz Casado
IES Salvador Dalí, Madrid
<creogebra@revistasuma.es>