suma+ 91
Artículos
Julio 2019
pp. 61-69

Consideraciones acerca de las asíntotas

Félix Martínez de la Rosa

En este artículo se analizan esquemas conceptuales en relación con las asíntotas, detectados en estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad. Se dan propuestas para mejorar su enseñanza, y recursos para explorar ideas similares.

Palabras clave: Esquema conceptual, Asíntota, Libro de texto, Recursos, Asíntota no lineal.

Considerations on asymptotes

In this paper we analyze concept images about asymptotes, detected in first year students of Calculus at the University. We give proposals to improve their teaching, and resources to explore similar ideas.

Keywords: Concept image, Asymptote, Textbook, Resources, Nonlinear asymptote.

La motivación para escribir este artículo surge a raíz de un diálogo mantenido con los estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad. Tiene lugar al hablar de las asíntotas, dentro del contexto de la representación gráfica de funciones, y se repite cada año:

> *Estudiante.* Si existe asíntota horizontal entonces no hay oblicua.
> *Respuesta*. Observa esta gráfica

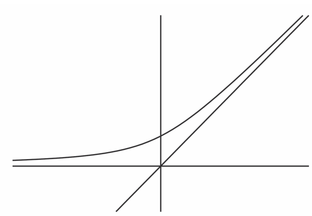

Figura 1

> *Estudiante.* ¿No es cierto lo que nos han contado en bachillerato?
> *Respuesta.* Lo es para funciones racionales.

En los cursos de Matemáticas de la enseñanza secundaria y bachillerato, los profesores emplean recursos, imágenes o procesos, que puedan ser fáciles de comprender, motivadores y sugerentes. El objetivo es que los estudiantes entiendan en poco tiempo los conceptos nuevos y sean capaces de resolver los problemas que se les requieran. Las

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2018 y aceptado en diciembre de 2018

ideas, imágenes o procesos, que un estudiante recibe en su aprendizaje en relación con un concepto, van formando en ellos una estructura cognitiva asociada al mismo, que se denomina esquema conceptual o *concept image* (Tall y Vinner, 1981).

No es raro que algunos de estos esquemas conceptuales, que los estudiantes interiorizan, lo formen ideas demasiado simplificadas, ingenuas o deficientes. Esto tiene efectos negativos en cursos superiores, porque obstaculiza la adquisición de nuevos conocimientos relacionados con el concepto en cuestión. Por ejemplo, la noción de recta tangente a una curva se ve condicionada por el esquema que consiste en la imagen de la tangente a una circunferencia (Martínez, 2012). O las tablas de valores: su uso inadecuado interfiere negativamente en la representación gráfica de funciones (Martínez y Martínez, 2014). Uno de esos deficientes esquemas conceptuales se evidencia en el diálogo inicial y es el origen de este artículo.

Ya que los libros de texto son una pieza importante del sistema educativo, en la primera sección se analiza y comenta lo que se ofrece en algunos de ellos, y se sugieren ideas que pueden aportar claridad a sus contenidos. En la segunda, se presta atención a tres esquemas conceptuales muy frecuentes que aparecen en los estudiantes de cálculo que ingresan en la universidad. En la tercera y cuarta, se exploran las asíntotas no lineales y las funciones horizontalmente asintóticas.

Tratamiento de la asíntota en libros de bachillerato

En los textos de bachillerato se presta atención al comportamiento de las funciones cuando la variable x tiende a infinito, y cuando la función tiende a infinito al aproximarse x a un número. En el primer caso, si la gráfica de la función se aproxima a una recta, esta se denomina asíntota horizontal u oblicua. El segundo caso corresponde a la asíntota vertical.

En Escoredo y otros (2009: 287) o en Colera y Oliveira (2009: 314), la asíntota oblicua a una función $y=f(x)$ se define como la recta $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\ n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$$

En González y otros (2009: 218) o en Biosca y otros (2003: 111), se aclara que como la diferencia entre las ordenadas de la asíntota $y=mx+n$ y de f debe tender a cero entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=n$$

lo que equivale a

$$\lim_{x\to\pm\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-m\right]=n$$

Y que para que este sea un número real ha de cumplirse que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m$$

En Colera y Oliveira (2009: 314) se especifica que en una función racional, si el grado del numerador es uno más que el del denominador, entonces la asíntota oblicua es el cociente de la división entre ambos polinomios.

En Escoredo y otros (2009: 285-287) se hacen, entre otras, las siguientes aclaraciones:

— La gráfica de una función no puede cruzar la asíntota vertical, ya que si lo es, la función es discontinua en este valor.

— Una función, a lo sumo, puede tener dos asíntotas oblicuas, una cuando $x\to\infty$ y otra cuando $x\to-\infty$. Una recta puede ser asíntota oblicua cuando $x\to\infty$, y sin embargo no serlo cuando $x\to-\infty$, o viceversa. La gráfica de una función puede cortar a la asíntota oblicua.

En González y otros (2009: 318), se da un método para obtener los posibles puntos de corte con las asíntotas horizontales y oblicuas:

— Para localizar los puntos de corte hay que resolver el sistema formado por la ecuación de la función y la de la asíntota.

Observaciones

En referencia a los contenidos anteriores, hay algunos aspectos que pueden ser matizados y aclarados, y otros que pueden ser introducidos de una manera más intuitiva.

1. Una función $f(x)=c$ puede existir en c aunque $x=c$ sea asíntota vertical, y por tanto cruzarse con ella. Basta tomar $f(x)=1/x$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.
2. Los valores de m y n o bien se dan por definición, o bien se deducen de un proceso analítico. Conviene aclarar que puede existir m y no así n, como le sucede a la función $f(x)=\operatorname{sen}x+x$. Por otro lado, la fórmula para calcular el valor de m puede obtenerse mediante un argumento visual basado en la figura 2.

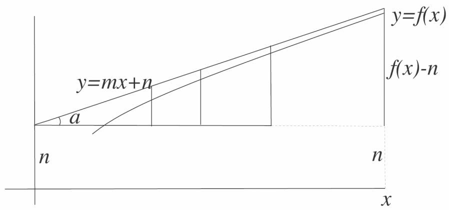

Figura 2

La pendiente de la recta $y=mx+n$ es $m=\tan a$. Por ser asíntota, la distancia vertical entre $f(x)$ y $mx+n$ tiende a cero en el infinito, por tanto

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-n}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

3. Si el dominio de una función $f(x)$ contiene a un intervalo del tipo (a,∞), entonces solo puede tener una asíntota (horizontal u oblicua) cuando $x\to\infty$, (lo mismo ocurre para $-\infty$). Esto es así porque si $r(x)$ y $s(x)$ son dos rectas distintas entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(r(x)-s(x)\right)\neq 0$$

Si además fuesen asíntotas de la función f se cumpliría:

$$\lim_{x\to\infty}\left(r(x)-s(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-s(x)\right)-$$
$$-\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-r(x)\right)=0$$

4. Sea la función racional $f(x)=N(x)/D(x)$. Si el grado de $N(x)$ coincide con el de $D(x)$, el cociente proporciona la asíntota horizontal. Si $\operatorname{grado}(N(x))=\operatorname{grado}(D(x))+1$, el cociente da la asíntota oblicua. Pero además, de la división se pueden obtener los puntos de corte entre la asíntota y la función, y conocer la posición relativa entre ambas.

Sea $f(x)=N(x)/D(x)=Q(x)+(R(x)/D(x))$, siendo $\operatorname{grado}(Q(x))\leq 1$ y $\operatorname{grado}(R(x))<\operatorname{grado}(D(x))$. Se verifica:

a) Los puntos de corte con la asíntota $y=Q(x)$ se obtienen de la ecuación $R(x)=0$.

b) $f(x)>Q(x)$ siempre que $(R(x)/D(x))>0$; $f(x)<Q(x)$ siempre que $(R(x)/D(x))<0$

Ejemplo 1

Dada la función

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+2x-3}{x^2+1}$$

hallar los puntos de corte y la posición relativa con su asíntota oblicua.

Por ser

$$f(x)=x+2+\frac{x-5}{x^2+1}$$

la asíntota oblicua $y=x+2$ corta a la función en el punto $x=5$. Además, $f(x)$ queda por encima de la asíntota en el intervalo $(5,\infty)$ y por debajo en $(-\infty,5)$ (figura 3).

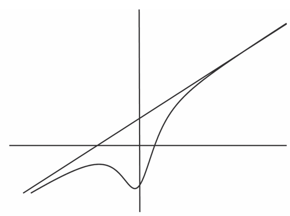

Figura 3

Una sencilla actividad, recíproca del ejemplo 1, consiste en encontrar la ecuación de una función con algunas características prefijadas en relación con las asíntotas.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de una función tal que $x=1$ sea asíntota vertical, y además $y=x-1$ sea asíntota oblicua, la corte en $x=3$, y se mantenga por encima de ella si $x>3$.

Una solución es

$$f(x)=1-x+\frac{x-3}{(x-1)^2}$$

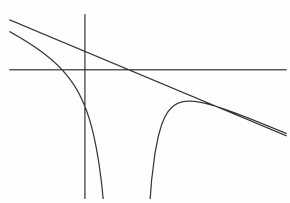

Figura 4

Esquemas conceptuales

Los estudiantes que se incorporan a la universidad tienen asimilados tres esquemas conceptuales en relación con las asíntotas. El primero es un truco para ahorrar cálculos:

1. Si hay asíntota horizontal, no hay oblicua.

Los otros dos son de tipo visual:

2 La asíntota y la gráfica de la función tienen un aspecto casi idéntico en el infinito.

3 Las rectas tangentes a la curva, a medida que se avanza hacia el infinito, tienden a la asíntota.

Estos esquemas son válidos para funciones racionales, pero no para cualquier tipo de función.

En los textos de bachillerato no suelen encontrarse ejemplos de funciones que tengan asíntota horizontal y oblicua al mismo tiempo. Las funciones racionales no las tienen. Y si se muestra una función a trozos con ambas asíntotas, los estudiantes argumentan que tales funciones no están definidas de una única manera. Esto les reafirma en su idea inicial, ahora algo matizada, de que una función con una sola fórmula no tiene los dos tipos de asíntotas.

Construir funciones, que no sean a trozos, con los dos tipos de asíntotas no es complicado. Basta partir de una función racional que tenga asíntota vertical y oblicua. La función inversa, si la tiene, es la buscada. Por ejemplo $f(x)=(x^2-4/x)$, para $x>0$, cumple esas premisas. Girando noventa grados la gráfica de f y recolocando correctamente la parte positiva y negativa de los ejes, se visualiza la gráfica de f^{-1} (figura 5). Su ecuación

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+16}$$

se obtiene intercambiando x por y, y despejando y.

Las funciones con los tres tipos de asíntotas son más rebuscadas. Las dos que se muestran a continuación se pueden encontrar en (Bumcroft y otros, 1984). No son funciones a trozos pero se comportan como si lo fueran, porque ambas incorporan un valor absoluto. Lo que se busca es tener dos partes diferenciadas para conseguir el objetivo.

Ejemplo 3

Comprobar que la función

$$f(x)=\frac{1}{x}+\left(x^2+x|x|\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

tiene los tres tipos de asíntotas.

Desarrollando el valor absoluto se obtiene:

$$f(x)=1/x,\ \text{para } x<0$$
$$f(x)=1/x+2x^2\operatorname{sen}(1/x),\ \text{para } x>0$$

Es claro que $x=0$ es asíntota vertical y que $y=0$ es asíntota horizontal por la izquierda. Para obtener la asíntota oblicua, se calcula

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=2$$

Por último:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2\left(x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-x\right)\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}2\left(x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-x\right)$$

Haciendo el cambio $t=1/x$, este límite se convierte en

$$2\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}t-t}{t^2}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene el valor cero. Por lo que $y=2x$ es la asíntota oblicua (figura 6, izquierda).

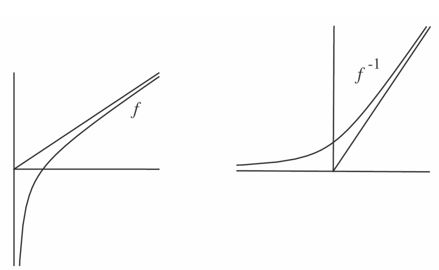

Figura 5

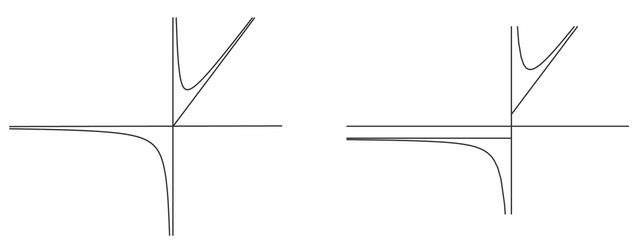
Figura 6

Ejemplo 4

Comprobar que la función

$$f(x) = \frac{1}{\arctan x} + x + \sqrt{x^2}$$

tiene los tres tipos de asíntotas.

Ya que $\sqrt{x^2} = |x|$, la función es:

$$f(x) = \frac{1}{\arctan x}, \text{ para } x < 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\arctan x} + 2x, \text{ para } x > 0$$

Teniendo en cuenta que la recta $y = \pi/2$ es asíntota horizontal por la derecha de la función arco tangente, y que la recta $y = -\pi/2$ lo es por la izquierda, se obtienen las tres asíntotas buscadas: $x = 0$, $y = -2/\pi$, $y = 2x + 2/\pi$ (figura 6, derecha).

El concepto de asíntota se basa en la aproximación entre una recta y la gráfica de una función lo que a su vez conduce a la idea del parecido entre ambas. Pero esto hay que matizarlo. Por ejemplo, las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/x^2$ para $x > 0$, tienen al eje y como asíntota vertical. Esto quiere decir que las dos funciones llegan a parecerse mucho a él. Es razonable pensar que f y g también llegan a ser muy parecidas entre sí. Entonces ¿la diferencia entre ambas será cero cuando x tienda a cero? La respuesta a esta pregunta es negativa. A medida que nos acercamos a cero la diferencia entre las dos funciones es mayor: $f(1/100) = 100$ y $g(1/100) = 10^4$, $f(1/1000) = 1000$ y $g(1/1000) = 10^6$, etc. (figura 7).

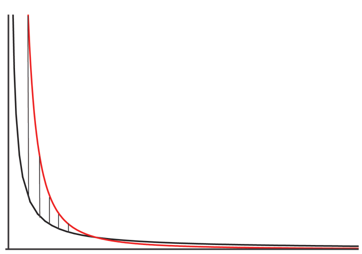

Figura 7

Tomemos ahora la función $f(x) = (1/x) \cdot \operatorname{sen} x^2$, para $x > 0$. Se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Por tanto la recta $y = 0$ es asíntota horizontal. En la figura 8 está su gráfica. ¿Podemos considerar que la curva y el eje x se parecen mucho?

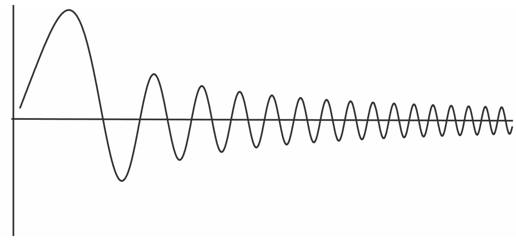

Figura 8

Hay un ejemplo que ilustra muy bien que esto del parecido entre gráficas es algo discutible. Los estudiantes no tienen dificultad en entender que dos funciones f y g se denominen asintóticas si cumplen que:

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$$

Este no es el caso de $f(x) = x^3 + x$, y $g(x) = x^3$ porque:

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = \infty$$

Pero la gráfica de ambas refleja un parecido tan grande que hace pensar en que hay algo más. Para analizarlo se calcula la distancia horizontal entre esas funciones. Para ello se toman puntos de cada gráfica que estén a la misma altura, y se mide la diferencia entre sus abscisas cuando x tiende a infinito. Al punto $A(x, x^3 + x)$ de la gráfica de la función $f(x)$ le corresponde, horizontalmente, el punto

$$B\left(\sqrt[3]{x^3 + x}, x^3 + x\right)$$

de la gráfica de $g(x)$ (figura 9).

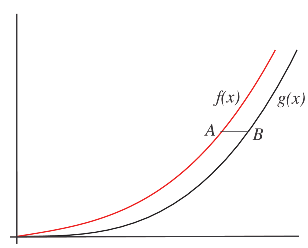

Figura 9

La distancia horizontal entre las dos funciones cuando x tiende a infinito es:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\sqrt[3]{x^3 + x}}{x} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + x^{-2}} - 1}{1/x}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene sin dificultad que el valor del límite es cero.

Este análisis da pie a considerar funciones que pueden ser asintóticas en un sentido distinto del habitual. En la última sección se desarrolla esta idea.

Cuando los profesores queremos ilustrar un concepto matemático, acudimos a imágenes que facilitan su visualización. Por ejemplo, la figura 10 es útil para motivar el concepto de asíntota.

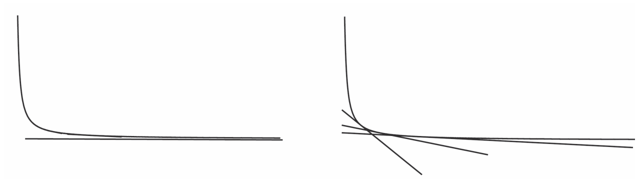

Figura 10

Esta figura sugiere que las rectas tangentes a la curva, a medida que se avanza hacia el infinito, van tendiendo a una recta que no es otra que la asíntota. Siguiendo con esta idea, la pendiente de la asíntota podría calcularse como el límite de las pendientes de las tangentes, es decir:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)$$

Todas estas intuiciones se cumplen en las funciones racionales.

Sea $f(x)=N(x)/D(x)=Q(x)+(R(x)/D(x))$, donde grado$(R(x))<$ $<$grado$(D(x))$. Se verifica:

a) Si grado$(N(x))=$grado$(D(x))$, $y=Q(x)$ es asíntota horizontal y:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

b) Si grado$(N(x))=$grado$(D(x))+1$, $y=Q(x)$ es asíntota oblicula y:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\text{coeficiente de } x \text{ de } Q(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

Sin embargo, las ideas intuitivas fallan cuando las funciones no son racionales. En Gonshor (1968) o Giblin (1972) se analizan funciones que no cumplen esas intuiciones. En los ejemplos 5, 6 y 7 se ve que la existencia de:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)$$

es independiente de la existencia de asíntota horizontal u oblicua.

En el ejemplo 8, su existencia no implica que las tangentes a la curva alcancen una posición límite.

Ejemplo 5

Sea $f(x)=(1/x)\cdot \operatorname{sen}x^2$, para $x>0$. Se cumple que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

Por tanto la recta $y=0$ es asíntota horizontal, sin embargo no existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ (figura 8).

Ejemplo 6

Sea $f(x)=(1/x)\cdot \operatorname{sen}x^2+x$, para $x>0$. Se cumple que la recta $y=x$ es asíntota oblicua ya que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=1 \text{ y } \lim_{x\to\infty}\left(g(x)-x\right)=0$$

pero no existe $\lim_{x\to\infty} g'(x)$ (figura 11).

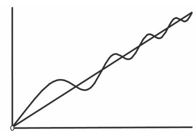

Figura 11

Ejemplo 7

La función $f(x)=\operatorname{sen}(\ln x)$, $x>0$, cuya gráfica es una versión muy estirada del seno, no tiene asíntota horizontal porque no existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, aunque $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$.

Ejemplo 8

Sea $f(x)=(1/x)\cdot \operatorname{sen}x$, para $x>0$. La recta $y=0$ es asíntota horizontal ya que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

Además:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

Para analizar si las rectas tangentes a la curva alcanzan una posición límite, tomemos la ecuación de la tangente en un punto $x=a$:

$$y-\frac{1}{a}\operatorname{sen}a=\left(\frac{-1}{a^2}\operatorname{sen}a+\frac{1}{a}\cos a\right)(x-a)$$

La intersección con el eje y se produce en el punto $(0,(2/a)\operatorname{sen}a-\cos a)$. Si a es un múltiplo impar de π, se obtiene el $(0,1)$, mientras que si a es un múltiplo par de π se obtiene el $(0,-1)$. Esto hace que las rectas tangentes presenten una oscilación que impide que alcancen una posición límite (figura 12).

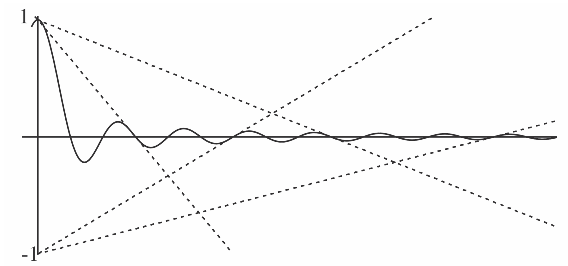

Figura 12

Asíntotas no lineales

No solo las rectas tienen la capacidad de acercarse indefinidamente a una curva. Si una función racional $f(x)=(N(x)/D(x))$ cumple que $\text{grado}(N(x))>\text{grado}(D(x))+1$, entonces el cociente $Q(x)$ tiene grado mayor que uno y verifica que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-Q\left(x\right)\right)=0$$

A $Q(x)$ se le denomina *polinomio asintótico* a $f(x)$.

Ejemplo 9

Sea

$$f\left(x\right)=\frac{x^3-x+2}{x+1}=x^2-x+\frac{2}{x+1}$$

entonces $Q(x)=x^2-x$ es una parábola asintótica a $f(x)$ (figura 13).

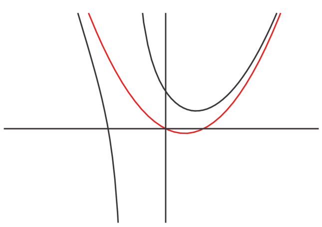

Figura 13

Si el dominio de una función $f(x)$ contiene un intervalo del tipo (a,∞), entonces solo puede tener un polinomio asintótico cuando $x\to\infty$, (lo mismo ocurre para $-\infty$). La demostración es similar a lo hecho en la observación 3, sustituyendo las rectas $r(x)$ y $s(x)$ por los polinomios correspondientes (en Dobbs (2010) se ofrece un estudio exhaustivo sobre estos polinomios).

El concepto de curva asintótica también va más allá de los polinomios. En general, si

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-h\left(x\right)\right)=0$$

se dice que $h(x)$ es una *función asintótica* a $f(x)$.

Es sencillo construir muchas funciones asintóticas a una función racional. Sea $f(x)= =(N(x)/D(x))=Q(x)+(R(x)/D(x))$, donde $\text{grado}(R(x))>\text{grado}(D(x))$. Tomemos un polinomio $g(x)$ de grado mayor o igual que uno y un número real c. El motivo de esta elección es que $c/g(x)$ tienda a cero cuando x tienda a infinito. En estas circunstancias, $h(x)=Q(x)+c/g(x)$ es asintótica a $f(x)$. Para comprobarlo se observa que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-h\left(x\right)\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-Q\left(x\right)\right)+\lim_{x\to\infty}\left(Q\left(x\right)-h\left(x\right)\right)=0$$

En la figura 14 se visualiza la función:

$$f\left(x\right)=\frac{x^3-x+2}{x+1}=x^2-x+\frac{2}{x+1}$$

junto con:

$$h(x)=x^2-x+c/x \text{ (izquierda)}$$
$$h(x)=x^2-x+c/x^2 \text{ (derecha)}$$

para $c=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

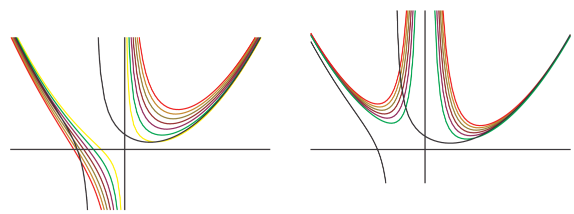

Figura 14

La construcción anterior también se puede hacer para funciones no racionales. Por ejemplo, es conocido que las rectas $y=\pm 3x/2$ son asíntotas de la hipérbola $(x^2/4)-(y^2/9)=1$. En la figura 15 se representan las funciones

$$y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}$$

junto con $h(x)=(3/2)x+(c/x^2)$ (izquierda) y $h(x)=(-3/2)x+(c/x^2)$ (derecha), para $c=\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$:

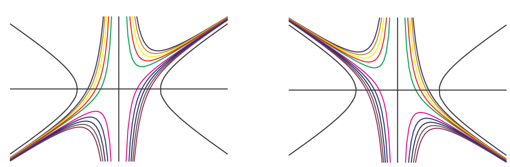

Figura 15

Funciones horizontalmente asintóticas

La exploración que se hizo en la segunda sección con las funciones $f(x)=x^3+x$ y $g(x)=x^3$ da pie a distinguir entre dos conceptos. Si la distancia vertical entre dos funciones tiende a cero si x tiende a infinito, se dice que son *verticalmente asintóticas*. Si la distancia horizontal entre dos funciones tiende a cero si x tiende a infinito, se dice que son *horizontalmente asintóticas*.

Una ligera variación en la función cambia el resultado. Por ejemplo, $f(x)=x^3+x^2$ y $g(x)=x^3$ no son verticalmente asintóticas pero tampoco son horizontalmente asintóticas. Esto se comprueba tomando los puntos de ambas funciones que se corresponden horizontalmente, (x, x^3+x^2) de $f(x)$ y

$$\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}, x^3+x^2\right)$$

de $g(x)$.

De la misma forma que antes, se verifica que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=\frac{1}{3}\neq 0$$

En Kalman (2009: 207) se ofrece un interesante estudio visual y geométrico, con el objetivo de conseguir alguna condición que permita saber, en algunos casos, si dos funciones son horizontalmente asintóticas. Es lógico pensar que para lograr lo que se busca, las funciones deben tener características similares cuando x tiende a infinito. Por eso se trabaja con dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, convexas y crecientes y tales que $f(x)>g(x)$ en algún intervalo (x_0, ∞). Dentro de este se considera el subintervalo (x_1, x_2), y se construye la figura 16.

En esta figura, R es la recta tangente a $f(x)$ en $F_2(x_2, f(x_2))$, y S es la recta tangente a $g(x)$ en $G_1(x_1, g(x_1))$. Se visualiza que la distancia horizontal h verifica:

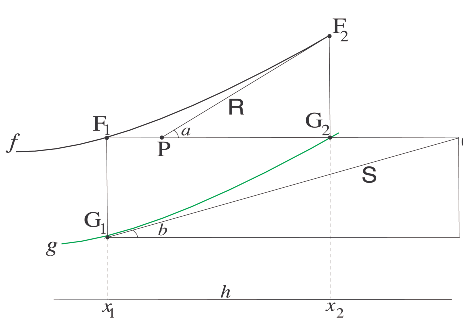

Figura 16

$$\text{dist}\left(P,G_2\right)<h<\text{dist}\left(F_1,Q\right)$$

La pendiente de R es $f'(x_2)$ y

$$\tan a=\frac{f\left(x_2\right)-g\left(x_2\right)}{\text{dist}\left(P,G_2\right)}$$

Por tanto:

$$\text{dist}\left(P,G_2\right)=\frac{f\left(x_2\right)-g\left(x_2\right)}{f'\left(x_2\right)}$$

Asimismo, la pendiente de S es $g'(x_1)$ y

$$\tan b=\frac{f\left(x_1\right)-g\left(x_1\right)}{\text{dist}\left(F_1,Q\right)}$$

Por tanto:

$$\text{dist}\left(F_1,Q\right)=\frac{f\left(x_1\right)-g\left(x_1\right)}{g'\left(x_1\right)}$$

Con lo que:

$$\frac{f\left(x_2\right)-g\left(x_2\right)}{f'\left(x_2\right)}<h<\frac{f\left(x_1\right)-g\left(x_1\right)}{g'\left(x_1\right)}$$

Es decir, la distancia horizontal entre las curvas se puede acotar utilizando las rectas tangentes, y de esta acotación se deduce el siguiente resultado:

> Si $f(x)$ y $g(x)$ son convexas y crecientes y tales que $f(x)>g(x)$ en algún intervalo (x_0, ∞), entonces:
>
> (1) $f(x)$ y $g(x)$ son horizontalmente asintóticas si
>
> $$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)-g\left(x\right)}{g'\left(x\right)}=0$$
>
> (2) $f(x)$ y $g(x)$ no son horizontalmente asintóticas si
>
> $$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)-g\left(x\right)}{f'\left(x\right)}\neq 0$$

Ejemplo 10

Por la condición (2), las funciones $f(x)=x^3+x^2$ y $g(x)=x^3$ no son horizontalmente asintóticas. Pero resulta sorprendente comprobar que sí lo son $f(x)=x^3+x^{1{,}999}$ y $g(x)=x^3$, puesto que cumplen la condición (1).

Del enunciado anterior se deduce un resultado general para funciones polinómicas:

$$f\left(x\right)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$
$$g\left(x\right)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0$$

Observemos que si a_n y b_m son positivos, ambas funciones son convexas y crecientes para x suficientemente grande. Por otro lado:

Si $n > m$, entonces $f(x) > g(x)$ para x suficientemente grande. Además, grado$(f(x) - g(x)) = n$ y grado$(f'(x)) = n-1$. Por (2), f y g no son horizontalmente asintóticas.

Si $n = m$, hay que comparar los coeficientes de ambos polinomios:

— Si $a_n > b_n$, entonces $f(x) > g(x)$ para x suficientemente grande. Además, grado$(f(x) - g(x)) = n$ y grado$(f'(x)) = n-1$. Por (2), f y g no son horizontalmente asintóticas.

— Si $a_n = b_n$, y $a_{n-1} > b_{n-1}$, entonces $f(x) > g(x)$ para x suficientemente grande. Además, grado$(f(x) - g(x)) = n-1$ y grado$(f'(x)) = n-1$. Por (2), f y g no son horizontalmente asintóticas.

Como resumen de este análisis se tiene el siguiente resultado (Kalman (2009: 209)) que permite saber, de un solo vistazo, si dos funciones polinómicas son horizontalmente asintóticas:

> Dos polinomios
> $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
> $$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$
> tales que a_n y b_m tienen el mismo signo, son horizontalmente asintóticos si y solo tienen el mismo grado n, y cumplen $a_n = b_n$ y $a_{n-1} = b_{n-1}$.

El resultado también es válido si $a_n < 0$ y $b_m < 0$ (basta reemplazar f por $-f$, y g por $-g$).

Resumen final

Al explicar los conceptos matemáticos a lo largo de la enseñanza media y el bachillerato, los profesores deben enfrentarse a dos problemas. Uno es la falta de tiempo. El otro es la falta de madurez de los estudiantes. Para tratar de solventarlos, se emplean recursos como gráficas o imágenes que sean fáciles de comprender, que sean motivadoras, no consuman demasiado tiempo e ilustren el concepto con claridad. También se dan fórmulas mecánicas con las que obtener ciertos valores, o trucos para ahorrar cálculos. Todos estos recursos hacen que los estudiantes construyan esquemas conceptuales, a veces ingenuos e incorrectos, que pueden interferir de forma negativa en la adquisición de nuevos conocimientos. Cuesta desprenderse de una idea arraigada desde hace años aunque sea errónea, por eso los profesores debemos procurar que las imágenes o recursos que ofrecemos a los estudiantes les permitan formar esquemas conceptuales sólidos donde asentar los conocimientos que adquirirán posteriormente.

Referencias bibliográficas

Biosca, Espinet, Fandos, Jimeno y Villagrá (2003), *Matemáticas II aplicadas a las ciencias sociales. Bachillerato*, Guadiel-edebé, Sevilla.

Bumcroft, R., R. Parris y G. Britton (1984), «Queries», *The College Mathematics Journal*, 15(2), 146-147.

Colera, J., y M. J. Oliveira (2009), *Bachillerato 2. Matemáticas II*, Anaya, Madrid.

Dobbs, D. (2010), «Polynomial Asymptotes», *International J. of Math. Education in Science and Technology*, 41(7), 943-950.

Escoredo, A., M. D. Gómez, J. Lorenzo, P. Machín, C. Pérez, J. del Río y D. Sánchez (2009), *Matemáticas II. Bachillerato 2*, Santillana, Barcelona.

Giblin, P. J. (1972), «What is an asymptote?», *The Mathematical Gazette*, 56(398), 274-284.

Gonshor, H. (1968), «Remarks on asymptotes», *Mathematics Magazine*, 41(4), 197-198.

González, C., J. Llorente y M. J. Ruiz (2009), *Matemáticas, 2.º Bachillerato*, Editex, Madrid.

Kalman, D. (2009), *Uncommon Mathematical Excursions. Polynomia and Related Realm,* The Mathematical Association of America.

Martínez, F. (2012), «Detección y corrección de errores de concepto» , *Suma*, n.º 69, 73-81.

Martínez, F., y J. J. Martínez (2014), «El uso de tablas de valores para la representación gráfica de funciones», *Épsilon*, 31(1), 9-20.

Tall, D., y S. Vinner (1981), «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics Education*, 12(7), 151-169.

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>